

Matematik Öğretmeni Adaylarının Türev Kavramıyla İlgili Yaptıkları Hatalar¹

Tuba Gökçek² ve Gökay Açıkıldız³

Öz: Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ve bu kavramı anlama sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya koymaktır. Bu çalışma kapsamında türev kavramının -temel bileşenlerinden- limit ve değişim oranı ile ilişkisine odaklanılacaktır. . Özel durum çalışması olan araştırma bir devlet üniversitesinde ortaöğretim fen ve matematik alanları eğitimi bölümü matematik öğretmenliği programına devam eden 45 öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Araştırma kapsamında veriler birer hafta ara ile uygulanan iki yazılı sınav ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir. Yazılı sınavlardan elde edilen verilerin analizi ile öğretmen adayları tarafından üretilen yanlış tipleri ortaya konmuştur. Öğretmen adaylarını doğru ve yanlış cevaplara götüren fikirleri ortaya çıkarmak için yürütülen klinik mülakatlar ise benzerlik ve farklılıklarına göre sınıflandırılmıştır. Yapılan çalışma öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili olarak yüzeysel anlamaya sahip olduklarını ve tanımların içeriklerini tam olarak özümsemediklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının cebirsel formda bir noktada türev kavramını yorumlamada, grafiksel ve tablo gösterimlerine oranla daha başarılı oldukları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Türev kavramı, öğretmen adayı, anlama, hatalar

DOI: 10.16949/turcomat.14647

Abstract: The aim of this study was determined as stating Mathematics candidate teachers' understanding of derivative concept and difficulties they encounter within the process of understanding the concept. Accordingly this study concerned relations between derivative and limit, derivative and rate of change while describing Mathematics candidate teachers' understanding of derivative concept. The research is a case-study. The working group was composed of 45 candidate teachers registered to Mathematics Education program in a state-owned university. The data of the study were gathered with: 2 written exams applied with a week in between and clinical interviews conducted with 6 candidate teachers. In order to state opinions directing candidate teachers to right answers and wrong answers, the data coming from clinical interviews were categorized based on their similarities. The study conducted showed that candidate teachers have superficial knowledge about derivative concept. Since candidate teachers, whose understandings were mainly restricted to definitions, they could not fully consolidate the content of definitions. As another piece of finding, the research came up with that candidate teachers were more successful the interpretation of derivate concept in algebraic form rather than graphical and table representations.

Keywords: Derivative concept, candidate teacher, understanding, mistakes

[See Extended Abstract](#)

1. Giriş

Matematik, fen bilimleri ve mühendislik alanlarında çok önemli bir yere sahip olan analiz kavramları ileri düzey matematiğin başlangıç noktasıdır (Ubuz,1999). Dolayısıyla ileri düzey matematik konularının tam anlamıyla anlaşılabilir olması açısından analiz kavramları temel teşkil etmektedir. Analiz, matematik terimleri sözlüğünde

¹ Bu makale ikinci yazarın yüksek lisans tezinin bir bölümünü oluşturmaktadır.

² Doç. Dr., Kırıkkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, tgokcek@gmail.com

³ Doktora Öğrencisi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi, gokayayildiz@hotmail.com

“fonksiyonların diferansiyeli, integrali ve bunlarla ilgili kavramlar ve uygulamalarla uğraşan matematik dalı, diferansiyel ve integral hesap” şeklinde tanımlanmaktadır (Hacısalıhoğlu ve diğerleri, 2000, s. 205). Bu haliyle türev (daha genel haliyle diferansiyel hesap) ve integral kavramları analiz için temel teşkil etmektedir.

Çalışılması ve anlaşılması üst düzey düşünme becerileri gerektiren analiz konuları, Türkiye’de olduğu gibi birçok ülkede de ortaöğretim matematik programlarının önemli bir kısmını oluşturmaktadır (Bingölbalı, 2008; MEB, 2011). Üniversite giriş sınavlarında özellikle fen bilimleri ve matematik ile ilgili alanlarda tercih yapacak öğrenciler için analiz konu ve kavramları anahtar niteliktedir. Ayrıca başta matematik olmak üzere fen bilimleri ve mühendislik alanlarında öğrenim görecektik üniversite öğrencileri için de önemli bir yere sahiptir. Yüksek matematik konuları için olduğu kadar, diğer disiplinler için de temel nitelikte analiz kavramlarından biri olan türev bu çalışmanın odağında yer almaktadır.

Öğrencilerin belli bir kavramla ilgili olarak sahip olduğu anlamları, hata ve kavram yanlışlarını ortaya koymak önemlidir. Öğrencilerin yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavram yanlışları sadece o konuyu öğrenmelerinde engel oluşturmaz, onların sonraki öğrenmelerini de etkiler (Baki, 2008). Öğrencilerin matematikte herhangi bir kavram özel olarak türev kavramı ile ilgili hata ve kavram yanlışlarından haberdar olmak, öğretmenlerin öğrencilerinin muhtemel eksikliklerini dikkate alarak bir öğretim ortamı hazırlaması açısından da önemlidir. Özellikle matematik gibi ardışık ve yığılmalı bir bilim dalında herhangi bir kavram onun önkoşulu olan kavramlar kazandırılmadan verilmemelidir. Bu açıdan ileri matematik konuları için temel teşkil eden analiz kavramlarının öğrenciler tarafından öğrenilmiş olması önemlidir. Literatürde öğrencilerin (ortaöğretim veya üniversite) türev kavramı ile ilgili anlamlarına odaklanan çalışmalarda yürütülmüştür (Amit & Vinner, 1990; Aspinwall & Miller 2001; Bezuidenhout, 1998; Duru, 2006; Gür ve Barak, 2007; Hacıömeroğlu, 2007; Hauger, 2000; Orton, 1983; Park, 2011; Pinzka 1999; Pustejovsky, 1999; Ubuz, 2001; White & Mitchelmore, 1996). Yapılan bu çalışmalar öğrencilerin türev kavramı ile ilgili birçok hata ve kavram yanlışısına sahip olduklarını ortaya koymuştur.

Öğrencilerin belli bir matematiksel konuda öğrenme eksikliklerinin farkında olup, bunları düzeltecek yönde tedbirler alma görevi öğretmene aittir. Öğretmenin bu görevi tam olarak yerine getirebilmesindeki öncelikli faktörlerden biri öğretmenin bilgisidir (Shulman, 1986; Fennema & Franke, 1992). Alan bilgisi etkili öğrenme-öğretme ortamı hazırlamak açısından tek başına yeterli olmamakla birlikte, böyle bir ortamın hazırlanması için gereken temel bileşenlerden biridir (Bütün, 2012; Çelik ve Baki, 2007; Fennema & Franke, 1992; Lloyd & Wilson, 1998; Stein, Baxter & Leinhardt, 1990; Van Dooren, Verschaffel & Onghena, 2002). Bu bağlamda bu çalışmada geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili alan bilgisine odaklanılacaktır.

Öğretmen veya öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamlarını ortaya koymaya çalışan araştırmalar, öğrenciler üzerinde yürütülenlere kıyasla çok daha azdır (Akkaya, 2009; Doğan, Sulak ve Cihangir, 2002; İşleyen ve Akgün, 2010; Park, 2011). Doğan, Sulak ve Cihangir (2002) çalışmalarını matematik öğretmenliği programına yeni kayıt

yaptırması ilköğretim matematik öğretmeni adayları üzerinde yürütmüş ve onların lisedeki öğrenmelerini değerlendirmişlerdir. Akkaya (2009) çalışmasında Teknolojik Pedagojik Alan Bilgisi “öğrenci zorlukları” bileşeninde öğretmen adaylarının gelişimlerini incelemiştir. İşleyen ve Akgün (2010) ise matematik öğretmeni adaylarının türev ve diferansiyel kavramlarıyla ilgili anlama seviyeleri ve bu kavramlar arasındaki farklılıkları incelemiştir. Park (2011) araştırmasında analiz dersi veren öğretim elemanları ile öğrencilerinin, türev kavramını ve fonksiyon- türev fonksiyonu-bir noktadaki türev kavramları arasındaki ilişkiyi nasıl tanımladıklarını araştırmıştır. Yürütülen bu çalışmada öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarına derinlemesine odaklanılması hedeflenmiştir.

1.1. Araştırmanın Problemi

Türev kavramı cebirsel olarak bağımsız değişkene verilen artmanın fonksiyonda meydana getireceği değişikliğin, değişkendeki artmaya oranının limit durumu olarak tanımlanmaktadır (Balci, 2000). Tanım dikkatlice incelendiğinde bu kavramın bağımlı değişkendeki değişimin bağımsız değişkendeki değişime oranı ve limit kavramı yardımı ile tanımlandığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla fonksiyon, değişim oranı ve limit kavramı türev kavramının anlaşılır olması açısından temel teşkil etmektedir (Zandieh, 2000; Bingölbali, 2008). Yapılan araştırmalar öğrencilerin limit kavramını anlamada ve anlamlaştırma zorlandıklarını ve kavram yanılığlara sahip olduklarını göstermektedir (Bingölbali, 2008). Buradan hareketle öğrencilerin türev kavramını da anlamlandırma da güçlüklerle sahip olabileceği çıkarımını yapmak zor olmayacaktır.

Bir fonksiyona belli bir noktadaki türevi, aynı zamanda o noktadaki anlık değişim oranını vermektedir. Ancak yapılan çalışmalar öğrencilerin bu fikri anlamada ciddi zorluklara sahip olduğunu ortaya koymaktadır. Orton (1983) türev ve değişim oranı kavramları arasındaki ilişkiyi incelediği çalışmada; öğrencilerin bir fonksiyon üzerindeki bir noktada değişim oranı fikrini ve fonksiyon üzerindeki her noktanın farklı bir değişim oranına sahip olabileceği fikrini anlamakta güçlük çektiklerini bulmuştur. Yapılan araştırmalar öğrencilerin değişim oranı kavramı ile ilgili zorluklarını da ortaya koymakta ve öğrencilerin türevin bir değişim oranı olduğunun farkında olmadıklarını göstermektedir (Bezuidenhout, 1998; Hauger, 2000; White ve Mitchelmore, 1996).

