T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI

MERVE NUR ERSÖZ

HAZİRAN 2017

Matematik Anabilim Dalında MERVE NUR ERSÖZ tarafından hazırlanan LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : ____________________
Üye (Danışman) : ____________________
Üye : ____________________

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN FARKLARI

ERSÖZ, Merve Nur
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL
Haziran 2017, 67 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yapılan çalışmalar ve tezin genel amacı hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise bazı temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde pozitif lineer operatörler ile ilgili bazı genel eşitsizliklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde pozitif lineer operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenerek bu operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülü yardımıyla elde edilmiştir. Ayrıca bu operatörler için bir Voronovskaja-tipli sonuç verilmiştir. Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Lineer Pozitif Operatörler, Süreklilik Modülü, K-Fonksiyoneli, Hölder Eşitsizliği, Yaklaşım Hızı, Bernstein Operatörleri, Voronovskaja-tip Formülü

ABSTRACT

ON DIFFERENCES OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

ERSÖZ, Merve Nur
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
June 2017, 67 pages

This thesis consists of five parts. In the first part, it has given information about the overall purpose of the study and thesis. In the second chapter, some fundemental definitions, concepts and theorems are given. In the third chapter, we give some inequalities for the differences of linear positive operators. In the fourth chapter, we investigate approximation properties for the some linear positive operators. Rate of convergence of them are given with modulus of continuity. The fifth chapter is a seperate part of the discussion and results.

Key words: Linear Positive Operators, A Modulus of Continuity, K- Functional, Hölder Inequality, Approximation Rate, Bernstein-type operators, Voronovskaja-type Formula

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; hem bilimsel hem de manevi olarak destek olan; insanî değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum; ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali ARAL' a, çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma, son olarak maddi ve manevi her zaman bana destek olan, bugünlere gelmemde büyük fedakârlıklar gösteren başta annem olmak üzere tüm aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$L(f\,;\,x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\sum$	Toplam Sembolü
$C[a,b]$	$[a,b]$ deki sürekli fonksiyonların uzayı
$\omega(f\,;\,\delta)$	Süreklilik modülü
$\Omega(f\,;\,\delta)$	Ağırlıklı süreklilik modülü
B_n	Bernstein operatörü
$\overline{\mathbb{B}}_n$	Lupaş'ın Beta operatörü
D_n	Durrrmeyer operatörü
U_n	$U_n = B_n \mathrm{o}\, \overline{\mathbb{B}}_n$ şeklinde tanımlı Bernstein tipli operatör
S_n	Stancu operatörü

1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisi temel olarak "Bir fonksiyona, daha iyi özelliklere sahip başka bir fonksiyon ile yaklaşılabilir mi? " sorusunun cevabını arayan çalışmaları kapsar. Bu tür çalışmalar 1885 yılında Alman matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass' ın kendi adını taşıyan ve cebirsel ve trigonometrik polinomlarla, sürekli fonksiyonlara $[a,b]$ gibi kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde yaklaşım sağlanacağını ifade eden teoremi ispatlaması ile başlamıştır.

1912 yılında Rus matematikçi S. N. Bernstein, Weierstrass' ın teoreminin ispatını $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitliği ile verilen ve kendi adı ile anılan polinomlarını tanımlayarak vermiştir. Bu polinomlar sayısal analiz, fonksiyonlar teorisi, geometri, fizik, jeodezi, mühendislik, tıp (görüntüleme sistemleri ve protez) bilimleri gibi birçok uygulama alanı olan ve günümüzde de halen aktif olarak çalışılan polinomlardır.

1932 yılında Voronovskaja tarafından Bernstein polinomları için, $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve belli bir x noktasında 2. türeve sahip ise;

$$\lim_{n\to\infty} n[B_n(f;x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

eşitliğinin sağlandığı (asimptotik yaklaşım) gösterilmiştir [1].

1935 yılında T. Popoviciu tarafından Bernstein polinomları için; $\omega(f;\delta)$ ile f fonksiyonunun süreklilik modülü gösterilmek üzere;

$$|f(x) - B_n(f;x)| \leq c\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

olduğu gösterilmiştir.

Biz bu tezde klasik süreklilik modülünün bir modifikasyonunu kullanarak iki lineer pozitif operatörün farkı için Voronovskaja teoremleri ve bu yaklaşımın yakınsaklık hızını veren teoremler vereceğiz. Elde edilen sonuçların, yaklaşımlar teorisinde çok iyi bilinen bazı operatörler için uygulamalarını elde edeceğiz.

