T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-ANALİTİK FONKSİYONLARIN TAYLOR SERİSİ

GÜLNARİN ATEŞ

EKİM 2018

Matematik Anabilim Dalında Gülnarin ATEŞ tarafından hazırlanan q-ANALİTİK FONKSİYONLARIN TAYLOR SERİSİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylıyorum**.**

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Kerim KOCA

Üye : Doç. Dr. Murat OLGUN

Üye : Doç. Dr. Recep ŞAHİN

25/10/2018

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BEYAN

Yüksek Lisans Tezi sunduğum "q-Analitik Fonksiyonların Taylor Serisi" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve faydalandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak faydalanılmış olduğunu beyan ederim.

25/10/2018

Gülnarin ATEŞ

ÖZET

q-Analitik Fonksiyonların Taylor Serisi

ATEŞ, Gülnarin

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA

Ekim 2018, 43 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde tezin amacı açıklanmış ve kaynaklara yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise; tezin genelinde sıklıkla başvurulacak olan genel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise diskret üstel ve trigonometrik fonksiyonlar ele alınmıştır.

Son olarak dördüncü bölümde tezde yapılanlar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: q-integral, q-türev, q-analitik fonksiyonlar

ABSTRACT

Taylor Series of q-Analytic Functions

ATEŞ, Gülnarin

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA

October, 2018, 43 pages

This thesis consist of four chapters.

The purpose of the thesis is explained in the first chapter.

The bibliography is in the first section.

In the second part, general definitions and concepts are included.

The definitions and concepts are included in the thesis.

In the third part, discrete exponential and trigonometric functions are mentioned.

Finally, brief informations about things done in the thesis are given in the fourth part.

Key Words: q-Integral, q-Difference ,q-Analytic functions

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışması olarak bu tezin hazırlanmasında beni yönlendirerek değerli tecrübe ve bilgi birikimini benimle paylaşan öncelikle çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Kerim KOCA’ ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren, desteklerini esirgemeyen ve hayatım boyunca bana olan güvenlerinden dolayı sevgili annem ve babama teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Genel olarak son 30 yıl içinde q-analizi ile ilgili araştırmalar artmıştır. Kesikli olayların incelenmesinde karşımıza çıkan q-Analizindeki ‘q’ harfi “quantum” kelimesinin ilk harfidir.

Diskret kompleks kümeler üzerinde tanımlanmış diskret fonksiyonlar için q-analitiklik değişik şekillerde tanımlanmıştır. Her tanıma göre q-analitik fonksiyonların Taylor açılımları da değişmektedir. Örneğin [3] de q-analitiklik değişik tanımlanmış ve serisel açılımlar ortaya konulmuştur.

Biz bu tezde [1] deki q-analitiklik tanımını kullanarak diskret küme üzerinde tanımlanmış q-analitik bir fonksiyonunun Taylor serisi açılımını ortaya koyacağız. Bunun için önce Taylor serisi açılımına yardımcı olacak q-analitik $\{f_n(z)\}$ fonksiyon dizisi tanımlanacaktır.

1.1.Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı, Harman anlamında q-analitik bir fonksiyonu q-Taylor serisine açmak ve q-Binom formülünün özelliklerini incelemektedir. q-Analitik fonksiyonlarını q-Taylor serisine açmak için z kompleks değişkeninin q-Binom kuvvetlerine ihtiyaç vardır. Tezin diğer bir amacı da $z^{(n)} = (x+iy)_q^{(n)}$ ifadesinin değişik formlarda q-Binom açılımlarını elde etmektir.

1.2. Kaynak Özeti

[1] nolu kaynaktan q-diskret küme, kompleks q-türev, kompleks q-eğrisel integral kavramları öğrenilmiştir.[2] nolu kaynaktan $z = x + iy$ kompleks değişkeninin $z^{(n)}$ Binom kuvvetleri tanımlanmış ve q-analitik fonksiyonların q-Taylor açılımları incelenmiştir.

2.TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $q > 0$, $q \neq 1$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

ifadesine a sayısının q-analoğu denir.

n'in q-faktöriyeli

$$[n]_q! = [n]_q[n-1]_q[n-2]_q \dots [1]_q \; ; \; [0]_q! = 1 \qquad (n=1,2,\dots)$$

olarak tanımlanır.

q-Binom katsayıları ise

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! \, [k]_q!} = \frac{(1-q)_n}{(1-q)_{n-k}(1-q)_k}$$

şeklinde tanımlanıp burada $(1-q)_q^{(n)} = (1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{n-1})$ dir.

Tanım 2.2. $D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sabit sayısı verilsin. Eğer her $z \in D$ için $\lambda z \in D$ oluyorsa D 'ye $\lambda -$ geometrik küme denir.

Eğer $D \subset \mathbb{C}$ alt kümesi bir $\lambda -$geometrik küme ise bu takdirde her $z \in D$ için D kümesi $(z\lambda^n)_0^\infty$ formundaki tüm dizileri içerir.

$D \subset \mathbb{C}$, q-geometrik bir küme ve $f(z), D$ üzerinde tanımlanmış bir kompleks fonksiyon olsun. Bu durumda $f(z)$ nin $q -$ türevi

$$D_q f(z) := \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z} \quad , \quad z \in D \backslash \{0\}, |q| < 1$$

$$D_q f(0) := \lim_{n \to \infty} \frac{f(q^n z) - f(0)}{q^n z}, \; z \in D \backslash \{0\} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır.

$D \subset \mathbb{R}^2$ alt bölgesinde $u = f(x,y)$ iki bağımsız değişkenli reel değerli fonksiyonu verilsin. $0 < q < 1$ için $(q^n x, q^n y) \in D$ olmak üzere u nun x ve y ye göre kısmi $q -$ türevleri sırasıyla

$$D_{qx} u(x,y) = \frac{u(qx,y) - u(x,y)}{(q-1)x}, x \neq 0 \tag{2.2}$$

$$D_{qy} u(x,y) = \frac{u(x,qy) - u(x,y)}{(q-1)y}, y \neq 0 \tag{2.3}$$

olarak verilir.

Tanım 2.3. $f(x)$ tek değişkenli bir fonksiyon olmak üzere;

$$d_q f(x) = f(x) - f(qx) = \left[D_q^x f(x)\right] d_q x \tag{2.4}$$

ifadesine *f(x)'*in *q-diferensiyeli* denir.

x ve y reel değişkenler olmak üzere bir *f(z)* kompleks değerli fonksiyonun $q -$diferensiyeli

$$d_q f(x,y) = f(x,y) - f(qx, \mathrm{q}y) = f(z) - f(qz) \tag{2.5}$$

dir.

Tanım 2.4. Bir reel değerli f fonksiyonunun $[0, a]$ Aralığı üzerinden $q - integrali$

$$\int_0^a f(x)d_qx = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)\,(aq^n - aq^{n+1})$$

$$= a(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n\, f(aq^n) \qquad (2.6)$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu integrale $f(x)$'in [0,a] aralığındaki *Jackson integrali* denir. a ve b keyfi sayılar olmak üzere $f(x)$'in [0,a] aralığındaki *Jackson integrali ise*

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)\, d_qx \qquad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. q-Analitik Fonksiyonlar

Tanım 2.5 . $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$ olduğu halde z_0, D'nin yığılma noktası değilse z_0 'a D'nin bir *ayrık (diskre) noktası* denir. Bütün elemanları ayrık noktalardan oluşan kümeye *diskret küme* denir.

