

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİBONACCİ İNCE GRAFLAR

Selin ATEŞ

TEMMUZ 2019

Matematik Anabilim Dalında Selin ATEŞ tarafından hazırlanan FİBONACCİ İNCE GRAFLAR adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Ali OLGUN

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Danışman

Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Jüri Üyeleri

Başkan : Dr. Öğr. Üyesi Nil MANSUROĞLU

Üye : Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ

03/07/2019

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

FİBONACCİ İNCE GRAFLAR

ATEŞ, Selin

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Temmuz 2019, 38 sayfa

Bu tezde öncelikle kaynak özetleri verilerek grafların genel yapısı ve özellikleri hakkında kısa temel bilgilere yer verilmiştir. Daha sonra Fibonacci ve Lucas dizilerinin tanımları yapılarak rekürans bağıntıları tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde Fibonacci ince graf sınıflarına ve özelliklerine yer verilmiş, grafları Fibonacci sayılarıyla etiketlemenin getirdiği kural ve özellikler anlatılmıştır.

Son bölümde ise Fibonacci ince graf sınıflarının sağladığı özelliklerin Lucas ince graf sınıfları içinde sağlayıp sağlamadığı, benzer ve farklı yönlerinin olup olmadığına değinilmiştir. Aynı zamanda grafların Lucas sayılarıyla etiketlenme kurallarıyla da ilgilenilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Fibonacci ince graf, Lucas sayıları, Lucas ince graf, düğüm, ayrıt, etiket, devir, ağaç, tırtıl.

ABSTRACT

FIBONACCI GRACEFUL GRAPHS

ATEŞ, Selin

Kırıkkale University

Institute of Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlker AKKUŞ

July 2019, 38 pages

In this thesis, first of all, a brief information about the general structure and properties of graphs were given by the reference summary. Then, Fibonacci and Lucas sequences were defined and their recurrence relations were described.

In the third chapter, Fibonacci graceful graph classes and their properties were given, the rules and properties of labeling the graphs with Fibonacci numbers were explained.

In the last chapter, it was mentioned that whether the properties of the Fibonacci graceful graph classes are provided in the Lucas graceful graph classes and whether similar and different aspects. The rules for labeling the graphs with Lucas numbers were also considered.

Key Words: Fibonacci numbers, Fibonacci graceful graph, Lucas numbers, Lucas graceful graph, vertex, edge, labeling, cycle, tree, caterpillar.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, devamlı yol gösteren, sabrını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. İlker AKKUŞ'a ve katkılarından dolayı aileme teşekkürlerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

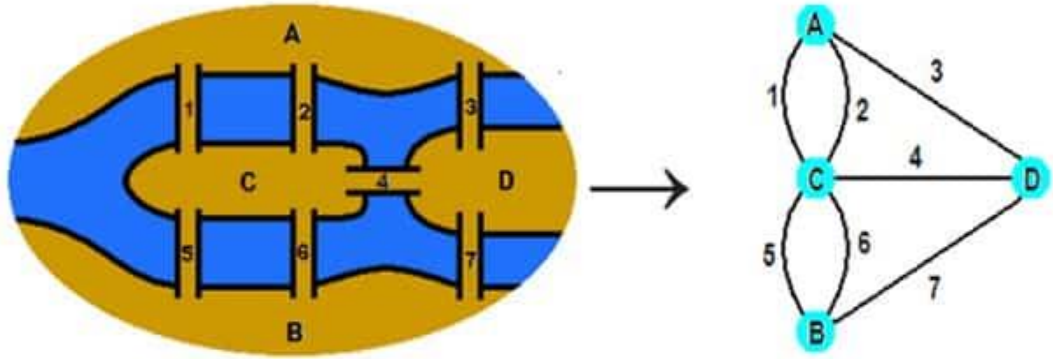
Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Özetleri	2
1.2. Tezin Amacı.....	3
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Fibonacci Dizisi	4
2.2. Lucas Dizisi.....	4
2.3. Grafın Tanımı ve Yapısı.....	4
2.4. Graflarla ilgili Temel Tanımlar ve Özellikleri.....	5
3. FİBONACCİ İNCE GRAFLAR VE ÖZELLİKLERİ	10
3.1. Yasaklı Altgraflar.....	15
3.2. Fibonacci İnce Graf Sınıfları.....	17
3.3. Fibonacci İnce Ağaçlar.....	20
4. LUCAS İNCE GRAFLAR VE ÖZELLİKLERİ	27
4.1. Lucas İnce Graf Sınıfları.....	32
5. SONUÇLAR	37
KAYNAKLAR	38

1. GİRİŞ

Bazen bir problemi çözmek, bir problemi çözmekten daha fazlasıdır. Königsberg Köprü Problemi buna güzel bir örnektir. Königsberg günümüzde Rusya Federasyonu'nda Kaliningrad adıyla yer alan, tarihte ise Alman Doğu Prusya eyaletinin başkenti olan bir şehirdir. Bu şehirde Eski ve Yeni Pregel nehirleri birleşerek Pregolya nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler şehri dört bölgeye ayırmaktadır ve nehir üzerine inşa edilen yedi köprü ile bu bölgeler birbirine bağlanmıştır.

Königsberg Yedi Köprü Problemi şudur: Şehrin herhangi bir noktasından başlayıp, her köprüden yalnızca bir defa geçmek şartıyla bir şehir turu yapılabilir mi? Anlaşılması basit olan bu probleme çözüm bulunamamış, neden bulunamadığı ise 1736 yılında ünlü matematikçi Leonhard Euler'in çözümüyle açıklığa kavuşmuştur. Euler çözümünde kara parçalarını harflerle, köprüleri ise sayılarla işaretlemiştir. Çözümü kolaylaştırmak ve şekli daha sade hale getirmek amacıyla kara parçalarının noktalarla, köprülerin ise çizgilerle temsil edildiği ikinci bir şekil yani graf (çizge) çizilebilir. Graflar graf elemanı, noktalar düğüm, düğüme bağlı olan elemanların sayısı ise düğüm derecesi olarak adlandırılmak üzere soru, grafın herhangi bir düğümünden başlayarak yedi elemanın her birini bir ve yalnız bir kere kullanarak dolaşma problemine dönüşmüş olur. Şekil 1.1. deki grafta A, B ve D düğümlerinin derecesi 3, C düğümünün derecesi ise 5'tir.



Şekil 1. 1.

1736'da Euler'in incelemeleri böyle bir gezintinin mümkün olmadığını kanıtlamış ve bu tür dolaşmayı mümkün kılacak grafların şu özelliklere sahip olmaları gerektiğini göstermiştir: Grafın bütün elemanlarını bir ve yalnız bir defa kullanarak dolaşmak için o grafın tek dereceli düğümlerinin sayısı eğer varsa iki olmalıdır. Tek dereceli düğümler dolaşmanın başlangıç ve bitiş düğümleridir. Grafta böyle düğümler yoksa dolaşmaya herhangi bir düğümden başlanabilir.

Çözümün temelinde yatan düşünce şudur: Bir düğüm, başlangıç ya da bitiş düğümü değilse o düğüme gelen kişinin turu tamamlayabilmek için oradan ayrılması gerekecektir. Dolayısıyla bu tip düğümler çift dereceleri olmalıdır. Oysa tek dereceli bir düğüme, örneğin D düğümüne ikinci kez gelen bir kişi çıkış yolu bulamayacaktır. Dolayısıyla bu düğüm ya gezintinin bitiş düğümü olmalıdır ya da başlangıç düğümü olarak seçilmelidir ki ikinci gelişte çıkış yolu bulunabilsin. Buna göre tek dereceli düğüm sayısı ikiden fazlaysa gezinti tamamlanamayacaktır.

Leonhard Euler'in bu araştırmaları matematikte tamamıyla yeni bir dal olan graf teorisinin ilk teoremi ve topolojinin keşfinin habercisi olmuştur. Çözümün ardından Euler, "Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis" isimli makaleyi yayınlamıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında öncelikle [1] numaralı kaynaktan grafların temel tanım ve özellikleri hakkında bilgi edinildi. [2] ve [5] numaralı kaynaklardan düzlemsel graflar ve maksimal dış düzlemsel grafların özellikleri hakkında bilgi edinildi. [3] ve [4] numaralı kaynaklardan Fibonacci ince grafların özellikleri hakkında bilgi edinildi. Son olarak [6] numaralı kaynaktan ise tırtıllar hakkında bilgi edinildi.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezin amacı grafları ince hale getirip Fibonacci sayılarıyla ve Lucas sayılarıyla uygun etiketlemeler yaparak Fibonacci ince graf ve Lucas ince grafların özelliklerini incelemektir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fibonacci Dizisi

Fibonacci sayıları arasındaki ilişki $n \geq 2$ olmak üzere $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ lineer rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n . tam sayıya karşılık gelen Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir. Bu bağıntı ile dizinin terimleri $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$ şeklinde olacaktır.

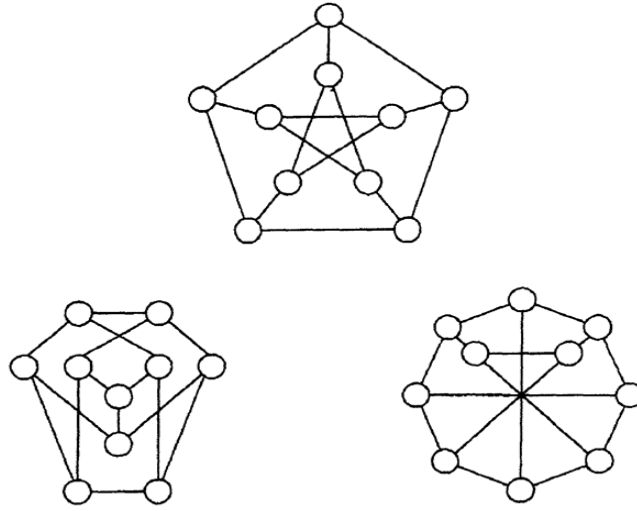
2.2. Lucas Dizisi

Lucas sayıları arasındaki ilişki $n \geq 2$ olmak üzere ve $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ lineer rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n . tam sayıya karşılık gelen Lucas sayısı L_n ile gösterilir. Bu bağıntı ile dizinin terimleri $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$ şeklinde olacaktır.