Sonuç olarak türev kavramı bir bütün olarak limit ve değişim oranı kavramlarını da içermektedir. Yani, türevin tam anlamıyla anlaşılabilir olması tüm bu kavramlar ve birbiri ile ilişkilerinin anlaşılabilir olmasına bağlıdır. Bu yüzden türev kavramına odaklanan bu çalışmada türevin limit ve değişim oranı ilişkisi bir bütün olarak ele alınacaktır.

Öğretmenin bilgisinin sınıf içerisindeki eğitim-öğretim faaliyetlerinin planlanması, uygulanması, değerlendirilmesi sürecinde aktif rol oynadığı bilinen bir gerçektir. Bu anlamda öğretimin niteliği belirleyen, dolayısıyla öğrencinin öğrenmesi üzerindeki en önemli etkenlerden biri öğretmenin bilgisidir (Çelik, 2007; Fennema & Franke, 1992;

Shulman, 1986). Bu çalışmada geleceğin öğretmeni olan öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili alan bilgisine odaklanılacaktır.

Bu bağlamda çalışmanın ana problemi; “matematik öğretmeni adayları türev kavramını nasıl anlamakta ve ne tür hatalar yapmaktadırlar?” şeklinde belirlenmiştir. Bu ana problem doğrultusunda alt problemler;

i) Öğretmen adaylarının türev-limit arasındaki ilişkiye yönelik yaptıkları hatalar nelerdir?

ii) Öğretmen adaylarının türev-değişim oranı arasındaki ilişkiye yönelik karşılaştıkları hatalar nelerdir?

2. Yöntem

Öğretmen adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını derinlemesine ortaya koymayı amaçlayan bu araştırmanın yöntemi özel durum çalışmasıdır. Bu çalışma kapsamında matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamaları iki boyutta ele alınmıştır. Çalışmanın asil odağı öğretmen adaylarının bu kavramla ilgili sorulara ürettikleri doğru ya da yanlış cevaplar değil, onları bu sonuçlara götüren süreçtir. Cevaba ulaşma sürecinde ne yaptıkları, nasıl yaptıkları ve neden yaptıkları hakkında fikir sahibi olmak ancak sürece yoğunlaşan bir özel durum çalışması yöntemi ile ortaya çıkarılabilir (Çepni, 2009; Ekiz, 2003).

2.1. Çalışma Grubu

Bu çalışma Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği programında 4. sınıfa devam eden 45 öğretmen adayı (24 kız ve 21 erkek) ile yürütülmüştür.

2.2. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada veriler, 2 yazılı sınav ve 6 öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlardan elde edilmiştir.

2.2.1. Yazılı Sınavlar

Araştırmanın problemleri doğrultusunda türev ve limit, türev ve değişim oranı ilişkisini ortaya koymaya yönelik yazılı sınav soruları oluştururken, literatürde ilgili çalışmalardan (Goert, 2007; Kendal & Stacey, 2003) ve analiz kitaplarından (Bittinger, Ellenbogen, & Surgent, 2012; Thomas, Hass, & Giordano, 2005) yararlanılmıştır. Uzman görüşleri doğrultusunda şekillenen yazılı sınavlar pilot çalışma kapsamında ilköğretim matematik öğretmenliği programında 21, 4. sınıf öğretmen adayına uygulanmıştır. Pilot uygulama soruların anlaşılabilirliğinin ortaya konması, dolayısıyla soruların son şeklini alması için önemlidir. Ayrıca zamanlama ve veri analizi için bir çatı oluşturma açısından araştırmacılara yardımcı olmuştur. Soru sayısının fazla olması ve soruların odağının farklılaşmasından dolayı sorular iki farklı yazılı sınav formatında tasarlanmıştır. 1. yazılı sınav türev ve limit ilişkisine yönelik 5 sorudan; 2. yazılı sınav ise türev ve değişim oranı

ilişkinine yönelik 3 sorudan oluşmaktadır. İki sınav birlikte yaklaşık 70 dakikalık bir sürede öğretmen adaylarına uygulanmıştır.

2.2.2. Klinik Mülakatlar

Çalışma kapsamında 6 öğretmen adayı ile klinik mülakatlar yapılmıştır. Bu öğretmen adaylarının belirlenmesindeki temel kriter yazılı sınavlar olmuştur. Grubun genelini temsil etmesi açısından yazılı sınavdan düşük, orta seviyede ve yüksek puan alan öğretmen adaylarından ikişer kişi seçilmiş, her bir öğretmen adayı ile yaklaşık 60-70 dakikalık bir sürede görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarına sırasıyla yazılı sınavlarda verdikleri cevaplar gösterilmiş, bu cevabı nasıl elde ettiklerini açıklamaları istenmiştir. Bu sırada araştırmacı öğretmen adayına açıklamaları paralelinde “Bunu neden yaptın?”, “Nasıl düşündün?” gibi sorular yönelmiştir. Yazılı sınavlardaki her bir soru için bu süreç tekrarlanmıştır. Her bir görüşme dijital olarak kayda alınmış, daha sonra bilgisayarda yazıya dökülmüştür.

2.3. Verilerin Analizi

Yazılı sınavlardan elde edilen veriler öncelikle “tam doğru yanıt”, “kısmen doğru yanıt”, “yanlış yanıt” ve “yanıt yok” şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya ilişkin ayrıntılar aşağıda yer almaktadır.

Tam Doğru Yanıt: Geçerli cevabın tüm bileşenlerini içeren cevaplar.

Kısmen Doğru Yanıt: Geçerli yanıtın bileşenlerinden en az birini içeren, hepsini içermeyen cevaplar.

Yanlış Yanıt: Konu ile ilgili ya da ilgisiz yanlış bilgi içeren, kavram yanlışlığı olduğunu gösteren veya mantıksız cevaplar.

Yanıt Yok: Soruları boş bırakma.

Öğretmen adaylarının her bir soruya verdikleri cevaplar yukarıdaki kategori tanımları dikkate alınarak sınıflandırılmıştır. Her bir kategorideki cevaplar frekans ve yüzdelerle ifade edilmiş yanlış yanıtlarda kendi içinde gruplandırılarak tekrar analiz edilmiştir.

Öğrencilerin cevapları “Tam Doğru Yanıt” için 2, “Kısmen Doğru Yanıt” için 1, “Yanlış Yanıt” ve “Yanıt Yok” için 0 olarak puanlanmıştır. Bu tür bir puanlama mülakat yapılacak öğretmen adaylarının seçimi amacıyla kullanılmıştır. Yazılı sınavlara ait analizin ikinci kısmında sadece öğretmen adaylarının yanlış cevaplarına odaklanılmıştır. Öğretmen adayları tarafından verilen yanlış cevaplar kendi içinde benzerlik ve farklılıklarına göre gruplandırılmıştır. Bu şekilde öğretmen adayları tarafından üretilen yanlış tipleri ortaya konmuştur. Türev-limit ilişkine yönelik sorulan sorulara verilen yanlış tipleri sırasıyla L1, L2, L3, L4 ve L5 olarak, türev-değişim oranına yönelik sorulan sorulara verilen yanlış tipleri de D1, D2 ve D3 olarak kodlanmıştır.

Ses kayıt cihazı kullanılarak tamamlanan klinik mülakatlar bilgisayar ortamında yazıya dökülmüş ve her bir öğretmen adayı ile yapılan görüşme notları dikkatli bir şekilde birkaç kez okunmuştur. Klinik mülakatları yapmadaki amaç öğretmen adaylarının doğru ya da yanlış cevaplarının altında yatan sebepler olduğundan, okuma işlemi bu soruya cevap verebilecek fikirleri ortaya koymak amacıyla yapılmıştır.

3. Bulgular

3.1.Öğretmen Adaylarının Türev-Limit İlişkisine Yönelik Hataları

Bu bölümde ilk olarak öğretmen adaylarının türev-limit ilişkisine yönelik 5 soruya verdikleri cevaplara ait doğru-yanlış yüzdeler sunulacaktır (Bkz. Tablo 1). Ardından her bir soruya ilişkin öğretmen adaylarının verdikleri yanlış cevaplar detaylandırılacaktır.

Tablo 1. Türev limit ilişkisine yönelik sorulara öğretmen adaylarının verdikleri cevapların yüzdeleri

Sorular	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Yanıt Yok
1.	24	16	49	11
2.	0	87	13	0
3.	82	18	0	0
4.	2	7	84	7
5.	9	11	78	2

Yukarıdaki tabloda öğretmen adaylarının türev-limit ilişkisine yönelik hazırlanan yazılı sınava verdikleri cevapların sorulara göre dağılımı yüzdece verilmiştir. Öğretmen adaylarının hiç biri üçüncü soruya yanlış cevap vermemiştir. İki ve üçüncü soruların dışındaki sorulardaki yanlış yüzdelerinin çok yüksek olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarının sorulara vermiş oldukları yanlış cevaplar her bir soru için ayrı ayrı sınıflandırılarak detaylı bir şekilde sunulacaktır. Aşağıdaki tabloda birinci için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 2. Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
L1.1.tip	Türevi fonksiyonun bir noktadaki eğimi olarak yorumlama	“Bir eğrinin üzerindeki herhangi bir noktadaki eğimine, o noktadaki türevi denir.”	10
L1.2.tip	Türevi tek boyutlu değişim olarak yorumlama	“Verilen bir fonksiyonun istenen noktadaki değişimidir.” “Bir fonksiyonun herhangi bir aralıkta anlık değişimidir.” “Çok küçük bir aralıkta x in değişme hızıdır.”	6

Tablo 2'nin devamı

L1.3.tip	Türevi bir fonksiyonun limitinin var olması ya da sürekli olması olarak yorumlama	<p>“Bir fonksiyonun verilen noktadaki limitinin fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olmasına türev denir.”</p> <p>“Bir noktada oluşan eğrinin sağdan ve soldan limitlerinin eşit olması durumunda o fonksiyonun o noktada türevi olduğundan bahsedebiliriz.”</p>	3
Diğer		<p>“Analitik düzlemde bir eğrinin teğeti şeklinde algılayabiliriz.”</p> <p>“Türev; bir noktanın bir doğruya göre eğimi anlamına gelir.”</p> <p>“Türev; fonksiyonun herhangi bir anındaki yaklaşımıdır.”</p>	3

Tablo 2'ye bakıldığında çoğu öğretmen adayının türevi “fonksiyonun bir noktadaki teğetinin eğimi” yerine “fonksiyonun bir noktadaki eğimi” olarak ifade ederek yanlış bir tanımlama yaptığı anlaşılmaktadır. İkinci tip yanlış cevaplarda öğretmen adayları bir noktadaki türevi sadece bağımlı ya da bağımsız değişkendeki değişim olarak düşünmüştür. Üçüncü tip yanlış cevaplarda ise bir fonksiyonun bir noktada sürekliliği veya limitinin var olması durumu doğrudan türev olarak ifade edilmiştir.

