T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Ergün KAŞIKÇI

AĞUSTOS 2020

Matematik Anabilim Dalında Ergün KAŞIKÇI tarafından hazırlanan BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Ali OLGUN
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Ali ARAL
Üye	: Doç. Dr. Murat OLGUN

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

KAŞIKÇI,Ergün

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı,Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL

Ağustos 2020, 66 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde yeni tip ağırlıklı bir süreklilik modülü verilmiş ve yaklaşım hızını veren teoremler ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde ise lineer pozitif operatörler araciliğiyla düzgün ağırlıklı yaklaşım, için uygun ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir. Son bölüm ise tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Süreklilik modülü, Ağırlıklı uzaylar, Pozitif lineer operatörler, Yakınsaklık hızı.

ABSTRACT

APPROXİMATİON PROPERTİES OF BERNSTEIN-CHLODOWSKY OPERATORS

KAŞIKÇI,Ergün
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
August 2020, 66 pages

This thesis consists of four chapters. The first part is reserved for introduction.
In the second part, some basic concepts used in the thesis are given. In the third section, using the new type-weighted modulus of continuity, the approximation estimates are defined and some properties are given. In the fourth section, the uniform convergence of linear pozitif operators are examined on suitable weighted spaces. The last section is reserved for discussion and conclusion.

Key Words: Modulus of continuity, Weighted spaces, Positive linear operators, Rate of approximation.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, tez yöneticisi hocam, Sayın Prof. Dr. Ali ARAL ’a, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm hocam Sayın Prof. Dr. Ali OLGUN’a ve Sayın Doç. Dr. Murat OLGUN’a , tezimin birçok aşamasında yardım gördüğüm hocam Sayın Araştırma görevlisi Fırat ÖZSARAÇ’a ve son olarak bana birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımını esirgemeyen eşim Selda KAŞIKÇI ’ya, manevi olarak hep yanımda olan beni destekleyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Reel sayılar kümesi
$L(f;x)$	Lineer operatörünün *f* fonksiyonuna uygulanması
$B_\rho(\mathbb{R}^+)$	Reel değerli ağırlık fonksiyonu
$C_\rho(\mathbb{R}^+)$	Uzayındaki sürekli fonksiyon kümesi
$C_\rho^k(\mathbb{R}^+)$	$\left\{f \in C_p(\mathbb{R}^+) \text{ve} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty\right\}$ alt uzayı
$\omega(f;\delta)$	Süreklilik modülü
B_n	Bernstein operatörü
S_n	Genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörü

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisindeki ilk sonuç 1885 yılında K. Weierstrass tarafından ‘‘Birinci Weierstrass Yaklaşım Teoremi’’ olarak şu teoreme dayanmaktadır:
Teorem: Her $\mathcal{E} > 0$ sayısı ve her $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için $|f(x) - P(x)| < \mathcal{E}$ olacak şekilde $[a,b]$’ de tanımlanmış $P(x)$ polinomu bulunabilir.

Weierstrass teoreminin ispatı çok uzun ve karmaşık olduğundan birçok matematikçi daha etkili ve daha basit bir ispat vermek için çalışmışlardır.
1912 yılında S. N. Bernstein, Weierstrass’ ın bu teoremini basit ve etkili bir yolla ifade etmiştir. Şimdi aşağıdaki Bernstein operatörünü tanımlayalım:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k f\left(\frac{k}{n}\right), f \in C[0,1], x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Weierstrass teoreminin bir diğer ifadesi de Korovkin teoremi olarak bilinen ve operatör dizisinin birim operatöre yaklaşımını veren aşağıdaki teoremdir:
Teorem: $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$, $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsayan fonksiyon dizileri olmak üzere
her $x \in [a,b]$ için

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x),$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x),$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n f$, $[a,b]$ aralığı üzerinde f sürekli fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.
Burada , $[a,b]$’ de sürekli, a’ da sağdan, b’ de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$’ de sınırlı bir fonksiyondur.
Bu iki teorem birçok matematikçi tarafından farklı yönlerden geliştirilmiştir.

1974 yılında A. D. Gadjiev tarafından Korovkin teoreminin tüm $\mathbb{R}^+$' de tanımlı sürekli ve sınırsız fonksiyonlar için geçerli olacak şekilde genelleştirilmesi yapılmıştır. Bu çalışmalarda $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve $\forall x \in I$ için $|f(x)| \leq Mg(x)$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı $C_\rho(I)$ ile tanımlanmış ve ağırlıklı uzay olarak adlandırılmıştır. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in I} \frac{|f(x)|}{g(x)}$$

eşitliği ile verilmektedir. Daha sonra A. D. Gadjiev ve Aral tarafından sınırsız aralıklarda w ağırlık fonksiyonuna göre $L_{p,w}[0,\infty)$ uzayında ağırlıklı Korovkin Teoremi verilmiştir. Yaklaşım teorisinin esas problemlerinden bir diğeri ise yaklaşım hızının bulunması problemidir:

$$\|f(x) - \varphi_n(x)\|_x = \alpha_n \text{ ve } \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$$

ise bu $\varphi_n(x)$' in $f(x)$' e yaklaşım hızını belirtir. Bu hızı bulmak için α_n' nin sıfıra giden bir başka dizi ile karşılaştırılması yeterlidir. Yani $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n$ ise ve β_n de sıfıra gidiyorsa yukarıdaki eşitsizlik, α_n' nin β_n' den daha hızlı sıfıra gittiğini gösterir. Fonksiyon uzayında β_n' yi süreklilik modülü ile de ifade edebiliriz. Çünkü f' nin süreklilik modülü olan $w(f;\delta)$, sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.

Bu önemli problemin çözümü için 1935 yılında T. Popoviciu, $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için süreklilik modülü yardımı ile Bernstein polinomlarının yaklaşım hızını

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{5}{4} w\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olarak belirtmiştir.

Lineer pozitif operatörler ile fonksiyona yaklaşımlar teorisi, P. P. Korovkin' in ispatladığı teoremle ivme kazanmıştır. Kolay ve uygulanabilir kriterleri içeren ve lineer pozitif operatörlerle sürekli fonksiyona düzgün yaklaşımın şartlarını veren bu teoreme göre; A_n dizisinin sürekli fonksiyona düzgün yakınsaması için yakınsaklığın $\{1, t, t^2\}$ fonksiyonları için sağlanması yeterlidir, denilmiştir.

1.1. Kaynak Özeti

A.D Gadjiev ve A. Aral tarafından yayımlanan 'The estimates of approximation by using a new type of weighted modulus of continuity' ve Adrian Holhoş tarafından 'Uniform weighted approximation by positive linear operators' isimli makaleler tez çalışmasında temel olarak alınmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Biz bu tezde daha genel olan $\{1, \rho, \rho^2\}$ fonksiyonlarını test fonksiyonları kabul eden genel lineer pozitif operatörler dizilerinin yakınsaklık şartlarını araştıracağız. Göstereceğiz ki ρ fonksiyonu yalnızca test fonksiyonlarını oluşumunda kullanılmıyor aynı zamanda operatörün tanımlı olduğu ağırlıklı uzayın yapısını belirlememizi de sağlıyor. Daha sonra ρ fonksiyonu yardımı ile ağırlıklı uzayda tanımlanan genel süreklilik modülleri yardımı ile yakınsaklık hızını veren sonuçlar ispatlanacaktır. Ayrıca elde edilen sonuçların Szász ve Baskakov operatörleri için uygulamaları da tezde verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde lineer pozitif operatörler tanımlanacak ve özellikleri incelenecektir. Daha sonra kullanılacak Korovkin Teoremi ifade ve ispat edilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{L}(f, \mathrm{x})$$

biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{L}(f, \mathrm{x})$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir.

Tanım: $\mathrm{L} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in X$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathrm{L}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; \mathrm{x}) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; \mathrm{x})$$

eşitliği sağlanıyor ise L ye lineer operatör denir.

Tanım: Eger bir L operatörü pozitif degerli fonksiyonu yine pozitif degerli bir fonksiyona dönüstürüyor ise yani $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ oluyorsa L operatörüne pozitif operatör denir.
Hem lineerlik hem de pozitiflik sartlarını saglayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

2.1.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Lemma 2.1. Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani her $f, g \in X$ için,

$$f \leq g \text{ ise } L(f) \leq L(g)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $f \leq g$ olduğunu kabul edelim. $0 \leq g - f$ olur. L operatörünün pozitifliğinden,

$$0 \leq L(g - f)$$

şeklinde yazılabilir. L operatörü lineer olduğundan

$$0 \leq L(g - f) = L(g) - L(f)$$

dır. O halde $L(f) \leq L(g)$ eşitliği sağlanır.

Lemma 2.2. L lineer ve pozitif operatör ise $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Operatörün tanım kümesindeki her f için

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

olur. L'nin lineerliğinden

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

ifadesi elde edilir.

Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Yaklaşım teorisi, seçilen keyfi bir fonksiyonun daha kullanışlı ve daha iyi özellikleri olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmesini amaçlar.1885 yılında Weierstrass $[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir polinomların var olduğunu ifade etmiştir.

Teorem 2.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

Weierstrass teoremine göre, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların uzayında olmak üzere her ε > 0 için $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n. dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifade ile $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyona düzgün yakınsayan bir $(P_n(x))$ polinomlar dizisi vardır.

Bu teoremin birçok farklı ispatı bulunmaktadır. Bu ispatlardan en anlaşılır ve basit olanı 1912 yılında Bernstein'in (Bernstein, 1912) yapmış olduğu ispattır. 1952 yılında Bohmann (Bohmann, 1952) toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir.

2.3. Teorem (Korovkin Teoremi)

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende sınırlı olsun. Eğer $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatörleri dizisi $[a,b]$ üzerinde

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 \tag{2.1}$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x \tag{2.2}$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \tag{2.3}$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$ dizisi $[a,b]$ aralığında $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ dir. Yani $f(x)'$e düzgün olarak yakınsar.

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm x ler için

$$|f(x)| \leq M_f \tag{2.4}$$

olacak şekilde $M_f > 0$ sayısı vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall\ \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|t-x|<\delta$$

olduğunda

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon$$

sağlanır. $|t-x|>\delta$ olduğunda (2.4) den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı,

$$|f(t)-f(x)|\leq|f(t)|+|f(x)|\leq 2M_f$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan

$$|t-x|\geq\delta \text{ ise } \frac{|t-x|}{\delta}\geq 1$$

olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2}\geq 1 \tag{2.5}$$

sağlanır. (2.4) ve (2.5) den dolayı

$$|f(t)-f(x)|\leq 2M_f\leq 2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. O halde

$$|t-x|\leq\delta \text{ için } |f(t)-f(x)|\leq\varepsilon$$

$$|t-x|>\delta \text{ için } |f(t)-f(x)|<2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olduğunu elde edeirz. $\forall\, t\in\mathbb{R}$ ve $x\in[a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)|\leq\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.6}$$

dır. Eğer (2.1), (2.2), (2.3) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f)-f\|_{C[a,b]}=0$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

Lineerlikten;

$$|L_n(f(t);x-f(x)| = |L_n(f(t);x) - f(x) + L_n(f(x);x) - L_n(f(x);x)|$$

$$= |L_n(f(t);x - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x - f(x)|$$

$$= |L_n((f(t) - f(x);x) + f(x)(L_n(1;x) - 1)|$$

dir. Üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x);x)| + |f(x)||L_n(1;x) - 1|$$

olur. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$\left(f(t) - f(x)\right) \leq |f(t) - f(x)|$$

olduğundan

$$|L_n((f(t) - f(x));x)| \leq |L_n(|f(t) - f(x)|;x)|$$

olarak yazılır. Operatör pozitif ve

$$|f(t) - f(x)| \geq 0$$

olduğundan

$$|L_n(|f(t) - f(x);x|)| = L_n(|f(t) - f(x)|;x)$$

dir. O halde

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|;x) + |f(x)||L_n(1;x) - 1| \qquad (2.7)$$

olduğunu göstermiş olduk. (2.4)'ü kullanarak

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + 2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right) + M_f|L_n(1;x) - 1|$$

olarak bulunur. Diğer taraftan,

$$L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)=L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n(t^2+2tx+x^2;x)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}[L_n(t^2)-x^2-x^2+2x^2-2xL_n(\mathrm{t};x)+x^2L_n(1;x)]$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}[L_n(t^2;x)-x^2+2x^2-2xL_n(\mathrm{t};x)+x^2L_n(1;x)-x^2]$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}[(L_n(t^2;x)-x^2)+2x(x-L_n(\mathrm{t};x))+x^2(L_n(1;x)-1)]$$

yazabiliriz. Son bulunan ifadenin (2.7) de kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}[(L_n(t^2;x)-x^2)+2x(x-L_n(\mathrm{t};x))$$

$$+x^2(L_n(1;x)-1)]+M_f|L_n(1;x)-1| \qquad (2.8)$$

elde edilir. (2.1), (2.2), (2.3) koşullarını (2.8) de kullanarak

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|<\varepsilon$$

olduğu bulunur. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\leq x\leq b}\left||L_n(f(t);x)-f(x)|\right|=0$$

dır. Bu da ispatı tamamlar.

