

T. C.  
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ STURMIAN SİRALLERİ

Rachel BAPESE MONDONGA

MAYIS 2017

**Matematik Anabilim Dalında** Rachel BAPESE MONDONGA tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ STURMIAN SİRALLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA  
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN  
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM  
Üye (Danışman) : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN  
Üye : Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN

22 / 05 / 2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ÖZET

### GENELLEŞTİRİLMİŞ STURMIAN SPİRALLERİ

BAPESE MONDONGA, Rachel

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Mayıs 2017, 52 sayfa

Bu tez dört bölümünden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümünde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümünde Öklid düzleminde Sturmian spiralleri ve bunları genelleştirilmeleri verilmiştir. Tezimizin son bölümü olan dördüncü bölümünde Lorentz-Minkowski düzleminde Sturmian spiralleri ve bunları genelleştirilmeleri verilmiştir. Ayrıca ilgili örnekler ve bu örneklerin grafikleri de verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Eğri, Düzlemsel eğri, Öklid düzlemi, Lorentz-Minkowski düzlemi, Spacelike eğri, Timelike eğri, Spiral eğrileri, Sturmian spiralleri.

## ABSTRACT

### GENERALIZED STURMIAN SPIRALS

BAPESE MONDONGA, Rachel

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Departement of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

May 2017, 52 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. Sturmian spirals in Euclidean plane are introduced in the third chapter and their generalizations are also given.

In fourth chapter of our thesis, Sturmian spirals and their generalizations are studied in the Lorentz-Minkowski plane. Also related sturmian spirals examples and their figures are given.

**Key Words :** Curve, planar curve, Euclidean plane, Lorentz-Minkowski plane, spacelike curve, timelike curve, spiral curves, Sturmian spirals.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans yapmam için maddi ve manavi destek veren **Türkiye Cumhuriyeti Devletine** ve onun saygı değer yöneticilerine ne kadar teşekkür etsem azdır.

Yüksek lisans tez konumun belirlenmesinden, tezin yazım aşamasına kadar her türlü desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile zaman ayırıp, yüksek lisans çalışmamı tamamlamanda rehberliği ile ışık tutan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Grafik çizimlerinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Ali UÇUM' a da ayrıca teşekkür ederim.

Son olarak yüksek lisans çalışmam boyunca her türlü desteği veren sevgili anneme, babama, kardeşlerime ve değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
1.1. Kaynak Özetleri .....	2
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	3
2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....	3
2.2. Lorentz-Minkowski Uzayında Temel Kavramlar .....	6
2.3. Spiral Eğrileri .....	9
<b>3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE STURMİAN SİRALLERİ VE GENELLEŞTİRMELERİ</b> .....	11
<b>4. LORENTZ-MINKOWSKI DÜZLEMİNDE STURMİAN SİRALLERİ</b> .....	24
4.1 Lorentz-Minkowski Düzleminde Spacelike Sturmian Spiralleri .....	25
4.1.1 Genelleştirilmiş spacelike Sturmian spiralleri .....	30
4.2. Lorentz-Minkowski Düzleminde Timelike Sturmian Spiralleri .....	38
4.2.1 Genelleştirilmiş timelike Sturmian spiralleri.....	42
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR</b> .....	50
<b>KAYNAKLAR</b> .....	51

## SİMGELER DİZİNİ

$X$	$\mathbb{E}^3$ uzayında vektörel çarpım
$\langle, \rangle_L$	Lorentz iç çarpımı
$\  \cdot \ _L$	Minkowski uzayında norm
$\wedge_L$	Minkowski vektörel çarpımı
$\mathbb{E}_1^3$	3-boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$T$	bir eğrinin teğet vektör alanı
$N$	bir eğrinin normal vektör alanı
$B$	bir eğrinin binormal vektör alanı
$\langle, \rangle$	Öklid anlamındaki iç çarpım
$\  \cdot \ $	Öklid uzayında norm
$\mathbb{R}$	Reel uzay

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
2. 1. Düzlemde spiral eğri örnekleri.....	10
3. 1. Düzlemsel bir eğrinin geometrisi.....	11
3. 3. (3.20) ve (3.21) denklemlerinde $c = 1$ alınarak elde edilen Sturmian spirali...	15
3. 4. (3.24) denklemde $\sigma = 0.9$ ve $c = 1$ alınarak elde edilen Sturmian spirali....	19
3. 5. (3.25) denklemde $\sigma = 0.9$ ve $a = 1$ alınarak elde edilen Sturmian spirali.....	21
4. 1. (4.20) denklemde $c = 1$ alınarak elde edilen standart spacelike Sturmian spirali.....	29
4. 2. (4.21) denklemde $d = 0$ alınarak elde edilen standart spacelike Sturmian spirali.....	30
4. 3. (4.24) denklemde $c = -1$ alınarak elde edilen standart spacelike Sturmian spirali.....	30
4. 4. (4.30) denklemde $c = 1$ ve $\sigma = 2$ alınarak elde edilen geliştirilmiş spacelike Sturmian spirali.....	33
4. 5. (4.34) denklemde $c = 1$ ve $\sigma = 2$ alınarak elde edilen geliştirilmiş spacelike Sturmian spirali.....	33
4. 6. (4.36) denklemde $d = 0$ ve $\varepsilon = 1$ alınarak elde edilen geliştirilmiş spacelike Sturmian spirali.....	34
4. 7. (4.41) denklemde $c = 1$ ve $\sigma = 1/2$ alınarak elde edilen geliştirilmiş spacelike Sturmian spirali.....	36



4. 8. (4.44) denkleminde $c = 1$ ve $\sigma = 1/2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirali.....	37
4. 9. (4.46) denkleminde $d = 1/2$ ve $\sigma = 1/2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirali.....	37
4. 10. (4.56) denkleminde $c = 1$ alınarak elde edilen standart timelike Sturmian spirali.....	41
4. 11. (4.59) denkleminde $c = 1$ alınarak elde edilen standart timelike Sturmian spirali.....	41
4. 12. (4.61) denkleminde $d = 0$ alınarak elde edilen standart timelike Sturmian spirali.....	42
4. 13. (4.66) denkleminde $c = 1$ ve $\sigma = 2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali.....	45
4. 14. (4.70) denkleminde $c = 1$ ve $\sigma = 2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali.....	45
4. 15. (4.73) denkleminde $d = 0$ , $\varepsilon = 1$ ve $\sigma = 2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali.....	45
4. 16. (4.78) denkleminde $c = 1$ ve $\sigma = 1/2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali.....	47
4. 17. (4.81) denkleminde $c = 1$ ve $\sigma = 1/2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali.....	48
4. 18. (4.86) denkleminde $d = 2$ ve $\sigma = 1/2$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali.....	48
4. 19. (4.86) denkleminde $d = 0$ ve $\sigma = 1/4$ alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali.....	49

## 1. GİRİŞ

Diferansiyel Geometrinin önemli bir çalışma alanı olan eğriler teorisinin tarihi Leibniz (1646-1716) ve Newton (1643-1727)'un düzlemsel eğriler üzerine yapmış olduğu diferansiyel hesaplamalara kadar ulaşmaktadır.

Hiç şüphesiz bu çalışmalar, B. de Saint Venant (1791-1886) tarafından bir uzay eğrisine ait binormal ( $B$ ) vektör alanının tanımlanmasıyla daha zengin hale gelen eğriler teorisi bir çok farklı bilim dalında uygulama alanı bularak yoğun bir şekilde çalışılmış ve çalışılmaya da devam etmektedir.

Eğriler teorisinin en önemli teoremi eğrinin esas teoremi olarakta bilenen varlık ve teklik teoremdir. Bu teoreme göre diferensiyellenebilir bir eğri verildiğinde eğriye ait ve yay parametresinin birer fonksiyonu olan eğrilik ( $\kappa$ ) ve burulma ( $\tau$ ) fonksiyonları hesaplanabilir. Tersine sürekli eğrilik ( $\kappa$ ) ve burulma ( $\tau$ ) fonksiyonları verildiğinde,  $\kappa$  pozitif ve diferensiyellenebilir olmak şartıyla, diferensiyellenebilir eğri, Öklid uzayının izometrilere bağlı olarak, tek şekilde belirlenebilir. Bu eğrinin eğrilikleri de yukarıda verilen  $\kappa$  ve  $\tau$  fonksiyonlarıdır.

Uygulama da böyle bir eğriyi bulmak, karşımıza çıkan ve Frenet denklemi olarak adlandırılan lineer diferansiyel denklemin çözümünün zorluğundan dolayı genellikle imkansızdır. Lie ve Darboux'un yapmış olduğu çalışmalardan biliyoruz ki Frenet denklemini çözmek belirli bir kompleks Riccati diferansiyel denklemi çözmeye eşdeğerdir.

Bu durum düzlemsel eğriler için daha kolaydır. Düzlemsel bir eğrinin eğrilik fonksiyonu için farklı şartlar ortaya koyarak eğrinin parametrik denklemini elde etmeye çalışılabilir. Böyle bir soru 1999 yılında David A. Singer [17] tarafından, bir düzlemsel eğrinin eğrilik fonksiyonu, eğrinin orijine olan uzaklığına bağlı olabilir mi? Böyle eğriler var mıdır varsa nasıl bulunabilir? şeklinde bazı sorular yönetilmiş ve bu sorular yine kendisi tarafından çözülmüştür. Öklid düzleminde eğriliği eğrinin orijine olan uzaklığına bağlı olan eğrilerin güzel bir sınıfının Euler elastik eğrileri olduğu gösterilmiştir [17].

Singer in bu çalışması düzensel eğrilerin güzel bir sınıfı olan ve doğada, bilimin hemen hemen her alanında karşımızda çıkan spiral eğrileriyle doğrudan bağlantılıdır. 2011 yılında Mladenov [11], Singer'in çalışmasına benzer bir şekilde her bir noktada eğrilik yarı çarpı  $R$ , eğrinin orijine olan uzaklığı  $r$ 'ye eşit olan eğrileri gözönüne almıştır. Bu tip eğrilerin Sturmian spiralleri olduğu bilinmektedir. Bu eğrilerin bir genelleştirilmesi yine Mladenov tarafında verilmiştir [11].

Sturmian spiralleri Lorentz-Minkowski düzeminde 2015 yılında İlarıslan ve diğerleri tarafından spacelike ve timelike eğriler için incelenmiştir.

Yapılan bu tez çalışması ile Öklid düzleminde ve Lorentz-Minkowski düzleminde Sturmian spiralleri için elde edilen sonuçları ve ilgili kaynaklar detaylı bir şekilde ortaya konulmuştur.

### **1.1. Kaynak Özetleri**

Tezimizin ikinci bölümde Öklid uzayı ile ilgili temel kavramlar, tanımlar ve teoremler için H. H. Hacısalihoğlu (2000), A. Sabuncuoğlu (2004), B. O'Neill (2006), W. Kuhnel (1999), S. Montiel ve A. Ros (1998) un kitaplarından yararlanılmıştır. Lorentz-Minkowski uzayı ile ilgili temel kavramlar için K. L. Duggal ve A. Bejancu (1996), B. O'Neill (1983) kitaplarından ve R. Lopez (2014) in makalesinden yararlanılmıştır. Üçüncü bölüm için I. M. Mladenov ve diğerleri (2011) ve D. Singer (1999) makalelerinden yararlanılmıştır. Tezimizin dördüncü ve son bölümünde K. İlarıslan ve diğerleri (2015) ve R. Lopez (2014) makalelerinden yararlanılmıştır. Burada isimleri belirtilmeyen bazı çalışmalar kaynaklar kısmında verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılan teorem ifadelerinde ve örneklerde adı geçen bazı temel kavramlar verilmiştir.

### 2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1** ( Reel İç Çarpım Uzayı )  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.  $\forall x, y \in V$  için

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

şeklinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, bu vektör uzayına bir reel iç çarpım uzayı denir ( Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.2** (Öklid Uzayı)  $V$ ,  $n$ -boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olsun.  $V$  vektör uzayı ile birleştirilmiş bir  $A$  afin uzaya Öklid uzayı adı verilir ve  $\mathbb{E}^n$  ile gösterilir ( Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.3** ( Öklid İç Çarpımı)  $\mathbb{E}^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayı olsun.

$\forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{E}^n$  için

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

şeklinde tanımlanan pozitif tanımlı, simetrik ve bilineer fonksiyona Öklid iç çarpımı ya da standart iç çarpım adı verilir ( Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.4** (Norm)  $n$ -boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{E}^n$  nin her  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  elemanı için

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona  $u$  nun normu adı verilir (Millman vd. 1977).

**Tanım 2.1.5** (Öklid Vektörel Çarpımı)  $\mathbb{E}^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayı olsun. Bu durumda  $\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}^3$  için, bu vektörlerin **Öklid vektörel çarpımı** şu şekilde tanımlanır (Millman vd. 1977).