Türevin ne olduğu sorusuna “bir noktada fonksiyonun eğimi” şeklinde cevap veren 27Ö kodlu öğretmen adayıyla yapılan görüşme kaydı aşağıdadır.

- A : *Bir fonksiyonun eğiminden bahsedebilir misin?*
 27Ö : *Fonksiyon eğimi derken doğru kullanılacak*
 A : *Fonksiyonun eğimiyle kastettiğin neydi?*
 27Ö : *Tam olarak, o noktada çizilen doğrunun eğimi*

Buradan hareketle 27Ö kodlu öğretmen adayının fonksiyonun bir noktada eğimi ile o noktadan grafiğe çizilen teğetin eğimini ifade etmek istediği düşünülebilir. Ancak hiç “teğet doğrusu” ifadesini kullanmamıştır. Bu, matematiksel dili kullanmadaki zayıflığın bir göstergesi olabileceği gibi temelde konuyla ilgili bilgi eksikliğinin bir göstergesidir. 17Ö kodlu öğretmen adayının da kendisiyle yapılan mülakat sonucunda benzer bir hataya düştüğü görülmüştür.

Türevin “fonksiyonun bir noktadaki limit değeri” olarak tanımlayan 25Ö kodlu öğretmen adayıyla araştırmacı arasındaki diyaloga aşağıda yer verilmiştir.

- A : *Fonksiyonun limitinin aldığı değer o noktada türev midir?*
 25Ö : *Tam limit değeri değil de limitle ilişkilendirildiği için*
 A : *Nasıl bir ilişkilendirme?*

- 25Ö :Sonuçta türevin tanımı $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ olduğundan buradan ilişkilendirebiliriz.
- A :Buradaki limitle fonksiyonun o noktadaki limiti aynı şey midir?
- 25Ö :Yok, hayır

25Ö kodlu öğretmen adayıyla yapılan görüşmeden öğretmen adayının türev ile limit arasında bir ilişki olduğunun farkında olmakla birlikte bu ilişkinin niteliği hakkında herhangi bir fikri olmadığı anlaşılmaktadır.

Türevi “çok küçük bir aralıkta x in değişme hızıdır” olarak tanımlayan 24Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşığıda verilmiştir.

- A :Ne demek x in çok küçük bir aralıkta değişme hızıdır, biraz açar mısın?
- 24Ö :Çok küçük bir aralıkta çok yavaş mı artıyor yoksa çok hızlı mı artıyor ya da sabit bir hızla mı artıyor. Sabit olarak artıyorsa türevi sıfırdır diye biliyoruz. Hızla artıyorsa türevi de pozitif yönde artıyordur azalıyorsa negatif yönde artıyordur demektir.

Öğretmen adayı sadece bağımsız değişkendeki değişim üzerinden türev kavramını açıklamaya çalışmış ve bağımlı değişken y deki değişimi göz ardı etmiştir. Açıklamasını desteklemesi istendiğinde fonksiyonun artışıyla veya azalmasıyla türevini eşdeğer tutacak bir açıklama yaparak konuyla ilgili bilgilerinin eksik olduğunu göstermiştir. Aşağıdaki tabloda ikinci soru için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 3. Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
L2.1.Tip	Fonksiyonun a noktasındaki türevini veren ifade yerine türev fonksiyonunu yazma	$I. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ yanlıştır. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ olmalıdır.	3
L2.2.Tip	Türevin cebirsel gösterimine ilişkin kavramsal hata ve uygun olmayan limit hesabı	$III. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	1

Tablo 3'ün devamı

L2.3.Tip	Eşdeğer cebirsel yapıları tanımlamada başarısızlık	Türevin tanımından hareketle dönüşüm yapılarak I seçeneğinin doğru olduğu ifade edilmesine rağmen II nolu seçenek olarak işaretlenmemiştir.	1
L2.4.Tip	Sadece açıklama yapılarak I ve III seçenekleri işaretlenmiştir.	“Yalnızca I ve III fonksiyonun a noktasındaki türevini verir bize.”	1

Tablo 3'e bakıldığında üç öğretmen adayının a noktasındaki türevi veren ifadenin yerine türev fonksiyonunu veren ifadeyi doğru seçenek olarak belirttiği anlaşılmaktadır. Bu durum öğretmen adaylarının türev fonksiyonu ile fonksiyonun belli bir noktadaki türevi kavramlarını birbirinden ayırt edemediğinin bir göstergesi olabilir. Bazı öğretmen adaylarının f fonksiyonunun a noktasındaki türevi olarak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ifadesini yazması ise türev fonksiyonu ve fonksiyonun belli bir noktadaki türevini uygun olmayan bir şekilde ilişkilendirdiklerinin bir göstergesi olabilir.

Öğretmen adaylarından 3. soruda kuralı verilen bir fonksiyonun belli bir noktada türevini, türevin tanımından yararlanarak hesaplamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu soruyu doğru cevaplamış bir kısmı da türev formüllerini kullanarak kısmen soruyu doğru cevaplamıştır. Aşağıdaki tabloda dördüncü soru için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 4. Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
L4.1.Tip	$x=5$ noktasının sağından veya solundan tek bir nokta kullanarak bulunduğu ortalama değişim oranını türev olarak yorumlama	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(5,001) - f(5,000)}{0,001}$ $= \frac{15,508 - 15,500}{0,001} = \frac{0,008}{0,001} = 8$	13
L4.2.Tip	$x=5$ noktası ile sağından veya solundan seçilen bir noktadan geçen doğrunun eğimi 5 noktasındaki türev olarak yorumlama	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15,500 - 15,470}{5,000 - 4,997} = \frac{0,03}{0,003} = 10$	10

Tablo 4'ün devamı

L4.3.Tip	Fonksiyonun $x=5$ noktasındaki limitini türev olarak yorumlama	$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 15,500$	5
		$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 15,500$	
		$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 15,500$	
L4.4.Tip	Sadece fonksiyonun belli bir noktadaki türevi formülünde ($5, 15.500$) noktasını koyma	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \frac{f(x) - 15,500}{x - 5}$	4
L4.5.Tip	Sadece tablodaki sayısal verileri grafiğe dönüştürme	Tablodaki nümerik verilerden yararlanarak sadece bir grafik çizilmiştir.	4
	Diğer	Üstteki sınıflardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	2

Tablo 4'e bakıldığında 1. tipte yanlış yapan öğretmen adaylarının ortalama değişim oranında hareketle anlık değişim oranını limit yardımı ile bulma fikrinin anlamlaştırılmadıkları söylenebilir. Türev tanımı ile ilgili anlamaları yüzeyseldir. 2. tipte yanlış yapan öğretmen adaylarının türev teğet ilişkisini uygun olmayan bir şekilde yorumladıkları söylenebilir. Bu tip yanlış yapan öğretmen adayları eğriye çizilen kirişin eğiminden hareketle limit durumunda teğetin eğimini elde etme fikrini kavramsallaştıramamıştır. 3. tipte yanlış yapan öğretmen adaylarının türev kavramı limit kavramı ile karıştırdığı anlaşılmaktadır. 4. tipte yanlış yapan öğretmen adayları sadece türevin cebirsel temsilinde a gördükleri yerine 5 değerini yazmışlardır. Bu ise söz konusu cebirsel temsilin ne anlama geldiğini kavrayamadıklarının bir göstergesi olabilir. 5. tipte yanlış yapan öğretmen adayları sadece verilen sayısal değerleri grafiğe dönüştürmüşlerdir.

Tablo 4'de verilen değerlerden hareketle $x=5$ noktasında f fonksiyonunun türevine ilişkin soruda yanlış cevap veren öğretmen adaylarının yaklaşımı genelde birbirine benzer olmuştur. Aşağıda 1. Tip yanlış yapan 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakata yer verilmiştir.

- A :*Bir aralık seçmişsin 5 noktasının sol tarafından*
 2Ö :*O iki noktada değişim olarak türevine baktım.*
 A :*O noktalara arasındaki değişim oranını 10 olarak hesaplamışsın, bunun 5 noktasındaki türevi verdiğini söyleyebilir misin tam olarak?*
 2Ö :*Bir noktadan bakmak yeterli olmuyor, sağdan ve soldan türevlerine bakıyorduk... Birde grafik çizerken veya grafiği verilen sorularda daha başarılı olduğumu fark ettim eğer grafik çizersem kafamda mutlaka bir şeyler oluşuyor.*

Buradan hareketle 2Ö kodlu öğretmen adayı sorunun çözümü için atması gereken adımları biliyor olmasına rağmen kendisini çözüme götürecek işlemleri yapmakta yetersiz kalmıştır. Benzer bir açıklamayı 27Ö kodlu öğretmen adayı da yapmıştır.