2.3. Grafın Tanımı ve Yapısı

V , elemanlarına düğüm adı verilen noktalardan olan boştan farklı bir küme, E de elemanlarına ayrıt adı verilen sıralı olmayan bir koleksiyon olsun. V ve E nin oluşturduğu bir graf sembolik olarak $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir.

Bir grafta E ayrıt kümesi boş olabilir ancak V düğüm kümesi boş olamaz. Bu tez boyunca genel olarak V nin elemanları v_1, v_2, \dots ve E nin elemanları da e_1, e_2, \dots şeklinde gösterilecektir. Aynı zamanda aksi belirtilmedikçe E ve V nin sonlu olduğu kabul edilecektir. Bazı graf örnekleri Şekil 2.1. de verilmiştir.



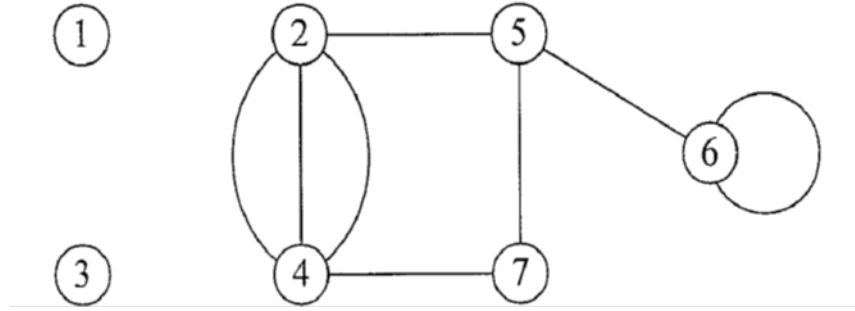
Şekil 2. 1.

2.4. Graflarla ilgili Temel Tanımlar ve Özellikleri

Tanım 2.4.1. Bir grafta paralel ayrıtlar (iki düğüm arasında birden fazla ayrıt bulunması) veya döngü (bir ayrıtın bir düğümü kendisiyle birleştirmesi) yoksa bu grafa *basit graf* denir. [1]

Tanım 2.4.2. Bir v düğümüyle bağlantılı p tane döngü ve q tane de ayrıt (döngü olmayan) varsa v nin *derecesi* $2p + q$ dur. [1]

Örnek 2.4.1.



Şekil 2.2.

Bu grafa bakıldığında paralel ayrıtlar ve döngü bulunmaktadır. Öyleyse bu graf basit değildir. Burada 1 numaralı düğümün derecesi 0, 2 numaralı düğümün derecesi 4, 3 numaralı düğümün derecesi 0, 4 numaralı düğümün derecesi 4, 5 numaralı düğümün derecesi 3, 7 numaralı düğümün derecesi 2, 6 numaralı düğümün derecesi ise 3 tür. Burada dikkat edilirse 6 numaralı düğümde bir adet döngü vardır ve bir döngünün derecesi ayrıt sayısının 2 katı olduğundan 6 numaralı düğümün derecesi 3 tür.

Tanım 2.4.3. n düğümlü basit bir grafta her düğüm çifti arasında bir ve yalnız bir ayrıt varsa bu grafa K_n tam grafi denir. [1]

Tanım 2.4.4. $G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları için $V = V'$ ve $E = E'$ ise bu iki graf özdeştir. Ayrıca V den V' ye birebir, örten ve G deki u ile v düğümleri komşu iken G' de de $f(u)$ ile $f(v)$ düğümleri komşu olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları izomorftir denir. [1]

Tanım 2.4.5. Eğer $V_H \subseteq V_G$ ve $E_H \subseteq E_G$ ise H grafi, bir G grafinin *alt grafidir* denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilir. [1]

Tanım 2.4.6. Bir grafta v ve w iki düğüm olsun. Bu grafta v_{i-1} ile v_i düğümleri arasındaki ayrıt e_i olmak üzere, $v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = w$ şeklindeki sonlu bir alternatif diziye v ve w düğümleri arasında bir *yürüyüş* denir. Bu yürüyüşteki düğüm ve ayrıtların birbirinden farklı olması gerekli değildir.

$0 \leq i \leq n$ için $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ ve $u_0, f_1, u_1, f_2, \dots, f_m, u_m$ yürüyüşleri $n = m$, $v_i = u_i$ ve $e_i = f_i$ ise birbirine eşittir.

Bir yürüyüşteki ayrıtların sayısı, yürüyüşün uzunluğudur. Eğer graf basitse dizideki ayrıtlar u ve w arasında bir yürüyüş tanımlar, bu ayrıtlar açıkça listelenmek zorunda değildir. Yani $v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = w$ yürüyüşü $v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_n$ olarak yazılabilir. Bu yürüyüşteki ayrıtlar tekrarlı değilse buna *iz* denir. [1]

Tanım 2.4.7. $v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = w$ yürüyüşünde $0 < i < n$ için v_i düğümleri birbirinden farklı ise v ve w arasındaki bu yürüyüşe *yol* denir. [1]

Tanım 2.4.8. Bir graftaki bir düğüm ile kendisi arasındaki her yürüyüş bir *kapalı yürüyüş* olarak adlandırılır. Bir kapalı yürüyüşte ayrıtlar tekrar etmiyorsa buna *devre* denir. Düğümleri tekrar etmeyen devrelere de *devir* adı verilir. [1]

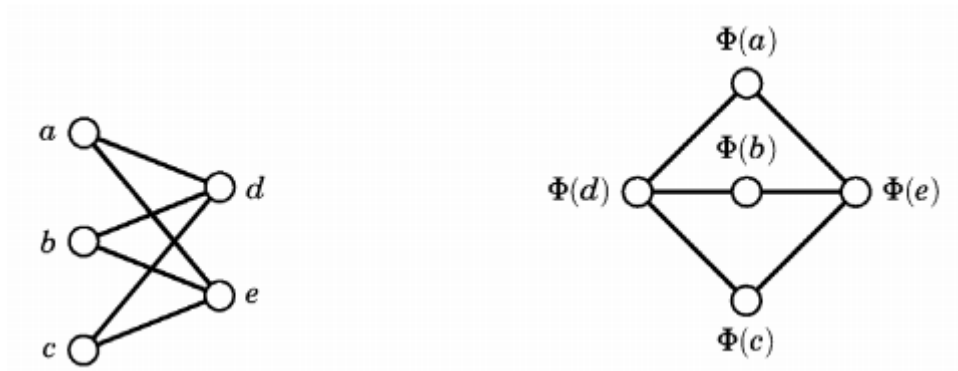
Tanım 2.4.9. Bir grafta bir düğüm çifti arasında bir yol varsa bu düğüm çiftine *bağlantılı çift* denir. Eğer G de her düğüm çifti bağlantılı ise G grafi *bağlantılı grafi*. [1]

Tanım 2.4.10. Herhangi bir devir içermeyen graflara *orman* denir. Bir bağlantılı orman ise *ağaç* olarak adlandırılır. [1]

Tanım 2.4.11. Bir bağlantılı G grafinde iki farklı düğüm arasındaki iz, eğer G nin tüm ayrıtlarını içeriyorsa *Euler izdir*. Tüm ayrıtları içeren bir devre, *Euler devresi* olarak adlandırılırken Euler devresine sahip bir grafa *Euler Grafi* denir. [1]

Tanım 2.4.12. Bir G grafinin tüm ayrıtları kesiştirilmeden bir düzlemde çizilebiliyorsa bu grafa *düzlemsel graf* denir. Böyle bir çizim G nin gömme dönüşümüdür. Bir düzlemsel grafin verilen gömme dönüşümü düzlem grafidir. [2]

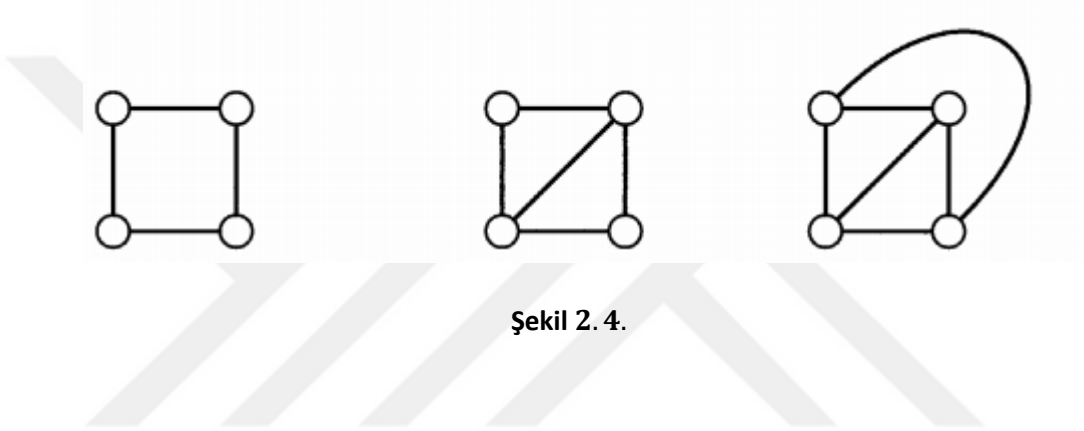
Şekil 2.3. teki birinci graf bir düzlemsel graf olmayıp ikinci graf bir düzlemsel graftır.



Şekil 2.3.

Tanım 2.4.13. G' düzlemsel grafının G ye izomorfik olduğu ve G' deki her düğümün dış bölgenin sınırında bulunması halinde G grafi *dış düzlemsel* graf olarak adlandırılır. Bu durumda G' grafi *dış düzlemsel graftır* denir. Dış düzlemsel graf herhangi bir ayrıtın eklenmesinin dış düzlemsel olmayan bir graf vermesi durumunda *maksimal dış düzlemsel graf* adını alır. [2]

Şekil 2.4. teki birinci graf dış düzlemsel ama maksimal değildir. İkinci graf maksimal dış düzlemsel graftır. Üçüncü graf ise düzlemseldir ama dış düzlemsel bir graf değildir.



Şekil 2. 4.

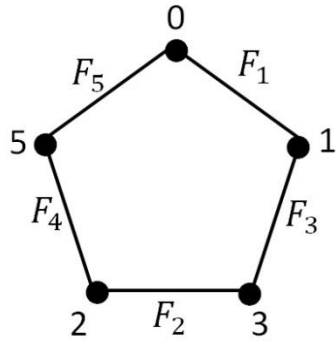
3. FİBONACCİ İNCE GRAFLAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu tez boyunca “graceful” kelimesinin Türkçe karşılığı “ince” olarak çevrilmiştir.