Kompleks düzlemde diskret bir küme üzerinde tanımlanmış bir fonksiyona *diskret fonksiyon* denir.

Sabit bir $z = x + iy \in \mathbb{C}$ noktasını göz önüne alalım ve kompleks düzlemde

$$Q = \{(q^m x, q^n y) = q^m x + iq^n y \in \mathbb{C} : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

diskret kümesini tanımlayalım.

$x_i \neq 0, y_i \neq 0$ olmak üzere $z_i \in Q$ için $T(z_i) = \{(x_i, y_i), (qy_i, y_i), (x_i, qy_i)\}$ kümesini göz önüne alalım.

$$D_1 = \bigcup_{i=1}^{n} T(z_i) \subset Q$$

diskret alt bölgesini tanımlayalım. Bu küme üzerinde bir *f(z)* diskret fonksiyonu verilsin.

Tanım 2.6. [1],[5] $f(z)$,D_1 üzerinde kompleks değerli diskret bir fonksiyon olmak üzere

$$D_{q,x}f(z) = \frac{f(z) - f(qx,y)}{(1-q)x} \ , x \neq 0 \qquad (2.8)$$

$$D_{q,x}f(z) = \frac{f(z) - f(x,qy)}{(1-q)iy} \ , y \neq 0 \qquad (2.9)$$

olarak tanımlanan $D_{q,x}$ve $D_{q,y}$ operatörlerine kompleks *q-kısmi türev operatörleri* denir.

Tanım 2.7.[1], [5] $f(z)$, D_1 üzerinde tanımlanmış diskret bir fonksiyon olsun. Eğer $z \in D_1$ noktasında

$$D_{q,x}f(z) = D_{q,y}f(z) \qquad (2.10)$$

eşitliği sağlanıyorsa $f(z)$ ye z noktasında $q - analitik$tir denir.
Eğer (2.10) eşitliği D_1in her noktasında sağlanıyorsa $f(z)$ ye D_1 üzerinde *q-analitiktir* denir.

2.3. q-Analitik Fonksiyonlarının Özellikleri

Bir L operatörünü

$$L\,f(z) := \bar{z}f(z) - xf(x,qy) + iyf(qx,y) \qquad (2.11)$$

şeklinde tanımlayalım. D diskret kümesinde q-analitik olması için gerek ve yeter koşul $Lf(z) = 0$ olmasıdır. Burada $T(z) \subseteq D, z \in D$ dir. Gerçekten$f(z), D$ üzerinde q-analitik olsun. Bu taktirde (2.10) dan

$$\frac{f(z) - f(qx,y)}{(1-q)x} = \frac{f(z) - f(x,qy)}{(1-q)iy},$$

$$iy[f(z)-f(qx,y)]=x[f(z)-f(x,qy)]\ ,$$

olup buradan $\quad iyf(z)-iyf(qx,y)=xf(z)-xf(x,qy)$

$$Lf(z)=(x-iy)f(z)-xf(x,qy)+iyf(qx,y)=0$$

eşitliği elde edilir.

$z=x+iy\in Q$ ve $S(z)=\{(x,y),(qx,y),(qx,qy),(x,qy)\}$ olmak üzere

$$D=\bigcup_{i=1}^{n}S(z_i)=S(z_1)\cup S(z_2)\cup\ldots\cup S(z_n) \tag{2.12}$$

olsun. Ayrıca

$$D^*=\{z_i;\ z_i\in S(z_i),i=1,2,\ldots,n\} \tag{2.13}$$

kümesini ele alalım.

Teorem 2.1. $f(z)$ diskret fonksiyonu D^*üzerinde q-analitik ise $D_qf(z)$ de q-analitiktir.

İspat : $z\in D^*$, $S(z)\subset D$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu q-analitik olduğundan (2.10) eşitliğini (2.11) de yerine yazarsak

$$L\big[D_qf(z)\big]=(x-iy)\left[\tfrac{f(x,y)-f(qx,y)}{(1-q)x}\right]-x\tfrac{f(x,qy)-f(qx,qy)}{(1-q)x}+iy\tfrac{f(qx,y)-f(qx,qy)}{(1-q)iy}$$

$$=x\frac{f(x,y)-f(qx,y)}{(1-q)x}-iy\frac{f(x,y)-f(qx,y)}{(1-q)x}-x\frac{f(x,qy)}{(1-q)x}$$

$$+x\frac{f(qx,qy)}{(1-q)x}+iy\frac{f(qx,y)}{(1-q)iy}-iy\frac{f(qx,qy)}{(1-q)iy}$$

$$=x\frac{f(x,y)-f(qx,y)}{(1-q)x}-iy\frac{f(x,y)-f(qx,y)}{(1-q)x}-x\frac{f(x,qy)}{(1-q)x}$$

$$+\frac{f(qx,y)x}{(1-q)x}$$

$$=x\frac{f(x,y)-f(x,qy)}{(1-q)x}-iy\frac{f(x,y)-f(qx,y)}{(1-q)x}$$

$$=\frac{1}{(1-q)x}\big[x(f(x,y)-f(x,qy))-iy\big(f(x,y)-f(qx,y)\big)\big]$$

$$=\frac{1}{(1-q)x}\big[x(f(z)-f(x,qy))-iy\big(f(z)-f(qx,y)\big)\big]$$

$$=\frac{1}{(1-q)x}[(x-iy)f(z)-xf(x,qy)+iyf(qx,y)]$$

$$= \frac{1}{(1-q)x}\left[\bar{z}f(z) - xf(x,qy) + iyf(qx,y)\right]$$

$$= \frac{1}{(1-q)x} Lf(z)$$

$$= 0$$

olduğundan $D_q f(z), q$-analitiktir.

Sonuç 2.1. Sonlu sayıda q-analitik fonksiyonların toplamı q-analitiktir.

Teorem 2.2. [1] Eğer $\{f_n\}$ q-analitik fonksiyonların bir dizisi ve noktasal rak, $f(z)$ ye yakınsıyorsa yani

$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ ise bu taktirde

i) $f(z)$, *D'*de *q*-analitiktir

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} D_q f_n(z) = D_q f(z) \quad , \quad z \in D$

dir.

Sonuç2.2.

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j(z)\ ,$$

D diskret kümesinde tanımlı $g_j(z)$ q-analitik fonksiyonların bir serisi olsun. Eğer

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(z) \tag{2.14}$$

ise bu durumda

i) *f(z)* , *D*'de *q*-analitiktir.

ii) $D_q\, f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} D_q q_j$

dir.

2.4. q-Analitik Binom Fonksiyonu

Gauss Binom Formülünün q-analoğu

$$(x+y)_q^n = (x+y)(x+qy)(x+q^2y)\dots(x+q^{n-1}y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} y^k \qquad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Burada y yerine iy yazarsak

$$(x+iy)_q^n = (x+iy)(x+iqy)(x+iq^2y)\dots(x+iq^{n-1}y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} i^k x^{n-k} y^k \qquad (2.16)$$

kompleks q-Binom formülü elde edilir.