2. tip yanlış yapan 24Ö kodlu öğretmen adayı tek bir aralık yerine sağdan ve soldan birer aralık seçerek soruya cevap vermeyi tercih etmiştir. Aşağıda bu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

24Ö :*Sağdan yaklaştım, soldan yaklaştım çok küçük bir aralıkta, hani dedim ortalamasıdır diye düşündüm*

A :*Bu yaklaşımlar bize o noktada türevi mi verecek?*

24Ö :*Yani, birbirine eşit ise türevi veriyor zaten. Tanıma göre eşit olması lazım eğer eşitse türevi veriyor. Gerçi burada eşit değil ama birbirine çok yakın, grafiği görmek lazım diye düşündüm ama*

A :*Sağdan ve soldan birer noktadan baktın, neden diğer noktalardan bakmadın?*

24Ö :*Aynı uzaklıktaki noktaları seçtim, mesela şurada 4,997'ye baktığımda diğer tarafta 5,003'e bakacak bir değer yoktu. Olsaydı belki onlar da denenebilirdi. Mesela şurada, 5,001 ama 4,999 olmadığı için eşit uzaklıkta bakamadım*

A :*Bulduğun sonuçların neden ortalamasını aldın?*

24Ö :*O değerlere çok yaklaşıktır. En azından şu değerlere yakındır. 9 ve 7,5 değeridir ama onlar arasında bir değerdir.*

24Ö kodlu öğretmen adayı 5 noktasına ne kadar yakın bir aralıktan yaklaşımı incelerse sonucun o kadar doğru olduğunu düşündüğü için sağ ve soldan birer nokta seçmiştir. Ancak yaklaşımların hangi yönde olduğunu anlamak ve buna göre yorum yapmak için sırasıyla bütün aralıkları incelemesi gerekirdi. Buna ek olarak tablodaki nümerik değerlerden hareketle elde ettiği değişim oranlarını limit durumunda inceleyerek bulduğu sonuçları türevle ilişkilendirmeye çalışmış olması türevle diğer kavramlar arasındaki ilişkiyi yanlış şekilde değerlendirdiğinin bir göstergesi olarak gözükmektedir.

Verilen bir grafikte hangi noktalarda türevin olup olmadığının istendiği beşinci soruda öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu soruyu yanlış olarak cevaplamıştır. Aşağıdaki tabloda beşinci soru için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 5. Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
L5.1.Tip	Bir fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olduğunu düşünme	“a, b ve d noktalarında fonksiyon süreksiz olduğundan bu noktalarda türevi yoktur. c ve e noktalarında fonksiyon sürekli olduğundan türevi vardır.” “a ve d noktalarında sürekli olmadığından türev yoktur.”	20
L5.2.Tip	Bir fonksiyonun limitinin olduğu noktalar da türevinin de olduğu düşünme	“a, b, c ve e noktalarında fonksiyonun limiti vardır bu yüzden türevi de vardır. d noktasında sağ ve sol limitler birbirine eşit değildir yani limiti yoktur. Bu yüzden türev de yoktur.” “a ve d noktalarında limiti olmadığından türevi yoktur.”	10
L5.3.Tip	Bir fonksiyonun limitinin olduğu noktalarda türevinin de olduğu düşünülmüş ve “c” noktası kırılma noktası ya da sivri uç olarak yorumlandığı için türev olmadığı ifade edilmiştir.	“a, b ve e noktalarında türev vardır. c ve d noktalarında türev yoktur.”	5

Tablo 5’deki cevaplara bakıldığında yanlış cevap veren öğretmen adaylarının çoğu bir fonksiyonun sürekli olduğu her noktada türevli olduğunu düşünmüşlerdir. 1.tipteki yanlış cevaplarda her ne kadar a, b, d ve e noktaları için doğru cevap verilmiş olsa da c noktası sürekli olduğu için türevlenebilir olarak ifade edilmiştir. Öğretmen adayları fonksiyonun sürekli oluğu her noktada türevli olduğunu düşünmüşlerdir.

2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise bir fonksiyonun verilen bir noktada türevinin olması için o noktada sadece limiti olması gerektiğini düşünerek fonksiyonun yalnızca limitinin olmadığı d noktasında türevi olmadığını düşünmüşlerdir. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise verilen noktaların hepsi yerine sadece birkaç tanesi için çözüm yapmışlardır. 4.tipte yapılan yanlışlara baktığımızda öğretmen adaylarının a, b ve noktalarını limitleri olduğu için türevlenebilir olarak ifade etmiş, c noktasında limit olmasında karşın kırılma noktası ya da sivri uç olarak ifade edilerek bu noktada türevinin olmadığını düşünmüşlerdir. Yine, fonksiyonun d noktasında limiti olmadığı için bu noktada türevli olmadığı ifade edilmiştir. 5.tipteki yanlış cevaplarda öğretmen adayları süreklilikten hareketle fonksiyonun istenilen noktada türevi olup olmadığına karar vermişlerdir. Ancak süreklilik tanımını yanlış kullanmışlardır. Dördüncü soruya yanıt vermeyen bir öğretmen adayı bulunmaktadır.

Grafiği verilen bir fonksiyonun türevli/türevsiz olduğu noktaların istendiği soruya 3. Tip yanlış cevap veren 24Ö kodlu öğretmen adayı ile gerçekleştirilen mülakat kaydı aşağıda yer almaktadır.

A : “a” noktası için ne dedin?

27Ö : “a” noktası için türevi vardır dedim

A : Neden?

27Ö : Çünkü sonuçta şu boşluktaki değere yaklaşıyor. Belki fonksiyonun değeri o değildir ama oradaki eğim sabittir, eğim aynı derecede değişiyor.

A : “b” noktasında?

27Ö : “b” noktasında da aynı şekilde dediğim gibi “a” ile aynı, sadece değeri o noktada farklı, yine türevi vardır diyebiliriz.

A : Peki, “c” noktasında limiti olmasına rağmen neden yoktur dedin?

27Ö : Mesela şöyle söyleyim, c’den d’ye sabit azalıyor, c’den b’ye doğru sabit azalmıyor biraz daha kavisli azalıyor. Türevleri eşit çıkmaz zaten, eğimle alakalandığını biliyoruz birazda, hani eşit çıkmayacak

A : “d” noktası için?

27Ö : Sağdan ve soldan limitleri eşit değil

A : “e” noktasına bakalım

27Ö : “e” noktası zaten “a”, “b” gibi bir nokta, değer de var o noktada türevlenebilir.

27Ö kodlu öğretmen adayı türevin tanımındaki limit durumunu göz önünde bulundurarak türevi tamamıyla limitle ilişkilendirmiştir ve böylece öğretmen adayı bir fonksiyonun tanımsız olduğu noktalarda da teğet çizilebileceği düşüncesine kapılmıştır. Bu durum öğretmen adayının türev kavramını sadece limitle ilişkilendirmesinden kaynaklanmaktadır. Türevin teğet ve eğim gibi kavramlarla ilişkisini sadece tanım düzeyinde bilmek ya da derinlemesine bir bilgiye sahip olmamak öğretmen adayının soruyu yorumlayamamasına neden olmuştur.

Benzer bir şekilde 27Ö, 25Ö ve 2Ö kodlu öğretmen adayı da bir fonksiyonun limitinin var olduğu bir noktada türevli olabileceğini düşünerek soruya cevap vermişlerdir. Yalnız 2Ö kodlu öğretmen adayı “c” noktası içinde fonksiyonun türevli olduğunu belirtmiştir.

3.2. Öğretmen Adaylarının Türev-Değişim Oranına Yönelik Hataları

Bu bölümde ilk olarak öğretmen adaylarının türev-limit ilişkisine yönelik 5 soruya verdikleri cevaplara ait doğru-yanlış yüzdeler sunulacaktır (Bkz. Tablo 6). Ardından her bir soruya ilişkin öğretmen adaylarının verdikleri yanlış cevaplar detaylandırılacaktır.

Tablo 6. Türev değişim oranı ilişkisine yönelik sorulara öğretmen adaylarının verdikleri cevapların yüzdeleri

Sorular	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Yanıt Yok	
1.	a	24	16	56	4
	b	67	2	18	13
2.	a	57	9	27	7
	b	0	0	53	47
3.	a	36	42	11	11
	b	22	33	18	17

Yukarıdaki tabloda öğretmen adaylarının türev-limit ilişkisine yönelik hazırlanan yazılı sınava verdikleri cevapların sorulara göre dağılımı yüzdece verilmiştir. Öğretmen adaylarının birinci sorunun a ve ikinci sorunun b şikkına verdikleri cevapların yanlış yüzdesi dikkat çekmektedir. Üçüncü soruda ise öğretmene adaylarının verdiği cevapların doğru ve kısmen doğru yüzdeleri yanlış yüzdelerinden daha yüksektir. Aşağıdaki tabloda birinci sorunun a şikkı için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 7. Öğretmen adaylarının 1a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D1a.1.Tip	Hızları farkı ortalaması hesaplanarak cevaba gidilmiştir. Benzer şekilde hızlarının farkı da cevap olarak verilmiştir.	$x'(t) = v(t) = 8t$ i) $V(1) = 8, V(1,1) = 8,8 \Rightarrow V_{ort} = \frac{8,8-8}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4$ ii) $V(1) = 8, V(1,01) = 8,08 \Rightarrow V_{ort} = \frac{8,08-8}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,04$ iii) $V(1) = 8, V(1,001) = 8,008 \Rightarrow V_{ort} = \frac{8,008-8}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,004$	6
D1a.2.Tip	Bir noktadaki türevi ortalama hızın hesaplanmasında kullandıkları görülmüştür.	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(h+1)^2 + 3 - 7}{h} = 4h + 8$ i) $4 \cdot 0,1 + 8 = 8,4$ ii) $4 \cdot 0,01 + 8 = 8,04$ iii) $4 \cdot 0,001 + 8 = 8,004$	5
D1a.3.Tip	$x = V \cdot t$ denklemi kullanılarak verilen zaman aralıklarında hız hesaplanmaya çalışılmıştır.	$t = 1, x(t) = 7, yol = hız \cdot zaman \Rightarrow hız = 7$ $t = 1 + h = 1,1$ $x(t) = 7,84 \Rightarrow 7,84 = hız \cdot 1,1 \Rightarrow hız = 7.12$	4

Tablo 7'nin devamı

D1a.4.Tip	Verilen noktalarda hareketlinin aldığı yollar toplamı zamanlar toplamına bölünerek cevap verilmiştir.	$V_{ort} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{7 + 4(1,1)^2 + 3}{2,1} \cong 7$	3
		$V_{ort} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{7 + 4(1,01)^2 + 3}{2,01} \cong 7$	
		$V_{ort} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = \frac{7 + 4(1,001)^2 + 3}{2,001} \cong 7$	
Diğer		Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	7