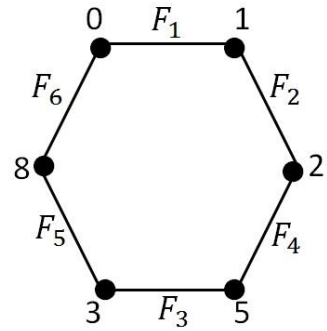
Tanım 3.1. p düğümlü ve n ayrıtlı bir $G(p, n)$ basit grafını ele alalım. G nin her bir ayrıtlına farklı bir etiket atayan ve $\varphi'(uv) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$ biçiminde tanımlanan bir φ' etiketlemesi için G nin düğümlerini $\{0,1,2, \dots, n\}$ kümesindeki farklı tam sayılarla etiketleyen bir φ etiketlemesi varsa G grafı *incedir* denir. [3]

Tanım 3.2. p düğümlü ve n ayrıtlı bir $G(p, n)$ basit grafını ele alalım. G nin her bir ayrıtlına farklı bir etiket atayan ve $\varphi'(uv) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$ biçiminde tanımlanan bir φ' etiketlemesi için G nin düğümlerini $\{0,1,2, \dots, F_n\}$ kümesindeki farklı Fibonacci tam sayılarıyla etiketleyen bir φ etiketlemesi varsa G grafına *Fibonacci ince graf* denir. [3]

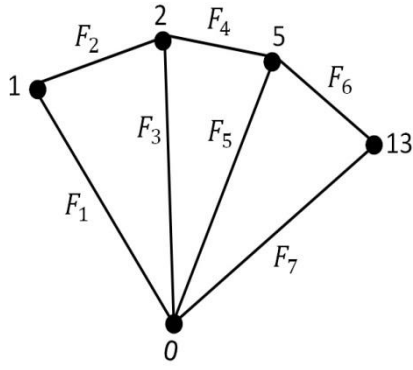
Şekil 3.1., Şekil 3.2., Şekil 3.3., Şekil 3.4. ve Şekil 3.5. birer Fibonacci ince graf örnekleridir.



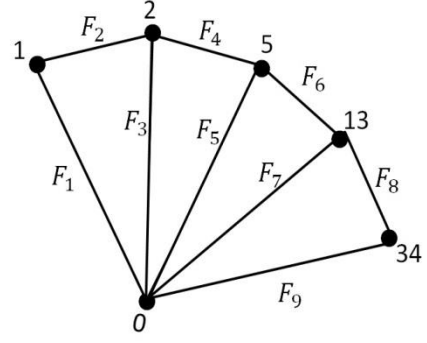
Şekil 3.1. C_5 devir



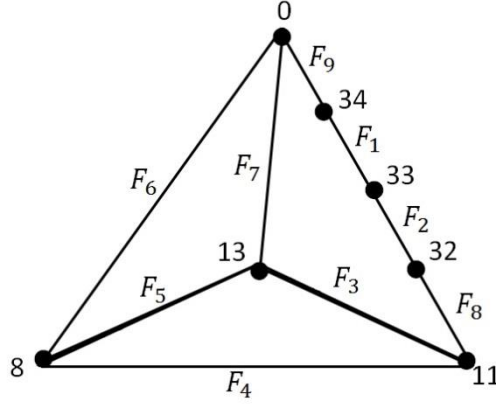
Şekil 3.2. C_6 devir



Şekil 3.3. Yelpaze



Şekil 3.4. Yelpaze



Şekil 3.5. K_4 tam grafına homeomorf olan bir graf

Fibonacci ince graf tanımından F_n numaralı ayırıtın uç noktalarının düğüm numaraları 0 ve F_n değerine sahip olmalıdır. Bununla birlikte 0 olarak etiketli düğüme komşu olan herhangi bir düğüm bir Fibonacci sayısı ile etiketlenmelidir. Geri kalan düğümler 0 ile F_n arasında birer tam sayı etiketi alırlar ama bunlar Fibonacci sayısı olmak zorunda değildir. Bir grafın Fibonacci ince graf olduğunu görmek için birkaç farklı etiketleme yapılabilir.

a_1, a_2, \dots, a_r bir grafın düğüm etiketleri olmak üzere

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{r-1} - a_r| + |a_r - a_1|$$

toplamı

$$\sum_{i=1}^r |a_i - a_{i+1}| \equiv \sum_{i=1}^r (a_i - a_{i+1}) \equiv 0 \pmod{2}$$

olacak şekilde bir etiketleme de yapılabilir. [4]

Gözlem 3.1. $\{0 = a_1, a_2, \dots, a_n = F_n\}$ ifadesi Fibonacci ince grafının düğüm etiketlerinin bir kümesidir. Buradan her bir a_i etiketinin $F_n - a_i$ ile etiketlenmesiyle de yine bir Fibonacci ince graf elde edilir. [3]

Teorem 3.1. $G(p, n)$ bir Fibonacci ince graf ve C_i de G de k uzunluklu bir devir olsun. Bu durumda $\{F_{ij}\}_{j=1}^k$ ler C_i deki ayrıtlar için Fibonacci sayıları olmak üzere, tüm $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$\sum_{j=1}^k \delta_{ij} F_{ij} = 0 \quad \text{ve} \quad \delta_{ij} = \mp 1$$

olacak şekilde bir $\{\delta_{ij}\}_{j=1}^k$ dizisi vardır. [3]

İspat: C_i nin düğüm etiketleri $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ olsun. Buradan

$$\sum_{j=1}^{k-1} (a_{j+1} - a_j) + (a_1 - a_k) = 0$$

olduğu görülür.

Her bir $(a_{j+1} - a_j)$ farkı ya C_i üzerindeki bir ayrıtlar etiketine ya da onun negatifine eşit olduğundan teorem ispatlanır. \square

Sonuç 3.1. G grafında Fibonacci ince etiketi varsa G de uzunluğu 3 olan herhangi bir devrin ayrıtları 3 tane ardışık Fibonacci sayısı ile etiketlenmelidir. [3]

Sonuç 3.2. G grafında Fibonacci ince etiketi varsa G de uzunluğu 4 olan devrin ayrıtları $F_i, F_{i+1}, F_{i+3}, F_{i+4}$ şeklinde etiketlenmelidir. [3]

Sonuç 3.3. G grafında Fibonacci ince etiketlemesi varsa G de uzunluğu 5 olan devrin ayrıtları $F_i, F_{i+1}, F_{i+3}, F_{i+5}, F_{i+6}$ ya da $F_1, F_2, F_i, F_{i+1}, F_{i+2}$ şeklinde etiketlenmelidir. [3]

Sonuç 3.4. G grafında bir Fibonacci ince etiketlemesi olsun. C_i devrindeki k uzunluklu en büyük üç düğüm etiketinin ardışık Fibonacci sayıları olan $F_{ik-2}, F_{ik-1}, F_{ik}$ olduğu kabul edilsin. O zaman C_i üzerindeki geri kalan etiketler için

$$\sum_{j=1}^{k-3} \delta_{ij} F_{ij} = 0$$

eşitliği elde edilir. [3]

İspat: δ_{ik-2} ve δ_{ik-1} , δ_{ik} nin işaretiyle zıt olmalıdır. Aksi halde F_{ik}, F_{ik-2} ve F_{ik-1} toplamı C_i üzerinde geri kalan tüm ayrıt etiketlerinin toplamını geçer. Bu da Teorem 3.1 ile çelişir. \square

Uygunluk açısından sonradan kullanışlı olabilecek bazı Fibonacci özdeşlikleri şunlardır:

Özdeşlik 1. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; $F_1 = F_2 = 1$.

Özdeşlik 2. $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{n-2} = F_n - 1$.

Özdeşlik 3. $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Özdeşlik 4. $F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

Özdeşlik 5. $j \geq 3$ için

$$F_n - 1 > F_{n-2} + F_{n-4} + F_{n-6} + \dots + F_{j+2} + F_j + F_{j-3} + F_{j-5} + \dots$$

Lemma 3.1. $G(p, n)$ grafının Fibonacci ince etiketlemesine sahip olduğunu ve C nin de G nin bir devri olduğu kabul edilsin.

(a) F_k , C nin en büyük ayrıt etiketi olan Fibonacci sayısı ise F_{k-1} de C üzerindedir. Özellikle F_{n-1} olarak etiketlenen ayrıt, F_n olarak etiketlenen ayrıtı içeren her devirde olmalıdır. [4]

(b) En büyük ayrıt etiketi F_k olan C devri, F_{k-2} ya da F_{k-3} olarak etiketlenen ayrıtı kapsamalıdır. [4]

İspat:

(a) Teorem 3.1 den dolayı C üzerindeki ayrıt etiketlerin bazı lineer kombinasyonlarının toplamı 0 olmalıdır. Özdeşlik 2 ile

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_{k-2} = F_k - 1 < F_k$$

olacak şekilde F_{k-1} etiketi C nin ayrıt etiketi olarak görülür. \square

(b) $F_k - F_{k-1} = F_{k-2}$ olduğundan C üzerindeki geri kalan etiketlerin bazı lineer kombinasyonları F_{k-2} ye eşit olmalıdır. Ancak

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{k-4} < F_{k-2}$$

olduğundan dolayı F_{k-2} ile etiketlenen bir ayrıt yoksa F_{k-3} ile etiketlenen bir ayrıt olmalıdır. \square

Teorem 3.2. $G(p, n)$ grafi Euler ve Fibonacci ince grafi ise $n \equiv 0(mod3)$ veya $n \equiv 2(mod3)$ tür. [3]

İspat: G grafi Euler ise ayrıt-ayrık (tüm ayrıtları farklı olan) devirlerine parçalanabilir. Teorem 3.1 ile devir etrafındaki ayrıt etiketlerin toplamı çift olmalıdır. Dolayısıyla

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

eşitliği de çift olmalıdır. Bu şekilde F_{n+2} ayrıtı da tek olmalı ve bu durum sadece $n \equiv 0(mod3)$ veya $n \equiv 2(mod3)$ olmasıyla mümkündür. \square

3.1. Yasaklı Altgraflar

Bu başlık adı altında verilecek teoremler Fibonacci ince grafların yapısını belirgin bir oranda kısıtlar.