.

Tanım 2.8. n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$z^{(n)} := \mathrm{C_y}(x^n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_{q,x}^j [x^n] \qquad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır.

$D_{q,x}(x^n) = [n].x^{n-1}$ olduğu görülebilir.

Bu özelliğe göre;

i. $D_{q,x}\left(z^{(n)}\right) = [n].z^{(n-1)}$

(2.18)

dir. Gerçekten

n=1 için

$$D_{q,x}\left(z^{(1)}\right) = \sum_{j=0}^{1} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_q^j(x)$$

$$= x + \frac{iy}{[1]!}$$

$$= x + iy$$

$$= z \ ,$$

n=2 için

$$D_{q,x}\left(z^{(2)}\right) = \sum_{j=0}^{2} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_q^j (x^2)$$

$$= x^2 + [2]_q ixy + \frac{i^2 y^2}{[2]!} [2]_q$$

$$= x^2 + [2]_q iy - y^2 \ ,$$

böylece genel olarak

$$D_{q,x}\left(z^{(n)}\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_q^j (x^n)$$

$$= x^n + [n\ ]_q iyx^{n-1} + \cdots + i^n y^n$$

$$= [n].\, z^{n-1}$$

dir.

ii. $z^{(0)} = 1$ dır. Gerçekten (2.19)

$$z^{(0)} = \sum_{j=0}^{0} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_q^j (x^0)$$

$$= x^0$$

$$= 1$$

iii. $0^{(n)} = 0 \quad n \geq 1$ dır.Gerçekten (2.20)

$$(z-z)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\left(i(y-y)\right)^{j}}{[j]!} D_q\left[(x-x)^n\right] \qquad n \geq 1$$

$$= 0$$

dır.

$z^{(n)}$ ifadesi z^n'in q-analoğudur.

$$D_{q,x}^{j}(x^n) = \begin{cases} (1-q)^{n-j+1}.(1-q)^{n-j+2} \ldots (1-q)^{n-j}.x^{n-j} & ; j \leq n \\ 0 & ; j > n \end{cases}$$

ifadesini ve $z^{(n)}$, (2.17) deki tanımı kullanılarak ;

$$z^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (iy)^j x^{n-j} \qquad (2.21)$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q (iy)^0 x^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q (iy)^1 x^{n-1} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q (iy)^n x^{n-n}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q iyx^{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q (iy)^2 x^{n-2} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q (iy)^n$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$z^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x^j (iy)^{n-j} \qquad (2.22)$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0 (iy)^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q x(iy)^{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q x^2 (iy)^{n-2} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q x^n (iy)^{n-n}$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q (iy)^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q x(iy)^{n-1} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_q x^2 (iy)^{n-2} + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q x^n$$

olup (2.21) ve (2.22) ifadeleri birbirine eşit olduğundan;

$$D_{q,x}(z^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (iy)^j x^{n-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x^j (iy)^{n-j}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-j]_q![j]_q!} \qquad \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-(n-j)]_q![n-j]_q!} = \frac{[n]_q!}{[j]_q![n-j]_q!}$$

olduğu göz önüne alınırsa D_q^x lineer bir operatör olduğundan;

$$D_{q,x}(z^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q D_x\left[x^{n-j}\right] (iy)^j \tag{2.23}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q [n-j]_q x^{n-j-1} (iy)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]_q!}{[n-j]_q!\,[j]_q!} [n-j]_q\, x^{n-j-1} (iy)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]_q!\,[n-j]_q}{[n-j-1]_q!\,[n-j]_q [j]_q!} x^{n-j-1} (iy)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]_q!}{[n-j-1]_q!\,[j]_q!} x^{n-j-1} (iy)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{[n-1]_q!\,[n]_q}{[n-j-1]_q!\,[j]_q!} x^{n-j-1} (iy)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q [n]_q x^{n-j-1} (iy)^j$$

$$= [n]_q \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q x^{n-j-1} (iy)^j$$

$$= \frac{1-q^n}{1-q} \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q x^{n-1-j} (iy)^j$$

$$= [n]_q z^{(n-1)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$D_{q,y}(z^{(n)}) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q D_y \left[(iy)^{n-j}\right] x^j \tag{2.24}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q [n-j]_q (iy)^{n-j-1} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[n]_q!}{[n-j]_q! \, [j]_q!} [n-j]_q (iy)^{n-j-1} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q! \, [n]_q}{[n-j-1]_q! \, [n-j]_q [j]_q!} [n-j]_q \, (iy)^{n-j-1} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[n-1]_q! \, [n]_q}{[n-j-1]_q! \, [j]_q!} (iy)^{n-j-1} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q [n]_q \, (iy)^{n-j-1} x^j$$

$$= [n]_q \sum_{j=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q (iy)^{n-j-1} x^j$$

$$= [n]_q z^{n-1}$$

bulunur.

(2.23) ve (2.24) eşitliklerinden dolayı $D_{q,x}z^{(n)} = D_{q,y}z^{(n)}$ olduğundan $z^{(n)}$

q-analitik olur.

Diğer tarafından

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \lim_{q\to 1}\frac{[n]_q!}{[n-j]_q!\,[j]_q!}$$

$$= \lim_{q\to 1}\frac{[n]_q \dots [n-j-1]_q[n-j]_q!}{[n-j]_q!\,[j]_q!}$$

$$= \lim_{q\to 1}\frac{[n]_q \dots [n-j-1]_q}{[j]_q!}$$

$$= \binom{n}{j}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q$$

olduğundan $z^{(n)}$ açılımı , $z^n = (x+iy)^n$ in Binom açılımına benzemektedir.

Benzer şekilde,

$$\lim_{q\to 1} z^{(n)} = \lim_{q\to 1}\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (iy)^j x^{n-j}$$

$$= z^n$$

dır.

[7] de monodifrik fonksiyonlar için verilen $z^{(n)}$ ile z^n arasındaki ilişkiye benzer şekilde $z^{(n)}$ ile $(x+iy)_n$ arasında

$$(x+iy)_n = (x+iy)(x+iqy)\dots(x+iq^{n-1}y)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{j(j-1)/2} x^{n-j} (iy)^j \qquad (2.25)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Tanım 2.9.

$$R = \{(q^m x + iq^n y : m, n = 0,1,2, \dots\}$$

ve $z \in R$ olmak üzere R üzerinde tanımlı *f(z)* ile *g(z)* diskret fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı

$$(f * g)(z) = C_y[f(x,0)g(x,0)] = \sum_{j=0}^{n} \frac{(iy)^j}{[j]_q!} D_x^j \, [f(x,0)g(x,0)] \qquad (2.26)$$

şeklinde tanımlanır.

m ve n negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

(2.26) tanımı kullanılarak

$$z^{(m)} * z^{(n)} = C_y\left[(x,0)^{(m)} * (x,0)^{(n)}\right]$$

olduğu görülebilir.