Tablo 7 incelendiğinde soruya 1.tipte yanlış cevap veren öğretmen adayları soruda verilen zamana bağlı yol denkleminin türevini aldıktan sonra istenilen aralıktaki ortalama hız bulmak için sırasıyla $t=1$ ve $t=1,1$ değerlerini elde ettikleri denklemde yerine koymuşlardır. Buldukları değerleri hareketlinin o noktalardaki hızları olarak düşünmüş ve bu aralıkta ortalama hızı bulmak için bu değerleri birbirinden çıkartarak sonuca gitmeye çalışmışlardır. Bazı öğretmen adayları tabloda belirtilenden farklı olarak bu değerlerin ortalama hızı verdiğini belirtmiş bazıları ise buldukları bu farkı 1 ile 1,1 arasında geçen zamana yani $0,1$ 'e bölerek cevap vermeye çalışmışlardır. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları h değerinin 0 'a yaklaşan değerlerinde istenen ortalama hızları bulmak için türevin tanımından yararlanarak tabloda verildiği gibi sonucu $4h+8$ olarak bulmuştur. Ancak işlemin devamında h yerine sıfır yazılarak sonuca gidilmemiş, $4h+8$ ifadesinde h yerine değerler verilerek ortalama hız hesaplanmaya çalışılmıştır. Bazı öğretmen adayları türevin tanımında h sıfıra giderken ifadesi yerine h , $0,001$ 'e ya da h , x 'e giderken ifadelerini kullanmıştır. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ilk olarak verilen denklemde t 'nin $1,1$, $1,01$ ve $1,001$ değerlerine karşılık gelen yolu bulmuş ve bu değerleri " $x = V \cdot t$ " denkleminden yerine yazarak buradan hareketlinin ortalama hızını elde etmeye çalışmıştır. 4.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise toplam yol bölü toplam zaman ifadesini yanlış kullanarak verilen zaman aralıklarına karşılık gelen yol ve zaman değerlerinin ayrı ayrı toplayarak birbirine oranlamıştır. Soruya yanıt vermeyen iki öğretmen adayı bulunmaktadır.

Aşağıdaki tabloda birinci sorunun b şıkkı için cevabı "Yanlış" olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 8. Öğretmen adaylarının 1b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D1b.1.Tip	Hareketlinin t=1'deki anlık hızı 1.saniyede aldığı yolun zamana oranı şeklinde yorumlanmıştır.	$V = \frac{\text{ToplamYol}}{\text{Zaman}}$ $V = \frac{4t^2 + 3}{1} = \frac{4 + 3}{1} = 7$ $(t = 1)$	4
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	4

Tablo 8'e bakıldığında soruya yanlış cevap veren öğretmen adaylarının çoğu soruda verilen yol-zaman denklemini kullanarak t yerine 1 yazmış ve hareketlinin aldığı yolu 7 olarak hesaplamıştır. Daha sonra bulduğu yolu 1'e bölerek hareketlinin hızını 7 olarak hesaplamışlardır. Ancak bu hareketlinin yol boyunca hızıdır ve soruda öğretmen adaylarından t=1 anındaki anlık hız istenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının sorunun a şıkında buldukları değerlerden hareketle b şıkına cevap vermeleri istenmesine rağmen buldukları değerleri kullanmadan b şıkına cevap verdikleri gözlenmiştir. Öğretmen adayları sorunun türev ile olan bağlantısını bilmedikleri bu yüzden de basitçe bir denklem kullanarak hareketlinin anlık hızını buldukları düşünülmektedir. 6 öğretmen adayı ise soruya yanıt vermemiştir.

Birinci sorunun a şıkıyla bağlantılı olan b şıkına yanlış cevap veren iki öğretmen adayı sorunun ilk bölümünde buldukları ortalama hızlarla ikinci kısımda istenen anlık hız arasındaki ilişkiyi görememişlerdir.

Aşağıda soruya birinci tipte yanlış cevap veren 2Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat yer almaktadır.

- A :1.sorunun b şıkında a'da bulduğun değerleri mi kullanarak cevaba gittin?
- 2Ö :Ben bu soruyu çözerken bu şekilde düşündüm formül elde etmeye çalıştım ve bunu buldum
- A :Verilen denklemde x yerine 1 mi yazdın?
- 2Ö :Evet
- A :Peki, bu bize neyi verir?
- 2Ö :Yolu verir, burada tam olarak cevap olarak yazmadım...

2Ö kodlu öğretmen adayı konuyla ilgili bilgilerinin yeterli düzeyde olmaması nedeniyle ilk kısımda elde ettiği ortalama hızlarla anlık hız arasında bir bağlantı

kuramadığı gibi soruyu çözmeye yönelik yaptığı işlemlerden de bir sonuç çıkaramamıştır. Benzer biçimde 17Ö kodlu öğretmen adayı da sorunun ilk kısmını çözmüş olmasına rağmen b şikkini boş bırakmıştır. Her iki öğretmen adayı sorunun şıkları arasındaki bağlantıyı göremedikleri gibi türevle anlık hız arasındaki ilişkiyi de bilmemektedirler.

Aşağıdaki tabloda ikinci sorunun a şikkı için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 9. Öğretmen adaylarının 2a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D2a.1.Tip	Toplam yol ve toplam zaman yanlış olarak yorumlanmış ve birbirine oranlanarak ortalama hız elde edilmiştir.	$V_{ort} = \frac{90,000 + 89,932 + \dots + 6,000}{0 + 0,9 + 0,99 + 0,999 + 1} = \frac{358,290}{4,898} \cong 73$ $V_{ort} = \frac{90,000 + 90,068 + \dots + 142,000}{1 + 1,001 + 1,01 + 1,1 + 2} = \frac{509,386}{6,411} \cong 77$	3
D2a.2.Tip	Ortalama hızlar limit durumunda incelenerek hesaplanmaya çalışılmıştır.	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{90,000 - 83,040}{1} = 6,960$ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(1)}{2 - 0} = \frac{142,000 - 90,000}{2 - 1} = 52,000$	2
D2a.3.Tip	Grafik temsil	Tabloda verilen nümerik veriler kullanılarak grafik çizilmiş ve soruya ilişkisiz cevaplar verilmiştir.	3
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	4

Soruya yanlış cevap veren öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde 1.tipte yanlış cevap veren öğretmen adayları toplam yolun toplam zamana oranından yararlanarak verilen aralıktaki ortalama hızı hesaplamaya çalışmıştır. Fakat her bir zaman dilimine karşılık gelen yolu ve her bir zaman aralığını ayrı ayrı toplayarak birbirine oranlamış ve yanlış cevaba gitmişlerdir. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları seçtikleri aralıklardaki ortalama hızları limit durumunda incelemeye çalışmış ve soruyu türev kavramıyla bağdaştırarak çözmek istemişlerdir. 3.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise tabloda verilen değerleri kullanarak sadece grafik çizerek soruyu cevaplandırmaya çalışmışlardır. 3 öğretmen adayı ise soruya yanıt vermemiştir.

Öğretmen adayları arasından soruya ikinci yanlış cevap veren 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

- 17Ö : $[0,1]$ aralığındaki değerleri bulup 1'e soldan yaklaştım, tablodaki değerleri verip sonra tekrar sağdan yaklaştım
- A :Burada fonksiyonun kuralı verilmemiş, limiti kullanmasan da aynı şey olur muydu?
- 17Ö :Aslında olurdu, çünkü limit kullanmama gerek yok gerçekten de
- A :Peki, neden limit kullanmak istedin?
- 17Ö :1'e soldan yaklaştığımı ifade edebilmek için hani sol taraftaki değerleri kullandım
- A :Bulduğun bu sonuç $[0,1]$ aralığındaki ortalama hız mıdır?
- 17Ö :Ortalama hızdır. Hepsinde farklı değerler çıkıyor, bilmiyorum o anlık hızda olabilir.

17Ö kodlu öğretmen adayının ortalama hız ile anlık hız arasındaki nasıl bir ilişki olduğu konusunda tam olarak bir fikri olmadığından sorunun çözümünde güçlük çekmiştir. 1'e soldan yaklaşırken verilen aralıklardaki değişim oranlarının limitini alarak soruyu türevle ilişkilendirmeye çalışmıştır. Bu durum ortalama hız yerine anlık hızı hesaplamasına neden olmuştur. 2Ö kodlu öğretmen adayı ortalama hızı ikinci sorudaki tabloda verilen değerleri grafiğe dökerek çözmeye çalışmış ancak bunda başarılı olamamıştır. 2Ö kodlu öğretmen adayı bir önceki soruda yolun zamana bağlı denkleminin verildiği soruda ortalama hızı bulmuş olmasına rağmen nümerik değerlerin verildiği bu soruda ortalama hızı hesaplayamamıştır. Öğretmen adayı cebirsel ifadelerin yer aldığı soruları çözebilmesine rağmen tablodaki verileri yorumlayamadığından soruyu çözememiştir. Bu yüzden grafik çizerek soruya cevap aramaya çalışmıştır. 25Ö kodlu öğretmen adayı ise ikinci sorudaki tabloda verilen değerlerle soruda istenilenler arasında bir bağlantı kuramadığını belirterek soruyu boş bırakmıştır.