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

**Tanım 2.1.6** ( $C^k$  Sınıfından Fonksiyon)  $U$  cümlesi  $\mathbb{E}^n$  Öklid uzayında açık bir alt cümle ve  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  olsun. Eğer  $f$  fonksiyonunun  $k$ . mertebeden tüm kısmi türevleri var ve sürekli ise bu fonksiyona  $C^k$  sınıfından diferensiyellenebilir bir fonksiyon adı verilir (Sabuncuoğlu 2014).

**Tanım 2.1.7** (Eğri)  $\mathbb{R}$  gerçel sayı doğrusunun bir  $I = (a, b)$  açık aralığında  $\mathbb{E}^n$  uzayına tanımlı düzgün  $C^\infty$  sınıfından diferensiyellenebilir bir  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  dönüşümüne  $\mathbb{E}^n$  uzayı içinde bir **eğri** denir (O'Neill 1966).

**Tanım 2.1.8** (Türevlenebilir Eğri) Bir türevlenebilir parametrik eğri  $\mathbb{R}$  gerçel sayı doğrusunun bir  $I = (a, b)$  açık aralığında  $\mathbb{E}^n$  uzayına, türevlenebilir bir  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$  fonksiyonudur (Do Carmo 1976).

**Tanım 2.1.9** (Regüler Eğri)  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n$  uzayı içinde bir eğri olsun.  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$  olmak üzere  $\alpha'_1(s_0) = \alpha'_2(s_0) = \dots = \alpha'_n(s_0) = 0$  olacak biçimde bir  $s_0 \in I$  yok ise  $\alpha(s)$  eğrisine bir regüler eğri denir (Do Carmo 1976).

**Tanım 2.1.10**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n$  uzayı içinde bir eğri olsun.

$$\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \dots, \alpha'_n(s))$$

biçiminde tanımlanan ifadeye  $\alpha$  eğrisinin  $s$  noktasındaki hız vektör denir (Do Carmo 1976).

**Tanım 2.1.11**  $\alpha(s) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n$  uzayı içinde bir eğri olsun.  $\|\alpha'(s)\|$  normuna  $\alpha$  eğrisinin  $s$  noktasındaki hızı adı verilir. Ayrıca özel olarak,  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise  $\alpha$  eğrisine birim hızlı eğri  $s$  ye de  $\alpha$  eğrisinin yay parametresi denir (Do Carmo 1976).

**Tanım 2.1.12** (Birim Teğet Vektör)  $\mathbb{E}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisini göz önüne alalım.

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (2.1)$$

eşitliğiyle verilen vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birim teğet vektörü adı verilir (Do Carmo 1976).

**Tanım 2.1.13** (Eğrilik Fonksiyon)  $\mathbb{E}^3$  3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi alalım.

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$s \rightarrow \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

biçiminde tanımlı fonksiyona,  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonu,  $\kappa(s)$  sayısına da  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği adı verilir  $\kappa$  gösterimi yerine  $k_1$  gösterimide kullanabilir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.13** (Asli Normal Vektör)  $\mathbb{E}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisini göz önüne alalım.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} \quad (2.2)$$

eşitliğiyle verilen  $N(s)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki asli normal vektörü adı verilir (Stoker 1969).

**Tanım 2.1.15** (Binormal Vektör)  $\mathbb{E}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisini göz önüne alalım.

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) \quad (2.3)$$

eşitliğiyle tanımlı  $B(s)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki binormal vektörü adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.16** (Frenet Çatısı)  $\mathbb{E}^3$  uzayında  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisini göz önüne alalım.

$$T(s), N(s), B(s)$$

vektörlerine  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet vektörleri adı verilir, bu vektörlerin oluşturduğu

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

cümlesine  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet çatısı adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.17** (Burulma Fonksiyonu)  $\mathbb{E}^3$ , 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı bir  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi alalım.  $\alpha$  eğrisinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

biçiminde tanımlı fonksiyona,  $\alpha$  eğrisinin burulması adı verilir  $\tau$  gösterimi yerine  $k_2$  gösterimide kullanabilir (Hacısalıhoğlu 2000).

**Tanım 2.1.18** (Frenet-Serret Formülleri)  $\mathbb{E}^3$  uzayında birim hızlı  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisini ve eğrinin Frenet çatısı  $\{T, N, B\}$  yi ele alalım. Aşağıdaki eşitliklere  $\alpha$  eğrisinin Frenet-Serret Formülleri adı verilir:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

## 2.2. Lorentz-Minkowski Uzayında Temel Kavramlar

**Tanım 2.2.1** (Yarı Öklidyen Uzay)  $\mathbb{R}^n$   $n$ -boyutlu standart reel vektör uzayı olsun.  $\forall U = (u_1, u_2, \dots, u_n), V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  için,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(U, V) \rightarrow \langle U, V \rangle_L = -\sum_{i=1}^p u_i v_i + \sum_{j=p+1}^n u_j v_j$$

biçiminde tanımlanan  $p$  indeksli fonksiyon  $\mathbb{R}^n$  de pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım belirtir. Bu iç çarpıma Lorentz iç çarpımı adı verilir. Bu iç çarpım üzerinde tanımlı uzaya da yarı Öklidyen uzay adı verilir ve  $\mathbb{E}_p^n$  ile gösterilir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.2.2** (Minkowski Uzayı)  $\mathbb{E}_p^n$  yarı Öklidyen uzayında  $p = 1$  ve  $n \geq 2$  ise oluşan  $\mathbb{E}_1^n$  uzayı  $n$ -boyutlu Minkowski uzayı olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Yukarıdaki tanımlara dayanarak Minkowski uzayında iç çarpımın şu şekilde olduğunu kolayca görebiliriz.

$$\langle U, V \rangle_L = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots - u_n v_n.$$

Minkowski uzayında üç farklı tipte vektör vardır. Şimdi bu vektörleri tanımlayalım.

**Tanım 2.2.3** (Spacelike, Timelike ve Lightlike ( Null ) Vektör )  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowski uzayından alınan her  $U$  elamanı için,

- (1) Eğer  $\langle U, U \rangle_L > 0$  veya  $U = 0$  ise  $U$  ya bir spacelike,
- (2) Eğer  $\langle U, U \rangle_L < 0$  ise  $U$  ise ya bir timelike vektör,
- (3) Eğer  $\langle U, U \rangle_L = 0$  ve  $U \neq 0$  ise  $U$  ya bir lightlike ( null ) vektör,

adı verilir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.2.4** (Bir Vektörün Causal Karakteri)  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowski uzayında bir  $U$  vektörünün causal karakteri  $\varepsilon_U$  ile gösterilir ve

$$\varepsilon_U = \begin{cases} 1, U \text{ bir spacelike vektör ise} \\ 0, U \text{ bir lightlike vektör ise} \\ -1, U \text{ bir timelike vektör ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Lopez 2014).

**Tanım 2.2.5** (Minkowski Uzayında Norm)  $\mathbb{E}_1^n$  Minkowski uzayında alınan  $\forall U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  için,

$$\|U\|_L = \sqrt{|\langle U, U \rangle_L|}$$



biçiminde tanımlanan fonksiyon  $U$  vektörünün normu adı verilir. Normu 1 olan vektöre ise birim vektör adı verilir (Lopez 2014).

**Tanım 2.2.6**  $\mathbb{E}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayı olmak üzere  $\forall U = (u_1, u_2, u_3), V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}_1^3$  için Minkowski vektörel çarpım şu şekilde tanımlanır:

$$U \wedge_L V = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_2 v_1 - u_1 v_2)$$

Minkowski uzayında eğriler teğet vektörlerinin türüne göre ayrılmaktadır. Yani, eğrinin teğet vektörü spacelike ise eğri spacelike, timelike ise eğri timelike, lightlike ise eğri lightlike eğri olarak adlandırılır (Lopez 2014).

**Tanım 2.2.7** (a)  $U$  ve  $V$  vektörleri  $\mathbb{E}_1^3$  de aynı timelike konide bulunan vektörler olsun. Bu durumda aşağıdaki şartı sağlayan bir tek  $\gamma \geq 0$  reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = -\|U\| \|V\| \sin \gamma$$

(b)  $\mathbb{E}_1^3$ , 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike  $U$  vektörü ile timelike  $V$  vektörünü ele alalım. O halde aşağıdaki şartı sağlayan bir tek  $\gamma \geq 0$  reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = \|U\| \|V\| \sin \gamma$$

(c)  $U$  ve  $V$  vektörleri spacelike vektörler olsun.

(i) Bu vektörler timelike bir düzlem geriyorsa, aşağıdaki şartı sağlayan bir tek  $\gamma \geq 0$  reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = \|U\| \|V\| \cosh \gamma$$

(ii) Bu vektörler spacelike bir düzlem geriyorsa, aşağıdaki şartı sağlayan bir tek  $\gamma \geq 0$  reel sayısı vardır:

$$\langle U, V \rangle = \|U\| \|V\| \cos \gamma$$

Minkowski uzayında bir  $S$  yüzeyi ele alalım. Eğer yüzey üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı Riemann metriği ise  $S$  bir spacelike yüzey, eğer indirgenmiş metrik

Lorentz metriğe ise  $S$  yüzeyi bir timelike yüzeyi olarak adlandırılmaktadır (Lopez 2014).

**Tanım 2.2.8**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  bir eğri olsun.

(a)  $\alpha$  null bir eğri olmak üzere, eğer  $\forall s \in I$  için  $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$  şartı sağlanıyorsa  $\alpha$  eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

(b)  $\alpha$  null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer  $\forall s \in I$  için  $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$  şartı sağlanıyorsa  $\alpha$  eğrisine pseudo yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

Minkowski uzayı  $\mathbb{E}_1^3$  de  $\{T, N, B\}$   $\alpha$  eğrisi üzerinde hareketli Frenet Çatısı ve  $\{k_1, k_2\}$   $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olsun. Burada  $T, N, B$  sırasıyla  $\alpha$  eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı, binormal alanıdır.

Eğer  $\alpha$  eğrisi spacelike veya timelike eğri ise, Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2 k_1 & 0 \\ -\epsilon_1 k_1 & 0 & \epsilon_3 k_2 \\ 0 & -\epsilon_2 k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

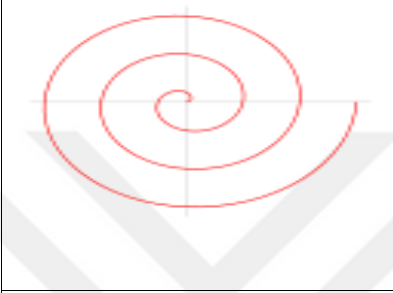
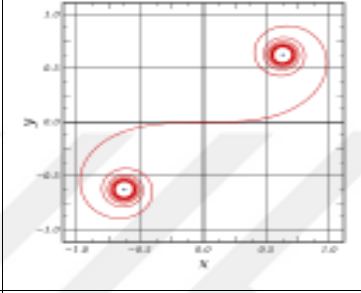
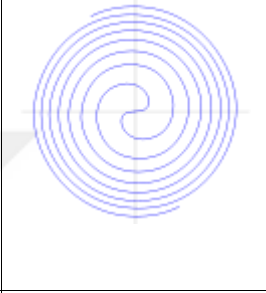
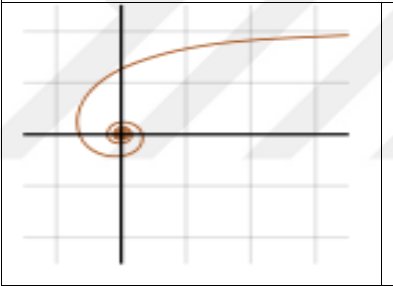
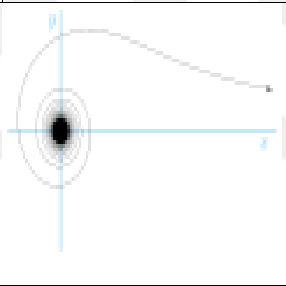
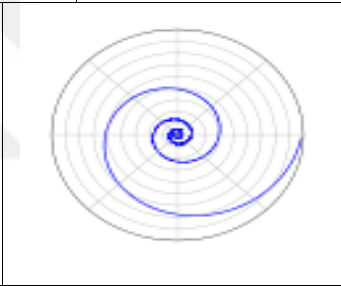
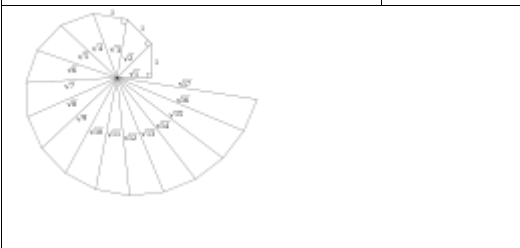
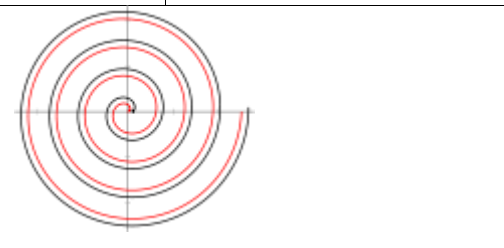
olarak verilir. Burada  $g(T, T) = \epsilon_1$ ,  $g(N, N) = \epsilon_2$ ,  $g(B, B) = \epsilon_3$ ,  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ ,  $\epsilon_i \in \{1, 2, 3\}$  dir. Ayrıca  $g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0$ .