Teorem 3.1.1. $G(p, n)$ grafi 3 ayrıtlı bağlantılı bir altgraf içeriyorsa o zaman G Fibonacci ince grafi değildir. [3]

İspat: $G(p, n)$ grafinin Fibonacci ince grafi olduğunu ve G' grafinin da 3 ayrıtlı bağlantılı bir altgraf olduğu kabul edilsin. F_k , G' de görünen en büyük ayrıtlı numarası ve v_1 ile v_2 de o ayrıtlı uç numaraları olsun. G' , 3 ayrıtlı bağlantılı bir altgraf ise ya F_k ya da F_{k-1} ayrıtlı içeremeyen, v_1 den v_2 ye bir yol olur. Bu yol F_k olarak etiketlenen ayrıtlı içeren bir devir oluşturur fakat F_{k-1} olarak etiketlenen ayrıtlı içermez. Bu da Lemma 3.1 ile çelişir. \square

Fibonacci ince olmayan bir G grafinin homeomorfik kopyaları haline gelmesi ilginç bir durumdur. Örneğin, K_4 tam grafi Teorem 3.1.1. e göre Fibonacci ince grafi olmasa dahi K_4 ün homeomorfü olan Şekil 3.5. bir Fibonacci ince grafidir. Belkide çok daha çarpıcı bir örnek K_5 tam grafi ve $K_{3,3}$ iki parçalı grafi Fibonacci ince grafi değildir ama Şekil 3.6. Fibonacci ince grafidir. Bu graf $K_{3,3}$ e homeomorf bir altgraf içerir. Bir sonraki teoremin sonucu K_5 e homeomorf olan ve Fibonacci ince etiketine sahip olan ama düzlemsel olmayan bir altgrafı içermesinin imkansız olmasıdır.

en büyük etiketi olduğu ve F_j, F_{j-1}, F_{j-3} ün bir P_2 yolu üzerinde ama F_{j-2} nin bir başka P_4 yolu üzerinde olduğu anda sonlanır. Bu durumda P_3 ve P_4 gibi F_{j-2} nin en büyük Fibonacci sayısı, F_{j-3} ün de bu yollar üzerinde olmadığı bir devir vardır. Bu da Lemma 3.1 ile çelişir. \square

3.2. Fibonacci İnce Graf Sınıfları

Herhangi bir Fibonacci ince grafının daha büyük olan grafların içerisinde gömülü olabileceği bir takım gözlemlerle gösterilebilir.

Gözlem 3.2.1. $G(p, n)$ grafi Fibonacci ince etiketine sahip olsun. O zaman 0 olarak etiketli düğüme komşu olan ve derecesi 1 olan v düğümü eklenerek $G_1(p + 1, n + 1)$ Fibonacci ince grafi oluşturulabilir. v düğümü de F_{n+1} ile etiketlenebilir. [3]

Gözlem 3.2.2. $G(p, n)$ grafi Fibonacci ince etiketine sahip olsun. O zaman 0 ve F_n olarak etiketlenen düğümlerine komşu olan ve derecesi 2 olan v düğümü ekleyerek $G_2(p + 1, n + 2)$ Fibonacci ince grafi oluşturulabilir. v düğümü de F_{n+2} ile etiketlenebilir. [3]

Teorem 3.2.1. C_n devrinin Fibonacci ince olması için gerek ve yeter şart $n \equiv 0(mod3)$ ya da $n \equiv 2(mod3)$ olmasıdır. [3]

İspat: C_n devri Euler olduğundan Teorem 3.2. ye göre $n \equiv 1(mod3)$ için Fibonacci ince değildir. Eğer $n \equiv 0(mod3)$ ise düğümler üzerindeki Fibonacci ince etiketlemesi

$$0, F_n, F_{n-2}, F_{n-1}, \dots, F_{n-3j}, F_{n-3j-2}, F_{n-3j-1}, \dots, F_6, F_4, F_5, F_3, F_1$$

şeklindedir.

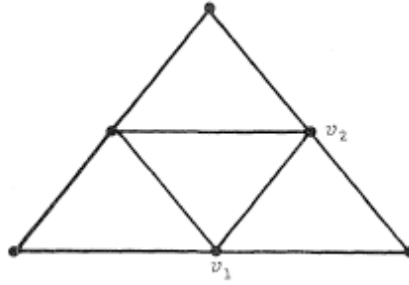
Eğer $n \equiv 2(mod3)$ ise düğümler üzerindeki Fibonacci ince etiketlemesi

$$0, F_n, F_{n-2}, F_{n-1}, \dots, F_{n-3j}, F_{n-3j-2}, F_{n-3j-1}, \dots, F_5, F_3, F_4, F_1$$

şeklindedir. \square

Teorem 3.2.2. En az 4 düğüme sahip bir maksimal dış düzlemsel G grafının Fibonacci ince olması için gerek ve yeter şart G grafının kesinlikle derecesi 2 olan iki düğüme sahip olmasıdır. [5]

İspat: G grafi derecesi 2 olan ama ikiden fazla düğüme sahip olan maksimal dış düzlemsel bir graf olsun. O zaman G , Şekil 3.7. deki grafa homeomorf olan bir altgraf içermelidir. Bu grafta v_1 ile v_2 arasında 4 ayrıt-ayrık yol bulunduğundan G , Teorem 3.1.2. ye göre Fibonacci ince olamaz. \square



Şekil 3. 7. Yasaklı bir altgraf

Derecesi 2 olan ve iki düğüme sahip bir Fibonacci ince etiketli $G(p, 2p - 3)$ grafının maksimal dış düzlemsel olduğunu göstermek için tümevarım yöntemi kullanılabilir. Bu etiketleme ya derecesi 2 olan bir v_0 düğümü üzerinde 0 etiketi ya da v_0 'n bir komşuluğunda F_{2p-3} etiketi olacak şekilde verilebilir. Derecesi 2 olan iki düğüme sahip bütün maksimal dış düzlemsel graflar ardışık olarak derecesi 2 olan bir önceki düğüme yeni bir düğüm eklenerek üretilebilir. Böylece Gözlem 3.2.2. nin ispatı tamamlanır.

Tümevarıma başlamak ve bu etiketlemeyi göstermek için Şekil 3.8. de ki $p = 4, 5$ ve 6 için 2 dereceli iki düğüme sahip tüm maksimal dış düzlemsel graflar örnek olarak gösterilebilir.

Kabul edilsin ki $p = k$ için tümevarım hipotezi doğru olsun ve $G(p + 1, 2p - 1)$ grafi da derecesi 2 olan ve iki düğüme sahip dış düzlemsel bir graf olsun. G grafında derecesi 2 olan ve v_1 ile v_2 ye komşu olan bir düğüm v_0 olsun. v_0 silindiğinde onun komşularından biri olarak v_1 düğümü ele alınabilir. $G - v_0$ içinde derecesi 2 olan bir düğüm olacaktır. Tümevarımla $G - v_0$ grafi

$$\varphi(v_1) = 0 \text{ ve } \varphi(v_2) = F_{2p-3}$$

olacak şekilde bir φ düğüm etiketlemesi yapılabilir.

Gözlem 3.2.2. ile G grafının v_0 düğümünü F_{2p-1} ile etiketlenerek Fibonacci ince hale getirilebilir. Gözlem 3.1. ile G Fibonacci ince grafının düğümlerine $F_{2p-1} - a_i$ dönüşümü yardımıyla

$$\varphi_1(v_0) = 0 \text{ ve } \varphi_1(v_1) = F_{2p-1}$$

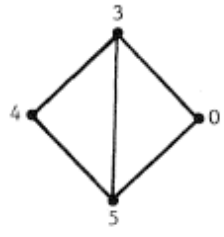
olacak şekilde etiketlenebilir.

G grafının $\varphi_2(v_1) = F_{2p-1}$ olan ikinci bir etiketlemeye sahip olduğunu göstermek için $G - v_0$ grafında düğüm etiketine $F_{2p} - a_i$ dönüşümü uygulanabilir. Bu işlem diğer tüm ayrıt etiketleri sabit kalmak şartı ile G de

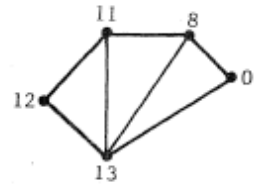
$$\varphi'_2(v_0v_2) = F_{2p-2} \text{ ve } \varphi'_2(v_0v_1) = F_{2p-1}$$

olacak şekilde bir φ_2' etiketlemesi ile verilebilir.

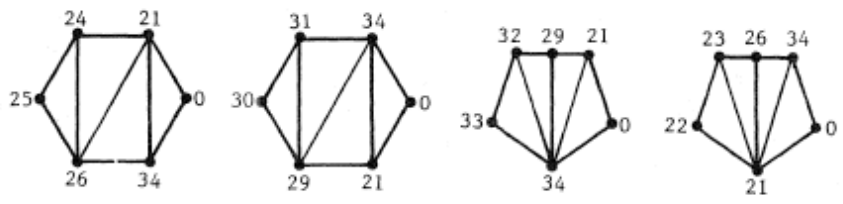
Bu etiketlemeye göre Şekil 3.8. incelenebilir.



a. $p = 4$



b. $p = 5$



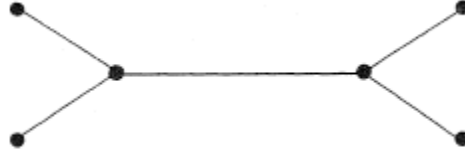
c. $p = 6$

Şekil 3.8.