$z^{(n)}$ in tanımına göre, $(x,0)^{(m)} = x^m$, dolayısıyla

$$z^{(m)} * z^{(n)} = C_y[x^m x^n] = C_y[x^{m+n}] = z^{(m+n)} \qquad (2.27)$$

yazılabilir. Diğer taraftan aşağıdaki özelliklerin doğruluğu görülebilir:

a) $\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathrm{Q}}} z^{(n)} = 0,$ (2.28)

b) $(\lambda z)^{(n)} = \lambda^n z^{(n)},$ (2.29)

c) $\|z\| < 1$ için $\lim_{n\to\infty} z^{(n)} = 0,$

$\|z\| > 1$ için $\lim_{n\to\infty} \left|z^{(n)}\right| = \infty$

dır. Burada

‖z‖=max{ |x |, |y |} $z \in R$.

Şimdi bu özelliklerin doğruluğunu gösterelim :

a) $\lim_{\substack{q\to 1 \\ z\in Q'}} z^n = 0$.

$$\lim_{z\to 0}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(iy)^j}{[j]_q!}D_q^j\,(x^n) = \lim_{z\to 0}\left(x^n + [n]_q x^{n-1} iy + [n]_q[n-1]_q x^{n-2}\frac{(iy)^2}{[2]_q} + \cdots\right)$$

$$= 0$$

b)$(z)^{(n)}$'in (2.20) tanımından

$$(\lambda z)^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(iy\lambda)^j}{[j]!}D_q^j[(\lambda x)^n] \tag{2.30}$$

$$= (\lambda x)^n + [n]_q(\lambda x)^{n-1} iy\lambda + [n]_q[n-1]_q(\lambda x)^{n-1}\,\frac{(iy\lambda)^2}{[2]_q!} + \cdots$$

olup diğer taraftan

$$\lambda^n z^{(n)} = \lambda^n\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(iy)^j}{[j]!}D_q^j[x^n] \tag{2.31}$$

$$= \lambda^n x^n + [n]_q x^{n-1}\lambda^n iy + \lambda^n[n]_q[n-1]_q x^{n-2}\frac{(iy)^2}{[2]_q!} + \cdots$$

dır.(2.30) ve (2.31) ifadeleri birbirine eşit olduğundan (2.30) eşitliği sağlanır.

c) $\|z\| < 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} z^{(n)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_q^j[x^n]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(x^n + [n]_q x^{n-1} iy + \frac{(iy)^2}{[2]_q} [n]_q [n-1]_q x^{n-2} + \cdots \right)$$

$$= 0$$

dır. Diğer taraftan

$\|z\| > 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left| z^{(n)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{j=0}^{n} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_q^j[x^n] \right|$$

$$= \left| \lim_{n\to\infty} (x^n + [n]_q x^{n-1} iy + \frac{(iy)^2}{[2]_q} [n]_q [n-1]_q x^{n-2} + \cdots) \right|$$

$$= \infty$$

olur.

$z_0 = x_0 + iy_0 \in R$ sabit bir nokta olmak üzere *R* kümesinde $z - z_0$'ın q-Binom analoğu

$$(z - z_0)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (x - x_0)_{n-j} i^j (y - y_0)_j \tag{2.32}$$

olarak tanımlanır. Bunun için [2] numaralı kaynağına bakılabilir.

(2.32) tanımını kullanarak

n=1 için

$$(z - z_0)^{(1)} = \sum_{j=0}^{1} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}_q (x - x_0)_{1-j} i^j (y - y_0)_j$$

$$= (x - x_0) + i(y - y_0)$$

$$D_{q,x}\left[(z - z_0)^{(1)}\right] = 1$$

$$D_{q,y}\left[(z - z_0)^{(1)}\right] = 1$$

türevleri birbirine eşit olduğundan $(z - z_0)^{(1)}$ q-analitiktir.

n=2 için benzer şekilde

$$(z - z_0)^{(2)} = \sum_{j=0}^{2} \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix}_q (x - x_0)_{2-j} i^j (y - y_0)_j$$

$$= (x - x_0)_2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) + i^2 (y - y_0)_2$$

$$= (x - x_0)(x - qx_0) + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y - y_0)(y - qy_0)$$

$$= x^2 - [2]_q x x_0 + q x_0^2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - \left(y^2 - [2]_q y y_0 + q y_0^2\right);$$

olup buradan

$$D_{q,x}\left[(z - z_0)^{(2)}\right] = [2]_q x - [2]_q x_0 + [2]_q i(y - y_0)$$

$$= [2]_q\left((x - x_0) + i(y - y_0)\right)$$

ve

$$D_{q,y}\left[(z - z_0)^{(2)}\right] = [2]_q i(x - x_0) - \left([2]_q y - q y_0 - y_0\right)$$

$$= [2]_q i(x - x_0) - [2]_q (y - y_0)$$

$$= [2]_q i\left((x - x_0) + i(y - y_0)\right)$$

türevleri birbirine eşit olduğundan $(z - z_0)^{(2)} q$-analitiktir.

(2.32) tanımı göz önüne alınırsa aşağıdaki özelliklerin sağlandığı görülebilir:

i)

$$D_{q,x}(z-z_0)^{(n)} = D_{q,y}(z-z_0)^{(n)} = [n](z-z_0)^{(n-1)} \quad , \tag{2.33}$$

ii) $(z-z_0)^{(0)} = 1$, (2.34)

iii) $0^{(n)} = 0 \quad , \quad n \geq 1$ (2.35)

Şimdi bu özelliklerin doğruluğunu görelim:

i) $D_{q.x}(z-z_0)^{(n)} = [n](z-z_0)^{(n-1)}$

eşitliğinin doğruluğunu n=1,2 için görelim:

n=1 için

$$\begin{aligned}(z-z_0)^{(1)} &= \sum_{j=0}^{1} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}_q (x-x_0)_{1-j} i^j (y-y_0)_j \\ &= (x-x_0) + i(y-y_0) \\ &= z - z_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{q,x}(z-z_0)^{(1)} &= [1]_q (z-z_0)^{(0)} \\ &= [1]_q \\ &= 1\end{aligned}$$

n=2 için

$$(z-z_0)^{(2)} = \sum_{j=0}^{2} \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix}_q (x-x_0)_{2-j} i^j (y-y_0)_j$$

$$= (x - x_0)_2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) + i^2(y - y_0)_2$$

$$= (x - x_0)(x - qx_0) + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y - y_0)(y - qy_0)$$

$$= x^2 - qxx_0 - xx_0 + qx_0^2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y^2 - qyy_0 - yy_0 + qy_0^2)$$

$$= x^2 - [2]_q xx_0 + qx_0^2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y^2 - [2]_q yy_0 + qy_0^2)$$

Tanım(2.7) ve (2.10) eşitliklerinden dolayı

$$D_{q,x}(z - z_0)^{(2)} = [2]_q x - [2]_q x_0 + [2]_q i(y - y_0)$$

$$= [2]_q\big(x - x_0 + i(y - y_0)\big)$$

$$= [2]_q (z - z_0)^{(1)}$$

olur.