### 2.3. Spiral Eğrileri

Bilimde ve doğada sık sık karşımıza çıkan spiral eğri kavramı, kısaca spiral olarak adlandıracağız, matematikte, bir merkez noktadan doğan ve bu nokta etrafında dönerek kademeli olarak uzaklaşan bir eğridir. Spiraller düzlemsel olabileceği gibi uzaysal da olabilirler. Düzlemdeki bir spiral,  $r$  yarıçap  $\theta$  açısının bir sürekli fonksiyonu iken; kutupsal koordinat sistemi ile açıklanabilir. Bir çember, bu fonksiyonun değişken değil sabit olduğu özel bir durumdur. İki boyutlu spirallerin için bir çok önemli örnek mevcuttur. Bunlardan bazıları şunlardır.

- Arşimet spirali:  $r = a + b \cdot \theta$

- Euler spirali, Cornu spirali ya da clothoid
- Fermat spirali:  $r = \theta^{\frac{1}{2}}$
- hiperbolik spiral:  $r = a/\theta$
- Lituus:  $r = \theta^{1/2}$
- logaritmik spiral:  $r = a \cdot e^{b\theta}$ , bunun yaklaşık değerleri doğada bulunur.
- Fibonacci spirali ve altın spiral: Logaritmik spiralin özel bir durumudur.

		
Arşimed Spirali	Euler spirali	Fermat spirali
		
Hiperbolik spiral	Lituus	Logaritmik spiral
		
Theodorus'un Spirali	Çemberin involütü Arşimet spirali ile özdeş değildir.	

**Şekil 2.1.** Düzlemde spiral eğri örnekleri

Basit 3-boyutlu spiraller için, üçüncü değişken,  $h$  (yükseklik) de  $\theta$  açısının bir sürekli fonksiyonudur. Sarmal ve girdap üç boyutlu spirallerin bir çeşidi olarak görülebilir. (Cook 1979, <https://tr.wikipedia.org/wiki/Spiral>).

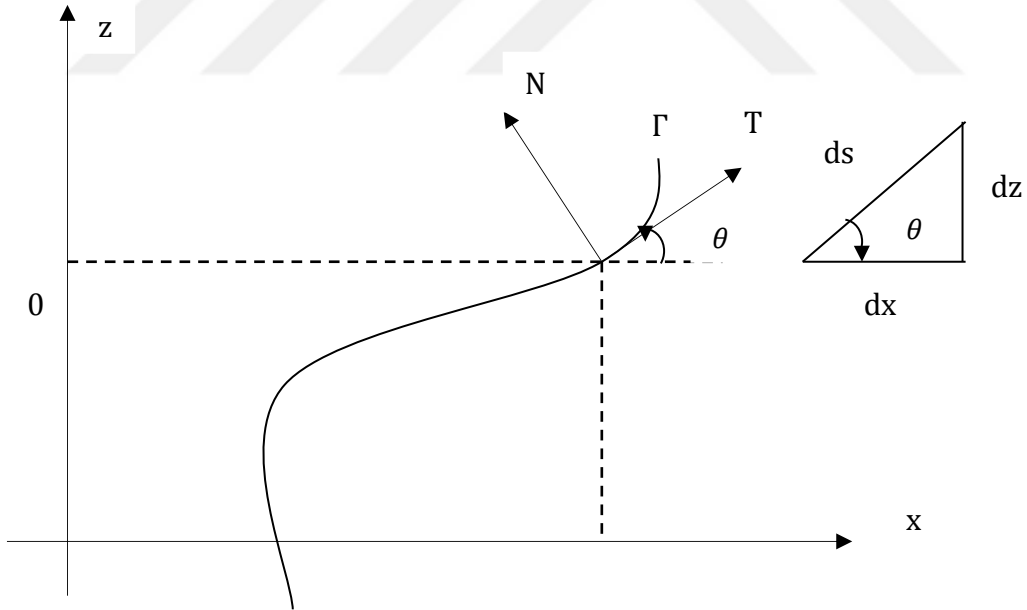
### 3. ÖKLİD DÜZLEMİNDE STURMIAN SPİRALLERİ VE GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölüm için temel referanslarımız I. Mladenov (2009) ve H. H. Hacısalihoğlu (2000) olacaktır.

Bu bölümde eğrilik fonksiyonu, eğrinin orijine olan uzaklığına bağlı olan düzlemsel eğrileri gözönüne alacağız. Diğer bir ifadeyle, eğriliği

$$\kappa = \frac{\sigma}{|X|} = \frac{\sigma}{r} = \frac{\sigma}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \sigma > 0 \quad (3.1)$$

şeklinde olan düzlemsel eğrileri inceleyeceğiz, burada  $x$  ve  $z$  kartezyen koordinatlar ve  $\sigma$  da sabit pozitif bir sayıdır. Eğer  $\theta(s)$ ,  $Ox$  eksenine göre eğrinin teğetinin eğimini ifade ediyorsa, o zaman aşağıda verilen bağıntılar vardır.



Şekil 3.1. Düzlemsel bir eğrinin geometrisi

$\Gamma = (x, z)$ ,  $xOz$ , düzleminde  $s$  yay parametresi ile verilen bir eğri olmak üzere; Şekil 3.1 den aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\cos \theta(s) = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin \theta(s) = \frac{dz}{ds}$$

$\Gamma$  nin  $s$  ye göre türevi alındığında

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

elde edilir. Buradan eğrinin teğet vektör alanı;

$$T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \quad (3.2)$$

şeklinde bulunur.  $T$  nin de  $s$  ye göre türevi alındığında;

$$\frac{dT(s)}{ds} = (-\sin \theta(s) \theta'(s), \cos \theta(s) \theta'(s))$$

elde edilir. Ayrıca Frenet-Serret eğriliğinin tanımı yardımıyla

$$\kappa = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{d\theta(s)}{ds}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1) den

$$\frac{d\theta(s)}{ds} = \frac{\sigma}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

şeklinde yazılabilir. Eğrinin konum vektörü

$$x = \zeta T + \eta N \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanır.  $\zeta$  ve  $\eta$   $s$  nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır.  $x$  diferensiyellenebilir olduğundan, Frenet denklemleri kullanılarak

$$T = \zeta' T + \zeta \kappa N + \eta' N - \eta \kappa T$$

eşitliği veya gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T = (\zeta' - \eta \kappa) T + (\zeta \kappa + \eta') N$$

elde edilir. Bu eşitlikler

$$\frac{d\zeta}{ds} = \dot{\zeta} = \eta\kappa + 1, \quad (3.4)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \dot{\eta} = -\kappa\zeta, \quad (3.5)$$

$$\kappa = \frac{\sigma}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}} \quad (3.6)$$

bulunur.

(3.4) de elde edilen denklemi  $\zeta$  ile, (3.5) de elde edilen denklemide  $\eta$  ile çarparsak aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$\zeta\dot{\zeta} = \zeta(\eta\kappa + 1) \quad (3.7)$$

$$\eta\dot{\eta} = \eta(-\kappa\zeta) \quad (3.8)$$

(3.7) ve (3.8) kullanılarak,

$$\zeta\dot{\zeta} + \eta\dot{\eta} = \zeta \quad (3.9)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.3) den  $r^2 = \zeta^2 + \eta^2$  elde edilir. Bu ifadesinden türev alınırsa,  $r\dot{r} = \zeta\dot{\zeta} + \eta\dot{\eta}$  yazılabilir. Bu eşitlik (3.9) de kullanılırsa

$$\zeta = r\dot{r} \quad (3.10)$$

elde edilir. Ayrıca (3.5) den

$$\dot{\eta} = -r\kappa\dot{r} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan

$$\eta = - \int \kappa(s)r(s)\dot{r}(s)d(s)$$

elde edilir.

$$\left. \begin{array}{l} r(s) = u \\ \dot{r}(s)ds = du \end{array} \right\}$$

dönüşümü yaparsak ve (3.2) den,

$$\kappa = \frac{\sigma}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}} = \frac{\sigma}{r}$$

eşitliği yazılabilir.  $\eta$  eşitliğinde kullanılırsa

$$\eta = - \int \frac{\sigma}{r} r \dot{r} ds \quad (3.12)$$

elde edilir.

Bu ifadeyi daha açık bir şekilde yazarsak

$$\eta = - \int \kappa(r) r dr + c \quad (3.13)$$

elde edilir.

C. Zwikker (1963) tarafından bir düzlemsel eğrinin eğrilik yarı çarpı  $R$ , eğrinin orijine olan uzaklığı  $r$  ye eşit olan eğriler olarak tanımlanan Sturmian spirallerinin eğrilik fonksiyonu  $\kappa$ , (3.1) denkeminde  $\sigma = 1$  alınarak gösterilebilir. Sturmian spiralinin parametrik denkleminde elde etmek için yukarıdaki işlemlere  $\sigma = 1$  alınarak geri dönülürse aşağıdaki sonuçlara rahatlıkla ulaşılabilir. (3.13) denkleminde  $\kappa = \frac{\sigma}{r}$  eşitliği yazılırsa;

$$\eta = -r + c \quad (3.14)$$

elde edilir. Ayrıca  $r^2 = \zeta^2 + \eta^2$  eşitliği ve (3.14) kullanılarak  $\zeta = \sqrt{2cr - c^2}$  bulunur. Diğer taraftan  $\zeta = r\dot{r}$  eşitliği kullanıldığında

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{2cr - c^2}}{r}, c > 0 \quad (3.15)$$

bulunur. Burada  $\frac{ds}{dr} = r$  dönüşümü yapılarak integral alınırsa aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$r = \frac{c}{2}(t^2 + 1), \quad \zeta = ct, \quad \eta = \frac{c}{2}(1 - t^2) \quad (3.16)$$

$\frac{d\theta}{ds} = \kappa = \frac{1}{r} = \frac{2}{c(t^2+1)}$  eşitliğinden integral alınırsa  $\theta = t$  elde edilir. Ayrıca

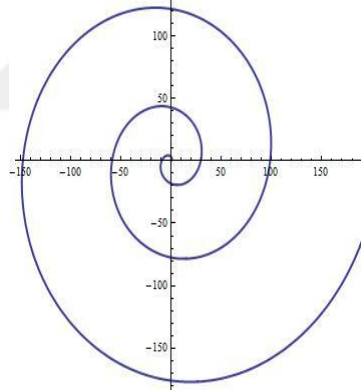
$$\left. \begin{aligned} T(s) &= \frac{dX}{ds} = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \\ N(s) &= (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

eşitlikleri (3.3) kullanılırsa

$$x = c \left( t \cos t + \frac{t^2 + 1}{2} \sin t \right), z = c \left( \frac{1 - t^2}{2} \cos t + t \sin t \right) \quad (3.18)$$

elde edilir. Bu durumda  $\Gamma = (x, z)$  şeklinde ifade edilen Sturmian spirali elde edilmiş olur. Ayrıca bu eğrinin yay parametresi  $s = \frac{c}{2} \left( \frac{t^3}{3} + t \right)$  olduğu kolaylıkla gösterebilir.

(3.1) denkleminde verilen  $\sigma$  keyfi bir sabit olarak alındığında ise genelleştirilmiş Sturmian spiralleri elde edilmektedir.  $\sigma$  nın özel durumlarına göre aşağıdaki durumları inceleyelim:



**Şekil 3.2.** (3.18) denkleminde  $c=0.25$  alınarak elde edilen Sturmian spirali

**1. Durum:**  $\sigma > 1$  olsun. Bu durumda,  $\eta = -\sigma r + c$  eşitliği,  $r^2 = \zeta^2 + \eta^2$  eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\zeta^2 = r^2 - (c - \sigma r)^2$$

elde ederiz. Bu ifadeyi düzenlersek

$$\zeta^2 = r^2 - c^2 + 2c\sigma r + c^2$$



elde edilir. Buradan

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{(1-\sigma^2)r^2 + 2c\sigma r - c^2}}{r}, c > 0$$

eşitliğine ulaşılır.  $(1-\sigma^2)r^2 + 2c\sigma r - c^2 > 0$  ikinci dereceden denklemini çözersek

$$b^2 - 4ac = 4c^2\sigma^2 + 4c^2(1-\sigma^2) = 4c^2$$

elde edilir. Buradan

$$r = \frac{-2c\sigma \mp 2c}{2(1-\sigma^2)}$$

olur. Sonuç olarak,

$$r = \frac{c}{1+\sigma}$$

veya

$$r = \frac{c}{\sigma-1}$$

bulunur.  $\sigma > 1$  olduğundan

$$\frac{c}{1-\sigma} \leq r \leq \frac{c}{1-\sigma}$$

olarak tanımlanır.