3.3. Fibonacci İnce Ağaçlar

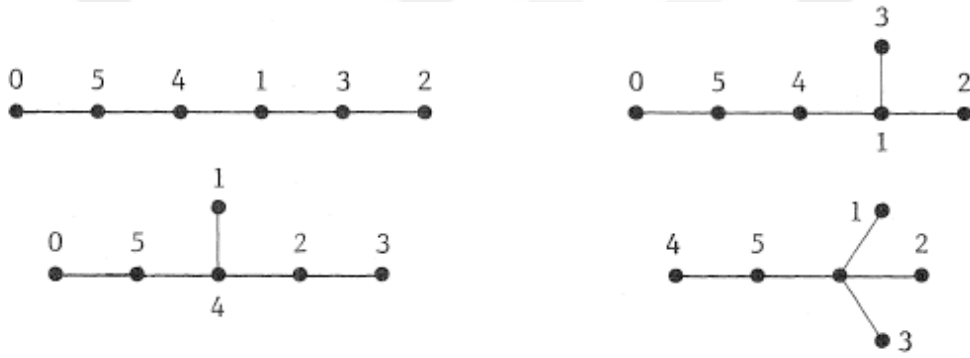
Bu bölümde hemen hemen her ağacın Fibonacci ince etiketlerinin bulunduğunu gösteren bir algoritma sunulabilir. Bu tip etiketlere sahip olmayan ağaçlar da bulunmaktadır. K_1 ve K_2 hariç beş veya daha az düğümlü herhangi bir $T(p, n)$ ağacı için ayrıkları $n \leq 4$ olan ve $p = n + 1$ düğümlerini etiketlemek için 0 ile F_n arasında yeterli sayıda tam sayı bulunmadığından T , Fibonacci ince olamaz. $n \geq 2$ için $K_{1,n}$ grafıda Fibonacci ince değildir. Bunun nedeni tüm ayrıkların ortak bir düğümü olması ve geri kalan düğümlerin ayrık bir biçimde etiketlenmesi durumunda aynı düğüme komşu olan 1 ile etiketlenmiş iki tane ayrıt yoktur.

Fibonacci ince olmayan tek ağaç ise Şekil 3.9. da gösterilmiştir.



Şekil 3.9.

Özellikle çok sayıda düğüme sahip ağaçlara etiketleme yapılabilir. Çünkü n için F_n belirgin oranda $n + 1$ den büyüktür ve düğüm etiketlerini seçebilecek çok sayıda farklı tam sayı vardır. Şekil 3.10. da verilen 6 düğümlü ağaçlar birer Fibonacci incedir.



Şekil 3.10. $T(6,5)$ olan Fibonacci ince ağaçlar

Tanım 3.3.1. Bütün düğümleri merkezil yoldan 1 birim uzaklıkta olan bir ağaca *tırtıl* denir. [6]

Şekil 3.10. da verilen ağaçlar tüm uç noktaları kaldırıldığında birer tırtıl olur. Bu tırtılların uzunluğu geri kalan yol üzerindeki ayrıt sayısıdır. Aynı zamanda tüm tırtıllar ince ağaçlardır.

Teorem 3.3.1. $n \geq 6$ olmak üzere $K_{1,n}$ hariç $T(n + 1, n)$ için tüm ağaçlar Fibonacci incedir. [3]

İspat: Teoremin ispatı üç aşamada verilebilir.

- a) Boyu 1 olan tırtıllar,
- b) Boyu 2 veya daha uzun olan tırtıllar,

c) Tırtıl olmayanlar.

Boyu 1 olan tırtıllar ele alınsın. T nin en az 6 ayrıtı olduğundan derecesi 4 veya daha fazla olan bir v_0 düğümü vardır. v_1, v_0 in komşuluğunda uç nokta olmayan bir düğüm olsun. $v_0 = 0$ olacak şekilde φ etiketlemesi yapılabilir. F_n ile v_1 i ve v_0 a komşu olan ($k + 1 \geq 3$) uç noktalar ise

$$F_n - F_{n-k-1}, F_n - F_{n-k-2}, \dots, F_n - 3, F_n - 2, F_n - 1$$

şeklindedir.

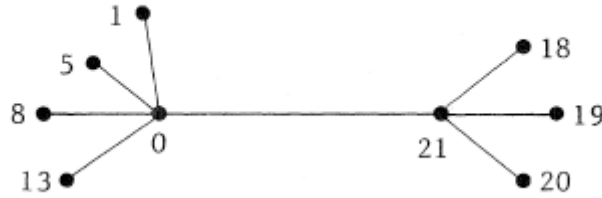
Şekil 3.11. de bu prosedürün sonuçlarından bir örnek verilmiştir. Bu algoritma uygun bir ayrıtı etiketlemesi sunar ve düğüm etiketlerinin farklı olduğunu doğrular. v_i, v_0 in komşusu ve v_j de v_1 in komşusu ise o zaman $n \geq 6$ ve $2 \leq k \leq n - 3$ için

$$\min\{\varphi(v_j)\} = F_n - F_{n-k-1} > F_{n-1} = \max\{\varphi(v_i)\}$$

bağıntısından dolayı

$$\varphi(v_j) > \varphi(v_i)$$

bağıntısı elde edilir.



Şekil 3. 11. Boyu 1 olan bir tırtıl

Boyu 2 veya daha uzun olan bir tırtıl için T de en uzun yol seçilip, seçilen yolun düğümleri $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ olarak adlandırılır. v_i ye komşu olan düğümler ise $i = 1, 2, 3, \dots, k$ için $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ij}$ olarak adlandırılır. v_1 in derecesi 2 ise φ etiketlemesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\varphi(v_0) = 0, \varphi(v_1), \varphi(v_2) = F_n - 1$$

olsun.

Daha sonra v_2 komşuları

$\varphi(v_{21}) = \varphi(v_2) - F_{n-1}, \varphi(v_{22}) = \varphi(v_2) - F_{n-2}, \dots, \varphi(v_{2j}) = \varphi(v_2) - F_{n-j}$
şeklinde etiketlenebilir.

Son olarak

$$\varphi(v_3) = \varphi(v_2) - F_{n-j-1}$$

ile etiketlenir.

v_3 ün $r + 1$ komşularını tanımlamak üzere devam edilir.

$$\varphi(v_4) = \varphi(v_3) + F_{n-j-r-2}$$

ile biten

$$\begin{aligned} \varphi(v_{31}) &= \varphi(v_3) + F_{n-j-2}, \varphi(v_{32}) = \varphi(v_3) + F_{n-j-3}, \dots, \\ \varphi(v_{3r}) &= \varphi(v_3) + F_{n-j-r-1} \end{aligned}$$

gibi bir etiketleme yapılır.

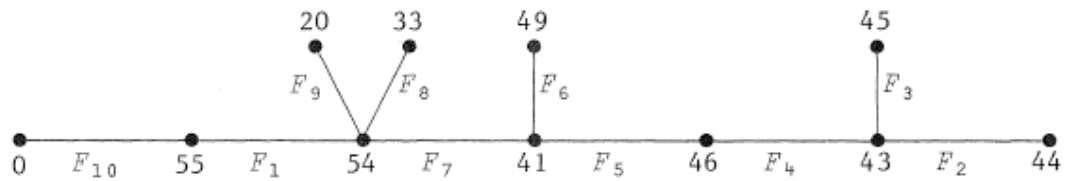
v_3 ün her bir komşusu, özellikle $\varphi(v_2)$ ve $\max\{\varphi(v_3), \varphi(v_{2i})\}$ arasında olan pozitif tam sayılarla etiketlenir.

v_4 ün komşuları için her bir düğüm

$$\varphi(v_4) - (\text{uygun bir Fibonacci sayısı})$$

ile etiketlenir.

Tekrar bunların her biri $\varphi(v_3)$ ve $\min\{\varphi(v_4), \varphi(v_{3i})\}$ arasındaki farklı pozitif tam sayılarla etiketlenir. v_6, v_8, v_{10}, \dots komşularından çıkarmak ve v_5, v_7, v_9, \dots komşularına Fibonacci sayıları eklemek sureti ile bu şekilde devam edilir. Ortaya çıkan etiketlerin bir örneği Şekil 3.12. de gösterilmiştir.



Şekil 3.12

v_1 düğümünün derecesi 2 den büyük ise

$$\varphi(v_0) = 0 \text{ ve } \varphi(v_1) = F_n$$

olsun.

v_1 komşuları için

$$\varphi(v_2) = \varphi(v_1) - F_{n-j}$$

ile biten

$$\varphi(v_{11}) = F_n - 1,$$

$$\varphi(v_{12}) = \varphi(v_1) - F_{n-1},$$

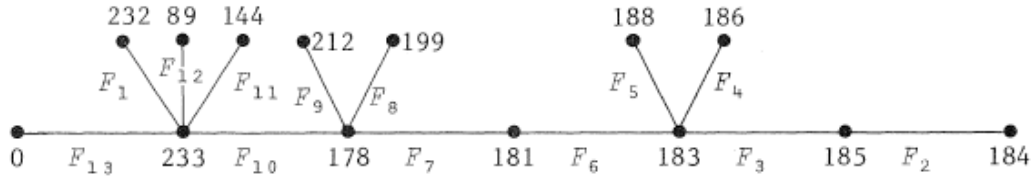
$$\varphi(v_{13}) = \varphi(v_1) - F_{n-2},$$

⋮

$$\varphi(v_{1j}) = \varphi(v_1) - F_{n-j}$$

şeklinde bir etiketleme verilebilir.

$\varphi(v_2)$ ye uygun Fibonacci sayı dizinleri eklemek suretiyle v_2 komşularını etiketlemeye devam edilir. Bu örnekte bu düğümler için düğüm etiketleri $\varphi(v_{11})$ ile $\varphi(v_2)$ arasında olacaktır. Bu en büyük iki düğüm etiketi v_1 in komşuları üzerinde bulunur. İstenilen tırtıl Şekil 3.13. de gösterilmiştir.



Şekil 3. 13.

Son olarak tırtıl olmayan bir T ağacı ele alınır.