2.4. Sınırlı Operatör

$L{:}X\to Y$ bir operatör olsun. $D(L)\subset X$ L nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f\in D(L)$ için

$$\|L(f;x)\|_Y\leq M\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $M\in\mathbb{R}^+$ varsa L ye $D(L)$ de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X\to Y}=\inf\{M{:}\,\|L(f;x)\|_Y\leq M\|f\|_X\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

2.5. Normlu Uzay

X bir vektör uzayında tanımlanmış $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) $\forall\, x \in X, x \neq 0$ için $\|x\| > 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0$

ii) $\forall\, x \in X$ ve λ skaler ise $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

iii) $\forall\, x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna, X uzayı üzerinde bir norm, X uzayınada normlu uzay denir.

3. AĞIRLIKLI BIR SÜREKLİLİK MODÜLÜ KULLANARAK YAKLAŞIM HIZININ BULUNMASI

Bilindiği gibi, I sonlu (veya sonsuz) aralıktaki düzgün sürekli bir f fonksiyonunun ω süreklilik modülü;

$$\omega(f\,;\,\delta) = \sup_{|t-x|\le\delta} |f(t) - f(x)|, \qquad t, x \in I$$

formülü ile verilir.

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f\,;\,\delta) = 0$$

özelliğine sahip olduğunu belirtelim. Süreklilik modülü polinomlar tarafından, tüm fonksiyonlar tarafından veya genel olarak L_n (*f; x*) dizileri tarafından f fonksiyonuna yaklaşım hızını elde etmek için kullanılır. Burada L_n pozitif lineer operatörlerdir (örneğin, [1,2]).

Sınırsız kümelerdeki bir fonksiyonun sürekliliğinin büyümesini sınırladığını süreklilik modülünün limiti sıfır olduğuna klasik süreklilik modülü sınırsız aralıkta tanımlı fonksiyonlar için yaklaşım sonuçları elde etmede kullanılmaz. Bununla birlikte, ağırlıklı süreklilik modülü tanımı sınırsız aralıktaki fonksiyonlar için verilir.

Örneğin, ℝ'de tanımlanan f sürekli fonksiyon sınıfları için [3] 'te tanıtılan $\tilde{\omega}$ ağırlıklı süreklilik modülünü ele alalım:

$$\tilde{\omega}(f\,;\,\delta) = \sup_{|t-x|\le\delta} \frac{|f(t) - f(x)|}{(1 + |t-x|)^{\sigma}(1 + |x|)^{\sigma}}, \qquad t, x \in \mathbb{R}.$$

bu süreklilik modülü, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{(1+|x|)^{\sigma}}$’ nin var olduğu ve sonlu olduğu fonksiyonların alt sınıfında

$$\lim_{\delta\to 0} \tilde{\omega}(f\,;\,\delta) = 0$$

özelliğine sahiptir. ℝ veya $\mathbb{R}^{+} = [0, \infty)$ 'da tanımlanan sürekli $\rho(x)$ fonksiyonlar için,

$$|t-x| \le \delta \text{ yerine } |\rho(t) - \rho(x)| \le \delta$$

kullanımı süreklilik modülü yeni tip tanımı için uygundur. Beurling sınıfından herhangi bir f fonksiyonunun [5] fonksiyonu ile ilgili olarak sınırlandırılmış olması eşitsizliği karşılar.

Herhangi bir $t, x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq |\rho(t) - \rho(x)|$$

dir. Bu açıktır ki,

$$\sup_{|\rho(t)-\rho(x)|\leq\delta} |f(t)-f(x)| \leq \delta$$

'dir.

$$B_\rho(\mathbb{R}^+) := \{ f : |f(x)| \leq M_f\, \rho(\mathrm{x}) \}$$

kümesini tanımlayalım. Ayrıca

$$C_\rho(\mathbb{R}^+) := \{ f : f \in B_\rho \text{ ve } f \text{ sürekli} \}$$

$$C_\rho^k(\mathbb{R}^+) := \left\{ f : f \in C_p(\mathbb{R}^+) \text{ ve } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f, \text{sabit} \right\}$$

ve

$$C_\rho^0(\mathbb{R}^+) := \left\{ f : f \in C_\rho^k(\mathbb{R}^+) \text{ ve } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = 0 \right\}$$

uzaylarını tanımlayalım.

Bu açıktır ki $C_\rho^k(\mathbb{R}^+) \subset C_\rho(\mathbb{R}^+) \subset B_\rho(\mathbb{R}^+)'$ dir. B_ρ' ye ait f normunu

$$\|f\|_\rho = \sup_{\mathrm{x}\geq 0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, bu uzaylarda pozitif lineer operatörler dizisi için aşağıdaki sonuçlar verilmiştir [6,7] .

Lemma A. Pozitif lineer operatörlerin $(L_n)_{n\geq 1}$ dizisinin $C_\rho(\mathbb{R}^+)$ 'den $B_\rho(\mathbb{R}^+)$ 'ye lineer pozitif bir operatör olması için

$$L_{\mathrm{n}}(\rho; x) \leq K\rho(x)$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesi gerekir. Burada *K* herhangi pozitif sabittir.

Teorem A . Pozitif lineer operatörler dizisi (L_{n})

$$\lim_{x\to\infty} \left\| L_n\left(\rho^{m/2}; x\right) - \rho^{m/2}(x) \right\|_\rho = 0, m = 0,1,2$$

şartlarını yerine getiriyorsa, $f \in C_\rho^k$ $(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x\to\infty} \|L_n f - f\|_\rho = 0$$

’ dir.

Teorem A'da görüldüğü gibi, $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonu sadece sonsuzlukta f’nin ağırlığını karakterize etmekle kalmaz, aynı zamanda Korovkin tipi teoreminde test fonksiyonlarınıda tanımlar. Bu tip diğer teoremler [8,9]'da verilmiştir.
Burada ρ fonksiyonuna bağlı ağırlıklı süreklilik modülünü tanımlayacağız.
$|f(t) - f(x)|$ farkının $|\rho(t) - \rho(x)| \leq \delta$ üzerindeki bağımlılığını vereceğiz. Ayrıca bu süreklilik modülünün karakteristik özelliklerini de inceleyeceğiz. Ayrıca yeni süreklilik modülü ile lineer pozitif operatörler tarafından ρ-normlarda fonksiyonların yaklaşık hızını elde edeceğiz. Şartlartımıza uyan bazı örnekler vereceğiz.

3.1. Ağırlıklı Süreklilik Modülü

ρ ağırlıklı süreklilik modülünü tanımlamak için ρ fonksiyonun aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

(i) ρ, $\mathbb{R}^+$üzerinde sürekli differensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\rho(0) = 1$.

(ii) $\inf_{x\geq 0} \rho'(x) \geq 1$.

(i) ve (ii) şartlarına sahip olan $C_\rho^k(\mathbb{R}^+)$, $C_\rho(\mathbb{R}^+)$ ve $B_\rho(\mathbb{R}^+)$ uzaylarını göz önüne bulunduralım.

Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ ve her $\delta > 0$ için

$$\Omega_\rho(f\,;\,\delta) := \sup_{\substack{x,t\in\mathbb{R}^+ \\ |\rho(t)-\rho(x)|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)} \tag{3.1}$$

Şeklinde tanımlanan $\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$ fonksiyonuna ağırlıklı süreklilik modülü denir.

Her $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ için $\Omega_\rho(f\,;\,\delta) = 0$ olduğunu ve $\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$ fonsiyonunun $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ için negatif olmadığı ve azalmayan fonksiyon olduğu açıktır. Ağırlıklı süreklilik modülü Ω_ρ, klasik süreklilik modülünün özelliklerine benzer bazı özelliklere sahiptir.

Bu özellikler aşağıdaki lemmalarda göstereceğiz.

Lemma 3.1. Eğer $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ ise, $\delta > 0$ için

$$\Omega_\rho(f\,;\,\delta) \leq 2\|f\|_\rho$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ olduğu için, ρ normu tanımından

$$|f(t)-f(x)| \leq \frac{|f(t)|}{\rho(t)}\rho(t) + \frac{|f(x)|}{\rho(x)}\rho(x)$$

$$\leq \|f\|_\rho\rho(t) + \|f\|_\rho\rho(x)$$

$$\leq \|f\|_\rho(|\rho(t)-\rho(x) + \rho(x) + \rho(x)|$$

$$\leq \|f\|_\rho(|\rho(t) - \rho(x)| + 2\rho(x))$$

eşitsizliğin her iki yanı $[|\rho(t) - \rho(x)| + 1]\rho(x)$ ifadesi ile bölünür ise

$$\Omega_\rho(f\,;\,\delta) \leq 2\|f\|_\rho$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.2. Kabul edelimki ρ fonksiyonu (i) ve (ii) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega_\rho\,(\,\rho\,;\,\delta) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (3.1) ile tanımlanan ağırlıklı süreklilik modülü tanımından

$$\begin{aligned}\Omega_\rho(\rho\,;\,\delta) &:= \sup_{\substack{x,t\in\mathbb{R}^+\\ |\rho(t)-\rho(x)|\leq\delta}} \frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)} \\ &\leq \sup_{\substack{x,t\in\mathbb{R}^+\\ |\rho(t)-\rho(x)|\leq\delta}} |\rho(t)-\rho(x)| \\ &\leq \delta\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega_\rho\,(\,\rho\,;\,\delta) = 0$$

elde edilir.

Lemma 3.3. $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ ve $\lambda > 0$ olsun. Bu durumda her $\delta > 0$ için

$$\Omega_\rho(f\,;\,\lambda\delta) \leq (1+\lambda)(1+\delta)\Omega_\rho(f\,;\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $x,t \in \mathbb{R}^+$sabit noktalar olduğunu kabul edelim. $[x, t]$ aralığının bir parçalanması $0 < x = x_1 < x_2 \ldots\ldots\ldots < x_m = t, (m \in \mathbb{N})$ şeklinde olsun. δ düzgün sürekli olduğundan öyle bir $m > 0$ sayısı bulunabilir.

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \mu \text{ olduğunda } |\rho(x_k) - \rho(x_{k-1})| < \delta, (k = 1,2,3 \ldots\ldots m)$$

eşitsizliği sağlanır.

$x < t$ ise;

$$|\rho(t)-\rho(x)| = |\rho(\mathrm{x}_0)-\rho(\mathrm{x}_1)+\rho(\mathrm{x}_1)-\rho(\mathrm{x}_2)+\cdots\rho(\mathrm{x}_{m-1})+\rho(\mathrm{x}_m)|$$

$$\leq |\rho(\mathrm{x}_0)-\rho(\mathrm{x}_1)|+|\rho(\mathrm{x}_1)-\rho(\mathrm{x}_2)|+\cdots|\rho(\mathrm{x}_{m-1})-\rho(\mathrm{x}_m)|$$

yazılabilir.

$$|\rho(\mathrm{x}_0)-\rho(\mathrm{x}_1)| < \delta, |\rho(\mathrm{x}_1)-\rho(\mathrm{x}_2)| < \delta, \ldots, |\rho(\mathrm{x}_{m-1})-\rho(\mathrm{x}_m)| < \delta$$

m tane terim olduğundan

$$|\rho(t)-\rho(x)| \leq \delta+\delta+\cdots\delta = \mathrm{m}\delta \tag{3.2}$$

elde edilir.

$$|f(t)-f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{m} f(\mathrm{x}_{k-1})-f(\mathrm{x}_k)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} |f(\mathrm{x}_{k-1})-f(\mathrm{x}_k)|$$

eşitsizliğini $[|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)$ ifadesi ile çarpıp bölelim:

$$|f(t)-f(x)| \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|f(\mathrm{x}_k)-f(\mathrm{x}_{k-1})|}{[|\rho(\mathrm{x}_k)-\rho(\mathrm{x}_{k-1})|+1]\rho(\mathrm{x}_{k-1})}[|\rho(\mathrm{x}_k)-\rho(\mathrm{x}_{k-1})|+1]\rho(\mathrm{x}_{k-1})$$

elde edilir.

$|\rho(\mathrm{x}_k)-\rho(\mathrm{x}_{k-1})| < \delta$ olduğundan

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+\delta)\Omega_\rho(\mathrm{f};\ \delta)\sum_{k=1}^{m}\rho(\mathrm{x}_{k-1})$$

elde edilir. $x > t$ ise;

$$\sum_{k=1}^{m}\rho(\mathrm{x}_{k-1}) \leq \rho(\mathrm{x}_0)+\rho(\mathrm{x}_1)+\cdots\rho(\mathrm{x}_{m-1})+\rho(\mathrm{x}_m)$$

ifadesinde her bir terime $\rho(\mathrm{x})$ ekleyip çıkaralım:

$$\sum_{k=1}^{m}\rho(x_{k-1}) \leq |\rho(x_0)-\rho(x)| + \rho(x) + |\rho(x_1)-\rho(x)| + \rho(x) + \cdots |\rho(x_m)-\rho(x)| + \rho(x)$$

$$\leq |\rho(x_0)-\rho(x)| + |\rho(x_1)-\rho(x)| + \cdots |\rho(x_m)-\rho(x)| + m.\rho(x)$$

yazabiliriz.