$$D_{q,y}(z - z_0)^{(2)} = [2]_q i(x - x_0) - \big([2]_q y - [2]_q y_0\big)$$

$$= [2]_q i(x - x_0) - [2]_q (y - y_0)$$

$$= [2]_q i[(x - x_0) + i(y - y_0)]$$

$$D_q(z - z_0)^{(2)} = [2]_q x - qx_0 - x_0 + [2]_q i(y - y_0)$$

$$= [2]_q (x - x_0) + [2]_q i(y - y_0)$$

$$= [2]_q[(x - x_0) + i(y - y_0)]$$

$$= [2]_q[(x - x_0) + i(y - y_0)]$$

$$= [2]_q (z - z_0)^{(1)}.$$

Böylece

$D_{q,x}(z-z_0)^{(2)} = D_{q,y}(z-z_0)^{(2)} = D_q(z-z_0)^{(2)}$ olduğundan $(z-z_0)^{(2)}$ q-analitiktir.

ii)

$$(z-z_0)^{(0)} = \sum_{j=0}^{0} \begin{bmatrix} 0 \\ j \end{bmatrix}_q (x-x_0)_{0-j} i^j (y-y_0)_j$$
$$= 1$$

iii) $0^{(n)} = 0 \quad , \quad n \geq 1$

$z = z_0$ için

$$(z-z_0)^{(n)} = (z-z)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (x-x)_{n-j} i^j (y-y)_j$$
$$= 0$$

olur. Ayrıca

$$\lim_{q\to 1}(z-z_0)^{(n)} = (z-z_0)^n$$

dır.

NOT: Her $m, n \in N$ için

$$(z-z_0)^{(m)} * (z-q^m z_0)^{(n)} = (z-z_0)^{(m+n)} \tag{2.36}$$

özdeşliği geçerlidir.

Şimdi $z^{(n)}$ in (2.8) tanımı ve (2.26) eşitliğini kullanarak bu özdeşliğin bazı m,n'nin özel halleri için doğruluğunu gösterelim.

m=n=1 için

$$(z-z_0)^{(1)} * (z-qz_0)^{(1)} = (z-z_0)^{(1+1)} = (z-z_0)^{(2)}$$

olduğunu görelim.

$f(z) = (z - z_0)^{(1)}$ için $f(x,0) = (x - x_0)$

ve

$g(z) = (z - qz_0)^{(1)}$ için $g(x,0) = (x - qx_0)$

olup buradan

$$(f * g)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j (y - y_0)^j}{[j]!} D_{q,x}^j \left[(x - x_0)(x - qx_0)\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j (y - y_0)^j}{[j]!} D_{q,x}^j \left[x^2 - (1+q)xx_0 + qx_0^2\right]$$

$$= (x^2 - (1+q)xx_0 + qx_0^2) + i(y - y_0)\big([2]_q x - (1+q)x_0\big) + \frac{i^2 (y - y_0)^2}{[2]!}[2]_q$$

$$= x^2 - [2]_q xx_0 + qx_0^2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y - y_0)^2 \qquad (2.37)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$(z - z_0)^{(2)} = \sum_{j=0}^{2} \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix}_q (x - x_0)_{2-j} i^j (y - y_0)_j$$

$$= (x - x_0)_2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y - y_0)_2$$

$$= (x - x_0)(x - qx_0) + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y - y_0)(y - qy_0)$$

$$= x^2 - [2]_q xx_0 + qx_0^2 + [2]_q i(x - x_0)(y - y_0) - (y - y_0)^2 \qquad (2.38)$$

olup böylece m=n=1 için eşitlik doğru olur.

Örneğin, x_0 reel ve $z_0 = x_0$ alınırsa

$$(z-x_0)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (x-x_0)_{n-j}\,(iy)^j \tag{2.39}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{(1-q)^j}{(1-q)_j} (iy)^j D_x^j (x-x_0)_n \tag{2.40}$$

$$= D_{q,y}[(x-x_0)_n]$$

olur. Bu eşitlikleri n'in bazı özel halleri için gösterelim.

(2.39) eşitliği için

n=1 alırsak

$$(z-x_0)^{(1)} = \sum_{j=0}^{1} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}_q (x-x_0)_{1-j}\,(iy)^j$$

$$= (x-x_0) + iy$$

$$= x + iy - x_0$$

$$= z - x_0$$

elde edilir.

(2.40) eşitliği için

n=1 alırsak

$$(z-x_0)^{(1)} = \sum_{j=0}^{1} \frac{(1-q)^j}{(1-q)_j} (iy)^j D_x^j [(x-x_0)_1]$$

$$= (x-x_0) + \frac{1-q}{1-q} iy$$

$$= x - x_0 + iy$$

$$= z - x_0$$

bulunur. Böylece

$n = 1$ için (2.39) ve (2.40) ifadeleri eşittir.

Benzer şekilde (2.39) eşitliği için

n=2 alırsak

$$(z - x_0)^{(2)} = \sum_{j=0}^{2} \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix}_q (x - x_0)_{2-j} (iy)^j$$

$$= (x - x_0)_2 + [2]_q (x - x_0) iy + (iy)^2$$

(2.40) eşitliği için

n=2 alırsak

$$(z - x_0)^{(2)} = \sum_{j=0}^{1} \frac{(1-q)^j}{(1-q)_j} (iy)^j D_x^j [(x - x_0)_1]$$

$$= (x - x_0)_2 + \frac{1-q}{1-q} iy\big[[2]_q x - [2]_q x_0\big] + \frac{(1-q)^2}{(1-q)_2} (iy)^2$$

$$= (x - x_0)_2 + [2]_q (x - x_0) iy + (iy)^2$$

olup böylece n=2 için (2.39) ve (2.40) eşitlikleri sağlanır.

Bununla birlikte

$$(z - x_0)^{(m)} * (z - q^m x_0)^{(n)} = D_{q,y}[(x - x_0)_m (x - q^m x_0)_n]$$

$$= D_{q,y}[(x - x_0)_{m+n}]$$

$$= (z - x_0)^{(m+n)} \tag{2.41}$$

dır.Keyfi üsler için analoglar sonsuz seriler ile ifade edilebilir.

(2.41) eşitliği için

m=n=1 seçersek

$$(z-x_0)^{(1)} * (z-qx_0)^{(1)} = (z-x_0)^{(2)}$$

$$(z-x_0)^{(1)} * (z-qx_0)^{(1)} = \sum_{j=0}^{2} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_{q,x}^j\left[(x-x_0)^{(1)}(x-qx_0)^{(1)}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{2} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_{q,x}^j[(x-x_0)(x-qx_0)]$$

$$= \sum_{j=0}^{2} \frac{(iy)^j}{[j]!} D_{q,x}^j\left[x^2-[2]_q x x_0+q x_0^2\right]$$

$$= x^2-[2]_q x x_0+q x_0^2+iy\left([2]_q x-[2]_q x_0\right)+\frac{(iy)^2}{[2]!}[2]_q$$

$$= x^2-[2]_q x x_0+q x_0^2+[2]_q(x-x_0)iy+(iy)^2$$

olur. Diğer taraftan

$$(z-x_0)^{(2)} = \sum_{j=0}^{2} \begin{bmatrix} 2 \\ j \end{bmatrix}_q (x-x_0)_{2-j}\,(iy)^j$$

$$= (x-x_0)_2+[2]_q(x-x_0)iy+(iy)^2$$

olup böylece eşitlikleri m=n=1 için özdeşliğin doğruluğu görülür.