Eğer  $\sigma < 1$  ise, bu durumda  $\frac{c}{\sigma+1} < r$  olarak tanımlanır.  $\frac{c}{\sigma+1} = r$  denilirse,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$$

elde edilir. Bu ifadeyi daha açık bir şekilde yazarsak

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\sigma^2)r^2 + 2c\sigma r - c^2}}{r}$$

veya

$$\frac{dr}{\sqrt{(1-\sigma^2)r^2 + 2cr\sigma - c^2}} = dt$$

bulunur. Buradan integral alınırsa

$$r = \frac{c}{\sigma^2 - 1} \left( \sigma + \sin \sqrt{\sigma^2 - 1} t \right), t \in \left[ -\frac{\pi}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}}, \frac{\pi}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} \right]$$

dir. Ayrıca

$$\zeta = r\dot{r} = r \frac{dr}{ds}$$

$$\zeta = r \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds}$$

ve  $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{r}$  olduğundan

$$\zeta = \frac{dr}{dt}$$

bulunur. Bu ifadeyi daha açık bir şekilde yazarsak

$$\zeta = \frac{c}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \cos \sqrt{\sigma^2 - 1} t$$

ayrıca,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sigma}{r}$$

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\sigma}{r}$$

$$d\theta = \sigma dt$$

elde edilir ki, buradan

$$\theta = \sigma t \tag{3.19}$$

bulunur. (3.3) ve (3.17) den

$$x = \zeta T + \eta N$$

$$T = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$$

dir. Buradan  $s$  ye göre türev alınırsa

$$T' = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) \frac{d\theta}{ds}$$

ve

$$\kappa = \|T'\|$$

denirse

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds}$$

elde edilir. Buradan

$$N = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$$

dir. (3.19) den  $\theta = \sigma t$  olduğundan,

$$T = (\cos \sigma t, \sin \sigma t)$$

ve

$$N = (-\sin \sigma t, \cos \sigma t)$$

dir.

(3.3) den

$$x = \zeta T + \eta N$$

ifadesini daha açık bir şekilde yazarsak

$$x = \frac{c}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \cos \sqrt{\sigma^2 - 1} t (\cos \sigma t, \sin \sigma t) - c \left( \frac{\sigma \sin \sqrt{\sigma^2 - 1} t + 1}{\sigma^2 - 1} \right) (-\sin \sigma t, \cos \sigma t)$$

dir. Buradan

$$x = c \left( \frac{\cos \sqrt{\sigma^2 - 1} t \cos \sigma t}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} + \frac{(\sigma \sin \sqrt{\sigma^2 - 1} t + 1) \sin \sigma t}{\sigma^2 - 1} \right) \quad (3.20)$$

$$z = c \left( \frac{\cos \sqrt{\sigma^2 - 1} t \sin \sigma t}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} - \frac{(\sigma \sin \sqrt{\sigma^2 - 1} t + 1) \cos \sigma t}{\sigma^2 - 1} \right) \quad (3.21)$$

$$s = \frac{c}{\sigma^2 - 1} \left( \sigma t - \frac{\cos \sqrt{\sigma^2 - 1} t}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} + \frac{\sigma \pi}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} \right) \quad (3.22)$$

elde edilir. Ayrıca,

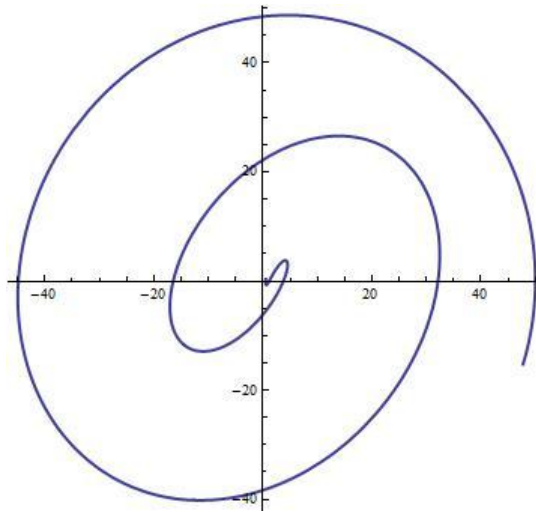
$$r = \sigma R \quad (3.23)$$

$$r = \frac{c}{\sigma^2 - 1} (\sigma + \sin \sqrt{\sigma^2 - 1} t) \quad (3.24)$$

olur. (3.23) ve (3.24) den  $t$  yi çekip (3.22) de yazarsak

$$s = \frac{c}{\sigma^2 - 1} \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \arcsin \left[ \frac{\sigma}{c} (\sigma^2 - 1) R - c \right] - \frac{1}{c} \sqrt{\sigma^2 (1 - \sigma^2) R^2 + 2c\sigma^2 R - c^2} + \frac{\sigma \pi}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} \right] \quad (3.25)$$

bulunur.



**Şekil 3.3.** (3.20) ve (3.21) denklemlerinde  $c=1$  alınarak elde edilen Sturmian spirali

**2. Durum:**  $0 < \sigma < 1$  olsun. Bu durumda

$$\eta = -\sigma r + c$$

ve

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{(1-\sigma^2)c^2 + 2c\sigma r - \sigma^2}}{r}$$

dir. Burada  $r > \frac{c}{\sigma+1}$  ve  $\sigma < 1$  olduğu dikkate alınır ve  $\frac{ds}{dt} = r^2$  denklemini yardımıyla  $\tau$  parametresi tanımlanırsa;

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{(1-\sigma^2)r^2 + 2c\sigma r - c^2}}{r} r^2$$

olur. Buradan

$$\frac{dr}{dt} = r\sqrt{(1-\sigma^2)r^2 + 2c\sigma r - c^2}$$

ve

$$\frac{dr}{r\sqrt{(1-\sigma^2)r^2 + 2c\sigma r - c^2}} = dt$$

dir. Her iki tarafın integralini alırsak

$$r = \frac{c}{\sigma - \sin c\tau}$$

ve

$$\tau \in \left[ -\frac{\pi}{2c}, \frac{\arcsin \sigma}{c} \right]$$

ve

$$\zeta = -\frac{c \cos c\tau}{\sigma - \sin c\tau}, \eta = -\frac{c \sin c\tau}{\sigma - \sin c\tau}, \theta(\tau) = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \ln \frac{\sigma \tan \frac{c\tau}{2} - \sqrt{1-\sigma^2} - 1}{\sigma \tan \frac{c\tau}{2} \sqrt{1-\sigma^2} - 1}$$

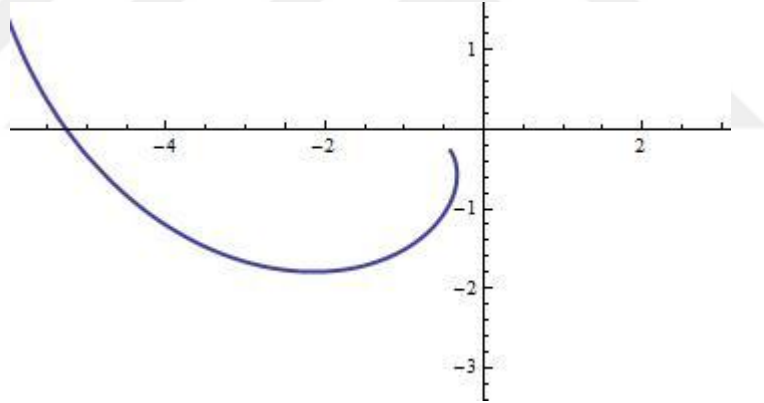
dir. Yukarıdaki eşitlikler kullanılarak eğrinin parametrik denklemini

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c}{\sigma - \sin c\tau} \cos \left[ c\tau - \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \ln \frac{\sigma \tan \frac{c\tau}{2} - \sqrt{1 - \sigma^2} - 1}{\sigma \tan \frac{c\tau}{2} + \sqrt{1 - \sigma^2} - 1} \right] \\ z &= \frac{c}{\sigma - \sin c\tau} \sin \left[ c\tau - \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \ln \frac{\sigma \tan \frac{c\tau}{2} - \sqrt{1 - \sigma^2} - 1}{\sigma \tan \frac{c\tau}{2} + \sqrt{1 - \sigma^2} - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca

$$s = \frac{c\tau}{(1 - \sigma^2)^{3/2}} \ln \left[ \frac{\sigma + (1 + \sqrt{1 - \sigma^2}) \tan \left[ \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{c}{\tau} - \sigma \right) \right]}{1 + \sqrt{1 - \sigma^2} + \sigma \tan \left[ \frac{1}{2} \arcsin \left( \frac{c}{\tau} - \sigma \right) \right]} \right] + \frac{\sqrt{(1 - \sigma^2)r^2 + 2c\sigma r - c^2}}{1 - \sigma^2}$$

dır.



**Şekil 3. 4.** (3.24) denkleminde  $\sigma = 0.9$  ve  $c=1$  alınarak elde edilen Sturmiyan spirali

**3. Durum:**  $c = 0$  olsun. Bu durumda

$$\eta = -\sigma r$$

ve

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \sigma^2}$$

dir. Buradan

$$r = \sqrt{1 - \sigma^2} s + a$$

ve

$$\eta = -\sigma \left( \sqrt{1 - \sigma^2} s + a \right)$$

elde edilir.  $\zeta^2 = r^2 - \eta^2$  olduğundan

$$\zeta = (1 - \sigma^2)s + a\sqrt{1 - \sigma^2}$$

dir. Daha sonra

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sigma}{(\sqrt{1 - \sigma^2} s + a)}$$

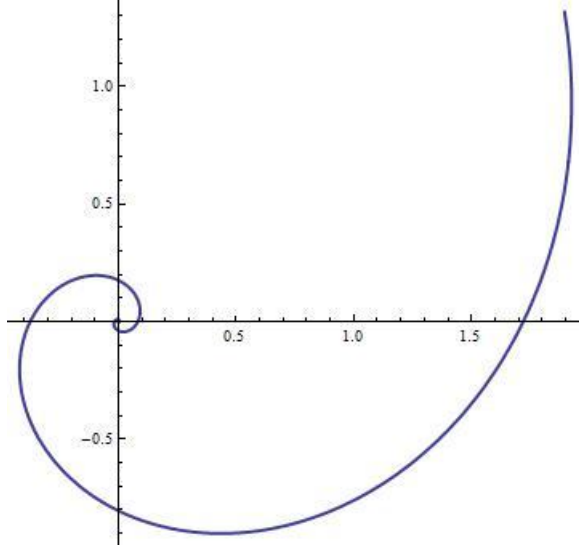
eşitliğinden

$$\theta(s) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \ln \left( \sqrt{1 - \sigma^2} s + a \right)$$

bulunur. Buradan eğrinin parametrik denklemi

$$\left. \begin{aligned} x &= \left( \left( (1 - \sigma^2)s + a\sqrt{1 - \sigma^2} \right) \cos \theta(s) + \sigma\sqrt{1 - \sigma^2} s + a \right) \sin \theta(s) \\ z &= \left( \left( (1 - \sigma^2)s + a\sqrt{1 - \sigma^2} \right) \sin \theta(s) - \sigma\sqrt{1 - \sigma^2} s + a \right) \cos \theta(s) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

olarak bulunur.