$t > x$ olduğundan $\rho(x_m) \geq, \ \rho(x_{m-1}) \geq, \ \rho(x_{m-2}) \geq, \ldots \rho(x_1) \geq, \rho(x_0)$ olur.

bu durumda,

$$|\rho(x_m)-\rho(x)| + |\rho(x_m)-\rho(x)| + \cdots |\rho(x_m)-\rho(x)| + m.\rho(x)$$

$$\leq m|\rho(x_m)-\rho(x)| + m\rho(x)$$

$$= m\rho(x)\left(\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\rho(x)}+1\right)$$

$$\leq \ m\rho(x)(|\rho(t)-\rho(x)|+1)$$

elde edilir. Yani

$$\sum_{k=1}^{m}\rho(x_{k-1}) \leq \ m\rho(x)(|\rho(t)-\rho(x)|+1)$$

olduğunu göstermiş olduk. Bulunan değerler yerine yazılırsa;

$$|f(t)-f(x)| \leq m(1+\ \delta)\Omega_\rho(f\ ;\ \delta)[|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{|f(t)-f(x)|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)} \leq m(1+\ \delta)\Omega_\rho(f\ ;\ \delta)$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin her iki yanının supremumu alınırsa

$$\Omega_\rho(f\ ;\ m\delta) \leq m(1+\delta)\Omega_\rho(f\ ;\ \delta)$$

elde edilir.

$$\lambda > 0, \lambda \leq [\![\lambda]\!] + 1 \leq \lambda + 1 \text{ olduğundan}$$

$$\Omega_\rho(f\,;\,\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)(1 + \delta)\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$$

olur. İspat tamamlanır.

Sonuç 3.1. $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ ve her pozitif $\delta < 1$ için,

$$\delta \leq \frac{4}{\Omega_\rho(f\,;1)}\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.2'yi kullanalım.

$$\Omega_\rho(f\,;\,1) = \Omega_\rho\left(f\,;\,\delta\frac{1}{\delta}\right)$$

$$\leq (1 + \frac{1}{\delta})(1 + \delta)\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$$

$$= \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)(1 + \delta)\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$$

$$= \frac{(1+\delta)^2}{\delta}(1 + \delta)$$

yazılabilir. $\delta < 1$ olduğundan δ yerine kendinden daha büyük olan 1 yazılırsa

$$\Omega_\rho(f\,;\,1) \leq \frac{2^2}{\delta}\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$$

yani

$$\delta = \frac{4}{\Omega_\rho(\mathrm{f} : 1)}\Omega_\rho(f\,;\,\delta)$$

olur.

Lemma 3.4. Her $f \in C_{\rho}^{k}\ (\mathbb{R}^{+})$ için

$$\lim_{\delta \to 0} \Omega_{\rho}(f\,;\,\delta) = 0$$

' dır.

İspat: $f \in C_{\rho}^{k}\ (\mathbb{R}^{+})$ olduğunundan ρ fonksiyonun özelliklerini kullanırsak

$$\frac{|f(t)-f(x)|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)} = \frac{\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\frac{\rho(t)}{\rho(x)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]}$$

$$= \frac{\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\frac{\rho(t)}{\rho(x)}+\frac{f(t)}{p(t)}-\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]}$$

$$= \frac{\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\left(\frac{\rho(t)}{\rho(x)}-1\right)+\left(\frac{f(t)}{p(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right)\right|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]}$$

$$\leq \frac{\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\left(\frac{\rho(t)}{\rho(x)}-1\right)\right|+\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]}$$

$$= \frac{\|f\|_{\rho}|\rho(t)-\rho(x)|+\omega\left(\frac{f}{\rho},|t-x|\right)}{[|\rho(t)-\rho(x)|+1]}$$

$$\leq \|f\|_{\rho}|\rho(t)-\rho(x)|+\omega\left(\frac{f}{\rho},|t-x|\right)$$

yazılabilir. ω, klasik süreklilik modülüdür. (ii) ve ortalama değer teoreminden

$$|\rho(t)-\rho(x)| \geq |t-x|$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\Omega_{\rho}(f\,;\,\delta) \leq \|f\|_{\rho}\delta+\omega\left(\frac{f}{\rho},\delta\right)$$

ifadesi elde edilir.

$\frac{f}{\rho}$ düzgün sürekli olduğundan,

$$\lim_{\delta\to 0} \omega\left(\frac{f}{\rho}, \delta\right) = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.5. Her bir $f \in C_{\rho}^{k}(\mathbb{R}^{+})$ ve her bir $\mathrm{x}, \mathrm{t} \in [0, \infty)$ için,

$$|\mathrm{f(t)} - \mathrm{f(x)}| \leq 2\rho(x)(1+\delta)^2\left(1+\frac{(\rho(t)-\rho(x))^2}{\delta^2}\right)\Omega_{\rho}(\,f\,;\,\delta) \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada δ herhangi pozitif sabittir.

İspat: $\Omega_{\rho}(\,f\,;\,\delta)$ tanımından;

$$|f(t)-f(x)| \leq [|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)\Omega_{\rho}(\,f\,; |\rho(t)-\rho(x)|)$$

olur.

Lemma 3′ü kullanırsak

$$|f(t)-f(x)| \leq [|\rho(t)-\rho(x)|+1]\rho(x)(1+\ \delta)\left(1+\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}\right)\Omega_{\rho}(f\,;\,\delta)$$

şeklinde yazılabilir.

$|\rho(\mathrm{t})-\rho(\mathrm{x})| \leq \delta$ ise $|\rho(t)-\rho(x)|$ yerine kendisinden daha büyük olan δ yazalım.

$$|f(t)-f(x)| \leq \rho(x)(1+\ \delta)(1+\ \delta)\left(1+\frac{\delta}{\delta}\right)\Omega_{\rho}(f\,;\,\delta)$$

$$= 2\rho(x)(1+\delta)^2\Omega_{\rho}(\,f\,;\,\delta)$$

olduğu görülür.

$|\rho(t)-\rho(x)| \geq\ \delta$ ise $\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta} > 1$ yazabiliriz. O halde

$$|f(t)-f(x)| \leq \rho(x)\left(|\rho(t)-\rho(x)|+\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}\right)(1+\delta)$$

$$.\left(\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}+\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}\right)\Omega_{\rho}(f\,;\,\delta)$$

$$\leq \rho(x)\left(\delta\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}+\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}\right)$$

$$.\,(1+\delta)2\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}\Omega_{\rho}(f\,;\,\delta)$$

$$=\rho(x)\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}\left((1+\delta)(1+\delta)2\frac{|\rho(t)-\rho(x)|}{\delta}\Omega_{\rho}(f\,;\,\delta)\right)$$

$$=2\rho(x)\,(1+\delta)^{2}\frac{(\rho(t)-\rho(x))^{2}}{\delta^{2}}\Omega_{\rho}(f\,;\,\delta)$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi klasik Lipschitz uzayının genelleştirmesi olan $Lip_M\alpha$ uzayını ifade edelim:

Tanım 3.1: $\rho(x)$' in (i) ve (ii) koşullarını sağladığını kabul edelim.

$0<\alpha \leq 1$ ve $M>0$ için,

$$|f(t)-f(x)| \leq M|\rho(t)-\rho(x)|^{\alpha} \quad t,x \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesini $Lip_M\alpha$ ile gösterelim.

$$Lip_M\alpha \subset Lip_M(\rho(x)\,;\,\alpha) \text{ ve } Lip_M\alpha = Lip_M(1+x\,;\,\alpha)$$

olduğu açıktır.

Bu uzay için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

$a)$ $x \geq 0$ için $x \in Lip_1(e^x;\alpha)$.

$b)$ $e^x \in Lip_{1/2}(e^{2x};\alpha)$ dir, fakat $e^x \notin Lip_M 1'$ dir.

(3.1) ve Tanım 3.1'i kullanarak, herhangi bir $f \in Lip_M(\rho(x)\,;\ \alpha)$ için

$$\Omega_\rho(f\,;\ \delta) \leq M\delta^\alpha \tag{3.4}$$

elde edilir. $Lip_1(\rho(x)\,;\ 1)$ uzayı Beurling sınıfı ile çakışır. Beurling sınıfının ayrıntılı tartışması ve daha fazla özelliği [10–12] 'de bulunabilir.

3.2. Ω_ρ İle Yaklaşım Hızı

Teorem 3.1. $(L_n)_{n\geq 1}$ aşağıdaki koşulları sağlayan pozitif lineer operatörler dizisi olsun:

$$\|L_n 1 - 1\|_\rho = \alpha_n\,, \tag{3.5}$$

$$\|L_n\rho - \rho\|_\rho = \beta_n\,, \tag{3.6}$$

$$\|L_n\rho^2 - \rho^2\|_{\rho^2} = \gamma_n\,, \tag{3.7}$$

ki burada α_n , β_n ve γ_n, $n \to \infty$ için sıfır olsun. Bu durumda her $f \in C_p^k(\mathbb{R}^+)$ ve yeterince büyük n için

$$\|L_n f - f\|_{\rho^4} \leq 16\Omega_\rho\left(f\,;\ \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}\right) + \|f\|_\rho \alpha_n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: İlk olarak (3.6) ve (3.7) ve Lemma A'nın bir sonucu olarak $(L_n)_{n\geq 1}$ operatörlerinin $C_\rho(\mathbb{R}^+)'$ dan $B_\rho(\mathbb{R}^+)'$ ya ve $C_{\rho^2}(\mathbb{R}^+)$ 'dan $B_{\rho^2}(\mathbb{R}^+)$ ' ya bir dönüşüm yaptıklarını gösterelim. Unutmayalım ki (3.3) aracılığı ile aşağıdaki:

$$\begin{aligned}|L_n f(t); x - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t); x - L_n(f(x); x) + L_n f(x); x - f(x)| \\ &= |L_n((f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n((1; x) - 1)|\end{aligned}$$

eşitliği yazabiliriz. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq |L_n((f(t) - f(x); x)| + |f(x)||L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer operatörler monoton artan olduğundan,

$$|L_n((f(t)-f(x));x)| \leq |L_n(|f(t)-f(x)|;x)|$$

olur. Operatör pozitif ve

$$|f(t)-f(x)| \geq 0$$

olduğundan

$$|L_n(|f(t)-f(x)|;x)| = L_n(|f(t)-f(x)|;x)$$

' dır. Böylece

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x) + |f(x)||L_n(1;x)-1|$$

olduğunu göstermiş oluruz. Bulunan ifadeyi (3.3)' deki lemmada kullanarak

$$\frac{|L_n f(t);x - f(x)|}{\rho(x)} \leq 4(1+\delta_n)^2 \frac{1}{{\delta_n}^2} L_n(\rho(t)-\rho(x))^2;x)\Omega_\rho(\,f\,;\,\delta_n)$$

$$+\frac{|f(x)|}{\rho(x)}|L_n(1;x)-1| \tag{3.8}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan,

$$L_n(\rho(t)-\rho(x))^2;x) = L_n(\rho(t)^2;x) - 2\rho(x)\big(L_n\rho(x);x-\rho(x)\big) + \rho(x)^2(L_n(1;x)-1)$$

$$\leq |L_n(\rho(t)^2;x)-\rho(x)^2| + 2\rho(x)|L_n\rho(t);x-\rho(x)|$$

$$+\rho(x)^2|L_n 1;x-1|$$

şeklinde bulunan ifadede (3.5), (3.6), (3.7) koşullarını kullanarak, herhangi bir $n \geq 1$ ve $x \geq 0$ için;

$$L_n(\rho(\mathrm{t})-\rho(x))^2;x) \leq \frac{|L_n(\rho(\mathrm{t})^2;\mathrm{x})-\rho(x)^2|}{\rho(x)^2}\rho(x)^2 + 2\rho(x)\frac{|L_n\rho(t);x-\rho(x)|}{\rho(x)}\rho(x)$$

$$+\rho(x)^2\frac{|L_n1;x-1|}{\rho(x)}\rho(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$L_n(\rho(\mathrm{t})-\rho(x))^2;x) \leq \gamma_n\rho(x)^2+2\beta_n\rho(x)^2+\alpha_n\rho(x)^3$$

$$\leq \rho(x)^3(\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n) \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $\delta_n=\sqrt{\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n}$ şeklinde seçilen ve $\delta_n<1,$ ifadesini (3.8) eşitsizliği ve (3.9) eşitsizliğinde yazılırsa;

$$\frac{|L_n(f:x)-f(x)|}{\rho(x)} \leq 4.2^2\frac{1}{\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n}\rho^3(x)(\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n)\Omega_p(\,f\,;\,\delta_n)+\|f\|_\rho\alpha_n$$

$$\leq 16\rho^3(x)\Omega_\rho\left(f:\sqrt{\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n}\right)+\|f\|_\rho\alpha_n$$

elde edelir. ve

$$\frac{|L_n(f:x)-f(x)|}{\rho^4(x)} \leq 16\Omega_\rho\left(f:\sqrt{\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n}\right)+\|f\|_\rho\alpha_n$$

yazabiliriz. O halde

$$\| L_nf\ -\ f\|_{p^4}\ \leq 16\Omega_p\left(\,f\,;\,\sqrt{\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n}\right)+\|f\|_\rho\alpha_n$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2. $f\in Lip_M(\rho(x)\,;\,\alpha)$ $0<\alpha\leq 1$ ve $(3.5)-(3.7)$ koşullarını sağlayan $(L_n)_{n\geq 1}$ pozitif lineer operatörler dizisi için

$$\|L_nf-f\|_{\rho^4}\ \leq 16M(\alpha_n+2\beta_n+\gamma_n)^{\frac{\alpha}{2}}+\|f\|_\rho\alpha_n$$

sağlanır. Burada yeterince büyük n için, M, n' den farklı bağımsız pozitif bir sayıdır. Yakınsama aralığının $n\to\infty$ olarak genişlemesiyle aşağıdaki teorem, $C_\rho^k(\mathbb{R}^+)$ ağırlıklı uzayındaki pozitif lineer operatörlerin dizilerinin yakınsaklığını verir. Bu türden sonuçlar ilk olarak [8] 'de elde edilmiştir.