3.DİSKRET ÜSTEL VE TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Monodifrik teoride, $\Delta f(z) = f(z)$ monodifrik denklemin çözümü olarak $2^x(1+i)^y$ fonksiyonunu üstel fonksiyonunun bir analoğu olarak elde edilmiştir. [8], benzer şekilde $\Delta f(z) = f(z)$ diskret denkleminin çözümü olarak uygun ikinci tür bir diskret üstel analitik fonksiyon olan $3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y$ fonksiyonu bulunmuştur.

Tanım 3.1. D^*,(2.13) deki diskret küme ve $z \in D^*$ olmak üzere

$$\Delta f(z) = \frac{1}{2}[(i-1)f(z) + f(z+1) - if(z+i)] \qquad (3.1)$$

ifadesine *f(z)* nin $z \in D^*$ noktasındaki *rezidüsü* denir.

Diskret *f(z)* fonksiyonlar için de benzer rezidü kavramı verilebilir. Ancak q-analitik bir fonksiyonun rezidüsü tanımlandığı noktalarda sıfırdır.

(3.1) eşitliğinden

$$\Delta f(z) = \frac{1}{2}[(i-1)f(z) + f(z+1) - if(z+i)]$$

$$= \frac{1}{2}[(i-1)f(x,y) + f(x+1,y) - if(x,y+1)]$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan

$$\Delta(2^x(1+iy)^y) = \frac{1}{2}[(i-1)2^x(1-i)^y + 2^{x+1}(1+i)^y - i2^x(1+i)^{y+1}]$$

$$= \frac{1}{2}[2^x(1+i)^y\{(i-1) + 2 - i(1+i)\}]$$

$$= \frac{1}{2}[2^x(1+i)^y\{i-1+2-i-i^2\}]$$

$$= \frac{1}{2}[2^x(1+i)^y 2]$$

$$= 2^x(1+i)^y$$

olur.

$3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y$ fonksiyonu için

$$\Delta\left(3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y\right) = \frac{1}{2}\left[(i-1)3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y + 3^{x+1}\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y - i3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y\left\{(1-i)+3-i\left(\frac{2+i}{2-i}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y\left\{i+2+\frac{1-2i}{2-i}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y\left\{\frac{2i+4-1-2i+1-2i}{2-i}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y\left\{\frac{4-2i}{2-i}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y 2\right]$$

$$= 3^x\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^y$$

bulunur.

Bir q-analitik fonksiyon olan $e(z)$ $(e^z nin\ analoğu)$, $e(z) * E(z) = 1$ konvolüsyon çarpımından elde edilen $E(z)$ nin bir ters fonksiyonu olarak tanımlanır.

$e_q(x)$ fonksiyonu ise

$$e_q(x) = \frac{1}{(1-x)_\infty} \quad ; \quad x \neq q^{-n} \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır.

n bir negatif olmayan tamsayı olmak üzere (3.2) ifadesi

$$e_q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)_j} \quad ; \quad |x| < 1 \tag{3.3}$$

olarak da yazılabilir. Gerçekten

$$e_q(x) = \frac{1}{(1-x)_\infty} = \frac{1}{(1-x)(1-qx)\dots(1-q^n x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)_j}$$

dır.Ayrıca

$D_{q,x} e_q(x) = e_q(x)$ ve $\lim_{q\to 1} e_q\{(1-q)x\} = e^x$

özellikleri sağlanır. Gerçekten

$$D_{q,x}\left(e_q(x)\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_j} [j]_q x^{j-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_j} [j]_q x^{j-1}$$

(j yerine j+1 yazarsak)

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_{j+1}} [j+1]_q x^{j+1-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q)_{j+1}} [j+1]_q x^{j}$$

$$= e_q(x) \tag{3.4}$$

olur. Şimdi

$\lim_{q\to 1} e_q\{(1-q)x\} = e^x$ olduğunu gösterelim.

$$e_q\big((1-q)x\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((1-q)x)^j}{(1-q)_j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q)^j x^j}{(1-q)_j}$$

$$\lim_{q\to 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q)^j x^j}{(1-q)_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e^x \tag{3.5}$$

elde edilir.

$e(z)$ fonksiyonunu

$$e(z) = C_y e_q\{(1-q)x\} \tag{3.6}$$

Şeklinde de verebiliriz.

Buradan;

$$e(z) = Cy\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^k}{(1-q)_k}\, x^k\right] \;;\; |x| < \frac{1}{1-q} \text{ olmak üzere}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!}\, D_q^j \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{k-j}}{(1-q)_k}\, x^k\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{k-j}}{(1-q)_k}\, (1-q^{k-j+1})_j x^{k-j} \tag{3.7}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!} \tag{3.8}$$

elde edilir.

(3.8) ve (3.7) eşitliklerinde k yerine $k+j$ alınırsa

$$e(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^k}{(1-q)_{k+j}} \left(1-q^{k+j-j+1}\right)_j x^{k+j-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)(1-q)\dots(1-q)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{k+j})} (1-q^{k+1}) x^k$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^k}{(1-q)_{k+j}} (1-q^{k+1}) x^k$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!}$$

bulunur.(3.8) ve (3.7) ifadeleri birbirine eşittir.

Eğer $|x| < \frac{1}{1-q}$ ve $|y| < \frac{1}{1-q}$ ise bu iki seri kesinlikle yakınsaktır. Bu iki serinin yakınsaklığını oran testinden görebiliriz.

Gerçekten

$u_j = \frac{|(iy)^j|}{[j]!}$, $u_{j+1} = \frac{|y|^{j+1}}{[j+1]!}$ olmak üzere

$0 < q < 1$ ve $[j]! > 0$ olduğundan

$$\lim_{j\to\infty} \frac{u_{j+1}}{u_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\frac{|y|^{j+1}}{[j+1]!}}{\frac{|y|^j}{[j]!}}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{|y|^{j+1}}{[j+1]!} \frac{[j]!}{|y|^j}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{|y||y|^j}{[j]!\,[j+1]_q} \frac{[j]!}{|y|^j}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{|y|}{[j+1]_q}$$

$$= |y| \lim_{j\to\infty} \frac{1}{[j+1]_q}$$

$$= |y| \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\frac{1-q^{j+1}}{1-q}}$$

$$= |y| \lim_{j\to\infty} \frac{1-q}{1-q^{j+1}}$$

$$= |y|(1-q) < 1$$

olduğundan

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!}$$

serisi yakınsaktır. Benzer şekilde $|x| < \frac{1}{1-q}$ için

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{k}}}{[\mathrm{k}]!}$$

serisinin de yakınsak olduğu görülebilir.

Bu durumda *e(z)* fonksiyonu

$$e(z) = e_q\{(1-q)iy\}e_q\{(1-q)x\} \tag{3.9}$$

olarak yazılabilir. Gerçekten

$$e_q\{(1-q)x\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\big((1-q)x\big)^j}{(1-q)_j}$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q)^j x^j}{(1-q)_j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q)(1-q)\dots(1-q)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1-q}{1-q} \frac{1-q}{1-q^2} \dots \frac{1-q}{1-q^j} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1-q}{1-q}} \frac{1}{\frac{1-q^2}{1-q}} \dots \frac{1}{\frac{1-q^j}{1-q}} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{[1]_q} \frac{1}{[2]_q} \dots \frac{1}{[j]_q} x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} \tag{3.10}$$

ve

$$e_q\{(1-q)iy\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((1-q)iy)^j}{(1-q)_j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q)^j (iy)^j}{(1-q)_j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \tag{3.11}$$

olup (3.10) ve (3.11) eşitliklerini (3.9) da yerine yazarsak

$$e(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iy)^j}{[j]!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!}$$

elde edilir.