Aşağıdaki tabloda ikinci sorunun b şıkkı için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 10. Öğretmen adaylarının 2b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D2b.1.Tip	Sağdan veya soldan birer tane aralık seçilerek bu aralıktaki ortalama hız hareketlinin $t=1$ anındaki hızı olarak belirtilmiştir.	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90 - 89,932}{1 - 0,999} = \frac{0,068}{0,001} = 68$ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90,068 - 90}{1,001 - 1} = \frac{0,068}{0,001} = 68$	4

Tablo 10'un devamı

D2b.2.Tip	Yolun zamana bağlı cebirsel formülü olan $x(t)$ 'yi bilinmediğinden limit hesaplanamamıştır.	$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{x(t) - x(1)}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{x(t) - 90}{t - 1}$	4
D2b.3.Tip	$x=v.t$ formülünden yararlanılarak $t=1$ için hız hesaplanmış ve anlık hız olarak yorumlanmıştır.	$V_{anlık} = \frac{x}{t} = \frac{90}{1} = 90$	4
D2b.4.Tip	Sağdan veya soldan seçilen bir aralıktaki ortalama hız limit durumunda hesaplanmaya çalışılarak anlık hızı bulmaya çalışılmıştır.	$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{V_{ort}}{zaman} = \frac{90,000 - 89,932}{1 - 0,999} = \frac{0,068}{0,001} = 68$	3
D2b.5.Tip	Sorunun a şığında bulunan ortalama hızın $t=1$ için zamana oranı anlık hız olarak yorumlanmıştır.	$V_{anlık} = \frac{V_{ort}}{t} \Rightarrow \frac{84}{1} = 84$	3
Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.		6

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1.tipte yanlış yapan öğretmen adayları anlık hızın istenildiği $x=1$ noktasının sağından veya solundan bir aralık seçmiş ve bu aralıktaki ortalama hızı hesaplamışlardır. Seçtikleri aralığın $x=1$ noktasına çok yakın bir aralık olması öğretmen adaylarını soruya doğru cevap verdiklerine inandırmış olabilir ya da öğretmen adayları buldukları cevabın diğer aralıkları kontrol etmeksizin onları doğru cevaba götüreceğini düşünmüşlerdir. 2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları $x=1$ noktasında türevin tanımını yazmış fakat sorunun çözümü için gerekli adımları atmamıştır. Bu öğretmen adaylarının fonksiyonun kuralını bilmedikleri için cevaba gidemedikleri düşünülmektedir. 3.tipte hata yapan öğretmen adayları hareketlinin $x=1$ anındaki aldığı yolu zamana bölerek soruyu cevaplamışlardır. Yani bir saniyede 90 metre giden bir hareketli için $x=v.t$ formülünü kullanarak hesaplama yapmışlardır. 4.tipte yanlış yapan öğretmen adayları seçtikleri bir aralıktaki ortalama hızı limit durumunda inceleyerek o noktada fonksiyonun türevini hesapladıklarını düşünmüşlerdir. 5.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ise sorunun ilk bölümünde $0 \leq x \leq 1$ aralığında hesapladıkları ortalama hızı 1'e bölerek $x=1$ anındaki anlık hızı bulmaya çalışmışlardır. 21 öğretmen adayı soruya cevap vermemiştir.

Mülakat yapılan 6 öğretmen adayından dördü (24Ö, 25Ö, 27Ö, 37Ö) soruya yanlış cevap vermiştir. $x=1$ noktasında anlık hızın istendiği soruya tek taraflı bir yaklaşımla cevap veren öğretmen adayları arasından soruya birinci tip yanlış cevap veren 27Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

A : $t=1$ anındaki anlık hızı nasıl buldun?

27Ö :Anlık hız yine türevle alakalı, burada türevi kullanarak, eğimi kullanarak aslında, eğimi bulursak türevi verir.

A :Peki, neden soldan bakma ihtiyacı duymadın, farklı bir şey mi gelirdi?

27Ö :Aynı şey gelmesi gerekirdi.

A :Tek taraftan bakmak yeterli midir?

27Ö :Yeterli değil ama yakın bir değer verir.

Öğretmen adayları fonksiyonun o noktadaki türevinin anlık hızı vereceğini doğru olarak düşünmesine rağmen sadece sağ türeve bakmıştır. Ancak burada öğretmen adayının türev kavramıyla ilgili yeterli bilgiye sahip olmadığı, her iki taraftan türevi incelemesi gerekirken sadece sağ taraftan türevi bulup bunu o noktadaki türeve eşitlemesinden anlaşılmaktadır. Aynı şekilde 25Ö kodlu öğretmen adayları da sağdan türeve bakarak bunun çözüm için yeterli olduğunu düşünmüştür. 37Ö kodlu öğretmen adayları ise sorunun a şıkında bulunduğu değerlerden hareketle anlık hızı bulmaya çalışmıştır.

Aşağıdaki tabloda üçüncü sorunun a şıkı için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 11. Öğretmen adaylarının 3a sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D3a.1.Tip	Sadece verilen aralıklardaki değişimler hesaplanarak karşılaştırılmıştır.	3 kg'daki değişim 2500 2 kg'daki değişim 500 [0,3] aralığında değişim daha büyük	3
D3a.2.Tip	Verilen noktalardaki değişim oranı limit durumunda incelenmiştir.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3500 - 1000}{3} = \frac{2500}{3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{4000 - 3500}{2} = 250$	2

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1.tipte yanlış yapan öğretmen adayları ortalama fiyat değişimi oranının istendiği bir soruda sadece verilen aralıklarda fonksiyonun değişimini hesaplayarak elde ettikleri değerlere göre soruya cevap vermişlerdir. Her ne kadar soruya doğru cevap vermiş olsalar da fiyat değişiminin büyük olması fiyat değişim oranının büyük olacağı anlamına gelmemektedir. Ancak öğretmen adayları bunu dikkate almadan veya aynı şey olduklarını düşünerek soruya cevap vermişlerdir.

2.tipte yanlış yapan öğretmen adayları verilen aralıklarda değişim oranını hesaplamalarına rağmen bu oranın limitini almaya çalışarak cevap vermişlerdir. Burada öğretmen adayları soruda istenilen ifadeyle türev arasında bir bağlantı kurmaya çalışmış ve değişim oranının limitini alarak türevin tanımından soruyu çözmek istemişlerdir. 5 öğretmen adayı ise soruya yanıt vermemiştir.

Aşağıdaki tabloda üçüncü sorunun b şıkkı için cevabı “Yanlış” olarak sınıflandırılan öğretmen adaylarının yanlış yorumlama nedenleri ve açıklamalarından örnekler verilmiştir.

Tablo 12. Öğretmen adaylarının 3b sorusuna verdikleri yanlış cevapların sınıflandırılması

Yanlış Tipleri	Betimsel Açıklama	Örnek Öğrenci Cevabı	f
D3b.1.Tip	Fonksiyonun teğetinin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesi kullanılarak cevap verilmiştir.	<i>“$x = 1$ noktasında fonksiyonun eğimi daha fazladır.”</i>	5
D3b.2.Tip	Fonksiyonun daha büyük değer aldığı noktadaki anlık değişim oranı cevap olarak verilmiştir.	<i>“$f(4) > f(1)$ olduğundan $x=4$ noktasındaki anlık değişim oranı $x=1$ noktasındaki anlık değişim oranından daha büyüktür.”</i>	2
	Diğer	Üstteki sınıflamalardan herhangi birine dahil olmayan cevaplar bu kategoride toplanmıştır.	1

Öğretmen adaylarının soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 1. tipte yanlış yapan öğretmen adayları grafikte verilen noktalarda fonksiyonun hareketine bakarak $x=1$ noktasında eğimin daha fazla olduğunu ifade etmişlerdir. Ancak öğretmen adayları bunu ifade ederken “ $x=1$ noktasında fonksiyonun eğimi daha fazladır” şeklinde soruyu cevaplayarak fonksiyonun o noktada teğetinin eğimi yerine fonksiyonun eğimi ifadesini kullanmıştır. 2. tipte hata yapan öğretmen adayları $x=1$ ve $x=4$ noktalarında fonksiyonun aldığı değerleri karşılaştırmış 4 noktasında fonksiyonun değerinin büyük olmasını o noktada anlık değişim oranının büyük olması olarak yorumlamışlardır. 12 öğretmen adayı soruya cevap vermemiştir.

Soruya “ $x = 1$ noktasında fonksiyonun eğimi daha fazladır” şeklinde cevap veren 17Ö kodlu öğretmen adayına ait mülakat aşağıda verilmiştir.

- A : $x=1$ noktasında grafiğin eğiminin büyük olması ne anlama geliyor?
 17Ö :Eğer 1 noktasından bir teğet çizersem, o noktaları tam belirleyemiyorum ama yaklaşık olarak değer verebilirim
 A :Peki, $x=4$ noktasında?
 17Ö :O da 4 noktasında çizilecek olan teğet, 1 deki eğiminin daha büyük olduğu açıkça gözüküyor.
 A : $x=1$ deki eğim derken?
 17Ö :Teğetin eğimi
 A : $x=1$ 'deki teğetin eğiminin büyük olması anlık değişim oranının da büyük olması olarak mı yorumladın?
 17Ö :Evet

Buradan hareketle 17Ö kodlu öğretmen adayının grafiğin eğimi derken aslında o noktadan çizilen teğetin eğimini ifade etmeye çalıştığı anlaşılmaktadır. Bu, matematiksel dili kullanmadaki zayıflığın bir göstergesi olabileceği gibi temelde konuyla ilgili bilgi eksikliğinin de bir göstergesidir. Benzer bir yorum 27Ö kodlu öğretmen adayı tarafından da yapılmıştır. Aynı işlemleri yaparak soruyu cevaplayan öğretmen adayı “grafiğin eğimi” ifadesini kullanarak o noktadaki teğetin eğimini kastettiğini belirtmiştir.

2Ö kodlu öğretmen adayı anlık değişim oranını fonksiyonun o noktadaki değeri olarak düşünerek soruyu cevaplamıştır.

4. Tartışma ve Sonuç

Türev ve limit ilişkisine yönelik öğretmen adaylarının anlamalarını ortaya koymayı amaçlayan soruların analizinden elde edilen bulgular, genel anlamda öğretmen adaylarının bu ilişki hakkında yüzeysel bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Bu nedenle kavramlar arasındaki ilişkileri yorumlamaya veya ifade etmeye çalışırken zorlandıkları ve bu ilişkilerin niteliği hakkında çok fazla fikirleri olmadığı tespit edilmiştir.

Bu kısımda yer alan bazı sorulara öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar ve bu cevaba ulaşma nedenlerinin sorgulandığı birçok durumda, öğretmen adaylarının yeterli sayılabilecek düzeyde doyurucu açıklamalar yapamadıkları görülmüştür. Örneğin bu kısımda yer alan ikinci soru için öğretmen adayları türev-limit arasındaki ilişkiyi formüle edebilmelerine karşın, bu formülün altındaki kavramsal yapıyı açıklamada zorluk yaşamıştır.