Teorem 3.2. Teorem 3.1 varsayımları altında, pozitif reel sayılar dizisi η_n

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \rho^{\frac{3}{2}}(\eta_n)\delta_n = 0$$

koşullarını sağlasın. $f \in C_\rho^k(\mathbb{R}^+)$ için

$$\sup_{0\le x\le \eta_n} \frac{|L_n(f:x) - f(x)|}{\rho(x)} \le 16\Omega_\rho\left(f\,;\rho^{\frac{3}{2}}\left(f;\ \rho^{\frac{3}{2}}(\eta_n)\delta_n\right) + \|f\|_\rho \rho^{\frac{3}{2}}(\eta_n)\delta_n\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3.8) içindeki δ_n değerlerini $\rho^{\frac{3}{2}}(\eta_n)$ ile değiştirerek, yukarıda olduğu gibi

$$\delta_n = \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}$$

seçiminde

$$|L_n(f:x) - f(x)| \le 16\rho(x)\frac{1}{\left(\rho^{\frac{3}{2}}(\eta_n)\delta_n\right)^2} L_n(\rho(t)-\rho(x))^2;x)\Omega_\rho\left(f;\rho^{\frac{3}{2}}\left((\eta_n)\delta_n\right)\right)$$

$$+\|f\|_\rho \alpha_n \rho^2(x)$$

ifadesi elde edilir. (3.9) ifadesinde verilen eşitsizlik yerine yazılırsa; tüm $x \in [0, n]$ ve yeterince büyük n için

$$|L_n(f:x) - f(x)| \le 16\frac{\rho(x)}{\rho^3(\eta_n)\delta n}\rho^3(x)\rho^3(\eta_n)\delta_n\Omega_p(f:\rho^{\frac{3}{2}}\left((\eta_n)\delta_n\right)$$

$$+\|f\|_\rho \rho^{\frac{3}{2}}(\eta_n)\delta_n$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{|L_n(f:x) - f(x)|}{\rho(x)} \le 16\Omega_p\left(f;\rho^{\frac{3}{2}}(\eta_n)\delta_n\right) + \|f\|_\rho \rho^{\frac{3}{2}}\left((\eta_n)\delta_n\right)$$

eşitsizliği doğru olur.

Teorem 3.1' den daha genel bir sonuç bulmamız için

her $x \geq 0$ için

$$\psi_1(x) \leq \psi(x) \text{ ve } \psi_2(x) \leq \psi(x)$$

$$\psi(x) = max\big(\psi_1(x), \psi_2(x)\big)$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım.

Teorem 3.3. $\rho(x) \leq \psi_k(x),\ k = 1,2,3$ ve pozitif lineer operatör dizisi $(L_n)_{n\geq 1}$ aşağıdaki şartları sağlasın.

$$\|L_n 1 - 1\|_{\psi_1} = \alpha_n,$$

$$\|L_n \rho - \rho\|_{\psi_2} = \beta_n,$$

$$\|L_n \rho^2 - \rho^2\|_{\psi_3} = \gamma_n$$

α_n , β_n ve γ_n $n \to \infty$ için, 0 dizileri ve $\psi(x)=max\{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)\}$ olsun.

O halde herhangi $f \in C_\rho(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu ve yeterince büyük olan n' ler için

$$\|L_n(f:x) - f(x)\|_{\psi\rho^2} \leq 16\Omega_\rho(f:\sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}) + \|f\|_\rho \alpha_n$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3,9) eşitsizliğinden,

$$L_n(\rho(t) - \rho(x)^2 : x) \leq |L_n(\rho(t)^2; x) - \rho(x)^2| + 2\rho(x)|L_n\rho(t); x - \rho(x)|$$

$$+\rho(x)^2|L_n 1; x - 1|$$

$$= \frac{|L_n(\rho(t)^2; x) - \rho(x)^2|}{\psi_3}\psi_3 + 2\rho(x)\frac{|L_n(\rho; x) - \rho(x)|}{\psi_2}\psi_2$$

$$+\rho(x)^2\frac{|L_n(1:x) - 1|}{\psi_1}\psi_1$$

$$= \gamma_n \, \psi_3(x) + 2\beta_n(x)\psi_2(x) + \alpha_n \psi_1 \rho^2(x)$$

$$\leq \, \psi(x)\rho^2(x)(\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n)$$

elde edilir. Bu ifade Teorem 3.1’de olduğu gibi, seçilen $\delta_n = \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}$ ve $\delta_n < 1$ için, n yeterince büyük olmak üzere (3.8) eşitsizliğinde yazılırsa;

$$\frac{|L_n(f:x) - f(x)|}{\psi(x)\rho^2(x)} \leq 16\Omega_\rho\left(f: \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}\right) + \|f\|_\rho \alpha_n$$

$$\|L_n f \, - \, f\|_{\psi\rho^2} \leq 16\Omega_\rho \left(f: \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}\right) + \| f\|_\rho \alpha_n$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3. Teorem 3.1 ve 3.3 sonuçlarını kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\|L_n f \, - \, f\|_{\rho^4} \, \leq C(f)\Omega_p\left(f \, ; \, \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}\right),$$

$$\|L_n f \, - \, f\|_{\psi\rho^2} \leq C(f)\Omega_\rho\left(f: \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}\right).$$

Burada $C(f), f$' ye bağlı bir sabittir.

3.3. Örnek Ve Uygulamalar

Şimdi yukarıdaki teoremlerin varsayımlarını karşılayan bir pozitif lineer operatör dizisini ele alalım.İlk önce ağırlıklı Korovkin tip teoremini hatırlatalım. (daha genel bir durumda) [7] 'de kanıtlanmıştır.

Teorem B. $\omega\,(x) = 1 + x^2$ olsun ve B_n , $C_\omega(\mathbb{R}^+)$ 'dan $B_\omega(\mathbb{R}^+)$ 'ya bir pozitif lineer operatör dizisi olsun.

$$\|B_n(t^m: x) - x^m\|_\omega \to \, 0, \qquad n \to \infty \text{ (her } m = 0, 1, 2, \text{)}$$

ise tüm $f \in C_\omega^k(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için

$$\|B_n f - f\|_\omega \to \, 0, \qquad n \to \infty$$

dır.

$(L_n)_{n\geq 1}$ pozitif operatörler dizisini

$$L_n(f:x) = \rho^2(x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{\rho^2\left(\frac{k}{n}\right)}\alpha_{k,n}(x) \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\alpha_{k,n}(x)$ negatif olmayan fonksiyon, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$n = 1, 2, \ldots, x \in \mathbb{R}^+$ aşağıdaki koşulları sağlasın.

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k,n}(x) = 1,$

b) $m = 1, 2,$ için $\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^m \alpha_{k,n}(x) - x^m\right\|_{\omega} = 0.$

Basit hesaplamalarla

$$L_n(1,x) - 1 = \rho^2(x)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\rho^2\left(\frac{k}{n}\right)}\alpha_{k,n}(x) - \frac{1}{\rho^2(x)}\right],$$

$$L_n(\rho,x) - \rho(x) = \rho^2(x)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\rho\left(\frac{k}{n}\right)}\alpha_{k,n} - \frac{1}{\rho(x)}\right],$$

$$L_n(\rho^2,x) - \rho^2(x) = \rho^2(x)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k,n} - 1\right] = 0$$

oldukları görülür.

$\frac{1}{\rho(x)}$ ve $\frac{1}{\rho^2(x)}$ fonksiyonları sınırlı olduğundan, Teorem B

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^2\left(\frac{k}{n}\right)} \alpha_{k,n}(x) - \frac{1}{\rho^2(x)} \right\|_{\omega} \to 0,$$

$$n \to \infty \text{ iken } \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho\left(\frac{k}{n}\right)} \alpha_{k,n}(x) - \frac{1}{p^2(x)} \right\|_{\omega} \to 0$$

olduğunu verir. Dolayısıyla

$$\alpha_n = \|L_n(1,x) - 1\|_{\rho^2\omega} \to 0,$$

$$\beta_n = \|L_n(\rho,x) - \rho\|_{\rho^2\omega} \to 0,$$

$$n \to \infty \text{ iken } \gamma_n = \|L_n(\rho^2,x) - \rho^2\|_{\rho^2\omega} \to 0$$

olur. Böylece Teorem 3.3' ün varsayımları, (3.10) operatörleri için sağlanır. Sonuç 3.1'i kullanarak, her $f \in C_{\rho}^{k}(\mathbb{R}^{+})$için

$$\|L_n(f,x) - f\|_{\rho^4\omega} \leq C(f)\Omega_\rho(f; \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n})$$

elde edilir.

Önerme 3.1. $(L_n)_{n\geq 1}$, (3.5) - (3.7) koşullarını sağlayan, $C_{\rho^2}(\mathbb{R}^+)$'den $B_{\rho^2}(\mathbb{R}^+)$'ye pozitif lineer operatörler dizisi olsun. O halde

$$\|L_n(\rho(t) - \rho(x))^2;\ x)\|_{\rho^3} \to 0 \qquad (3.11)$$

$$n \to \infty \text{ iken } \|L_n(|\rho(t) - \rho(x)|;\ x)\|_{\rho^2} \to 0 \qquad (3.12)$$

olur.

İspat:(3.11) , (3.5) - (3.7) ve (3.9) koşullarının doğrudan bir sonucudur.

$L_n(|\rho(t) - \rho(x)|; x) \leq \sqrt{L_n(\rho(t) - \rho(x))^2; x)L_n(1; x)}$ olduğu için, (3.12), (3.11)’ den elde edilir.

Önerme 3.2. Önerme 3.1'in koşulları altında;

$$\left\|L_n\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\right\|_\rho \to 0, \quad \left\|L_n\frac{1}{\sqrt{\rho}}-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right\|_\rho \to 0, \quad \left\|L_n\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\right\|_\rho \to 0$$

elde edilir. Basit hesaplamalarla

$$\left|L_n\left(\frac{1}{\rho(t)}\;;x\right)-\frac{1}{\rho(x)}\right| \le \frac{L_n(\left|\rho(t)\right)-\rho(x)\right|;x)}{\rho(x)}+\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho(x)},$$

$$\left|L_n\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\;;x\right)-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right| \le \frac{L_n(\left|\rho(t)\right)-\rho(x)\right|;x)}{\rho(x)}+\frac{|L_n(1;x)-1|}{\sqrt{\rho(x)}},$$

ve

$$\left|L_n\left(\frac{1}{\rho^2(t)}\;;x\right)-\frac{1}{\rho^2(x)}\right| \le \frac{L_n\left(|\rho(t)-\rho(x)|\left(\frac{\rho(t)}{\rho(x)\rho^2(t)}+\frac{\rho(x)}{\rho(x)\rho^2(t)}\right);x\right)}{\rho(x)}$$

$$+\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho^2(x)}$$

$$\le 2\frac{L_n(|\rho(t)-\rho(x)|;x)}{\rho(x)}+\frac{|L_n(1;x)-1|}{\rho^2(x)}$$

oldukları görülür. Bu neden ile;

$$g_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\,,g_1(t)=\frac{1}{\rho(t)}\text{ve}g_3(t)=\frac{1}{\rho^2(t)}\text{alarak,}$$

$$\|L_n(g_k)-g_k\|_\rho \le 2\|L_n|\rho(t)-\rho(x)|;x\|_{\rho^2}+\|L_n(1;x)-1\|_\rho$$

ifadesi elde edilir. İspat (3.5) ve (3.12) koşullarını takip ederek yapılır.