Yakınsaklık kümesi dışındaki x ve y değerleri için, $e(z), e_q$nun analitik genişletilmesi biçimi

$$e(z) = \frac{1}{(1-(1-q)x)_\infty (1-(1-q)iy)_\infty} \tag{3.12}$$

olarak ifade edilir.

Teorem 3.1. $e(z)$, q-analitik fonksiyonu $D_{qx}e(z) = e(z)$ diskret denklemini sağlar ve ayrıca $\|z\| < \frac{1}{1-q}$

$$e(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{(j)}}{[j]!}$$

dır.

İspat :

$$D_{q,x}[e(z)] = \frac{e_q\{(1-q)iy\}}{(1-q)x}\left[\frac{1}{(1-(1-q)x)_\infty} - \frac{1}{(1-(1-q)qx)_\infty}\right]$$

$$= \frac{e_q\{(1-q)iy\}}{(1-q)x}\left[\frac{(1-(1-q)qx)_\infty - (1-(1-q)x)_\infty}{(1-(1-q)x)_\infty(1-(1-q)qx)_\infty}\right]$$

$$= \frac{e_q\{(1-q)iy\}}{(1-q)x}\left[\frac{(1-(1-q)qx)(1-(1-q)q^2x)\ldots - (1-(1-q)x)(1-(1-q)qx)\ldots}{(1-(1-q)x)_\infty(1-(1-q)qx)_\infty}\right]$$

$$= \frac{e_q\{(1-q)iy\}}{(1-q)x}\left[\frac{(1-(1-q)qx)_\infty(1-(1-(1-q)x))}{(1-(1-q)qx)_\infty(1-(1-q)x)_\infty}\right]$$

$$= \frac{e_q\{(1-q)iy\}}{(1-q)x}\frac{(1-1+(1-q)x)}{(1-(1-q)x)_\infty}$$

$$= \frac{e_q\{(1-q)iy\}}{(1-q)x}\frac{(1-q)x}{(1-(1-q)x)_\infty}$$

$$= \frac{e_q\{(1-q)iy\}}{(1-(1-q)x)_\infty}$$

$$= e_q\{(1-q)iy\}\frac{1}{(1-(1-q)x)_\infty}$$

$$= e_q\{(1-q)iy\}e_q\{(1-q)x\}$$

$$= e(z)$$

olup benzer şekilde $D_{q,y}[e(z)] = e(z)$ olduğu gösterilebilir.

Böylece $D_{q,x}e(z) = D_{q,y}e(z)$ olduğundan *e(z)* tanımlı olduğu küme üzerinde *q*-analitiktir. Diğer taraftan

$$D_{q,z}\left(e_q(z)\right) = \frac{1}{2}\left[D_{q,x}\left(e_q(z)\right) + D_{q,y}\left(e_q(z)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[D_{q,x}(e_q(z)) + D_{q,x}(e_q(z))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2D_{q,x}\left(e_q(z)\right)\right]$$

$$= D_{q,x}\left(e_q(z)\right)$$

$$= e_q(z)$$

olur. Ayrıca

$$e(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(iy)^k}{[k]!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{[j]!}\sum_{k=0}^{j}\frac{(1-q)_j}{(1-q)_{j-k}(1-q)_k}x^{j-k}(iy)^k$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{[j]!}\sum_{k=0}^{j}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q x^{j-k}(iy)^k$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{(j)}}{[j]!}$$

yazılabilir. Bu son seri $\|z\| = \max_{j=0}\{|x_j|, |y_j|\} < \frac{1}{1-q}$ için mutlak yakınsaktır.

Eğer $\|z\| < \frac{1}{1-q}$ ise seriler kesinlikle yakınsak olacaktır. Buna karşılık e^z bu bölge ile sınırlı değildir. Ayrıca

$$\lim_{q\to 1} e(z) = e^z$$

dir.

$E_q(x)$ fonksiyonu

$$\frac{1}{e_q(x)}$$

olarak alınırsa bunun yardımıyla tanımlanan

$$E(z) = C_y\left[E_q\{(1-q)x\}\right] \tag{3.14}$$

fonksiyonu q-analitiktir ve

$$\begin{aligned}(e * E)(z) &= C_y[e(x,0)E(x,0)] \\ &= C_y\left[e_q\{(1-q)x\}E_q\{(1-x)\}\right] \\ &= C_y(1) \\ &= 1\end{aligned}$$

dır. Bununla birlikte $*$ operatörüne göre, *E* ve *e* birbirinin tersidir.

$E_q(x)$ seri açılımı

$$E_q(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{x^k}{[k]!} \tag{3.15}$$

şeklindedir. $e(z)$ serisinin temsilini bulmak için kullanılan serilere benzer şekilde yeniden düzenlenme yapılırsa

$$E(z)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{z^j}{[j]!} \tag{3.16}$$

elde edilir ve bu seri her z için yakınsaktır. Çünkü $0 < q < 1$ dir.

3.1. Bazı Trigonometrik Fonksiyonların q-Analogları

Bir önceki kesimde klasik anlamdaki üstel fonksiyonunun q-analoğu incelendi. Bu kesimde $\sin z$ ve $\cos z$ fonksiyonlarının q-analoglarını vereceğiz. Şimdi

$$s(z)=\frac{1}{2i}[e(iz)-e(-iz)] \tag{3.17}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{z^{(2j+1)}}{[2j+1]!} \quad ; \quad \|z\|<\frac{1}{1-q}$$

ve

$$c(z)=\frac{1}{2}[e(iz)+e(-iz)] \tag{3.18}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{z^{(2j)}}{[2j]!} \quad ; \quad \|z\|<\frac{1}{1-q}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Diğer taraftan

$$e(iz)-e(-iz)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(iz)^{(j)}}{[j]!}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-iz)^{(j)}}{[j]!}$$

$$=1+(iz)^{(1)}+\frac{(iz)^{(2)}}{[2]!}+\frac{(iz)^{(3)}}{[3]!}+\cdots-\left[1+(-iz)^{(1)}+\frac{(-iz)^{(2)}}{[2]!}+\cdots\right]$$

$$= (iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots - (-iz)^{(1)} - \frac{(-iz)^{(2)}}{[2]!} - \cdots$$

$$= (iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots - \left[-(iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} - \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots\right]$$

$$= (iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots + (iz)^{(1)} - \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} - \cdots$$

$$= 2\left[(iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \frac{(iz)^{(5)}}{[5]!} + \cdots\right]$$

olup bu değer (3.18) de yerine yazılırsa

$$s(z) = \frac{1}{2i} 2\left[(iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \frac{(iz)^{(5)}}{[5]!} + \cdots\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{(2j+1)}}{[2j+1]!} \, ,$$

olur. Diğer taraftan

$$e(iz) + e(-iz) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^{(j)}}{[j]!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{(j)}}{[j]!}$$

$$= 1 + (iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots + \left[1 + (-iz)^{(1)} + \frac{(-iz)^{(2)}}{[2]!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + (iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots + 1 + (-iz)^{(1)} + \frac{(-iz)^{(2)}}{[2]!} + \cdots$$

$$= 1 + (iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots + 1 - (iz)^{(1)} + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} - \frac{(iz)^{(3)}}{[3]!} + \cdots$$

$$= 2 + 2\frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + 2\frac{(iz)^{(4)}}{[4]!} + \cdots$$

$$= 2\left[1 + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(4)}}{[4]!} + \cdots\right]$$

olup bu değer (3.18) da yerine yazılırsa

$$c(z) = \frac{1}{2} 2\left[1 + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(4)}}{[4]!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + \frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \frac{(iz)^{(4)}}{[4]!} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{(2j)}}{[2j]!}$$

elde edilir. Bu serilerin her ikisini de $\|z\| < \frac{1}{1-q}$ için mutlak yakınsaktır.