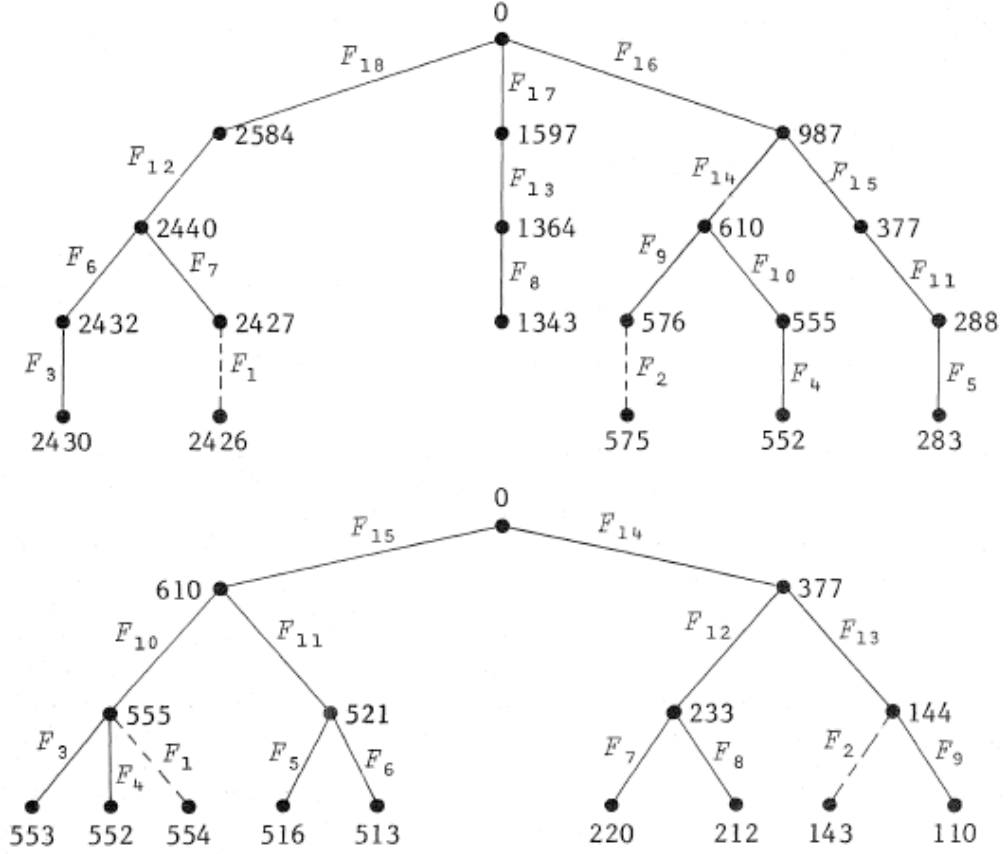
Yol olmayan ama bir alt ağaç olan T' yü oluşturmak için T de en uzun yoldaki iki uç nokta çıkarılır. T' bir ya da iki merkeze sahiptir. Her ikisi de en uzun yol olan bir P' yolu üzerindedir. Bu merkezlerden biri seçilip, v_0 ile gösterilebilir. v_0 civarında T' bir köktür. Eğer v_0 derecesi $k \geq 2$ olan bir düğüm ise böyle bir yolda v_0 in

komşuları $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1k}$ ile gösterilirse v_{11} ve v_{1k} da P' üzerindedir. Eğer iki merkez varsa T' nün diğer merkezi de v_{1k} dır. v_0 ve v_{11} i içeren P' nün yarısı P_L' (sol yarı), v_0 ve v_{1k} yı içeren bölüm de P_R' (sağ yarı) ile gösterilir. Böylece ilk seviyedeki düğümler soldan sağa doğru etiketlenir. Ayrıca $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1k}$ civarındaki köklü k tane alt ağaç sırasıyla T_1, T_2, \dots, T_k ile gösterilmiş olsun. v_0 ile arasındaki uzaklıkları 2 olan düğümler de $v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2j}$ ile adlandırılabilir. v_{21} düğümü P_R' üzerinde ve v_{2j} de P_L' üzerindedir. Daha sonra düğümler sağdan sola doğru adlandırılır. Bu adlandırma 3 uzaklıklı düğümler için devam ettirilerek $v_{31}, v_{32}, \dots, v_{3r}$ ile adlandırılır. Herbir seviyedeki adlandırma T' nün bütün düğümleri adlandırılincaya kadar devam ettirilir. v_0 bir merkez olduğundan her bir uzaklık veya seviyede en az iki düğüm vardır. Belki son seviye hariç ki o durumda P_R' üzerinde sadece tek bir düğüm olabilir. Hatta T' bir yol olmadığından en az üç düğümlü bir seviye olmalıdır.

T' üzerinde Fibonacci ince φ etiketlemesi şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\varphi(v_0) &= 0 \\ \varphi(v_{11}) &= F_n, \quad \varphi(v_{12}) = F_{n-1}, \dots, \varphi(v_{1k}) = F_{n-k+1} \\ \varphi(v_{21}) &= \varphi(v_{1k}) - F_{n-k} \\ \varphi(v_{22}) &= \varphi(v_{22} \text{ ana düğümü}) - F_{n-k}\end{aligned}$$

T' nün düğümleri ilk seviyede soldan sağa azalan sırada, sonraki seviyelerde ise sağdan sola F_n, F_{n-1}, \dots, F_3 şeklinde bir etiketleme alır. φ nin orijinal ağacı olan T yi elde etmek için kaldırılan uç noktalar, komşularının etiket numaralarının 1 eksiği ile etiketlenir. Şekil 3.14. bu algoritmanın iki uygulamasını temsil eder.



Şekil 3.14.

Bu durumda tüm ayrıtlar uygun bir biçimde etiketlenir. İş sadece düğüm etiketlerinin farklı ve negatif olmadığını gözlemlemeye kalır.

Öncelikle köklü T_i , $i = 1, 2, \dots, k$ alt ağaçlarında v_0 dan uzaklık arttıkça düğüm etiketlerinin azaldığı söylenebilir. Son olarak $i < j$ için T_i deki her düğüm etiketi T_j dekilerden daha büyüktür. T_1 deki tüm düğüm etiketleri $F_n -$ (Fibonacci sayılarının toplamı) ifadesine eşittir. Burada bu toplamdaki terimler en fazla

$$F_{n-3}, F_{n-5}, F_{n-7}, \dots, F_{n-r}, F_{n-r-3}, F_{n-r-5}, \dots$$

etiketlemesini kapsar.

Bazı r ler için her seviyede en az ayrıtlar P_R' de olduğundan bazı seviyelerde bazı ayrıtlar P' üzerinde değildir. Bu şekilde Özdeşlik 5 ile T_1 deki en küçük düğüm numarası

$$F_{n-2} < \varphi(v_2) < F_{n-1}$$

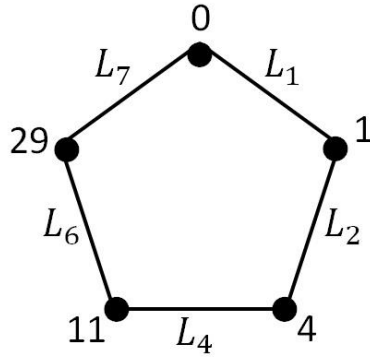
den büyüktür. $v \in T_k$ ise o zaman $0 < \varphi(v) \leq F_{n-k}$ olur. Bu da teoremin kanıtını doğrular.

4. LUCAS İNCE GRAFLAR VE ÖZELLİKLERİ

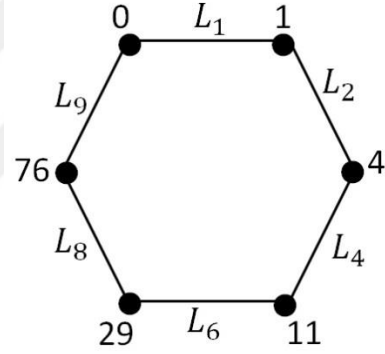
Tanım 4.1.

(a) Devirli yapıya sahip p düğümlü ve n ayrıtlı bir $G(p, n)$ basit grafını ele alalım. G nin herbir ayrıtına farklı bir etiket atayan ve $\varphi'(uv) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$ biçiminde tanımlanan bir φ' etiketlemesi için G nin düğümlerini $\{0, 1, 2, \dots, L_{2n-3}\}$ kümesindeki farklı Lucas tam sayılarıyla etiketleyen bir φ etiketlemesi varsa G grafına *Lucas ince graf* denir.

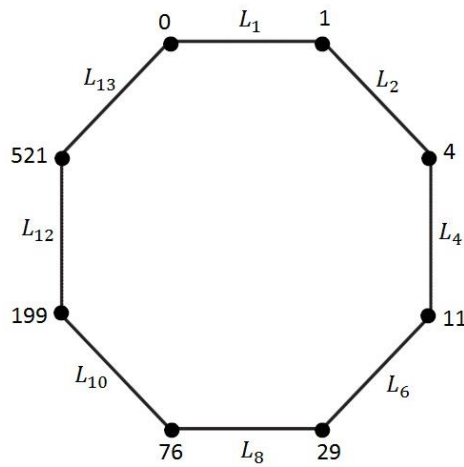
Şekil 4.1., Şekil 4.2. ve Şekil 4.3. te ki devir yapıları bu tanıma göre incelenebilir.



Şekil 4.1. C_5 devir

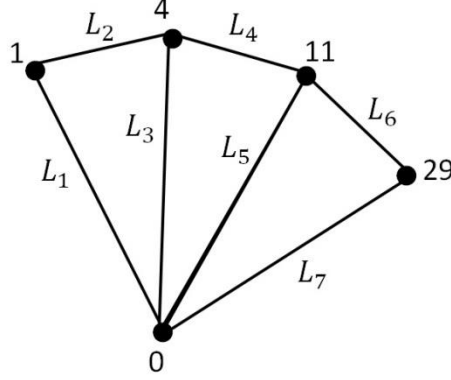


Şekil 4.2. C_6 devir

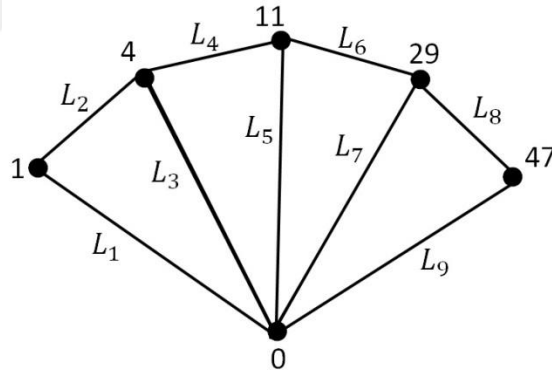


Şekil 4.3. C_8 devir

(b) Devirli yapıya sahip olmayan p düğümlü ve n ayrıtlı bir $G(p, n)$ basit grafını ele alalım. G nin herbir ayrıtına farklı bir etiket atayan ve $\varphi'(uv) = |\varphi(u) - \varphi(v)|$ biçiminde tanımlanan bir φ' etiketlemesi için G nin düğümlerini $\{0, 1, 2, \dots, L_n\}$ kümesindeki farklı Lucas tam sayılarıyla etiketleyen bir φ etiketlemesi varsa G grafına *Lucas ince graf* denir.



Şekil 4. 4. Yelpaze (devirli yapıya sahip olmayan Lucas grafı)



Şekil 4. 5. Yelpaze (devirli yapıya sahip olmayan Lucas grafı)

Bir grafın Lucas ince grafı olduğunu görmek için birkaç farklı etiketleme yapılabilir.