Öğretmen adayları belli gösterim şeklinde verilen (cebirsel) soruların çözümünde başarılı olurken aynı başarıyı diğer gösterim şekilleriyle verilen sorularda gösterememektedir. Bu yüzden öğretmen adayları farklı gösterimlerle verilen soruların çözümünü yaparken soruyu bildikleri bir çözüm formatına dönüştürmeye çalışarak cevap vermeye çalışmışlardır. Daha önce yapılmış bazı çalışmalarda öğrencilerin bir

fonksiyonun türevini bulmak için fonksiyonun cebirsel gösterimini bulmaya yöneldiklerini ortaya koymuştur (Park, 2011).

Aynı zamanda yapılan çalışma öğretmen adaylarının türev ile limit arasındaki ilişkiyi yanlış yorumladıklarını ve temelde bu kavramlar arasındaki ilişkisinin tam olarak oturmadığını ortaya çıkarmıştır. Bunun yanı sıra bazı öğretmen adayları sürekliliğin fonksiyonun bir noktada türevli olması için yeterli koşul olduğunu düşünerek fonksiyonun sürekli ancak türevsiz olduğu sıvri uçlarda hataya düşmüşlerdir. Öğretmen adaylarının daha çok belirli örnekler üzerinde çalışmaları onları farklı sorularda yanlış yapmaya götüren başlıca etkenlerden birisidir.

Türev ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi ölçmeye yönelik matematik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar analiz edildiğinde öğretmen adaylarının ortalama hız ile anlık hız arasındaki ilişkiyi tam olarak bilmedikleri ortaya çıkmıştır.

Bu durum öğretmen adaylarının ortalama hız ile anlık hız arasındaki ilişkiyi özümsemediklerini yani ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki bağlantıyı bilmediklerini ortaya koymuştur. Benzer şekilde Baki (2008) öğrencilerin ortalama değişim oranı ve değişim oranı kavramlarını birbirleriyle karıştırdıkları ve birbirlerinin yerine kullandıklarını ifade etmektedir. Bu kargaşa kavramlara ilişkin

sembolik gösterimlerde de kendini göstermektedir ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$ yerine $\frac{dy}{dx}$ kullanmaları).

Öğretmen adayları bir hareketlinin belli bir zamandaki anlık hızını hesaplarken türev kullanmaları gerektiğini bilmektedirler. Yapılan araştırmalar öğrencilerin güçlü bir işlemsel beceriye sahip olduklarını ancak ortalama değişimi kavramak konusunda zorlandıklarını ortaya koymuştur (Park, 2011). Gerçekten de öğretmen adayları türev alma kuralları ile ilgili işlemsel becerilere sahip olmasına rağmen değişim oranı kavramını türev ile ilişkilendirmekte zorlanmışlardır. Bu kavramın iyi anlaşılması türevi daha derinlemesine anlamak için önemlidir. Thompson (1994) çalışmasında ortalama değişim oranını ilişkilendirerek anlamamanın öğrencilerin türev kavramını ve analizdeki teoremleri anlamalarına yardımcı olacağını belirtmiştir.

Öğretmen adayları grafiği verilen fakat denklemini bilinmeyen bir fonksiyonun belirli aralıklarda ortalama değişim oranı ile belli noktalarda anlık değişim oranını hesaplarken çözüm yapmak yerine $[0,3]$ aralığında ortalama değişim oranının daha büyük olduğunu veya $x = 1$ noktasında anlık değişim oranının daha büyük olduğunu sözel olarak belirterek soruyu cevaplamıştır. Fonksiyonun şekline bakarak sonucu tahmin etmeye çalışmışlardır. Fonksiyonun kuralını bilmeyen öğretmen adayları probleme ilişkin açıklayıcı bir çözüm yapamamıştır. Çoğu araştırmalar öğrencilerin fonksiyon kavramı ile ilgili olarak çalışırken cebirsel formüle ihtiyaç duyma ve kullanma gereksiniminde olduklarını göstermektedir (Asiala, Cottrill, & Dubinsky, 1997; Tall ve Vinner, 1981). Literatürdeki bu sonuç fonksiyonun cebirsel kuralının verilmediği bu problem durumunda

öğretmen adaylarının verdikleri cevabı neden destekleyemediklerinin bir gerekçesi olabilir.

Ortalama değişim oranını yanlış cevaplayan öğretmen adayları ya ortalama değişim oranı yerine verilen aralıktaki değişim miktarına bakarak bir değerlendirme yapmış ya da değişim oranlarını limit durumunda incelemiştir. Öğretmen adaylarının değişim oranlarını limit durumunda incelemesi soruyu türevle ilişkilendirmek istemelerinden kaynaklanmaktadır. Bu hata türü araştırmanın genelinde yaygın olarak yapılmıştır.

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının türev kavramı ile ilgili anlamalarını ve bu kavramı anlama sürecinde karşılaştıkları zorlukları ortaya koymak amaçlanmıştır. Kavramlar arası ilişkilerin doğru olarak kurulamaması öğretmen adaylarının türev konusunu anlamalarını güçleştirmiştir. Bu nedenle öğretmen adaylarının türev-limit ve türev-değişim oranı kavramlarını anlamalarında ve bu kavramları birbirleriyle ilişkilendirmede bir takım zorluklarla karşılaştıkları görülmüştür. Bu zorlukları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- Kavramların tanımlarının veya içeriklerinin tam olarak anlaşılmamış olması
- Ezber dayalı bilgilerle işlem yapmak
- Türevle ilgili nümerik veya grafiksel soruların çözümünde cebirsel gösterim bulmaya yönelik eğilim
- Nümerik ve grafiksel soruların çözümü için gerekli bilgi düzeyinin olmayışı
- Kavramlar arasındaki ilişkilerin yanlış yorumlanması
- Öğretmen adaylarının türev ve diğer kavramlar arasındaki bilgilerinin sınırlı olmasından kaynaklanan zorluklar
- Ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki ilişkinin anlaşılmamış olması
- Öğretmen adaylarının kavramsal anlama yerine işlemsel anlamayı tercih etmelerinden kaynaklanan zorluklar

Öğretmen adaylarının kavramlar arasındaki ilişkiyi yanlış olarak ifade ettikleri durumları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- Soruları türev ile ilişkilendirme düşüncesiyle yanlış şekilde limitin kullanılması
- Ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki ilişkinin bilinmiyor olması
- Sürekliliğin türevle eş değer tutulması ve süreklilik ile türev ilişkisinin tam olarak bilinmiyor olması

Öğretmen adaylarının söz konusu kavramlarla ilgili bilgilerinin sınırlı olması türevi anlama ve anlamlandırmada zorluklar yaşamalarına neden olan önemli bir etken olarak karşımıza çıkmaktadır. Limit kavramı türev kavramının bir parçasıdır ve türevin anlaşılmasında son derece önemli bir konudur. Öğretmen adayları elde ettikleri herhangi bir aralıktaki ortalama değişim oranının gelişigüzel bir şekilde limitini alarak soruyu türevle ilişkilendirmeyi amaçlamıştır. Zaten limit ile türev arasındaki bu kopukluk doğal olarak öğretmen adaylarının ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki bağlantıyı kurmalarını güçleştirmiştir. Sonuç olarak ortalama değişim oranının anlık

değişim oranına yaklaşımı limit kavramının iyi bir şekilde anlaşılmasıyla mümkün olabilir.

Kavramlar arasındaki ilişkilerin yanlış bir şekilde kurulduğu bir başka durum ise türev-süreklilik ilişkisi olmuştur. Sürekli bir fonksiyonun bir noktada aldığı değerin o noktada türev gibi düşünülmesi ya da bir fonksiyonun sürekli olduğu her yerde türevlenebileceği fikri öğretmen adaylarının bu konuda sınırlı bir görüş açılarının olduğunu ortaya koymaktadır.

Türevin limit ve değişim oranı kavramlarıyla ve bu kavramların birbirleriyle olan ilişkisini kurmada öğretmen adaylarının güçlük çekmesinin nedeni kavramsal öğrenme yerine işlemsel öğrenmeyi tercih etmelerinden kaynaklanmaktadır (Baki ve Kartal 2002; İşleyen ve Işık, 2003). Kavramsal bir altyapı oluşturmadan türev ile ilgili derinlemesine bilgi sahibi olmak, farklı durumlar ve kavramlar arası ilişkiler üzerine yorum yapabilmek ve rutin olmayan problemleri çözmek mümkün değildir. Öğretmen adayları matematik alan bilgilerinin sadece işlemsel becerileri üzerine değil, aynı zamanda kavramsal anlama üzerine inşa etmeli ve böylelikle bilgilerini gelecek nesillere sağlıklı bir şekilde aktarmalıdır.

5. Öneriler

Türev konusuyla ilgili ortaöğretim ve sonrasında öğretmen eğitimi programlarında verilen eğitimde ağırlıklı olarak işlemsel becerilerin geliştirildiği formül veya kuralların kullanılarak soruların çözüldüğü dersler yerine kavramsal anlamının ön planda olduğu, konunun teorik alt yapısına daha çok vurgu yapılan bir eğitim verilebilir. Öğrencilerin kısa işlemlerle hızlı bir şekilde cevap veremeyeceği yorum ve derinlemesine düşünmeyi gerektiren sorulara da yer verilmelidir. Özellikle türevin limit kavramı kullanarak yapılan tanımına ağırlık verilerek türev-limit ilişkisinin tam olarak anlaşılmasına olanak sağlanmalıdır.

Araştırma sonuçları öğretmen adaylarının cebirsel gösterimle verilen soruları çözümedeki başarılarını nümerik ve grafiksel sorularda göstermediklerini ortaya koymuştur. Özellikle öğretmen adaylarının ortalama değişim oranı ile anlık değişim oranı arasındaki ilişkiyi yorumlayamadıklarını göz önüne alırsak bu ilişkinin iyi bir şekilde anlaşılması için nümerik yöntemlerin kullanıldığı sorulara yer verilebilir.