NOT: $s(z)$ ve $c(z)$ fonksiyonları

$D_{q,z}^2 f(z) = -f(z)$

kompleks diskret diferensiyel denklemini sağlar. Gerçekten

$$D_{q,z}^2 c(z) = D_{q,z}^2 \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{(2j)}}{[2j]!}\right]$$

$$= D_{q,z}^2 \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(x+iy)^{(2j)}}{[2j]!}\right]$$

$$= D_{q,z} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j [2j]_q \frac{(x+iy)^{(2j-1)}}{[2j]!}\right]$$

$$= D_{q.z} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{(x+iy)^{(2j-1)}}{[2j-1]!}\right]$$

$$= D_{q,z}\left[\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(x+iy)^{(2j+1)}}{[2j+1]!}\right]$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}[2j+1]_q\frac{(x+iy)^{(2j)}}{[2j+1]!}$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\frac{(x+iy)^{(2j)}}{[2j]!}$$

$$= -c(z)$$

dır. Benzer şekilde *s(z)* nin de aynı denklemi sağladığı gösterilebilir. Ayrıca klasik anlamdaki *cosz* ve *sinz* fonksiyonlarının başka q-analogları vardır. Bu ikinci q-analogları *E(z)* fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{2i}[E(-iz)-E(iz)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}q^{j(2j+1)}\frac{z^{(2j+1)}}{[2j+1]!} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ve

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{2}\ [E(iz)+E(-iz)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}q^{j(2j-1)}\frac{z^{(2j)}}{[2j]!} \end{aligned} \tag{3.20}$$

olarak tanımlanır. Gerçekten (3.19) ve (3.20) de gerekli hesaplamalar yapılırsa

(3.19) için

$$E(-iz)-E(iz) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{(-iz)^{(j)}}{[j]!} - \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{(iz)^{(j)}}{[j]!}$$

$$= 1 + (-1)(-iz)^{(1)} + (-1)^2 q\frac{(-iz)^{(2)}}{[2]!} + \cdots$$

$$- \left[1 + (-1)(iz)^{(1)} + (-1)^{(2)} q\frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \cdots\right]$$

$$= 1 + i(z)^{(1)} - q\frac{(z)^{(2)}}{[2]!} + iq^3\frac{(z)^{(3)}}{[3]!} + \cdots - 1 + i(z)^{(1)} + i\frac{(z)^{(2)}}{[2]!} + iq^3\frac{(z)^{(3)}}{[3]!} + \ldots$$

$$= 2i\left[(z)^{(1)} + iq^3\frac{(z)^{(3)}}{[3]!} + iq^{10}\frac{(z)^{(5)}}{[5]!} + \cdots\right]$$

yazılabilir. Bu ifadeyi *S(z)* de yerine yazarsak

$$S(z) = \frac{1}{2i}\left\{(z)^{(1)} + iq^3\frac{(z)^{(3)}}{[3]!} + iq^{10}\frac{(z)^{(5)}}{[5]!} + \cdots\right\}$$

$$= (z)^{(1)} + iq^3\frac{(z)^{(3)}}{[3]!} + iq^{10}\frac{(z)^{(5)}}{[5]!} + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{j(2j+1)}\frac{z^{(2j+1)}}{[2j+1]!}$$

olur.

Diğer taraftan

$$E(iz) + E(-iz) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{(iz)^{(j)}}{[j]!} + \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{(-iz)^{(j)}}{[j]!}$$

$$= 1 + (-1)(iz)^{(1)} + (-1)^2 q\frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} + \cdots$$

$$+ \left[1 + (-1)(-iz)^{(1)} + (-1)^{(2)} q\frac{(-iz)^{(2)}}{[2]!} + \cdots\right]$$

$$= 1 - i(z)^{(1)} - q\frac{(z)^{(2)}}{[2]!} + iq^3\frac{(z)^{(3)}}{[3]!} + \cdots + 1 + i(z)^{(1)} - \frac{(z)^{(2)}}{[2]!} - iq^3\frac{(z)^{(3)}}{[3]!} + \ldots$$

$$= 2 - 2q\frac{(z)^{(2)}}{[2]!} - 2q^6\frac{(z)^{(4)}}{[4]!} + \cdots$$

$$= 2\left[1 - q\frac{(iz)^{(2)}}{[2]!} - q^6\frac{(iz)^{(4)}}{[4]!} + \cdots\right]$$

ifadesi sırasıyla (3.19) ve (3.20) de yerine yazılırsa (3.19) ve (3.20) deki seri gösterimler elde edilir. Her iki seri de $\|z\| < \frac{1}{1-q}$ için mutlak yakınsaktır.

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

q-Analizi, soyut ve uygulamalı matematiğin birçok alanı ile ilişkili geniş bir konudur.q-Analizi 1740'lı yıllarda ilk olarak çalışmaya başlanmıştır. q-Analiz'in temeli Euler'e kadar dayanmaktadır. Günümüzde q-Analizinin uygulama alanı vardır.q-Analizi Matematik, Fizik ve Mühendislik gibi bilim dallarının araştırma konuları arasında yer almaktadır. Klasik anlamdaki birçok teori q-Analizine genişletilmiştir. q-genişlemeler fizik ve mühendislik uygulamalarının fazla olduğu bilinmektedir.

KAYNAKLAR

[1.] C.J.Harman;“Discrete Geometric Function Theory I”, Applicable Analysis, Vol.7, 315-336, (1978).

[2.] C.J.Harman;“Discrete Geometric Function Theory II”,Applicable Analysis, Vol.9, 191-203, (1979).

[3.] O.K.Pashaev, S.Nalcı; “q-Analytic Functions, Fractals and Generalized Analytic Functions” , J.Phys. A: Math. Theory, 47-045204, (2014).

[4.] M.H.Annaby and Z.S. Mansour; “q-Fractional Calculus and Equations”, Lecture Notes in Mathematics 2056, Springer, (2012).

[5.] M.Jacob; “Discrete Function Theory”,Thesisof Doctor of Philosophy, India, (1983).

[6.] T.Ernst;“A Comprehensive Treatment of q-Calculus”, Spriger, Basel, (2012).

[7.] V.Kac and P.Cheung;“Quantum Calculus”, New York, Springer, (2002).

[8.] R.J.Duffin; “Basic Properties of Discrete Analytic Functions”, Duke Math. J., Vol.23, 335-363, (1956)