$\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ bir grafın düğüm etiketleri olmak üzere

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{r-1} - a_r| + |a_r - a_1|$$

toplamı

$$\sum_{i=1}^r |a_i - a_{i+1}| \equiv \sum_{i=1}^r (a_i - a_{i+1}) \equiv 0 \pmod{2}$$

olacak şekilde bir etiketleme yapılabilir.

Gözlem 4.1.

(a) $\{0 = a_1, a_2, \dots, a_n = L_{2n-3}\}$ ifadesi devirli yapıya sahip Lucas ince grafının düğüm etiketlerinin bir kümesidir. Buradan her bir a_i etiketinin $L_{2n-3} - a_i$ ile etiketlenmesiyle de yine bir Lucas ince graf elde edilir.

(b) $\{0 = a_1, a_2, \dots, a_n = L_n\}$ ifadesi devirli yapıya sahip olmayan Lucas ince grafının düğüm etiketlerinin bir kümesidir. Buradan her bir a_i etiketinin $L_n - a_i$ ile etiketlenmesiyle de yine bir Lucas ince graf elde edilir.

Teorem 4.1. $G(p, n)$ Lucas ince graf ve C_i de G de k uzunluklu bir devir olsun. Bu durumda $\{L_{ij}\}_{j=1}^k$ ler C_i deki ayrıtlar için Lucas sayıları olmak üzere, tüm $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$\sum_{j=1}^k \delta_{ij} L_{ij} = 0 \quad \text{ve} \quad \delta_{ij} = \mp 1$$

olacak şekilde bir $\{\delta_{ij}\}_{j=1}^k$ dizisi vardır.

İspat: C_i nin düğüm etiketleri $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ olsun. Buradan

$$\sum_{j=1}^{k-1} (a_{j+1} - a_j) + (a_1 - a_k) = 0$$

olduğu görülür.

Her bir $(a_{j+1} - a_j)$ farkı ya C_i üzerindeki bir ayrıtlar etiketine ya da onun negatifine eşit olduğundan teorem ispatlanır. \square

Sonuç 4.1. G grafında Lucas ince etiketi varsa G de uzunluğu 3 olan herhangi bir devrin ayrıtları 3 tane ardışık Lucas sayısı ile etiketlenmelidir.

Sonuç 4.2. G grafında Lucas ince etiketlemesi varsa G de uzunluğu 4 olan devrin ayrıtları $L_i, L_{i+1}, L_{i+3}, L_{i+4}$ şeklinde etiketlenmelidir.

Sonuç 4.3. G grafında Lucas ince etiketlemesi varsa G de uzunluğu 5 olan devrin ayrıtları $L_i, L_{i+1}, L_{i+3}, L_{i+5}, L_{i+6}$ şeklinde etiketlenmelidir.

Sonuç 4.4. G grafında bir Lucas ince etiketlemesi olsun. C_i devrindeki k uzunluklu en büyük üç ayrıt etiketinin ardışık Lucas sayıları olan $L_{i(2k-3)-3}, L_{i(2k-3)-1}, L_{i(2k-3)}$ olduğu kabul edilsin. O zaman C_i üzerindeki geri kalan etiketler için

$$\sum_{j=1}^{k-3} \delta_{ij} L_{ij} = 0$$

eşitliği elde edilir.

İspat: $\delta_{i(2k-3)-3}$ ve $\delta_{i(2k-3)-1}$, $\delta_{i(2k-3)}$ nin işaretiyle zıt olmalıdır. Aksi halde $L_{i(2k-3)}, L_{i(2k-3)-3}$ ve $L_{i(2k-3)-1}$ toplamı C_i üzerinde geri kalan tüm ayrıt etiketlerinin toplamını geçer. Bu da Teorem 4.1 ile çelişir. \square

Uygunluk açısından sonradan kullanışlı olabilecek bazı temel Lucas özdeşlikleri şunlardır:

Özdeşlik 1. $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$; $L_1 = 1, L_2 = 3, L_0 = 2$.

Özdeşlik 2. $L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_{n-2} = L_n - 3$.

Özdeşlik 3. $L_1 + L_3 + L_5 + \dots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2$.

Özdeşlik 4. $L_2 + L_4 + L_6 + \dots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1$.

Lemma 4.1. $G(p, n)$ grafının Lucas ince etiketlemesine sahip olduğunu ve C nin de G nin bir devri olduğu kabul edilsin.

a) L_k , C nin en büyük ayrıt etiketi olan Lucas sayısı ise L_{k-1} de C üzerindedir. Özellikle L_{n-1} olarak etiketlenen ayrıt, L_n olarak etiketlenen ayrıtı içeren her devirde olmalıdır.

b) En büyük etiketi L_k olan C devri, L_{k-3} olarak etiketlenen ayrıtı kapsamalıdır.

İspat:

a) Teorem 4.1 den dolayı C üzerindeki ayrıt etiketlerin bazı lineer kombinasyonları toplamı 0 olmalıdır. Özdeşlik 2 ile

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_{k-2} = L_k - 3 < L_k$$

olacak şekilde L_{k-1} etiketi C nin ayrıt etiketi olarak görülmelidir. \square

b) $L_k - L_{k-1} = L_{k-2}$ olduğundan C üzerindeki geri kalan etiketlerin bazı kombinasyonları L_{k-3} e eşit olmalıdır. \square

Teorem 4.2. $G(p, n)$ grafi Euler ve Lucas ince graf ise $n \equiv 0(mod3)$ veya $n \equiv 2(mod3)$ tür.

İspat: G grafi Euler ise ayrıt-ayrık devirlerine parçalanabilir. Teorem 4.1 ile devir etrafındaki ayrıt etiketlerin toplamı çift olmalıdır. Dolayısıyla

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3$$

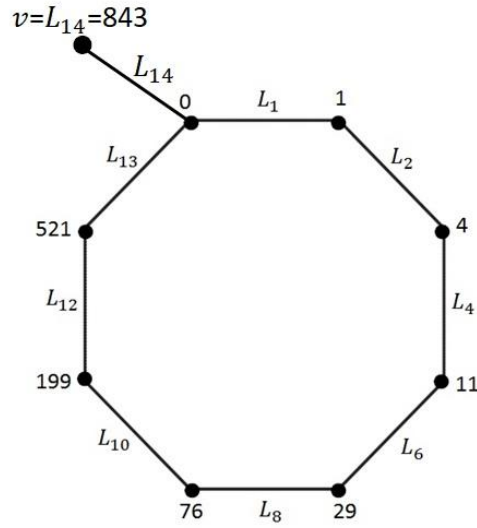
eşitliği de çift olmalıdır. Bu şekilde L_{n+2} ayrıtı da tek olmalı ve bu durum sadece $n \equiv 0(mod3)$ veya $n \equiv 2(mod3)$ olmasıyla mümkündür. \square

4.1. Lucas İnce Graf Sınıfları

Gözlem 4.1.1.

(a) $G(p, n)$ grafi Lucas ince etiketine sahip bir devir olsun. O zaman 0 olarak etiketli düğüme komşu olan ve derecesi 1 olan v düğümü eklenerek $G_1(p + 1, n + 1)$ Lucas ince grafi oluşturulur. v düğümü de L_{2n-2} ile etiketlenir.

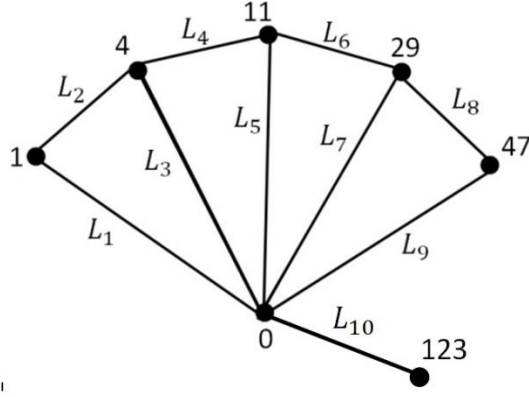
Şekil 4.6. bu gözleme göre incelenebilir.



Şekil 4. 6.

(b) $G(p, n)$ grafi Lucas ince etiketine sahip devirli olmayan bir graf olsun. O zaman 0 olarak etiketli düğüme komşu olan ve derecesi 1 olan v düğümü eklenerek $G_1(p + 1, n + 1)$ Lucas ince grafi oluşturulur. v düğümü de L_{n+1} ile etiketlenir.

Şekil 4.7. bu gözleme göre incelenebilir.

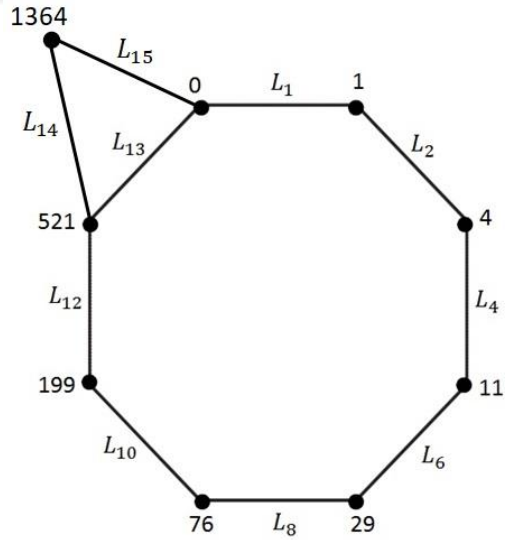


Şekil 4. 7.

Gözlem 4.1.2.

(a) $G(p, n)$ grafi Lucas ince etiketine sahip bir devir olsun. O zaman 0 ve L_{2n-3} olarak etiketlenen düğümlerine komşu olan ve derecesi 2 olan v düğümü ekleyerek $G_2(p + 1, n + 2)$ Lucas ince grafi oluşturulur. v düğümü de L_{2n-1} ile etiketlenir.

Şekil 4.8. bu gözleme göre incelenebilir.

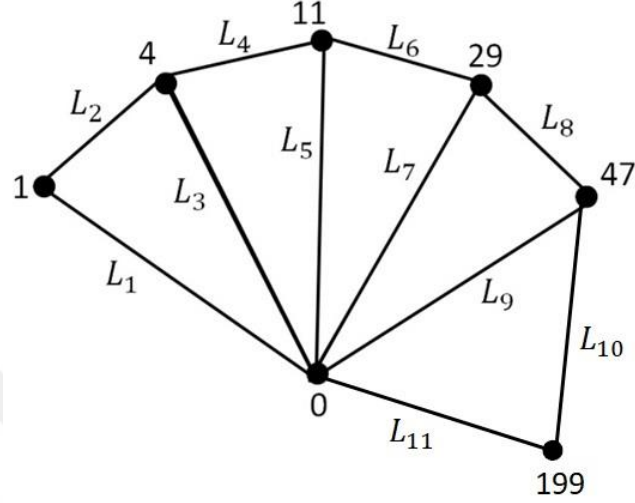


Şekil 4. 8.