**Şekil 3. 5.** (3.25) denkleminde  $\sigma = 0.9$  ve  $a=1$  alınarak elde edilen Sturmian spirali



#### 4. LORENTZ-MINKOWSKI DÜZLEMİNDE STURMIAN SİRALLERİ

Bu bölüm için ana referansımız İlarşlan ve diğerleri (2015) ve Lopez (2014) makaleleri olacaktır. Bilindiği gibi Lorentz-Minkowski düzlemi  $\mathbb{E}_1^2$ , Öklid düzlemi üzerinde indefinite metrik olan  $g = -dx^2 + dz^2$  şeklinde tanımlanan  $g$  metriğinin tanımlanmasıyla elde edilir. Burada  $(x, z)$ ,  $\mathbb{E}_1^2$  in koordinatlarını göstermektedir. Lorentz-Minkowski düzleminde bir spacelike eğri;

$$x(s) = \left( \int_0^s \sinh \Phi(s) ds, \int_0^s \cosh \Phi(s) ds \right) \quad (4.1)$$

şeklinde parametrik olarak verilebilir. Bu eğrinin Frenet vektörleride aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{aligned} T(s) &= (\sinh \Phi(s), \cosh \Phi(s)) \\ N(s) &= (\cosh \Phi(s), \sinh \Phi(s)) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

diğer taraftan eğrinin eğrilik fonksiyonu

$$k(s) = g \left( \frac{dT(s)}{ds}, N(s) \right) = -\frac{d\Phi(s)}{ds} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eğrinin Frenet vektörleri ve eğrilikleri arasındaki ilişkiler yani Frenet denklemlerinde

$$\frac{dx}{ds} = T, \quad \frac{dT}{ds} = -kN, \quad \frac{dN}{ds} = -kT \quad (4.4)$$

şeklindedir. Benzer şekilde bir timelike eğri parametrik formda

$$x(s) = \left( \int_0^s \cosh \Phi(s) ds, \int_0^s \sinh \Phi(s) ds \right) \quad (4.5)$$

şeklindedir. Bu eğrinin Frenet vektörleri ise

$$\left. \begin{aligned} T(s) &= (\cosh \Phi(s), \sinh \Phi(s)) \\ N(s) &= (\sinh \Phi(s), \cosh \Phi(s)) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

şeklindedir. Eğrinin eğrilik fonksiyonu için

$$k(s) = g \left( \frac{dT(s)}{ds}, N(s) \right) = \frac{d\Phi(s)}{ds} \quad (4.7)$$

bağıntısı vardır. Ayrıca düzlemsel timelike eğrisinin Frenet denklemleri de

$$\frac{dx}{ds} = T, \quad \frac{dT}{ds} = kN, \quad \frac{dN}{ds} = kT \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır.

#### 4. 1. Lorentz-Minkowski Düzleminde Spacelike Sturmian Spiralleri

Bu başlıkta spacelike Sturmian spiralleri ve genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirallerini dikkate alacağız. Bunun için ana bağıntımız

$$k(s) = \frac{\sigma}{r}, \quad r = \sqrt{|g(x(s), x(s))|} \quad (4.9)$$

şeklinde olacaktır. Düzlemsel spacelike eğrinin konum vektörü

$$x(s) = \zeta(s)T(s) + \eta(s)N(s) \quad (4.10)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $\zeta$  ve  $\eta$ ,  $s$  nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (4.10) eşitliğinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dx(s)}{ds} = \zeta'T + \zeta kN + \eta'N - \eta kT$$

ve (4.4) eşitlikleri kullanılırsa

$$T = (\zeta' - \eta k)T + (\eta' - \zeta k)N \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11) eşitlikleri yardımıyla,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{ds} = \zeta' = 1 + \eta k \\ \frac{d\eta}{ds} = \eta' = \zeta k \\ k = \frac{\sigma}{r} = \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon(\zeta^2 - \eta^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

elde edilir. Burada  $\varepsilon = \pm 1$  olup  $\varepsilon(\zeta^2 - \eta^2) \geq 0$  olacak şekilde seçilir. (4.12) denklemini birinci denklemini  $\zeta$  ile çarpılırsa  $\zeta\zeta' = \zeta(1 + \eta k)$  elde edilir. Benzer şekilde ikinci denklemini  $\eta$  ile çarpılırsa  $\eta\eta' = \eta(\zeta k)$  elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa çıkartılırsa;

$$\zeta\zeta' - \eta\eta' = \zeta \quad (4.13)$$

bulunur. Diğer taraftan, (4.12) denkleminin son eşitliğinden  $r^2 = \varepsilon(\zeta^2 - \eta^2)$  elde edilir. Bu eşitliğin  $s$  ye göre türevi alınırsa  $rr' = \varepsilon(\zeta\zeta' - \eta\eta')$  bulunur. (4.13) eşitliği burada kullanılırsa

$$\zeta = \varepsilon rr' \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu sonuç (4.12) de kullanılırsa,  $\eta = \int \varepsilon \frac{\sigma}{r} r(s)r'(s)d(s)$

ve

$$\eta = \varepsilon \int rk(r)rd(r) + c \quad (4.15)$$

elde edilir.

3. Bölümünde Öklid düzleminde ele aldığımız Sturmian spirallerini Lorentz Minkowski düzleminde tekrar ele alalım. Bir başka ifadeyle C. Zwikker (1963) tarafından; herbir noktasındaki eğrilik yarı çarpı  $R$ , eğrinin orijine olan uzaklığı  $r$  ye eşit olan eğriler olarak tanımlanan Sturmian spirallerini ele alacağız. Bu tanıma göre eğrinin eğrilik fonksiyonu  $\kappa$ , (4.12) denkeminde verildiği gibi verilebilir ve  $\sigma = 1$  dir. (4.14) ve (4.15) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \varepsilon r + c \\ r' &= \frac{\varepsilon \sqrt{(1 + \varepsilon)r^2 + 2\varepsilon cr + c^2}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

bulunur. Şimdi durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

A)  $\varepsilon = 1$  olsun. Bu durumda (4.16) denkleminde

$$\left. \begin{aligned} \eta &= r + c \\ r' &= \frac{\sqrt{2r^2 + 2cr + c^2}}{r}, c > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

elde edilir. Bu denklemleri

$$\frac{ds}{dt} = r \quad (4.18)$$

şeklinde tanımlanan  $t$  parametresiyle yeniden parametrelendirirsek;

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr ds}{ds dt} = \frac{\sqrt{2r^2 + 2cr + c^2}}{r}$$

ve

$$\frac{dr}{\sqrt{2r^2 + 2cr + c^2}} = dt$$

elde ederiz. Buradan

$$r(t) = \frac{c}{2} \left( (\sinh(\sqrt{2}t) - 1) \right)$$

$\eta = r + c$  eşitliğinden

$$\eta(t) = \frac{c}{2} \left( (\sinh(\sqrt{2}t) + 1) \right)$$

ve  $\zeta = rr'$  eşitliğinden de

$$\zeta(t) = \frac{c}{\sqrt{2}} \cosh(\sqrt{2}t)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{d\Phi}{ds} = k = \frac{1}{r} = -\frac{2}{c(t^2 + 1)}$$

$$\frac{d\Phi dt}{ds ds} = -\frac{1}{r}$$

$$d\Phi = -dt$$

$$\Phi = -t$$

elde edilir. Elde edilen sonuçlar (4.10) denkleminde kullanılırsa;

$$T(s) = \frac{dx}{ds} = (\cosh\Phi(s) \Phi'(s), \sinh\Phi(s) \Phi'(s))$$

$$N = \frac{dT}{ds} \frac{1}{k} = (\cosh\Phi(s) \Phi'(s), \sinh\Phi(s) \Phi'(s)) \frac{d\Phi}{ds} \frac{1}{\frac{d\Phi}{ds}}$$

$$N = (\sin h\Phi(s), \cos h\Phi(s))$$

bulunur.  $x$  spacelike eğrisine ait bu bileşenler konum vektöründe yerine yazıldığında;

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= (x, z) \\ x &= (\zeta \sinh \Phi + \eta \cosh \Phi) \\ z &= \zeta \cosh \Phi + \eta \sinh \Phi \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu sonuç yukarıda bulduğumuz diğer sonuçlarla birleştirilirse; spacelike Sturmian spirale ait parametrik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{c}{\sqrt{2}} \cosh(\sqrt{2}t) \sinh t + \frac{c}{2} \left( (\sinh(\sqrt{2}t) + 1) \cosh t \right) \\ z &= \frac{c}{\sqrt{2}} \cosh(\sqrt{2}t) \cosh t - \frac{c}{2} (\sinh(\sqrt{2}t) + 1) \sinh t \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

**B)**  $\varepsilon = 0$  ve  $c = 0$  olsun. Bu durumda; yukarıdaki işlemlerden

$$\zeta(s) = 2s + \sqrt{2d}, \quad \eta(s) = \sqrt{2s} + d, \quad d \in \mathbb{R} \text{ ve } r(s) = \sqrt{2s} + d,$$

$$\Phi(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2s} + d|$$

elde edilir. Bu durumda spacelike Sturmian spirale ait parametrik denklem aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left. \begin{aligned} x &= (2s + \sqrt{2d}) \sinh \Phi + (\sqrt{2s} + d) \cosh \Phi \\ z &= (2s + \sqrt{2d}) \cosh \Phi + (\sqrt{2s} + d) \sinh \Phi \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

**C)**  $\varepsilon = -1$  olsun. Bu durumda (4.16) denklemlerinden

$$h = -r + c, \quad r' = -\frac{\sqrt{c^2 - 2cr}}{r}, \quad c < 0 \quad (4.22)$$

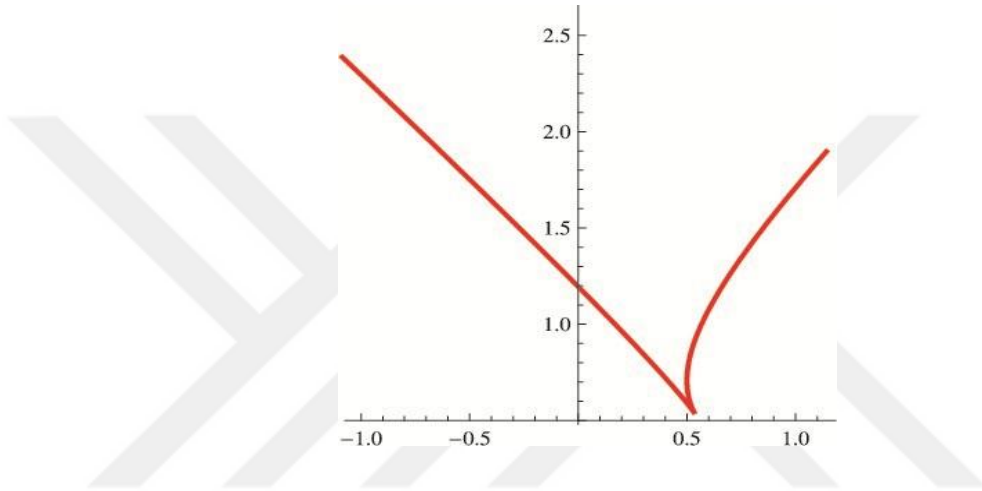
elde edilir. (4.18) ile yapılan parametre değişimi burada da gerçekleştirilirse;

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= ct \\ \eta(t) &= \frac{c}{2}(1 + t^2) \\ r(t) &= \frac{c}{2}(1 - t^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

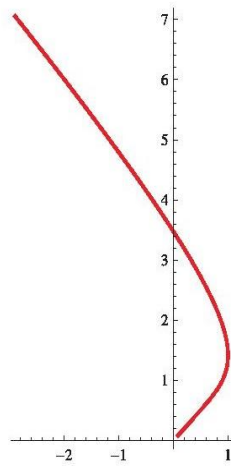
bulunur. Burada  $t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  dir. (4.3) eşitliğinden de  $\Phi = -t$  bulunur. Bu durumda (4.18) denklemlerinden spacelike Sturmian spiralinin parametrik denklemleri

$$\left. \begin{aligned} x &= -ct \sinh t + \frac{c}{2}(1+t^2) \cosh t \\ z &= ct \cosh t - \frac{c}{2}(1+t^2) \sinh t \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

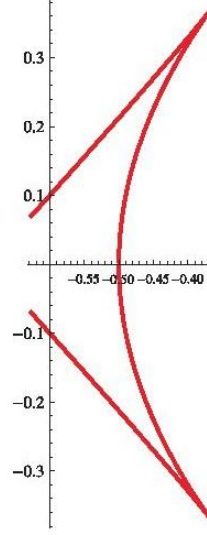
şeklinde bulunur.



**Şekil 4. 1.** (4.20) denkleminde  $c=1$  alınarak elde edilen standart spacelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 2.** (4.21) denkleminde  $d=0$  alınarak elde edilen standart spacelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 3.** (4.24) denkleminde  $c=-1$  alınarak elde edilen standart spacelike Sturmian spirali

#### 4.1.1. Genelleştirilmiş Spacelike Sturmian Spiralleri

Bir önceki bölümde  $\sigma = 1$  olarak yapmış olduğumuz kısıtlamayı kaldırdığımızda  $\sigma$  için  $\sigma > 1$  ve  $0 < \sigma < 1$  durumları ortaya çıkar. Bu durumlarda eğriye genelleştirilmiş Sturmian spirali adını vereceğiz. Bu durumları ayrı ayrı ele alalım.

i)  $\sigma > 1$  olsun. Bu durumda (4. 14) ve (4.15) eşitliklerinden;

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon c \sigma r + c^2} \\ \eta &= \varepsilon \sigma r + c \\ \sigma_\varepsilon &= \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

ve

$$r' = \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon \sigma_\varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon \sigma c r + c^2}}{r} \quad (4.26)$$

elde edilir. Burada  $\varepsilon = 1$  ve  $\varepsilon = -1$  durumları ayrı ayrı incelenirse.