Sonuç 3.4. (3.5) - (3.7) koşullarındaki 1, ρ, ρ^2 ile 1, $\sqrt{\rho}$, ρ yer değiştirerek Önerme 3.1 ve 3.2 bir dizi operatörün inşası için kullanılabilir. Örneğin, B_n koşulları sağlayan pozitif lineer operatörlerin dizisi ise

$$m=0,1,2 \text{ için } \lim_{n\to\infty}\|B_n(t^m;x)-x^m\|_\omega=0$$

ve $\omega(x) = 1 + x^2$ olsun.

$$D_n(f;x) = \frac{\rho(x)}{\omega(x)} B_n\left(\omega(t)\frac{f(t)}{\rho(t)};x\right)$$

$C_\rho(\mathbb{R}^+)$ 'dan $B_\rho(\mathbb{R}^+)$ ' ya dönüşüm yapan pozitif lineer operatörlerin istenen yapısıdır.

4. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER ARACILIĞIYLA DÜZGÜN AĞIRLIKLI YAKLAŞIM

Bu bölümde, lineer pozitif operatörler ile bir ağırlıklı uzayda tanımlı fonksiyona düzgün yakınsama şartlarını araştıracağız. Ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile bu yakınsaklığın hızını hesaplayacağız. Elde edilen sonuçların Szász ve Baskakov operatörlerine uygulamalarını elde edeceğiz.

$I \subseteq \mathbb{R}$ kompakt olmayan bir aralık olsun ve $\rho : I \to [1,\infty)$ ağırlık fonksiyonu artan ve türevlenebilen fonksiyon olsun. $B_\rho(I)$ her $x \in I$ için,

$$|f(x)| \leq M\rho(x)$$

$M > 0$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı olmak üzere bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in I} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

eşitliği ile verilir.

$C_\rho(I) = C(I) \cap B_\rho(I)$ olsun. $C_\rho(I)$ ve $B_\rho(I)$ sürekli fonksiyonları içeren alt uzay olmak üzere $(A_n)_{n\geq 1}$, $C_\rho(I)$ ağırlıklı uzay üzerinde tanımlanan bir pozitif lineer operatör dizisi olsun. $A_n, C_\rho(I)$ dan $B_\rho(I)'$ya tanımlı lineer pozitif operatör olması için gerek ve yeter koşul $A_n\rho \in B_\rho(I)'$dir.

[19] da ağırlıklı uzaylarda yakınsaklık problemlerinin aşağıdaki gibi sıralanabileceği söylenmiştir:

1. $A_n : \mathcal{F} \to C(I)$ pozitif lineer operatör dizisi, $\mathcal{F}$, $\mathbb{R}$ nin lineer bir alt uzayı olsun. A_n, operatörü hangi şartlar altında $C_\rho(I) \cap \mathcal{F}$ uzayından $C_\rho(I)$ uzayına dönüşüm yapan sınırlı bir operatördür?

2. Hangi $f \in C_\rho(I)$ fonksiyonları için, $n \to \infty$ iken $\|A_n - f\|_\rho \to 0$ yakınsaması sağlanır?

3.Ağırlıklı yaklaşım için hangi süreklilik modülleri uygundur?

Biz bu bölümde bu üç probleme bazı cevaplar vereceğiz.

Verilen A_n lineer pozitif operatörler dizisi için, $\|A_n - f\|_\rho \to 0$ yakınsaması gerçekleşecek şekilde $C_\rho(I)$ uzayına ait f fonksiyonunu karakterize edeceğiz. Daha sonra $A_n - f$ yakınsamasının hızını uygun süreklilik modulü yardımı ile vereceğiz. Aşağıdaki $f \in B(I)$ için süreklilik modülünü kullanacağız: Son olarak elde edilen sonuçların Szász-Mirakjan ve Baskakov operatörleri için uygulamalarını elde edeceğiz.

$$\omega_\varphi(f\,;\,\delta) = \sup_{\substack{x,t\in\mathbb{R}^+ \\ |\varphi(t)-\varphi(x)|\le\delta}} |f(t) - f(x)|$$

$f \in B(I)$, için burada φ :I→J, (J C ℝ) $\varphi' > 0$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyondur. Bu ağırlıklı süreklilik modülü klasik süreklilik modülünün özelliklerini sağlar.

$$\omega_d(f\,;\,\delta) = \sup\{|f(t) - f(x)| : t, x \in X, d(t,x) \le \delta\},$$

burada f, X üzerinde tanımlanmış sınırlı bir fonksiyondur ve (X,d) kompakt bir metrik uzaydır.Bu genel süreklilik modülü ile ilgili detaylar için bakınız([20], [27]ve [32]).

$\omega_\varphi(\mathrm{f}\,;\,\delta)$ özel modülü $\mathrm{d(t,x)} = |\varphi(t) - \varphi(x)|$ olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir.([29])

Önerme 4.1: f $\in B(I)$ve $\delta > 0$ olsun.

(i) $\omega_\varphi(f\,;\,\delta) = \omega(f \circ \varphi^{-1}, \delta)$ eşitliği doğrudur. Burada ω klasik süreklilik modülüdür.

(ii) $(\delta_n)_{n\ge1}$ 0'a yakınsak pozitif sayılar dizisi olmak üzere, J üzerinde $f \circ \varphi^{-1}$ düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart $\omega_\varphi(f\,;\,\delta_n) \to 0$ olmasıdır.

(iii) Her $t, x \in I$ için, $|f(t) - f(x)| \le \left(1 + \frac{|\varphi(t)-\varphi(x)|}{\delta}\right) \omega_\varphi(f\,;\,\delta)$ eşitsizliği sağlanır.

4.1. Ana Sonuçlar

Teorem 4.1: $A_n : C_\rho(I) \to B_\rho(I)$ sabit fonksiyonları koruyan ve koşulları sağlayan pozitif lineer operatörler olsun,

$$\sup_{x\in I} A_n(|\varphi(t) - \varphi(x)|, x) = a_n \to 0, \qquad (n \to \infty) \tag{4.1}$$

$$\sup_{x\in I}\frac{A_{\mathrm{n}}(|\rho(t)-\rho(x)|,x)}{\rho(\mathrm{x})}=b_{\mathrm{n}}\to 0\ \ (n\to\infty) \tag{4.2}$$

şartları sağlansın. Eğer $A_{\mathrm{n}}(f,x)$ sürekli türevlenebilir fonksiyon ve $K(f,p,n)$ sabit olmak üzere her $t,x\in I$ için

$$\frac{|(A_{\mathrm{n}}f)'(x)|}{\varphi'(x)}\leq K(f,p,n)\rho(x), \tag{4.3}$$

ve ρ ve φ, α> 0 sabiti olacak şekilde her $x\in I$ için,

$$\frac{\rho'(\mathrm{x})}{\varphi'(x)}\leq \alpha\rho(\mathrm{x}) \tag{4.4}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) $n\to\infty$ için $\|\mathrm{A_n}-f\|_{\rho}\to 0.$

(ii) $\frac{f}{\rho}\,o\,\varphi^{-1}$, J aralığı üzerinde düzgün süreklidir.

Ayrıca, her $n\geq 1$ için,

$$\|A_n-\mathrm{f}\|_{\rho}\leq b_n\|f\|_{\rho}+2\omega_{\varphi}\left(\frac{f}{\rho},a_n\right) \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (ii) 'nin (i)' yi gerektirdiğini ispatlayalım. Önerme 1.1'in (ii)’yi kullanarak, f ∈ $C_{\rho}(I)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}|f(t)-f(x)|&=\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\rho(t)-\frac{f(x)}{\rho(x)}\rho(x)\right|\\&=\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\rho(t)-\frac{f(t)}{\rho(t)}\rho(x)+\frac{f(t)}{\rho(t)}\rho(x)-\frac{f(x)}{\rho(x)}\rho(x)\right|\\&=\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\big(\rho(t)-\rho(x)\big)+\rho(x)\left(\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right)\right|\end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliğini kullanırsak,

$$|f(t)-f(x)|\leq\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}\big(\rho(t)-\rho(x)\big)\right|+\left|\rho(x)\left(\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right)\right|$$

$$\leq \frac{|f(t)|}{\rho(t)}|\rho(t)-\rho(x)|+\rho(x)\left|\frac{f(t)}{\rho(t)}-\frac{f(x)}{\rho(x)}\right|$$

elde edilir. $f \in C_{\rho}(I)$ olduğundan,

$$|f(t)-f(x)| \leq \|f\|_{\rho}|\rho(t)-\rho(x)|+\rho(x)\left(1+\frac{|\varphi(t)-\varphi(x)|}{\delta}\right)\omega_{\varphi}\left(\frac{f}{\rho};\ \delta_n\right)$$

elde edilir. A_{n} pozitif lineer operatörünü yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa,

$$\frac{|A_n(f,x)-f(x)|}{\rho(\mathrm{x})} \leq \|f\|_{\rho}\frac{A_n(|\rho(\mathrm{t})-\rho(\mathrm{x})|,x)}{\rho(\mathrm{x})}$$
$$+\left(1+\frac{A_n|\varphi(t)-\varphi(x)|,\mathrm{x}}{\delta_n}\right)\omega_{\varphi}\left(\frac{f}{\rho};\ \delta_n\right),$$

yazılabilir. Eşitsizliğinin her iki yanının $x \in I$ için supremumu alınırsa ve (4.1), (4.2) kullanılırsa,

$$\|\mathrm{A_n f}-\mathrm{f}\|_{\rho} \leq \|f\|_{\rho}\sup_{x\in I}\frac{A_{\mathrm{n}}(|\rho(t)-\rho(x)|;x)}{\rho(\mathrm{x})}$$
$$+\left(1+\frac{1}{\delta_n}\sup_{x\in I}A_n(|\varphi(t)-\varphi(x)|;\mathrm{x})\right)\omega_{\varphi}\left(\frac{f}{\rho};\ \delta_n\right)$$
$$=\|f\|_{\rho}\mathrm{b}_n+(1+\frac{1}{\delta_n}a_{\mathrm{n}})\omega_{\varphi}\left(\frac{f}{\rho};\ \delta_n\right)$$

yazılabilir. Eğer $\delta_n = a_{\mathrm{n}}$ seçilirse istenilen eşitsizlik elde edilir.

Çünkü $a_{\mathrm{n}} \to 0$ ve $\frac{f}{\rho} o\ \varphi^{-1}$ J üzerinde düzgün sürekli olduğundan $n \to \infty$ için,

$\omega_{\varphi}\left(\frac{f}{\rho};\ a_{\mathrm{n}}\right) \to 0$ ve $\mathrm{b}_n \to 0$ olduğu için $\|A_n f - f\|_{\rho} \to 0$ elde ederiz.

Şimdi (i) 'nin (ii)' yi gerektirdiğini ispatlayalım.

Biliyoruz ki;

$$\omega_{\varphi}\left(\frac{f}{\rho};\ \delta_n\right) \leq \omega_{\varphi}\left(\frac{f-A_n f}{\rho},\delta_n\right)+\omega_{\varphi}\left(\frac{A_n f}{\rho};\ \delta_n\right)$$
$$\leq \|f-A_n f\|_{\rho}+\omega_{\varphi}\left(\frac{A_n f}{\rho};\ \delta_n\right)$$

dir. Bu durumda $\omega_{\varphi}\left(\frac{A_n f}{\rho};\ \delta_n\right) \to 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Cauchy ortalama değer teoremini uygulayarak, $\mathrm{x} \in I$ ve $t \in I$ arasında en az bir c vardır, öyleki

$$\varphi'(c)\left[\frac{A_n(f,t)}{\rho(t)}-\frac{A_n(f,x)}{\rho(x)}\right]=\left(\frac{A_nf}{\rho}\right)'(c)[\varphi(t)-\varphi(x)]$$

olur. Süreklilik modülünün tanımı ve yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa,

$$\omega_\varphi\left(\frac{A_n f}{\rho};\ \delta_n\right)=\sup_{\substack{x,t\in\mathbb{R}^+\\ |\varphi(t)-\varphi(x)|\le\delta_n}}\left|\frac{A_n(f,t)}{\rho(t)}-\frac{A_n(f,x)}{\rho(x)}\right|\le\left\|\frac{1}{\varphi'}\left(\frac{A_nf}{\rho}\right)'\right\|\delta_n$$

elde edilir.