Özellikle ortalama değişim oranının anlık değişim oranına yaklaşımını daha anlaşılır bir hale getirebilmek için bilgisayar cebir sistemi yazılımları veya dinamik matematik yazılımlarına derslerde yer verilmelidir.

Preservice Mathematics Teachers' Errors Related to Derivative

Extended Abstract

Introduction

Analysis concepts which have an important place in the fields of mathematics, science and engineering fields are the starting point of the advanced mathematics (Ubuş, 1999). Thereby, analysis concepts form a basis in order to fully understanding of the advanced mathematics topics. There are a number of studies on students' understanding of the analysis concepts due to its importance for the other disciplines. Since students' understandings, mistakes and misconceptions related to a specific concept is essential, it is important for teachers to be aware of students' errors especially the ones produced by systematically. These mistakes can sometimes be the result of the inattention or the precursor of students' lack of learning and misconceptions (Baki, 2008). If these mistakes and misconceptions are not corrected, they can form a basis for new mistakes and misconceptions that students can make in the other mathematical topics.

Being aware of students' learning deficiencies about any specific mathematical topic and taking precautions towards to correct or prevent these are the responsibility of the teacher. One of the prior factor that teacher fulfill this duty completely is his/her subject matter knowledge. It is a common reality that teachers' subject matter knowledge can play an active role to plan, implement and evaluate the teaching-learning process in class. In this sense, one of the most important factors on student's learning which also determine the quality of the teaching is the teacher's subject matter knowledge (Fennema & Franke, 1992; Shulman, 1986).

Although the subject matter knowledge alone is not enough to prepare an effective teaching and learning environment, it can be regarded as one of the essential components to prepare such an environment. Stein, Baxter and Leinhardt (1990) state that teachers' wealth of knowledge affects their abilities to create a background for developing mathematical understanding. The authors emphasize that teachers with a poor content knowledge generally do teaching based on the rules and in this way they can only raise students with structurally poor understandings. From this point, it can be concluded that to raise individuals with strong comprehension skills, teachers who have an important role for educating students should be more stronger understandings. The literature of studies done on in-service teachers or preservice teachers' understanding of the derivative concept are rather limited comparing to the ones conducted with the students (Akkaya, 2009; Doğan, Sulak & Cihangir, 2002; İşleyen & Akgün, 2010; Park, 2011). In the light of this view, as the teachers of the future, today's teacher candidates understanding about derivative concept and their deficiencies about this concept must be examined.

The Aim of the Study

The aim of this study is to determine mathematics teacher candidates' comprehension of the derivative concept and reveal the difficulties they encounter within the process of understanding the concept.

Methodology

This research utilized qualitative case-study. Participants of the study are consisted of 45 teacher candidates registered to mathematics education program in Secondary Science& Mathematics Education Department in a state university, Turkey. The data of the study were gathered through 2 written exams applied within one week intervals (1st exam was focused on relation between derivative and limit; 2nd one was focused on relation between derivative and rate of change; and clinical interviews conducted with six teacher candidates. The data from written examinations were grouped into four main categories as; "fully right answer", "partially right answer", "wrong answer" and "no answer". The rate of each type of answer falling in these groups was expressed with frequency and percentiles. In addition, the wrong answers given by the teacher candidates were also grouped with respect to their similarities and differences. By this way, the mistake types committed by the pre-service teachers were presented. In order to reveal the opinions directing pre-service teachers to the right and wrong answers, the data coming from clinical interviews were categorized based upon their similarities and differences.

Findings and Results

Results of the study showed that teacher candidates have superficial knowledge about derivative concept. Since candidate teachers, whose understanding was mainly restricted to definitions, could not fully consolidate the content of definitions. Moreover, teacher candidates were more successful in interpretation of algebraic form of derivate concept rather than graphical and table representations.

The results based on the analysis of the questions aiming to prove preservice teachers' understanding of the derivative-limit relationship reveal that they faced some difficulties about understanding and linking the concept of derivative-limit and derivative-ratio of exchange. These difficulties can be stated as follow.

- a) Partly understanding of the definitions or the contents of the concepts
 - b) Operating with rote knowledge
 - c) Tendency for finding algebraic representation to the solution of numerical or graphical questions about derivative
 - d) Lack of knowledge for the solution of numerical or graphical questions
 - e) Misinterpretation of the relations among the concepts
 - f) Difficulties due to the limited knowledge of pre-service teachers about derivative and the other concepts
-

- g) Limited understanding of the link between average ratio of exchange and the instantaneous rate of change
 h) Difficulties arising from teacher candidates' preference procedural understanding to conceptual understanding

Consequently, the circumstances in which the relationships between concepts were improperly stated by pre-service teachers can be sorted as below:

- a) Misusage of limit with the thought that relating questions to derivative concept
 b) Not knowing the link between average ratio of exchange and the instantaneous rate of change
 c) Equivalence of continuity with derivation concept and not exactly knowing to continuity-derivative relation.

Kaynaklar/References

- Akkaya, E. (2009) *Matematik öğretmen adaylarının türev kavramına ilişkin teknolojik pedagojik alan bilgilerinin öğrenci zorlukları bağlamında incelenmesi*. (Yüksek lisans tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul). <http://tez2.yok.gov.tr/adresinden edinilmiştir>.
- Amit, M. & Vinner, S. (1990). Some misconception in calculus: Anecdotes or the tip of an iceberg? In G. Booker ve T.N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education: Vol. 1* (pp. 3-10). Cinvestav, Mexico.
- Asiala M., Cottrill J. & Dubinsky, E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399–431.
- Aspinwall, L & Miller, L.D. (2001). Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings: one teacher's reflections. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 89–107.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (4. Baskı). Trabzon: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Baki, A. ve Kartal T. (2004). Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerine cebir bilgilerinin karakterizasyonu. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2(1), 27-48.
- Balcı, M. (2000). *Genel matematik 1*. Ankara: Balcı Yayınları.
- Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29, 389-399.
- Bingölbali, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmentar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (s. 223-255). Ankara: PegemA.
- Bittinger, M.L., Ellenbogen, D.J., & Surgent, S.A. (2012). *Calculus and its application* (10th Edition). Addison-Wesley.
- Bütün, M. (2012). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının önerilen entegre program sürecinde matematiği öğretme bilgilerinin gelişimi*. Yayımlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

- Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Çelik, D. ve Baki, A.(2007). *Öğretmen adaylarının cebirde çoklu gösterimlerden yararlanma durumları üzerine bir çalışma*. 7 th International Educational Technology Conference, 3-5 Mayıs, Nicosia, North Cyprus, 182-188.
- Çepni, S. (2009). *Araştırma Ve Proje Çalışmalarına Giriş* (4. Baskı). Trabzon.
- Doğan, A., Sulak, H. ve Cihangir, A. (2002, Eylül). *İlköğretim matematik eğitimi anabilim dalı öğrencilerinin özel fonksiyonlar ile fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yeterlikleri üzerine bir araştırma*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Duru, A. (2006) *Bir fonksiyon ve onun türevi arasındaki ilişkiyi anlamada karşılaşılan zorluklar*. Yayınlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metotlarına giriş: nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Fennema, E. & Franke, M. L.(1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Learning and Teaching Mathematics* (147-164). New York: Macmillan.
- Goerdts, S. L. (2007) *The effect of emphasizing multiple representations on calculus students' understanding of the derivative concept*. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.
- Gür, H. ve Barak, B.(2007). Ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki hata örnekleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, 7(1), 453-480.
- Hacıömeroğlu, E. S. (2007). *Calculus students' understanding of derivative graphs: problems of representations in calculus*. Unpublished doctoral dissertation, Florida State University.
- Hacısalihioğlu, H. H. Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, A., Brown, L. M., İbikli, E. ve Brown, S., (2000). *Türk dil kurumu matematik terimleri sözlüğü*. Ankara: Bizim Büro Basımevi Yayın Dağıtım.
- Hauger, G.S. (2000). Instantaneous rate of change: a numerical approach. *International Journal of Mathematical Education of Science and Technology*, 31(6), 891-897.
- İşleyen, T. ve Akgün, L. (2009, Ekim). Matematik Öğretmen Adaylarının Türev ve Diferansiyel Kavramlarını Algılama Düzeyleri, XVIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı, Ege Üniversitesi, İzmir.
- Kendal, M., & Stacey, K.(2003) Tracing learning of three representations with the differentiation competency framework. *Mathematics Education Research Journal*, 15(1), 22-41.
- Lloyd, G.M. & Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conception of function on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248-274.
- Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] (2011). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara.

- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
- Park, J. (2011) *Calculus instructors' and students' discourses on the derivative*. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University.
- Pinzka, M.K. (1999). *The relation between college calculus students' understanding of function and their understanding of derivative*. Unpublished doctoral dissertation, University of Minnesota.
- Pustejovsky S. F. (1999) *Beginning calculus students' understanding of the derivative: three case of studies*. Unpublished doctoral dissertation, MarquetteUniversity.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stein, M. K.,Baxter, J. A., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: a case from functions and graphing. *American ducational Research Journal*, 27(4), 639-663.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Thomas, G. B.,Weir, M. D., Hass, J. & Giordano, F. (2005). *Thomas' calculus* (11th Edition). Pearson Education: Addison-Wesley.
- Thompson, P.W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education*, I, 21-44.
- Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20(1), 113-137.
- Ubuz, B.(1999). Genel matematikte (Calculus) öğrenci hataları. *Matematik Dünyası*, 5, 9-11.
- Van Dooren, W.,Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of preservice teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra Word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351.
- White, P. & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 79-95.
- Zandieh, M. (2000) A theoretical frame work for analyzing students understanding of the concept of derivative. *Conference Board of the Mathematical Sciences(CBMS) Issues in Mathematics Education*, 8, 103-127.

Kaynak Gösterme

Gökçek, T. ve Açıkıldız, G. (2016). Matematik öğretmen adaylarının türev kavramıyla ilgili yaptıkları hatalar. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 112-141.

Citation Information

Gökçek, T., & Açıkıldız, G. (2016). Preservice mathematics teachers' errors related to derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(1), 112-141.