**i-1)**  $\varepsilon = 1$  olsun. Bu durumda (4.25) ve (4.26) eşitliklerinden

$$\eta = \sigma r + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (4.27)$$

ve

$$r' = \frac{\sqrt{\sigma_+^2 r^2 + 2\sigma c r + c^2}}{r}, \quad \sigma_+ = \sqrt{\sigma^2 + 1} \quad (4.28)$$

elde edilir. Bu son eşitliklerde daha önce yaptığımız gibi (4.18) eşitliği ile tanımlı parametre dönüşümü gerçekleştirilirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma_+ t) \\ r(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} (\sinh(\sigma_+ t) - \sigma) \\ \eta(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} = \frac{c}{\sigma_+^2} (\sigma \sinh(\sigma_+ t) + 1) \\ \Phi &= -\sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.10) eşitliğinde bulduğumuz bağıntılar yazılırsa, genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirallerinin parametrik denklemi

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ -\frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma + t) \right] \sinh \sigma t + \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (\sigma \sinh(\sigma + t) + 1) \cosh(\sigma t) \right] \cosh(\sigma t) \\ z &= \left[ -\frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma + t) \right] \cosh(\sigma t) - \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (\sigma \sinh(\sigma + t) + 1) \right] \sinh(\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

olarak bulunur.

**i-2)**  $\varepsilon = -1$  olsun. Bu durumda (4.25) ve (4.26) eşitliklerinden

$$\zeta = -\sqrt{\sigma_-^2 r^2 - 2\sigma c r + c^2}, \quad \eta = -\sigma r + c, \quad \sigma_- = \sqrt{\sigma^2 - 1} \quad (4.31)$$

ve



$$r' = \frac{\sqrt{\sigma_-^2 r^2 - 2\sigma_- c r + c^2}}{r} \quad (4.32)$$

Yukarıdaki ifadenin pozitif olması için  $c > 0$  ve  $r$  nin  $\frac{c}{\sigma+1} < r < \frac{c}{\sigma-1}$  aralığından olmak zorunluluğu açık olarak görülmektedir. Bu son eşitliklerde daha önce yaptığımız gibi (4.18) eşitliği ile tanımlı parametre dönüşümü gerçekleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= -\frac{c}{\sigma_-} \sinh(\sigma_- t) \\ \eta(t) &= -\frac{c}{\sigma_-^2} (\sigma \cosh(\sigma_- t) + 1) \\ r(t) &= \frac{c}{\sigma_-^2} \cosh(\sigma_- t) + \sigma \\ \Phi &= -\sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.10) eşitliğinde bulduğumuz bu bağıntılar yazılırsa, genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirallerinin parametrik denklemi

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ \frac{c}{\sigma_-} \sinh(\sigma - t) \right] \sinh(\sigma t) - \left[ \frac{c}{\sigma_-^2} (\sigma \cosh(\sigma - t) + 1) \right] \cosh(\sigma t) \\ z &= \left[ -\frac{c}{\sigma_-} \sinh(\sigma - t) \right] \cosh(\sigma t) + \left[ \frac{c}{\sigma_-^2} \cosh(\sigma - t) + 1 \right] \sinh(\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

olarak bulunur.

ii)  $\sigma > 1$  ve  $c = 0$  olsun. Bu durumda (4. 14) ve (4.15) eşitliklerinden;

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sigma_\varepsilon r \\ \eta &= \varepsilon \sigma r \\ r' &= \varepsilon \sigma_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

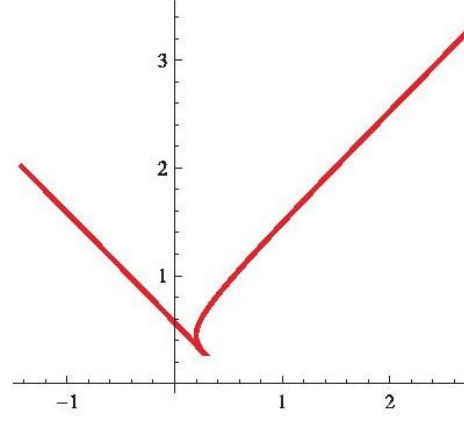
elde edilir. Bu eşitlikler tekrar düzenlenirse daha kullanışlı eşitlikler olan

$$\left. \begin{aligned} \zeta(s) &= \varepsilon \sigma_\varepsilon^2 s + d \sigma_\varepsilon \\ \eta(s) &= \sigma \sigma_\varepsilon s + d \varepsilon \sigma \\ r(s) &= \varepsilon \sigma_\varepsilon s + d \\ \Phi &= -\frac{\varepsilon \sigma}{\sigma_\varepsilon} \ln |\varepsilon \sigma_\varepsilon + d| \\ d &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

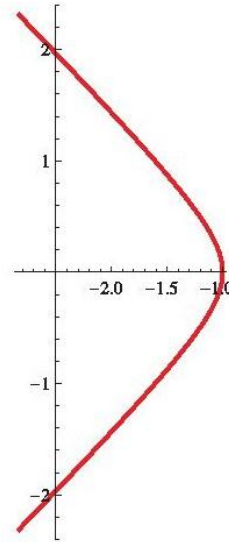
eşitliklerine dönüşür. Bulduğumuz bu eşitlikler eğrinin konum vektöründe yerlerine yazılırsa eğrinin parametrik denklemi

$$\left. \begin{aligned} x &= [\varepsilon\sigma_\varepsilon^2 s + d\sigma_\varepsilon] \sinh \Phi + [\sigma\sigma_\varepsilon s + d\varepsilon\sigma] \cosh \Phi \\ z &= [\varepsilon\sigma_\varepsilon^2 s + d\sigma_\varepsilon] \cosh \Phi + [\sigma\sigma_\varepsilon s + d\varepsilon\sigma] \sinh \Phi \end{aligned} \right\} 4.36)$$

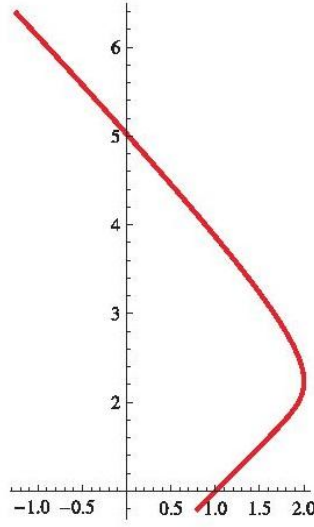
olarak elde edilir.



**Şekil 4. 4.** (4.30) denkleminde  $c=1$  ve  $\sigma = 2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmiyan spirali



**Şekil 4. 5.** (4.34) denkleminde  $c=1$  ve  $\sigma = 2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmiyan spirali



**Şekil 4. 6.** (4.36) denkleminde  $d=0$  ve  $\varepsilon = 1$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirali

**iii)**  $0 < \sigma < 1$  olsun. Bu durumda (4. 14) ve (4.15) eşitliklerinden;

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\sigma_{\varepsilon}^2 r^2 + 2\varepsilon\sigma cr + c^2} \\ \eta &= \varepsilon\sigma r + c \\ c &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

ve

$$r' = \frac{\varepsilon\sqrt{\sigma_{\varepsilon}^2 r^2 + 2\varepsilon\sigma cr + c^2}}{r} \quad (4.38)$$

elde edilir. Bu durumda  $\varepsilon = 1$  ve  $\varepsilon = -1$  olarak ayrı ayrı ele alalım.

**iii-1)**  $\varepsilon = 1$  olsun. Bu durumda (4.37) ve (4.38) den

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sigma r + c \\ r' &= \frac{\sqrt{\sigma_+^2 r^2 + 2\sigma cr + c^2}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

elde edilir. Diğer bölümlerde yaptığımız gibi (4.18) eşitliği ile tanımlı parametre dönüşümü gerçekleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma_+ t) \\ \eta(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} (\sigma \sinh(\sigma_+ t) + 1) \\ r(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} (\sinh(\sigma_+ t) - \sigma) \\ \Phi &= -\sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

elde edilir. Bu durumda da eğrinin parametrik denklemini

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ -\frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma_+ t) \right] \sinh(\sigma t) + \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (\sigma \sinh(\sigma_+ t) + 1) \right] \cosh(\sigma t) \\ z &= \left[ \frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma_+ t) \right] \cosh(\sigma t) - \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (\sigma \sinh(\sigma_+ t) + 1) \right] \sinh(\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

şeklinde elde ederiz.

**iii-2)**  $\varepsilon = -1$  olsun. Bu durumda (4.37) ve (4.38) den

$$\left. \begin{aligned} \eta &= -\sigma r + c \\ r' &= -\frac{\sqrt{\sigma_+^2 r^2 - 2\sigma cr + c^2}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadenin pozitif olması için  $c > 0$  ve  $0 < r < \frac{\sigma}{\sigma_+}$  olduğu açıktır.

Yukarıdaki işlemlere benzer olarak;

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{c}{\omega} \cos(\omega t) \\ \eta(t) &= \frac{c}{\omega^2} (1 + \sigma \sin(\omega t)) \\ \omega &= \sqrt{1 - \sigma^2} \\ r(t) &= \frac{c}{\omega^2} (-\sin(\omega t) + \sigma), t \in \left[ -\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega} \right] \\ \Phi &= -\sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

elde edilir. Bulunan bu değerler konum vektöründe yerine yazılırsa, eğrinin parametrik denklemi

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ -\frac{c}{\omega} \cos(\omega t) \right] \sinh(\sigma t) - \left[ \frac{c}{\omega^2} (1 + \sigma \sin(\omega t)) \right] \cosh(\sigma t) \\ z &= \left[ \frac{c}{\omega} \cos(\omega t) \right] \cosh(\sigma t) - \left[ \frac{c}{\omega^2} (1 + \sigma \sin(\omega t)) \right] \sinh(\sigma t) \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

olarak bulunur.

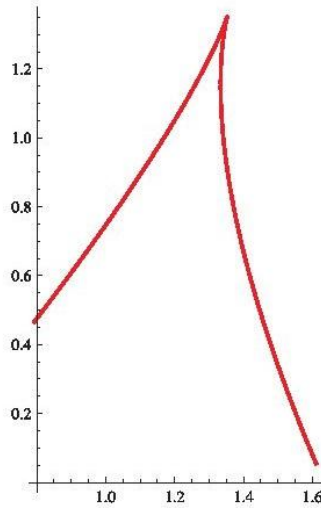
**iv-)**  $0 < \sigma < 1, c = 0$  ve  $\varepsilon = 1$  olsun. Bu durumda (4.37) ve (4.38) den

$$\left. \begin{aligned} \zeta(s) &= \sigma_+^2 s + d\sigma_+ \\ \eta(s) &= \sigma\sigma_+ s + \sigma d \\ r(t) &= \sigma_+ s + d \\ \Phi(s) &= -\frac{\sigma}{\sigma_+} \ln|\sigma_+ s + d| \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

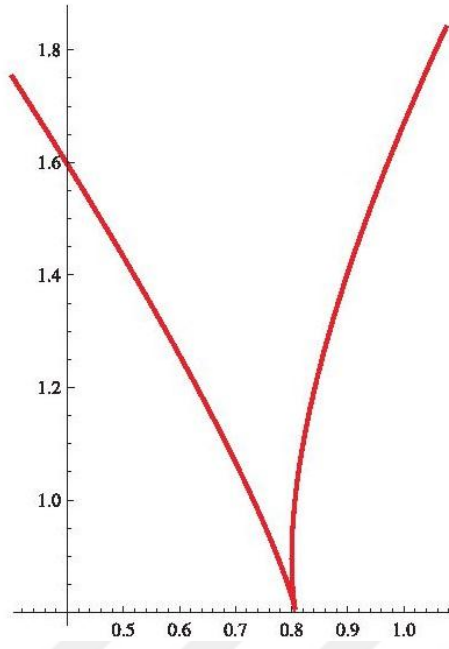
elde edilir. Bulunan bu değerler konum vektöründe yerine yazılırsa, eğrinin parametrik denklemi

$$\left. \begin{aligned} x &= [\sigma_+^2 s + d\sigma_+] \sinh \Phi + [\sigma\sigma_+ s + \sigma d] \cosh \Phi \\ z &= [\sigma_+^2 s + d\sigma_+] \cosh \Phi + [\sigma\sigma_+ s + \sigma d] \sinh \Phi \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

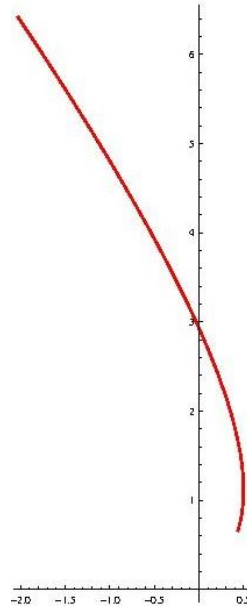
olarak elde edilir.