$\delta_n\to 0$ ve $\left\|\frac{1}{\varphi'}\left(\frac{A_nf}{\rho}\right)'\right\|$ sonlu olduğundan $\omega_\varphi\left(\frac{A_n f}{\rho};\ \delta_n\right)\to 0$

olur. Ama , her $f\in C_\rho(I)$ ve her $n\ge 1$için,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\varphi'}\left(\frac{A_nf}{\rho}\right)'\right\| &= \left\|\frac{1}{\varphi'}\left(\left(\frac{A_nf}{\rho}\right)'-\frac{A_nf\rho'}{\rho^2}\right)\right\|\\ &\le \left\|\frac{1}{\varphi'\rho}(A_nf)'\right\|+\left\|\frac{A_nf}{\rho}\frac{\rho'}{\varphi'\rho}\right\|\\ &\le \left\|\frac{1}{\varphi'\rho}(A_nf)'\right\|+\|A_nf\|_\rho\left\|\frac{\rho'}{\varphi'\rho}\right\|\\ &\le \left\|\frac{1}{\varphi'\rho}(A_nf)'\right\|+\|f\|_\rho\|A_n\rho\|_\rho\left\|\frac{\rho'}{\varphi'\rho}\right\|\\ &\le \left\|\frac{(A_nf)'}{\rho\varphi'}\right\|+\|f\|_\rho\|A_n\rho\|_\rho\left\|\frac{\rho'}{\rho\varphi'}\right\|\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4) eşitsizliklerinden dolayı $\left\|\frac{1}{\varphi'}\left(\frac{A_nf}{\rho}\right)'\right\|$ sonlu olur.

Önerme 4.2: $\rho(x)=1$ için Teorem 4.1'in sonucu, Totik [35], de la Cal ve Carcamo [22] ve Holhoş [30] tarafından elde edilmiştir.

Önerme 4.3: φ fonksiyonu verilen pozitif lineer operatör dizisine bağlıdır. Aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\theta'(x)\sqrt{A_n((t-x)^2,x)}\le K_n,$$

burada K_n, x'e bağlı olmayan bir sabittir, ve θ (4.3) ve (4.4) şartlarını sağlar. Daha sonra, Teorem 4.1'den (i) ⇒ (ii) ifadesinin argümanı ile, $\frac{f}{\rho}o\,\theta^{-1}$ düzgün sürekli olduğunu elde ettik. Ancak, çoğu durumda, θ^{-1} 'in karmaşık bir şekli vardır ve ilişkinin (4.1) kanıtlanması zordur. Bunun üstesinden gelmek için, φ'yi θ o $φ^{-1}$ un düzgün bir şekilde sürekli olacağını kabul edeceğiz. Böylece, $\frac{f}{\rho} o\ θ^{-1}$ düzgün sürekli fonksiyon olduğunu görürüz.

Önerme 4.4: (4.4) bize φ fonksiyonu ile ρ ağırlık fonksiyonu arasındaki ilişkiyi verir. Gerçektende

$$\text{her } x \in I \text{ için}, \rho(\mathrm{x}) \leq Me^{\alpha φ(\mathrm{x})}, \tag{4.6}$$

burada $M, \alpha>0$, x'ten bağımsız sabitlerdir. Böylece, Teorem 4.1'in geçerli olduğu ρ ağırlıkları elde edilir.

$$\frac{\rho'(\mathrm{x})}{\rho(\mathrm{x})} \leq \alpha φ'(\mathrm{x})$$

yazılabilir. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\ln\rho(\mathrm{x}) \leq \alpha φ(\mathrm{x})$$

olur. Yani $\rho(\mathrm{x}) = e^{\alpha φ(\mathrm{x})}$ eşitliği doğrudur.

Önerme 4.5: Maksimum ağırlık sınıfı $\rho(\mathrm{x}) = e^{\alpha φ(\mathrm{x})}$'dir. Teorem sonucunu bu ağırlık için kanıtlamak amacıyla,ilk önce aşağıdaki

$$A_n(f, x) \leq C_{\alpha}\rho(\mathrm{x})$$

eşitsizliği kanıtlayalım.

$A_{\mathrm{n}}: C_{\rho}(I) \to B_{\rho}(I)$ olması gerektiğinden $f \in C_{\rho}(I)$ için,

$$\begin{aligned} A_n(f)(x) &= A_n(\frac{f}{\rho}\rho)(x) \\ &\leq \|f\|_{\rho} A_n(\rho)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. $A_{\mathrm{n}}(f) \in B_{\rho}(I)$ olması için,

$$A_{\mathrm{n}}(f)(x) \leq C_{\alpha}\rho(\mathrm{x})$$

olmalıdır. Her $x \in I$ ve her $α > 0$ için, (burada $C_{\alpha} > 0$, x'ten bağımsız bir sabittir.)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathrm{x}\in \mathrm{I}} A_n(|φ(t) - φ(x)|^2, \mathrm{x}) = 0, \tag{4.7}$$

olduğunu kanıtlayalım. Pozitif lineer operatörler için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak,

$$a_n = \sup_{x\in I} A_n(|\varphi(t) - \varphi(x)|, x) \le \sup_{x\in I} \sqrt{A_n\left(\left(\varphi(t) - \varphi(x)\right)^2, x\right)}$$

dizisinin 0'a yakınsak olduğunu elde ederiz. Geometrik-Logaritmik-Aritmetik ortalama eşitsizliğini kullanarak (bkz. [19, s. 40])

$$\sqrt{u.v} \le \frac{u-v}{\ln u - \ln v} \le \frac{u+v}{2} \qquad 0 < v < u, \tag{4.8}$$

elde ederiz. $u = e^{\alpha\varphi(t)}, v = e^{\alpha\varphi(x)}$ için

$$\left|e^{\alpha\varphi(t)} - e^{\alpha\varphi(x)}\right| \le \frac{e^{\alpha\varphi(t)} + e^{\alpha\varphi(x)}}{2}\alpha|\varphi(t) - \varphi(x)| \text{ her } t, x \in I,$$

elde ederiz. Ve

$$b_n = \sup_{x\in I} \frac{A_n(|\rho(t) - \rho(x)|, x)}{\rho(x)}$$

$$\le \sup_{x\in I} \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{A_n\left(\rho(t) - \rho(x)\right)^2, x}}{\rho(x)} \left(A_n(|\varphi(t) - \varphi(x)|^2, x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \sup_{x\in I} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{A_n(\rho^2(t), x)}{\rho^2(x)} + 2\frac{A_n(\rho, x)}{\rho(x)} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(A_n(|\varphi(t) - \varphi(x)|^2, x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\sqrt{C_{2\alpha} + 2C_\alpha + 1} \sup_{x\in I}\left(A_n(|\varphi(t) - \varphi(x)|^2, x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.(4.7) doğru ise, $(b_n)_{n\in N}$, 0' a yakınsar.Teorem 4.1'in sonucunu elde etmek için, (4.3)' ün kanıtlanması yeterlidir.

4.2. Uygulamalar

Lemma 4.1: Her α > 0 ve $\rho(x) = e^{\alpha\sqrt{x}}$ için,

$$S_n f(x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), x \in [0, \infty),$$

şeklinde tanımlanan Szász -Mirakjan operatörleri $C_\rho[0,\infty)'$dan $B_\rho[0,\infty)'$a bir dönüşümdür.

İspat: Her $x \ge 0$ için $S_n(\rho, x)$ operatörünü göz önüne alalım. Açıktır ki,

$$S_n(\rho,x) = e^{-\mathrm{n}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\alpha\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}} \leq\ e^{-\mathrm{n}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\alpha\frac{k}{\sqrt{n}}} = e^{nxe^{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}}-nx}$$

olur. S_nf, $[0,1]'$de f'ye düzgün yakınsadığını biliyoruz. ($[13]'$e bakınız)

Her x ≥ 1 için $S_n\rho(x) \leq C_{2,\alpha}\rho(x)$ olduğunu ispatlayalım.

Açıktır ki,

$$\frac{S_n(e^{\alpha\sqrt{t}},x)}{e^{\alpha\sqrt{x}}} =\ e^{-\mathrm{n}x}\sum_{k>nx}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{n}}-\sqrt{x}\right)} +\ e^{-\mathrm{n}x}\sum_{k\leq nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{e^{\alpha\sqrt{\frac{k}{n}}}}{e^{\alpha\sqrt{x}}}$$

$$k > nx \text{ ise } \frac{k}{n} > x, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} > \sqrt{x} \text{ ve } \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{x}} > 1$$

ve

$$k \leq nx \text{ ise } \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{x} \text{ olduğundan,}$$

$$\frac{S_n(e^{\alpha\sqrt{t}},x)}{e^{\alpha\sqrt{x}}} \leq\ e^{-\mathrm{n}x}\sum_{k>nx}\frac{(nx)^k}{k!}e^{\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\left(\frac{k}{n}-x\right)} +\ e^{-\mathrm{n}x}\sum_{k\leq nx}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$\leq e^{\mathrm{n}x\left(e^{\frac{\alpha}{n\sqrt{x}}}-1\right)-\alpha\frac{x}{\sqrt{x}}} + 1$$

elde edilir. $e^t - 1 \leq\ te^t$eşitsizliğini kullanarak, her $x \geq 1$ ve her $n \geq 1$ için

$$\frac{S_n(e^{\alpha\sqrt{t}},x)}{e^{\alpha\sqrt{x}}}\ \leq\ e^{-\mathrm{n}x\frac{\alpha}{\mathrm{n}\sqrt{x}}e^{\frac{\alpha}{\mathrm{n}\sqrt{x}}}-\frac{\alpha x}{\sqrt{x}}} + 1 \leq e^{\alpha\sqrt{x}\frac{\alpha}{\mathrm{n}\sqrt{x}}e^{\frac{\alpha}{\mathrm{n}\sqrt{x}}}} + 1 \leq e^{\alpha^2 e^{\alpha}} + 1$$

elde edilir. Buradan

$$\|S_n\rho\|_\rho = \sup_{x\geq 0}\frac{S_n(\rho,x)}{(\rho,x)}\ \leq C_\alpha \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sonuca göre S_n operatörü $C_\rho(I)$ dan $B_\rho(I)$'ya dönüşüm yapan lineer pozitif operatördür. Buradaki $C_\alpha > 0$, α'ya bağımlı, ancak n'den bağımsız bir sabittir.

Sonuç 4.1. $\alpha > 0$ ve $\rho(x) = e^{\alpha\sqrt{x}}$ sayısı için, Szász-Mirakjan operatörleri
S_n: $C_\rho[0,\infty) \to C_\rho[0,\infty)$

$$n \to \infty \text{ için}, \|S_n f - f\|_\rho \to 0$$

özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $f(x^2)e^{-\alpha x}$ fonksiyonu $[0,\infty)$üzerinde düzgün sürekli olmasıdır.

$$\left(\frac{f}{\rho} o\varphi^{-1}\right)(x) = \frac{f(x)}{e^{\alpha\sqrt{x}}} o x^2 = f(x^2)e^{-\alpha x}$$

olur, ayrıca, $f \in C_p[0,\infty)$ için

$$\text{her } n \geq 1, \|S_n f - f\|_\rho \leq \|f\|_\rho \frac{\alpha C}{\sqrt{n}} + 2\omega\left(f(t^2)\, e^{-\alpha t}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

'dir. Burada,

$$C = \sup_{n\in\boldsymbol{N}} \frac{1}{2}\sqrt{\|S_n\rho^2\|_{\rho^2} + 2\|S_n\rho\|_\rho + 1}$$

α ya bağlı sabittir.

İspat: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $\rho(x) = e^{\alpha\sqrt{x}}$ için,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ve } \rho'(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{\alpha\sqrt{x}}$$

olduğundan

$$\frac{\rho'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{\alpha\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \alpha e^{\alpha\sqrt{x}} \leq \alpha\rho(x)$$

elde edilir. (4.4) sağlanır.

$$S_n(1,x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}1 = e^{-nx}\,e^{nx} = 1,$$

$$S_n(t,x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}, (k \to k+1)$$

$$= xe^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= x\,e^{-nx}\,e^{nx}$$

$$= x$$

dir. Ayrıca

$$S_n(t^2,x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(nx)^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^k x^k}{k!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}$$

$$= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}$$

$$= e^{-\mathrm{n}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right)$$

$$= e^{-\mathrm{n}x}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right)$$

$$= e^{-\mathrm{n}x}\left(\sum_{\substack{k=2\\k\to k+2}}^{\infty}\frac{n^{k-2}x^{k-2}x^2}{(k-2)!}+\sum_{\substack{k=1\\k\to k+1}}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right)$$

$$= e^{-\mathrm{n}x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{(k)!}+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{(k)!}\right)$$

$$= x^2\, e^{-\mathrm{n}x}\, e^{\mathrm{n}x}+\frac{x}{n}\, e^{-\mathrm{n}x}\, e^{\mathrm{n}x}$$

$$= x^2+\frac{x}{n}$$

dir.