(b) $G(p, n)$ grafi Lucas ince etiketine sahip devirli olmayan bir graf olsun. O zaman 0 ve L_n olarak etiketlenen düğümlerine komşu olan ve derecesi 2 olan v düğümü

ekleyerek $G_2(p + 1, n + 2)$ Lucas ince grafi oluşturulur. v düğümü de L_{n+2} ile etiketlenir.

Şekil 4.9. bu gözleme göre incelenebilir.



Şekil 4.9.

Teorem 4.1.1. C_n devrinin Lucas ince olması için gerek ve yeter şart $n \equiv 0(mod3)$ ya da $n \equiv 2(mod3)$ olmasıdır.

İspat: C_n devri Euler olduğundan Teorem 4.2. ye göre $n \equiv 1(mod3)$ için Lucas ince değildir. Eğer $n \equiv 0(mod3)$ ise düğümler üzerindeki Lucas ince etiketlemesi

$$0, L_{2n-3}, L_{2n-5}, L_{2n-7}, \dots, L_{2n-3j-3}, L_{2n-3j-5}, L_{2n-3j-7}, \dots, L_9, L_7, L_5, L_3, L_1$$

şeklindedir.

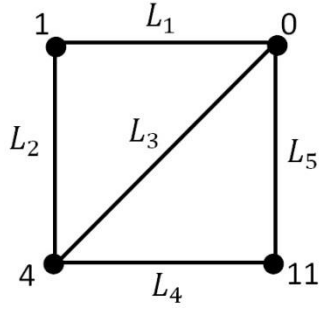
Eğer $n \equiv 2(mod3)$ ise düğümler üzerindeki Lucas ince etiketlemesi

$$0, L_{2n-3}, L_{2n-5}, L_{2n-7}, \dots, L_{2n-3j-3}, L_{2n-3j-5}, L_{2n-3j-7}, \dots, L_7, L_5, L_3, L_1$$

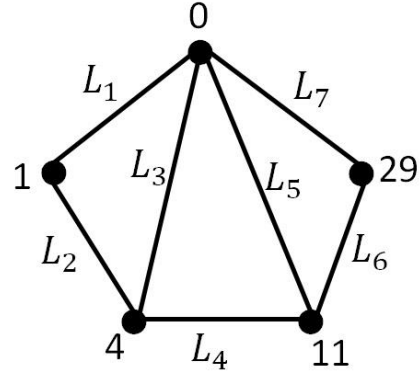
şeklindedir.

Teorem 4.1.2. En az 4 düğüme sahip bir maksimal dış düzlemsel G grafının Lucas ince olması için gerek ve yeter şart onun kesinlikle derecesi 2 olan iki düğüme sahip olmasıdır.

Şekil 4.10. ve Şekil 4.11. bu teoreme göre incelenebilir.

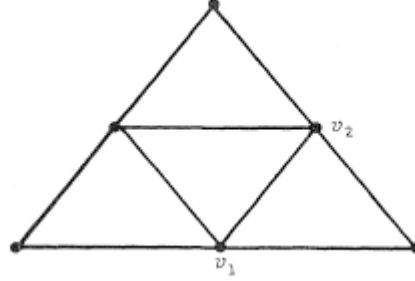


Şekil 4. 10. Maksimal dış düzlemsel graf



Şekil 4. 11. Maksimal dış düzlemsel graf

İspat: G grafi derecesi 2 olan ama ikiden fazla düğüme sahip olan maksimal dış düzlemsel bir graf olsun. O zaman G , Şekil 4.12. deki grafa homeomorf olan bir alt graf içermelidir. Bu grafa v_1 ile v_2 arasında 4 ayrıt-ayrık yol bulunduğundan G , Lucas ince olamaz. \square



Şekil 4. 12. Yasaklı bir altgraf

Derecesi 2 olan ve iki düğüme sahip bir Lucas ince etiketli $G(p, 2p - 3)$ grafının maksimal dış düzlemsel olduğunu göstermek için tümevarım yöntemi kullanılır. Bu etiketleme ya derecesi 2 olan bir v_0 düğümü üzerinde 0 etiketi ya da v_0 ın bir komşuluğunda L_{2p-3} etiketi olacak şekilde verilebilir. Derecesi 2 olan iki düğüme sahip bütün maksimal dış düzlemsel graflar ardışık olarak derecesi 2 olan bir önceki düğüme yeni bir düğüm eklenerek üretilebilir. Böylece Gözlem 4.1.2. nin ispatı tamamlanır. Tümevarıma başlamak ve bu etiketlemeyi göstermek için Şekil 4.13. te

$p = 4$ ve $p = 5$ için 2 dereceli iki düğüme sahip tüm maksimal dış düzlemsel graflar örnek olarak gösterilebilir.

Kabul edilsin ki $p = k$ için tümevarım hipotezi doğru olsun ve $G(p + 1, 2p - 1)$ grafıda derecesi 2 olan ve kesinlikle iki düğüme sahip dış düzlemsel bir graf olsun. G grafında derecesi 2 olan ve v_1 ile v_2 ye komşu olan bir düğüm v_0 olsun. v_0 silindiğinde onun komşularından biri olarak v_1 düğümü ele alındığında $G - v_0$ içinde derecesi 2 olan bir düğüm olacaktır. Tümevarımla $G - v_0$ grafi

$$\varphi(v_1) = 0 \text{ ve } \varphi(v_2) = L_{2p-3}$$

olacak şekilde bir φ düğüm etiketlemesi verilebilir.

Gözlem 4.1.2. ile G grafının v_0 düğümü L_{2p-1} ile etiketlenerek Lucas ince hale getirilir. Gözlem 4.1. ile G Lucas ince grafının düğümlerine $L_{2p-1} - a_i$ dönüşümü yardımıyla

$$\varphi_1(v_0) = 0 \text{ ve } \varphi_1(v_1) = L_{2p-1}$$

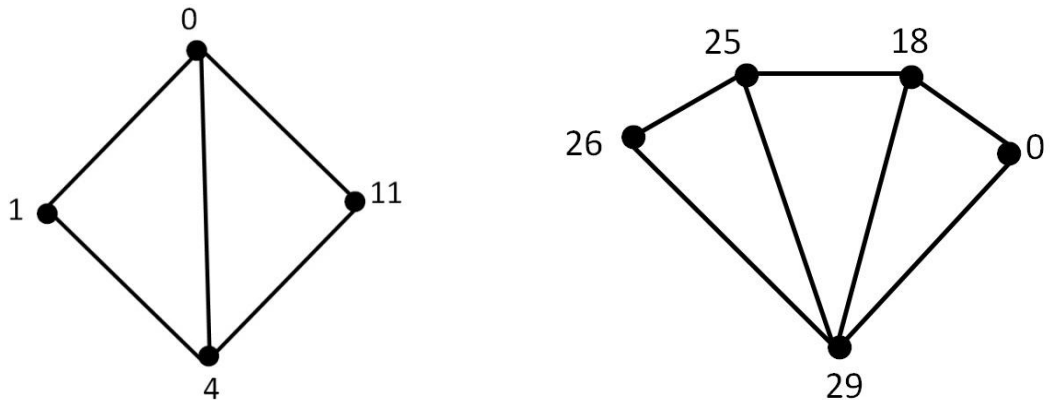
olacak şekilde bir etiketleme verilebilir.

G grafının $\varphi_2(v_1) = L_{2p-1}$ olan ikinci bir etiketlemeye sahip olduğunu göstermek için $G - v_0$ grafında düğüm etiketine $L_{2p} - a_i$ dönüşümü uygulanabilir. Bu işlem diğer tüm ayrıt etiketleri sabit kalmak şartı ile G de

$$\varphi'_2(v_0v_2) = L_{2p-2} \text{ ve } \varphi'_2(v_0v_1) = L_{2p-1}$$

olacak şekilde bir φ_2' etiketlemesi ile verilir.

Şekil 4.13. bu etiketlemeye göre incelenebilir.



Şekil 4.13. $p = 4$ ve $p = 5$ düğümlü graflar

5. SONUÇLAR

Fibonacci ve Lucas sayıları geçmişten günümüze kadar birçok yerde kullanılmış ve bugüne kadar bunlarla ilgili birçok çalışma yürütülmüştür. Bu sayılarla ilgili tanımlar, teoremler, gözlemler ve sonuçlar ortaya konulmuştur. Bilgisayar dünyasında bulunan ve gerçek hayatta çeşitli sebeplerle karşılaşılan yapıları temsil etmek amacıyla da graflar kullanılmaktadır. Son zamanlarda ilgi odağı olan graflar Fibonacci sayılarıyla etiketlenerek Fibonacci ince graflar olarak adlandırılan bir kavram ortaya konulmaktadır.

Bu tez çalışması bu alanda yapılan çalışmaların bir derlemesi niteliğindedir. Aynı zamanda Fibonacci ince graflardan esinlenilerek Lucas ince grafları hakkında yeni tanım, teorem ve gözlemler verilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Balakrishnan, V. K., Schaum's Outline of Graph Theory: Including Hundreds of Solved Problems. McGraw Hill Professional, 1997.
- [2] B. Allgeier, Structure and Properties of Maximal Outerplanar Graphs. Ph.D. Thesis. University of Louisville, 2009.
- [3] Bange, D.W., Barkauskas, A.E., Fibonacci graceful graphs. The Fibonacci Quarterly. 21 (3): 174-188, 1983.
- [4] Golomb, S.W., Graph theory and computing. How to Number a Graph. 23-27. Ed: by R.C. Read. Academic Press, New York and London, 1972.
- [5] Bange, D.W., Barkauskas, A.E., Slater, P.J., Using associated trees to count the spanning trees of labeled maximal outerplanar graphs. Proc. 8 S.E. Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, New York, 605-614, 1977.
- [6] Rosa, A., Labeling snakes. Ars Combinatoria. 3: 67-73, 1977.