**Şekil 4. 7.** (4.41) denkleminde  $c=1$  ve  $\sigma = 1/2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmiyan spirali



**Şekil 4. 8.** (4.44) denkleminde  $c=1$  ve  $\sigma = 1/2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 9.** (4.46) denkleminde  $d = 1/2$  ve  $\sigma = 1/2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş spacelike Sturmian spirali

## 4.2. Lorentz-Minkowski Düzleminde Timelike Sturmian Spiralleri

Bu başlıkta timelike Sturmian spiralleri ve genelleştirilmiş Sturmian spirallerini dikkate alacağız. Bunun için ana bağıntımız (4.9) da verilen bağıntı olacaktır. Diğer taraftan düzlemsel bir timelike eğrinin konum vektörü

$$x(s) = \zeta(s)T(s) + \eta(s)N(s) \quad (4.47)$$

biçiminde tanımlanır. Burada  $\zeta$  ve  $\eta$ ,  $s$  nin diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. (4.47) eşitliğinin  $s$  ye göre türevi alınır ve timelike eğri için (4.8) de verilen Frenet deklemleri kullanırsa

$$T = (\zeta' + \eta k)T + (\eta' + \zeta k)N \quad (4.48)$$

elde edilir. (4.47) ve (4.48) eşitlikleri yardımıyla,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{ds} &= \zeta' = 1 - \eta k \\ \frac{d\eta}{ds} &= \eta' = -\zeta k \\ k &= \frac{\sigma}{r} = \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon(\eta^2 - \zeta^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

bulunur. Burada  $\varepsilon = \pm 1$  olup  $\varepsilon(\eta^2 - \zeta^2) \geq 0$  olacak şekilde seçilir. (4.49) denklemini birinci denklemini  $\zeta$  ile çarpılırsa  $\zeta\zeta' = \zeta(1 - \eta k)$  elde edilir. Benzer şekilde ikinci denklem  $\eta$  ile çarpılırsa  $\eta\eta' = \eta(-\zeta k)$  elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa çıkartılırsa;

$$\zeta\zeta' - \eta\eta' = \zeta \quad (4.50)$$

bulunur. Diğer taraftan, (4.49) denkleminin son eşitliğinden  $r^2 = \varepsilon(\eta^2 - \zeta^2)$  elde edilir. Bu eşitliğin  $s$  ye göre türevi alınırsa  $rr' = \varepsilon(\eta\eta' - \zeta\zeta')$  bulunur. (4.50) eşitliği burada kullanılırsa

$$\zeta = -\varepsilon r r' \quad (4.51)$$

elde edilir. Bu sonuç (4.49) de kullanılırsa,  $\eta = \int \varepsilon \frac{\sigma}{r} r(s) r'(s) d(s)$  düzenlenirse;

$$\eta = \varepsilon \int rk(r)d(r) + c \quad (4.52)$$

elde edilir. Timelike Sturmian spiralleri için yukarıda yapmış olduğumuz açıklamaları tekrardan kaçınmak için bir kez daha söylemeyeceğiz. (4.9) bağıntıları (4.49) da kullanılırsa;

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = 1 \\ \eta = \varepsilon r + c \\ r' = -\frac{\varepsilon\sqrt{(1-\varepsilon)r^2 + 2\varepsilon cr + c^2}}{r}, c > 0 \end{array} \right\} \quad (4.52)$$

elde edilir.  $\varepsilon = 1$  ve  $\varepsilon = -1$  durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

**a-**  $\varepsilon = 1$  olsun. Bu durumda; (4.52) eşitliklerinden

$$\left. \begin{array}{l} \eta = r + c \\ r' = -\frac{\sqrt{2cr + c^2}}{r} \end{array} \right\} \quad (4.53)$$

bulunur. Bu denklemleri (4.18) de verilen ve  $\frac{ds}{dt} = r$  şeklinde tanımlanan  $t$  parametresiyle yeniden parametrelendirirsek;

$$\left. \begin{array}{l} \zeta(t) = ct \\ \eta(t) = \frac{c}{2}(t^2 + 1) \\ r(t) = \frac{c}{2}(t^2 - 1) \\ \Phi = t \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

elde edilir. Buna göre (4.47) eşitliğinin bileşenleri

$$\left. \begin{array}{l} x = \zeta \cosh \Phi + \eta \sinh \Phi \\ z = \zeta \sinh \Phi + \eta \cosh \Phi \end{array} \right\} \quad (4.55)$$

bulunur. Sonuç olarak timelike Sturmian spiralinin parametrizasyonu

$$\left. \begin{array}{l} x = ct \cosh t + \frac{c}{2}(t^2 + 1) \sinh t \\ z = ct \sinh t + \frac{c}{2}(t^2 - 1) \cosh t \end{array} \right\} \quad (4.56)$$

şeklinde bulunur.



b-)  $\varepsilon = -1$  kabul edersek. (4.52) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} \eta &= -r + c \\ r' &= \frac{\sqrt{2r^2 - 2cr + c^2}}{r}, c > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Bu denklemleri (4.18) de verilen  $t$  parametresiyle yeniden parametrelendirirsek;

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{c}{\sqrt{2}} \cosh(\sqrt{2}t) \\ \eta(t) &= \frac{c}{2} (1 - \sinh(\sqrt{2}t)) \\ r(t) &= \frac{c}{2} (1 + \sinh(\sqrt{2}t)) \\ \Phi &= t \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

bulunur. Buna göre (4.47) eşitliğinden timelike Sturmian spiralinin bir başka parametrisasyonu

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c}{\sqrt{2}} \cosh(\sqrt{2}t) t \cosh t + \frac{c}{2} (1 - \sinh(\sqrt{2}t)) \sinh t \\ z &= \frac{c}{\sqrt{2}} \cosh(\sqrt{2}t) t \sinh t + \frac{c}{2} (1 - \sinh(\sqrt{2}t)) \cosh t \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

şeklinde elde edilir.

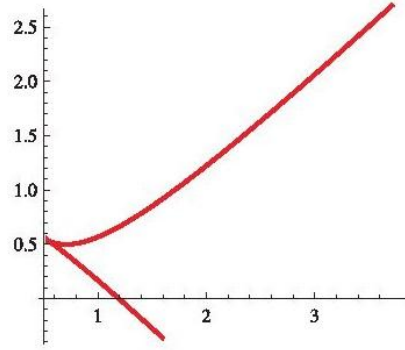
c-)  $\varepsilon = -1$  ve  $c = 0$  kabul edersek. (4.52) eşitliklerinden

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= 2s + \sqrt{2}d \\ \eta(t) &= -\sqrt{2}s + d \\ r(t) &= \sqrt{2}s + d, d \in \mathbb{R} \\ \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\sqrt{2}s + d| \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

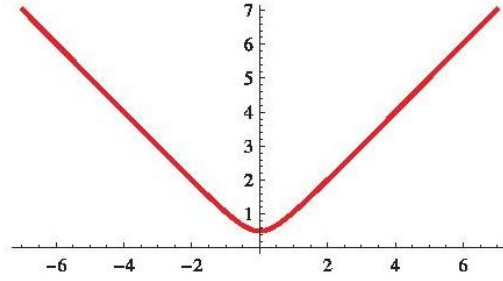
elde ederiz. Böylece timelike Sturmian spiralinin parametrisasyonu yukarıdaki işlemlere benzer olarak yapıldığında,

$$\left. \begin{aligned} x &= (2s + \sqrt{2}d) \cosh \Phi + (-\sqrt{2}s - d) \sinh \Phi \\ z &= (2s + \sqrt{2}d) \sinh \Phi + (-\sqrt{2}s - d) \cosh \Phi \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

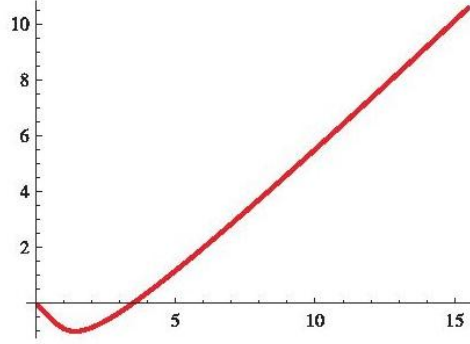
elde edilir.



**Şekil 4. 10.** (4.56) denkleminde  $c = 1$  alınarak elde edilen standart timelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 11.** (4.59) denkleminde  $c = 1$  alınarak elde edilen standart timelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 12.** (4.61) denkleminde  $d = 0$  alınarak elde edilen standart timelike Sturmian spirali

#### 4.2.1. Genelleştirilmiş Timelike Sturmian Spiralleri

Yukarıda  $\sigma$  için verdiğimiz kısıtlamayı gözardı ettiğimizde  $\sigma > 1$  ve  $0 < \sigma < 1$  durumlarını göz önüne alabiliriz. Bu durum Sturmian spirallerinin bir genelleştirilmesi olarak ele alınabilir.

**d-)**  $\sigma > 1$  olsun. Bu durumda (4.51) ve (4.52) denklemlerinden;

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt{(\sigma^2 - \varepsilon)r^2 + 2\varepsilon\sigma cr + c^2} \\ \eta &= \varepsilon\sigma r + c \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

ve

$$r' = -\frac{\varepsilon\sqrt{\sigma_\varepsilon^2 r^2 + 2\varepsilon\sigma cr + c^2}}{r} \quad (4.63)$$

elde edilir. Şimdi  $\varepsilon = 1$  ve  $\varepsilon = -1$  durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

**d-1-)**  $\varepsilon = 1$  olsun. Bu durumda (4.62) ve (4.63) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sigma r + c \\ r' &= -\frac{\sqrt{\sigma^2 + 2\sigma cr + c^2}}{r}, c > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

sonucuna ulaşırız. Diğer durumlarda yaptığımız gibi (4.18) de verilen parametre değişimi yukarıdaki denklemlerde yapılırsa ;

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= -\frac{c}{\sigma_-} \sinh(\sigma_- t) \\ \eta(t) &= \frac{c}{\sigma_-^2} (\sigma \cosh(\sigma_- t) - 1) \\ r(t) &= \frac{c}{\sigma_-^2} (\cosh(\sigma_- t) - \sigma) \\ \Phi &= \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

elde edilir. (4.47) de verilen konum vektörünün bileşenleri yardımıyla

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ -\frac{c}{\sigma_-} \sinh(\sigma_- t) \right] \cos \sigma t + \left[ \frac{c}{\sigma_-^2} (\cosh(\sigma_- t) - 1) \right] \sinh \sigma t \\ z &= \left[ -\frac{c}{\sigma_-} \sinh(\sigma_- t) \right] \sin \sigma t + \left[ \frac{c}{\sigma_-^2} (\cosh(\sigma_- t) - 1) \right] \cosh \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

parametrizasyonunu elde ederiz.