$S_n(t^2,x) = x^2+\frac{x}{n}$ olup, $S_n(t^2,x) \rightrightarrows x^2$, (n→ ∞) elde ederiz.

$$S_n((t-x)^2,x) = S_n(t^2,x) - 2xS_n(t,x) + x^2 S_n(1,x)$$

eşitliğinde daha önce hesablanan $S_n(t^2,x)$, $S_n(t,x)$ ve $S_n(1,x)$ değerleri yerine yazılırsa,

$$S_n((t-x)^2,x) = x^2+\frac{x}{n} - 2xx + x^2 1 = \frac{x}{n}$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi (4.7) ifadesini kullanarak kanıtlayalım.

$$\sup_{x\geq 0} S_n(|\varphi(t)-\varphi(x)|^2,x) = \sup_{x\geq 0} S_n\left(\frac{|t-x|^2}{\left(\sqrt{t}+\sqrt{x}\right)^2},x\right)$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} \frac{S_n(|t-x|^2, x)}{x} = \frac{1}{n}$$

olur. $f \in C_p(\mathrm{I})$ fonksiyonu için $(Sn\, f)'(x)$ türevi aşağıdakileri sağlar:

$$(S_n f)'(x) = -ne^{-\mathrm{n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) + e^{-\mathrm{n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(nx)^{k-1}}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ve

$$(S_n f)'(x) = -ne^{-\mathrm{n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) + e^{-\mathrm{n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(nx)^k}{nxk!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$|(S_n f)'(x)| = \left| \frac{n}{x} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right) e^{-\mathrm{n}x} \frac{(nx)^k}{k!} \right|$$

$$= \left| \frac{n}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{\rho\left(\frac{k}{n}\right)} \rho\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right) e^{-\mathrm{n}x} \frac{(nx)^k}{k!} \right|$$

$$\leq \frac{n}{x} \|f\|_\rho S_n(\rho(t)|t-x|, x)$$

yazılabilir.

$S_n(\rho(t), x) \leq C_{2\alpha}\rho(x)$ olduğundan,

$$|(S_n f)'(x)| \leq \sqrt{C_{2\alpha}} \|f\|_\rho\, \rho(x) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x}}$$

‘dir. Hölder eşitsizliğinden,

$$S_n(\rho(t)|t-x|, x) \leq \sqrt{S_n(\rho^2, x)}.\sqrt{S_n((t-x)^2, x)} \leq \sqrt{C_{2\alpha}}\rho(x)\sqrt{\frac{x}{n}}$$

yazılabilir. Her $x \geq 0$için,

$$\frac{|(S_n\, f)'(x)|}{\varphi'(x)} \leq C_{f,n,\alpha}\, \rho(x),$$

ifadesini elde ederiz. Böylece (4.3) kanıtlanmış olur.

Önerme 4.6. $\alpha = 0$ olan sınır durumu için (4.2)'nin sonucu [33], [35], [22] ve [30] 'de elde edilmiştir.

Önerme 4.7. [28]'da $S_n(f,x)$ 'nin $f(x) = O\left(e^{\alpha x \ln x}\right), \alpha > 0$ özelliğine sahip her fonksiyon için mevcut olduğunu ve $S_n f$ $[0,\infty)$ aralığının kompakt altkümelerinde eşit olarak f düzgün yakınsaklığı kanıtlanmıştır. [17] 'de Becker, polinom ağırlığı $\rho(x) = 1 + x^{N}, N \in \mathbb{N}$ için Szász-Mirakjan operatörlerini kullanarak fonksiyonların global olarak yaklaştırılmasını incelemiştir. Becker, Kucharsky ve Nessel [18]'da $\rho(x) = e^{\beta x}$ üstel ağırlık için global yaklaşımı incelemiştir. Ama

$$\sup_{x\geq 0} \frac{v(e^{\beta t}, x)}{e^{\beta x}} = \sup_{x\geq 0} e^{nx\left(e^{\frac{\beta}{n}}-1\right)-\beta x} = +\infty ,$$

olmasından dolayı sadece $C_{\eta} = \cap_{\beta>\eta} C_{\beta}$ uzayı için sonuç almışlardır, burada C_{β}, $\rho = e^{\beta x}$ için C_{ρ}'dir. Ayrıca, Herhangi bir $f \in C_{\beta}$ için $S_n\, f \in C_{\gamma}$'ya sahip olduğumuzu, $\gamma > \beta$ ve $n > \beta/\ln(\gamma\beta)$ için Ditzian [23] üstel ağırlıklı uzaylar için bazı ters teoremler vermiştir. [14] 'de, Amanov,

$$\sup_{x\geq 0} \frac{\rho(x+\sqrt{x})}{\rho(x)} < \infty$$

koşulunun ρ ağırlığı üzerine, $S_n : C_{\rho}\ [0,\infty) \to [0,\infty)$operatörlerinin normlarının düzgün sınırlılığı için gerekli ve yeterli olduğunu elde etmiştir. Bu durumun,

$$x \geq 0 \text{ için}, \rho(x) \leq e^{\alpha\sqrt{1+x}}$$

eşitsizliğini gerektirdiği ettiğini söylemiştir. Aynı zamanda, ağırlıklı bir ikinci dereceden düzgünlük modülü kullanılarak $S_n f$ ρ -normunda eşit olarak yaklaştırılan f fonksiyonunun bir karakterizasyonunu verir.

$\rho(x) = \mathcal{O}(e^{\alpha\sqrt{x}})$, S_n 'in $C_\rho\ [0,\infty)$' ı $C_\rho\ [0,\infty)$ 'a eşleştirdiği maksimum ağırlık sınıfıdır. $\rho(x) = e^{\alpha\Phi(x)}, \alpha > 0$ $\Phi(x)$ özellikleriyle kesinlikle artan bir türevlenebilir fonksiyondur;

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty \text{ ve } \lim_{x\to\infty} \Phi'(x)\sqrt{x} = \infty, \tag{4.10}$$

ve $\|S_n\rho\|_\rho$ tüm α> 0 için sonlu olmadığını kanıtlayalım. (4.10)' şartından, L'Hospital'in kurallarına gore, $\lim_{x\to\infty} \Phi(x)/\sqrt{x} = \infty$, yani, $M > 1/\alpha$ ve $x_0 \geq 1$ öyleki $x \geq x_0$için, $\Phi(x) > M\sqrt{x}$ olacak şekilde vardır. $x \geq x_0$ için,

$$\left(e^{\alpha\Phi(x)}\right)'' = e^{\alpha\Phi(x)}[\alpha\Phi''(x) + [\alpha\Phi'(x)]^2] > e^{\alpha\Phi(x)}\left(-\frac{\alpha M}{4x^{\frac{3}{2}}} + \frac{(\alpha M)^2}{4x}\right) > 0$$

ifadesini elde ederiz. Yani $e^{\alpha\Phi}$ $[\ x_0,\infty)$ üzerinde dışbükeydir. Φ'yi yeniden tanımlayabiliriz (gerekirse), böylece, $e^{\alpha\Phi}$ [0, ∞) üzerinde dışbükey bir fonksiyondur. Cheney ve Sharma'nın bir sonucu olarak [21], $S_n(\rho,x) \geq \rho(x)$ sonucunu çıkarılır. Farz edelim ki

$$\text{her } \alpha > 0 \text{ için,} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{S_n(\rho,x)}{\rho(x)} = L_\alpha < \infty \tag{4.11}$$

'dir. Çünkü $S_n\rho \geq \rho,\ L_\alpha \geq 1$, olduğunu elde ederiz. Ancak L'Hospital kuralını kullanarak,

$$L_\alpha = \lim_{x\to\infty} \frac{S_n(e^{\alpha\Phi(t)},x)}{e^{\alpha\Phi(x)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(S_n e^{\alpha\Phi})'(x)}{\alpha\Phi'(x)e^{\alpha\Phi(x)}}$$

$$\leq \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[\frac{n}{x}]{S_n}((t-x)^2,x)}{\alpha\Phi'(x)} . \frac{\sqrt{S_n e^{2\alpha\Phi(t)},x}}{e^{\alpha\Phi(x)}}$$

$$\leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha\sqrt{n}\Phi'(x)\sqrt{x}} . \sqrt{\frac{S_n(e^{2\alpha\Phi(t)},x)}{e^{2\alpha\Phi},x}}$$

$$= 0.\sqrt{L_{2\alpha}} = 0,$$

$\sqrt{L_\alpha} \geq 1$ olması ile bu bir çelişkidir.

Lemma 4.2. Her $\alpha > 0$ ve $\rho(x) = (1+x)^\alpha$ ve $x \geq 0$ için,

$$V_n f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanınlanan Baskakov operatörleri $C_\rho\,[0, \infty)$'dan $C_\rho\,[0, \infty)$'a dönüşüm yapan operatördür.

İspat: Her $x \geq 0$ ve her $N \in \mathbb{N}$ için, Becker [5] 'de $V_n(1+t^N, x) \leq C_1(1+x^{N})$, ifadesini ispatlamıştır. Her $x \geq 0$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için,

$$V_n((1+t)^m, x) \leq C_2 . V_n(1+t^m, x) \leq C_3(1+x^m) \leq C_3(1+x)^m$$

elde edilir, $\beta \in [0,1)$ için,

$$V_n((1+t)^\beta, x) \leq C_4(1+x)^\beta$$

olduğunu ispatlayalım.

$$\frac{V_n((1+t)^\beta, x)}{(1+x)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} e^{\beta\left[\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \ln(1+x)\right]}$$

ve

$$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1+\frac{k}{n}}{1+x}\right) = \ln\left(1+\frac{\frac{k}{n}-x}{1+x}\right)$$

olduğundan

$$\frac{V_n((1+t)^\beta, x)}{(1+x)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} e^{\beta \ln\left(1+\frac{\frac{k}{n}-x}{1+x}\right)}$$

elde edilir. $t > -1$ için, $f(x) = \ln(1 + \mathrm{t})$ fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = f'(\xi) \;\; 0 < \xi < t$$

$$\frac{\ln(1 + t) - 0}{t - 0} = \frac{1}{1 + \xi} < 1$$

$$\Rightarrow \ln(1 + t) < t$$

ifadesini kullanarak,

$$\ln\left(1 + \frac{\frac{k}{n} - x}{1 + x}\right) \leq \frac{\frac{k}{n} - x}{1 + x}$$

olduğu elde edilir. Yukarıda yerine yazılırsa,

$$\frac{V_n((1 + t)^{\beta}, x)}{(1 + x)^{\beta}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} \frac{x^k}{(1 + x)^{n+k}} e^{\beta \frac{\frac{k}{n} - x}{1+x}}$$

olduğu elde edilir.

$$\frac{1}{(1 - x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n + k - 1}{k} x^k \text{ eşitsizliği kullanılarak,}$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{xe^{\beta \frac{\frac{k}{n} - x}{1+x}}}{1+x}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{1+x-xe^{\beta \frac{\frac{k}{n} - x}{1+x}}}{1+x}\right)^n}$$

$$\frac{(1 + x)^n}{\left(1 + x - xe^{\beta \frac{\frac{k}{n} - x}{1+x}}\right)^n} = \frac{(1 + x)^n}{\left(1 - x\left(e^{\beta \frac{\frac{k}{n} - x}{1+x}} - 1\right)\right)^n}$$

olur. Eşitlikleri kullanarak,

$$\frac{V_n((1+t)^\beta, x)}{(1+x)^\beta} \leq \frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x e^{\frac{\beta}{n(1+x)}}}{1+x} \right)^k e^{\frac{-\beta x}{1+x}}$$

$$= \left(1 - x\left(\frac{\beta}{e^{n(1+x)}} - 1\right)\right)^{-n} e^{\frac{-\beta x}{1+x}}$$

ifadesi elde edilir. Son ifade her $x \geq 0$ ve her $n \geq 1$, için iyi tanımlanmıştır,

$$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{\beta}{n(1+x)}} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{\beta}{n(1+x)}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) \qquad (0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{\beta}{n(1+x)}} \left(-\frac{\beta}{n}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x\left(e^0 - \frac{\beta}{n}\right)$$

$$= -\frac{\beta}{n}$$

olduğundan,

$$1 - x\left(\frac{\beta}{e^{n(1+x)}} - 1\right) \geq 1 - \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\beta}{e^{n(1+x)}} - 1\right) = 1 - \frac{\beta}{n} > 0$$

‘dır. Eşitsizlik nedeniyle

$$\sup_{x\geq 0} \left[(1 - x\,(e^{\frac{\beta}{n(1+x)}} - 1))^{-n} . e^{\frac{-\beta x}{1+x}} \right] \leq \left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^{-n}$$

yazılabilir. Bernouli eşitsizliğinden,

$$\left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^{-n} \geq (1 - \beta)$$

$$\left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1-\beta}$$

olur. Yukarıda yerine yazılırsa,

$$\sup_{x\geq 0}\left[(1-x\,(e^{\frac{\beta}{n(1+x)}}-1))^{-n}.\,e^{\frac{-\beta x}{1+x}}\right] \leq \left(1-\frac{\beta}{n}\right)^{-n}.1 \leq \frac{1}{1-\beta}$$

$V_n((1+t)^{\beta},x) \leq C_4(1+x)^{\beta}$ ifadesi elde edilir. Her $x \geq 0$ için, buradaki

C_4, x ve n'ye bağlı olmayan sabit bir değerdir.

$\alpha > 0$ için $m = [2\alpha] \in \mathbb{N}$ ve $\beta = 2\alpha - \mathrm{m} \in [0,1)$ seçelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak,

$$V_n((1+t)^{\alpha},x) = V_n((1+t)^{\frac{m}{2}}.(1+t)^{\frac{\beta}{2}},x)$$

$$\leq \sqrt{V_n((1+t)^{\mathrm{m}},x).V_n((1+t)^{\beta},x)}$$

$$\leq C_3(1+x)^{m}.C_4(1+x)^{\beta} = C_5(1+x)^{\alpha}$$

elde edilen bu ifade için, $V_n\,\rho \in C_\rho\ [0,\infty)$ olduğunu ispatlar.

Sonuç 4.2. $\alpha > 0$ gerçel sayısı ve $\rho(x) = (1+x)^{\alpha}$ için Baskakov operatörlerinde $V_n: C_\rho\ [0,\infty) \to C_\rho\ [0,\infty)$

$$\|V_n f - f\|_\rho \to 0\ n \to \infty \text{ için,}$$

olması için gerek yeter şart

$$f(e^x-1)e^{-\alpha x}, [0,\infty) \text{üzerinde düzgün sürekli olmasıdır.}$$

Ayrıca, $f \in C_\rho\ [0,\infty)$ ve $n \geq 2$ için,

$$\|V_n f - f\|_\rho \leq \|f\|_\rho.\frac{\alpha C}{\sqrt{n-1}} + 2\,.\,\omega\left(f(e^t-1)e^{-\alpha t},\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $\varphi(x) = \ln(1+x)$ ve $\rho(x) = (1+x)^{\alpha}$, seçimi için (4.4) ifadesinin doğruluğunu gösterelim.

$$V_n(1,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$= (1+x-x)^{-n}$$

$$= 1,$$

$$V_n(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} x^{k+1} (1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$= x(1+x-x)^{-(n+1)}$$

$$= x$$

ve

$$V_n(t^2,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{n} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-2)!} x^k (1+x)^{-(n+k)}$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} x^{k+1} (1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!\,k!} x^{k+2} (1+x)^{-(n+k+2)}$$

$$+ \frac{x}{n} (1+x-x)^{-(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{n} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} x^k (1+x)^{-(n+k+2)} + \frac{x}{n}$$

$$= \frac{n+1}{n} x^2 (1+x-x)^{-(n+2)} + \frac{x}{n}$$

$$= \frac{n+1}{n} x^2 + \frac{x}{n}$$

$$= x^2 + \frac{x^2+x}{n}$$

olarak değerleri hesaplanır.

$$V_n((t-x)^2, x) = V_n(t^2, x) - 2xV_n(t, x) + x^2 V_n(1, x)$$

eşitliğine daha önce hesablanan $V_n(t^2,x)$, $V_n(t,x)$ ve $V_n(1,x)$ değerleri yerine yazılırsa,

$$V_n((t-x)^2,x) = x^2 + \frac{x^2+x}{n} - 2xx + x^2 1 = \frac{x(1+x)}{n}$$

ifadesi elde edilir.

(4.8) eşitsizliğini kullanarak (4.7) eşitsizliğini ispatlayalım.

$$|\varphi(t)-\varphi(x)|^2 = |\ln(1+t)-\ln(1+x)|^2$$

$$\leq \frac{|t-x|^2}{(1+t)(1+x)} = \left|\sqrt{\frac{(1+t)}{(1+x)}} - \sqrt{\frac{(1+x)}{(1+t)}}\right|^2$$

eşitsizliği sağlanır. Kolayca gösterilebilir ki,

$$V_n\left(\frac{1}{1+t},x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\cdot\frac{n}{n+k}$$

$$\leq \frac{n}{(n-1)(1+x)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-2}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n-1+k}}$$

$$= \frac{n}{(n-1)(1+x)}$$

eşitliği doğrudur. Buradan,

$$V_n(|\varphi(x)-\varphi(t)|^2,x) \leq \frac{V_n(1+t,x)}{1+x} - 2V_n(1,x) + (1+x)V_n\left(\frac{1}{1+t},x\right)$$

$$\leq 1 - 2 + \frac{n}{n-1} = \frac{1}{n-1}\ ,n \geq 2$$

ifadesi elde edilir.

$(V_n\, f)'(x)$ türevini hesaplayalım.

$$(V_n\, f)'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k} k x^{k-1}(1+x)^{-(n+k)}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k} x^{k}(n+k)(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\left[k\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}} - (n+k)\frac{x^{k}}{(1+x)^{n+k+1}}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\left[\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}}\left(k-(n+k)\frac{x}{1+x}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\left[\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}}\left(\frac{k-nx}{1+x}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\left[\frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k}}\left(\frac{n}{1+x}\left(\frac{k}{n}-x\right)\right)\right]$$

olarak hesaplanır.

$$|(V_n\, f)'(x)| = \left|\frac{n}{x(1+x)}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(x-\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^{k}}{(1+x)^{n+k}}\right|$$

$$\leq \frac{n}{x(1+x)}\|f\|_{\rho}.V_n(\rho(t)|t-x|,x) \leq C_1\|f\|_{\rho}\ \rho(x)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{x(1+x)}}$$

olduğundan,

$$V_n(\rho(t)|t-x|,x) \leq \sqrt{V_n(\rho^2(t),x}\,.\sqrt{V_n((t-x)^2,x} \leq C_1\,\rho(x)\sqrt{\frac{x(x+1)}{n}}$$

yazılabilir. Her $x \geq 0$ için,

$$\frac{|(V_n\, f)'(x)|}{\theta'(x)} \leq C_2\,\rho(x)$$

$$\text{burada } \theta'(x) = \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x(1+x)}\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$x \geq 0, \frac{\rho'^{(x)}}{\theta'(x)} = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\sqrt{x(1+x)} \ \leq \alpha\rho(x)$$

olduğundan φ yerine θ fonksiyonu kullanıldığında (4.4) eşitliği elde edilir. Bu durumu kullanarak,

$$(\theta'\sigma\varphi^{-1})(x) = \ln\left(e^x - \frac{1}{2} + \sqrt{(e^x-1)e^x}\right)$$

[0, ∞)'daki düzgün sürekli fonksiyondur (bu doğrudur, çünkü $(\theta' o\ \varphi^{-1})(x) - x$ düzgün süreklidir ve sonsuzda sınırlıdır) ve teorem (4.1) kullanarak, (4.3) ve (4.5) açıklamaları ile birlikte ispat tamamlanmıştır.

Önerme 4.8. Sonuç 4.6'nın limiti, a = 0, [34], [35], [22] ve [30] 'da elde edilmiştir.

Önerme 4.9. Becker [17], polinom ağırlıklı uzaydan fonksiyonların global yaklaşımını inceledi ve "polinom büyümesinin Baskakov operatörleri global sonuçlar için en uygun çerçeve" olduğunu belirtti. Bunun nedeni $\rho(x) = e^{\beta x}$ üstel ağırlık için, $V_n(\rho, x)$ dizisinin sadece $x < (e^{\frac{\beta}{n}} - 1)^{-1}$ için var olmasıdır. Bununla birlikte, Ditzian [23] üssel büyüme gösteren fonksiyonlar için bazı aksi sonuçlar vermiştir.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde ağırlıklı süreklilik modülü ile yakınsaklık hızını inceledik. Süreklilik modülü ile ρ normu arasında bağlantı kurarak ağırlıklı Krovkin teoremlerini verdik. Daha sonra ρ fonksiyonu yardımı ile ağırlıklı uzayda tanımlanan genel süreklilik modülleri ile yakınsaklık hızını veren sonuçlar ispatlandı. Elde edilen sonuçların Szász ve Baskakov operatörleri için uygulamaları tezde verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] F. Altomare, M. Campiti, Korovkin Type Approximation Theory and its Applications, in: De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.

[2] Z. Ditzian, V. Totik, Moduli of Smoothness, in: Springer Series in Computational Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[3] N.I. Achieser, Vorlesungen uber Approximationstheorie, Akademic-Verlag, Berlin, 1967, p. 412.

[4] A. Aral, Approximation by Ibragimov–Gadjiev operators in polynomial weighted space, Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb. XIX (2003) 35–44.

[5] A. Beurling, On the spectral synthesis of bounded functions, Acta Math. 81 (1948) 225–238.

[6] A.D. Gadˇziev, The convergence problem for a sequence of positive linear operators on bounded sets and theorems analogous to that of P.P. Korovkin, Dokl. Akad. Nauk SSSR 218 (5) (1974). Transl. in Soviet Math. Dokl. 15(5) (1974) 1433–1436.

[7] A.D. Gadzhiev, On P. P. Korovkin type theorems, Math. Zamet. 20 (1976) 781–786. Transl. in Math. Notes (1976) (5–6) (1978) 995–998.

[8] A.D. Gadjiev, R.O. Efendiyev, E. Ibikli, On Korovkin type theorem in the space of locally integrable functions, Czechoslovak Math. J. 53 (128) (2003) 45–53.

[9] A.D. Gadjiev, R.O. Efendiev, E. Ibikli, Generalized Bernstein Chlodowsky polynomials, Rocky Mountain J. Math. 28 (4) (1998) 1267–1277.

[10] R.P. Boas, Beurlings test for absolute convergence of Fourier series, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1) (1966).

[11] M. Kumikava, Contractions of Fourier coefficients and Fourier integrals, J. Anal. Math. 8 (1960/1961).

[12] B.S. Jadav, Contractions of functions and their Fourier series, Pacific J. Math. 31 (1969) 827–832.

[13] Altomare, F., Campiti, M., Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications, De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter & Co., Berlin, New York, 1994.

[14] Amanov, N.T., On the weighted approximation by Szász-Mirakjan operators, Anal. Math., 18(1992), 167–184.

[15] Boyanov, B.D., Veselinov, V.M., A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumanie, 14(62)(1970), no. 1, 9-13.

[16] Bustamante, J., Morales de la Cruz, L., Korovkin Type Theorems for Weighted Approximation, Int. Journal of Math. Analysis, 1(2007), no. 26, 1273-1283.

[17] Becker, M., Global Approximation Theorems for Szász-Mirakjan and Baskakov Operators in Polynomial Weight Spaces, Indiana Univ. Math. J., 27(1978), no.1, 127–142.

[18] Becker, M., Kucharski, D., Nessel, R.J., Global approximation for the Szász Mirakjan operators in exponential weight spaces, Linear Spaces and Approximation (Proc.

Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach, 1977), Internat. Ser. Numer. Math., Birkh¨auser Verlag, Basel, 40(1978), 318–333.

[19] Bustamante, J., Morales de la Cruz, L., Positive linear operators and continuous functions on unbounded intervals, Jaen J. Approx., 1(2009), no. 2, 145–173.

[20] Cheney, E.W., Introduction to Approximation Theory, AMS Chelsea Publishing, 1966.

[21] Cheney, E.W., Sharma, A., Bernstein power series, Canad. J. Math., 16(1964),no. 2, 241–252.

[22] de la Cal, J., C´arcamo, J., On uniform approximation by some classical Bernstein-type operators, J. Math. Anal. Appl., 279(2003), 625–638.

[23] Ditzian, Z., On global inverse theorems of Sz´asz and Baskakov operators, Canad. J. Math., 31(1979), no. 2, 255–263.

[24] Ersan, S., Do˘gru, O., Statistical approximation properties of q-Bleimann, Butzer and Hahn operators, Math. Comput. Modelling, 49(2009), 1595-1606.

[25] Gadjiev, A.D., Theorems of Korovkin type, Mat. Zametki., 20(5)(1976), 781–786, (in Russian), Math. Notes, 20(5)(1976), 996–998.

[26] Gadjiev, A.D., C¸ akar, ¨ O., On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semiaxis, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 19(1999), no. 5, 21–26.

[27] Gonska, H.H., On approximation in spaces of continuous functions, Bull. Austral. Math. Soc., 28(1983), 411–432.

[28] Hermann, T., Approximation of unbounded functions on unbounded interval, Acta Math. Hungar., 29(3-4)(1977), 393–398.

[29] Holho¸s, A., The rate of convergence of positive linear operators in weighted spaces, Automat. Comput. Appl. Math., 17(2008), no. 2, 239–246.

[30] Holho¸s, A., Uniform Approximation by Positive Linear Operators on Noncompact Intervals, Automat. Comput. Appl. Math., 18(2009), no. 1, 121–132.

[31] Mitrinovi´c, D.S., Peˇcari´c, J., Fink, A.M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[32] Nishishiraho, T., Convergence of positive linear approximation processes, Tohoku Math. J., 35(1983), 441–458.

[33] Totik, V., Uniform approximation by Sz´asz-Mirakjan type operators, Acta Math. Hungar., 41(3-4)(1983), 291–307.

[34] Totik, V., Uniform approximation by Baskakov and Meyer-K¨onig and Zeller operators, Period. Math. Hungar., 14(3-4)(1983), 209–228.

[35] Totik, V., Uniform approximation by positive operators on infinite intervals, Anal. Math., 10(1984), 163–182.