**d-2-)**  $\varepsilon = -1$  olsun. Bu durumda (4.62) ve (4.63) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\sigma_+^2 r^2 - 2\sigma cr + c^2} \\ \eta &= -\sigma r + c \\ c &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

ve

$$r' = \frac{\sqrt{\sigma_+^2 r^2 - 2\sigma cr + c^2}}{r} \quad (4.68)$$

(4.18) de verilen parametre değişimi yukarıdaki denklemlerde yapılırsa ;

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma_+ t) \\ \eta(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} (1 - \sigma \sinh(\sigma_+ t)) \\ r(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} (\sinh(\sigma_+ t) + \sigma) \\ \Phi &= \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

elde edilir. (4.47) de verilen konum vektörü (4.69) ile birlikte ele alınırsa;

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ \frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma_+ t) \right] \cosh \sigma t + \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (1 - \sigma \sinh(\sigma_+ t)) \right] \sinh \sigma t \\ z &= \left[ \frac{c}{\sigma_+} \cosh(\sigma_+ t) \right] \sinh \sigma t + \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (1 - \sigma \sinh(\sigma_+ t)) \right] \cosh \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

bulunur.

e-)  $\sigma > 1$  ve  $c = 0$  olsun. Bu durumda (4.62) ve (4.63) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt{\sigma^2 - \varepsilon r} \\ \eta &= \varepsilon \sigma r \\ r' &= -\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

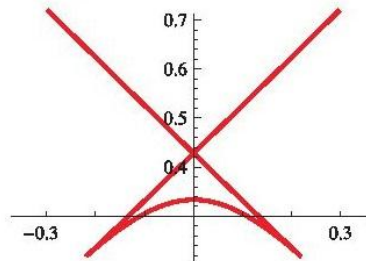
elde ederiz. Ayrıca

$$\left. \begin{aligned} \zeta(s) &= -\varepsilon(\sigma^2 - \varepsilon)s + d\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon} \\ \eta(s) &= -\sigma\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}s + d\varepsilon\sigma \\ r(t) &= -\varepsilon\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon} \\ \Phi(s) &= \frac{-\varepsilon\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}} \ln \left| -\varepsilon\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}s + d \right| \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

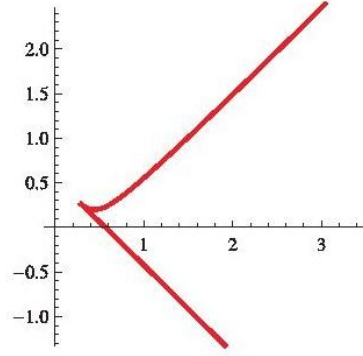
Buna göre eğrinin parametrisasyonu

$$\left. \begin{aligned} x &= (-\varepsilon(\sigma^2 - \varepsilon)s + d\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}) \cos h\Phi + (-\sigma\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}s + d\varepsilon\sigma) \sin h\Phi \\ z &= (-\varepsilon(\sigma^2 - \varepsilon)s + d\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}) \sin h\Phi + (-\sigma\sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}s + d\varepsilon\sigma) \cos h\Phi \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

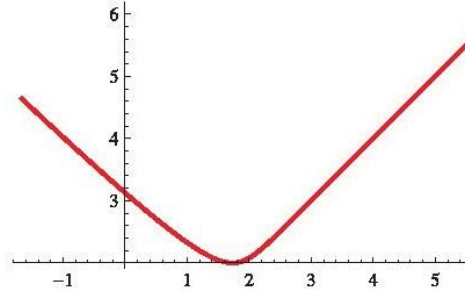
şeklinde bulunur,



**Şekil 4. 13.** (4.66) denkleminde  $c = 1$  ve  $\sigma = 2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 14.** (4.70) denkleminde  $c = 1$  ve  $\sigma = 2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 15.** (4.73) denkleminde  $d = 0$ ,  $\varepsilon = 1$  ve  $\sigma = 2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali

f-)  $0 < \sigma < 1$  olsun. Bu durumda (4.62) ve (4.63) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt{(\sigma^2 - \varepsilon)r^2 + 2\varepsilon\sigma cr + c^2} \\ \eta &= \varepsilon\sigma r + c \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

ve

$$r' = \frac{-\varepsilon\sqrt{(\sigma^2 - \varepsilon)r^2 + 2\varepsilon\sigma cr + c^2}}{r} \quad (4.75)$$

elde edilir.  $\varepsilon = 1$  veya  $\varepsilon = -1$  durumlarını ayrı ayrı incelersek;

**f-1-**  $\varepsilon = 1$  olsun. Bu durumda (4.74) ve (4.75) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sigma r + c \\ r' &= \frac{-\sqrt{(\sigma^2 - 1)r^2 + 2\sigma rc + c^2}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

Yukarıdaki ifadenin pozitif olması için  $c > 0$  ve  $0 < r < -\frac{c}{\sigma+1}$  olacağı açıktır.

(4.18) de verilen parametre değişimi yukarıdaki denklemlerde yapılırsa ;

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{c}{\omega} \cosh(\omega t) \\ \eta(t) &= \frac{c}{\omega^2} (-\sigma \sinh(\omega t) + 1) \\ r(t) &= \frac{c}{\omega^2} (-\sinh(\omega t) + \sigma) \\ \Phi &= \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

bulunur. (4.47) den

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ \frac{c}{\omega} \cosh(\omega t) \right] \cosh \sigma t + \left[ \frac{c}{\omega^2} (-\sigma \sinh(\omega t) + 1) \right] \sinh \sigma t \\ z &= \left[ \frac{c}{\omega} \cosh(\omega t) \right] \sinh \sigma t + \left[ \frac{c}{\omega^2} (-\sigma \sinh(\omega t) + 1) \right] \cosh \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

sonucuna ulaşırız.

**f-2-**  $\varepsilon = -1$  olsun. Bu durumda (4.74) ve (4.75) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} \eta &= -\sigma r + c \\ r' &= \frac{\sqrt{\sigma_+^2 - 2\sigma cr + c^2}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

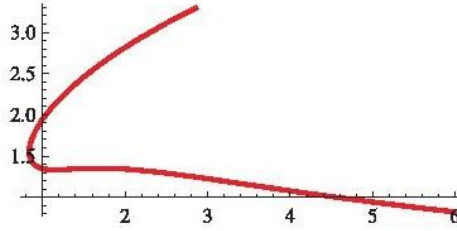
parametre değişimi burada da gerçekleştirilirse

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \frac{c}{\sigma_+} \cos(\sigma + t) \\ \eta(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} (1 - \sigma \sin(\sigma_+ t)) \\ r(t) &= \frac{c}{\sigma_+^2} (\sin(\sigma_+ t) + \sigma) \\ \Phi &= \sigma t, t \in \left[ -\frac{\pi}{2\sigma_+}, \frac{\pi}{2\sigma_+} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

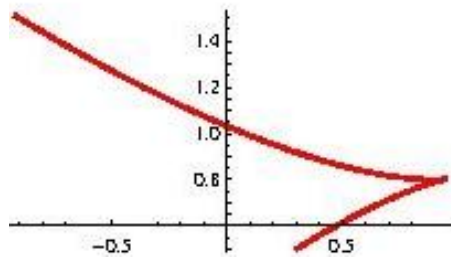
elde ederiz. Böylelikle eğrinin parametrizasyonu

$$\left. \begin{aligned} x &= \left[ \frac{c}{\sigma_+} \cos(\sigma_+ t) \right] \cosh \sigma t + \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (1 - \sigma \sin(\sigma_+ t)) \right] \sinh \sigma t \\ z &= \left[ \frac{c}{\sigma_+} \cos(\sigma_+ t) \right] \sinh \sigma t + \left[ \frac{c}{\sigma_+^2} (1 - \sigma \sin(\sigma_+ t)) \right] \cosh \sigma t \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

olarak bulunur.



**Şekil 4. 16.** (4.78) denkleminde  $c = 1$  ve  $\sigma = 1/2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali





**Şekil 4. 17.** (4.81) denkleminde  $c = 1$  ve  $\sigma = 1/2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali

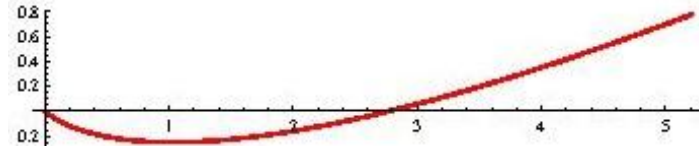
**g-)**  $0 < \sigma < 1$ ,  $c = 0$  ve  $\varepsilon = -1$  olsun. Bu durumda (4.62) ve (4.63) denklemlerinden

$$\left. \begin{aligned} \zeta(s) &= \sigma_+^2 s + d\sigma_+ \\ \eta(s) &= -\sigma\sigma_+ s - \sigma d \\ r(s) &= \sigma_+ s + d \\ \Phi(s) &= \frac{\sigma}{\sigma_+} \ln|\sigma_+ s + d| \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

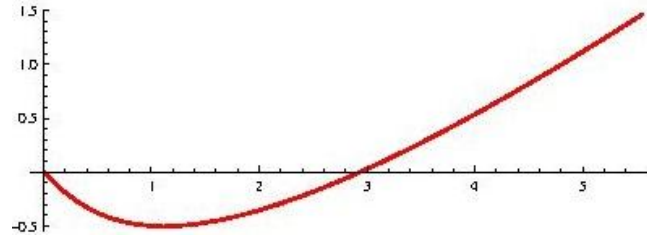
elde ederiz. Böylelikle eğrinin parametrizasyonu

$$\left. \begin{aligned} x &= [\sigma_+^2 s + d\sigma_+] \cosh \Phi + [-\sigma\sigma_+ s - \sigma d] \sinh \Phi \\ z &= [\sigma_+^2 s + d\sigma_+] \sinh \Phi + [-\sigma\sigma_+ s - \sigma d] \cosh \Phi \end{aligned} \right\} \quad (4.82)$$

şeklinde bulunur.



**Şekil 4. 18.** (4.86) denkleminde  $d = 2$  ve  $\sigma = 1/2$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali



**Şekil 4. 19.** (4.86) denkleminde  $d = 0$  ve  $\sigma = 1/4$  alınarak elde edilen genelleştirilmiş timelike Sturmian spirali



## 5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bialowieza (Polonya) Konferansında yaptığı konuşma esnasında Profesör S. Woronowicz (Warsaw Üniversitesi) tarafından sorulan eğriliği  $\sigma/r$  olan eğri hangisidir? ilginç bir soru ile başlayan tartışmalar bu sorunun cevabının spiral eğrileri olabileceği üzerine yoğunlaşmıştır. Yapılan araştırmalarda bu şartı sağlayan eğrilerin Arşimet Cotes, Euler (Cornu), Fermat, Galileo, Nielsens, Poincot, vs adlarını taşıyan bir çok ünlü spiral eğrisinden farklı olduğunu ortaya koymuştur.

Yalnızca Zwikker (1963) tarafından yazılan kitabın 4. bölümde bahsedilen Norwich veya Sturm spirallerinin bu sorunun cevabı olabileceği görülmüştür.

Yapılan bu tez çalışmasında Sturmian spiralleri ve bunların genelleştirilmeleri üzerine Öklid ve Lorentz-Minkowski düzlemlerinde yapılan çalışmalar detaylı bir şekilde ortaya konulmuş olup, Öklid düzleminde bilinen bir çok spiral eğrisinin Lorentz-Minkowski düzleminde yeniden ele alınabileceği görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- [1] Boyadzhiev, K., Spirals and Conchospirals in the flight of insects, Coll. Math. J., 30 (1999), 23-31.
- [2] Cook, T. A., The curves of life, Dover, 1979
- [3] Djondjorov P., Hadzhilazova, M., Mladenov, I. M. and Vassilev, V., A note on the passage from the free to the elastica with a tension, Proc. 10th Int. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization (eds İ. Mladenov, G. Vlasi, A. Yoshioka), Sofia, Avangard Prima, 2009, 175-182.
- [4] Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed., Boca Raton, FL, CRC Press, 1998.
- [5] Hacısalihoğlu, H.H., Diferansiyel Geometri Cilt I ve Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 2000.
- [6] İlarıslan, K., Uçum, A. and Mladenov, I. M., Sturmian Spirals in Lorentz-Minkowski Plane, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 37 (2015), 25-42.
- [7] Kuhnel, W., Differential Geometry: curves-surfaces-manifolds. Braun-schweig, Wiesbaden, 1999.
- [8] Lopez, R., Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space, International Electronic Journal of Geometry, Volume 7 no. 1 (2014), 44-107.
- [9] Matsutani, S., Euler's Elastica and Beyond, J. Geom. Symm. Phy., 15, 2009, 53-88.
- [10] Milman, R. S., Elements of Differential Geometry, California State University, Prentice-Hall Inc., California, 1977.
- [11] Mladenov, I. M., Hadzhilazova, M. Ts., Djondjorov, P. A. and Vassilev, V. M., On the Generalized Sturmian Spirals, Comptes rendus de l'Academie bulgare de Sciences, 64, no.5 (2011), 633-640.

- [12] Montiel, S., Ros. A., Curves and Surfaces. Real Sociedad Matematica Espanola Madrid, Spain, 1998.
- [13] Opera J. Differential Geometry and its Applications, Mathematical Association of America, Washington D. C., 2007.
- [14] O'Neill, B., Elementary Differential Geometry, Elsevier Inc., New York 2006.
- [15] O'Neill. B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 1983.
- [ 16] Sabuncuoğlu, A., Diferansiyel Geometri, Nobel yayın dağıtım, Ankara, 2004.
- [17] Singer D. A., Isometries of the Plane, Am. Math. Monthly, 106, 1999, 835-841.
- [18] Rovenski V. Geometry of Curves and Surfaces with Maple, Boston, Birkhauser, 2000.
- [19] Vvassilev V., Djondjorov P., Mladenov I. M., Serret's Curves, their Generalization and Explicit Parametrizations, In: Proc. 9th Int. Workshop on Complex Structures, Intergrability and Vector Fields, Singapore, World Scientific, 2009, 234-244.
- [20] Yates R. Curves and Their Properties, Ann Arbor, Edwards Brothers, 1959.
- [21] Zwikker C. The Advanced Geometry of Plane Curves and Their Applications, New York, Dover, 1963.