Lineer pozitif operatörlerin farkları için verilen teoremler bize yaklaşımlar teorisinde elde edilen başka sonuçların da bulunmasına olanak sağlar. Gerçekten de A ve B iki lineer pozitif operatör olsun. Kabul edelim ki

$$|A(f;x) - B(f;x)| \leq c\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

sonucu elde edilmiş olsun. Burada A yerine birim operatör ve B yerine Bernstein operatörü aldığımızda çok iyi bilinen yukarıdaki eşitsizlik elde edilmiş olur. Ayrıca kabul edelim ki iki operatörün farkı için bazı yakınsaklık sonucunu biliyoruz.

$$|A(f;x) - f(x)| \leq |A(f;x) - B(f;x)| + |B(f;x) - f(x)|$$

eşitsizliğini kullanarak, B operatörünün yaklaşım özellikleri bilindiğinde A operatörünün de yaklaşım özellikleri hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Bu nedenlerden dolayı iki operatörün farkı için yaklaşım sonuçlarının elde edilmesi yaklaşımlar teorisi açısından önemli sonuçlar doğurur.

1.1. Kaynak özetleri

Bu tez çalışmamızda temel kavramlar için Francesco Altomare and Michele Campiti nin “Korovkin Type Approximation Theory and Its Application”, P. J. Davis’in “Interpolation and Approximation”adlı kitapları referanslarımız olmuştur. Ayrıca [2] ve [3] kaynakları bizim çalışmamızın temelini oluşturmuştur.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında pozitif lineer operatörlerin farkları üzerinde araştırmalar yapıp, bu tür farklar için süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızına yönelik tahminler verilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca Voronovskaja teoremi için yaklaşım hızı veren teoremler ispatlanacaktır. Elde edilen sonuçlardan, çok iyi bilinen lineer pozitif operatörler için uygulamalara yer verilecektir.

2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde pozitif lineer operatörlerin tanımı yapılacak, sağladığı temel özelliklere değinilecektir ve bu çalışma sırasında kullanacağımız bazı tanımlar verilecektir. Ayrıca burada vereceğimiz tanımlar genel halde geçerli tanımlar olduğu için pek çoğunda kaynak belirtilmemiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Tanım 2.1.1. X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere; $L: X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör adı verilir.

Tanım 2.1.2. X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere;

$$L: X \rightarrow Y$$

şeklindeki L operatörü her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + g\beta) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

eşitliği sağlanıyorsa L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.1.3. $X^+ = \{f \in X: f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y: g \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını tanımlayalım. X ve Y reel değerli fonksiyon uzayı olmak üzere, eğer X ten Y ye tanımlanmış L operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki g fonksiyonuna dönüştürüyorsa L operatörüne pozitif operatör denir.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatöre pozitif lineer operatör denir.

Lemma 2.1.1. $L : X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. $f, g \in X$ olmak üzere $f \leq g$ ise $L(f\,;\,x) \leq L(g;\,x)$ dir. Buna L lineer operatörünün monotonluk özelliği denir.

Lemma 2.1.2. $L : X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f\,;\,x)| \leq L(\,|f|;\,x)$$

dir.

Tanım 2.1.4. Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm gerçel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir.

Tanım 2.1.5. $f \in C[a, b]$ olmak üzere $C[a, b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f(x)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.1. (Hölder Eşitsizliği):
$p > 0$ ve $q > 0$ reel sayıları

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şartını sağlasın. $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ ise $f.g \in L_1$ dir ve

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p . \|g\|_q \tag{2.1}$$

dur.

İspat. $|g| \leq |f|^{p-1}$ ise $|f.g| \leq |f|^p$ olur. Bu $f.g \in L$ olduğunu gösterir. Aksi halde yani $|g| > |f|^{p-1}$ ise $|g|^{\frac{1}{p-1}+1} > |f.g| \Rightarrow |g|^q > |f.g| \Rightarrow |f.g| \in L|$ olur. $L = L_1$ olduğundan $f.g \in L_1$ dir.

Young eşitsizliğinden $\varphi(u) = u^{p-1}$ alınırsa $\psi(u) = u^{\frac{1}{p-1}}$, $\emptyset(a) = \frac{a^p}{p}$, $\psi(b) = \frac{b^q}{q}$ bulunur. Buna göre;

$$\mathrm{a.b} \leq \emptyset(a).\psi(\mathrm{b})$$

$$\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

yazılabilir. $\|f\|_p = 0$ veya $\|g\|_q = 0$ ise (2.1) in her iki tarafı sıfır olacağından eşitsizlik sağlanır. $\|f\|_p \neq 0$ ve $\|g\|_p \neq 0$ olsun. $a = |f|/\|f\|_p$ ve $b = |g|/\|g\|_q$ alınırsa;

$$\frac{|f||g|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}$$

bulunur. İki tarafın integrali alınırsa

$$\frac{1}{\|f\|_p.\|g\|_q}\int |f.g| \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\int |f|^p \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\int |g|^q \mathrm{d}\mu$$

olur. Buradan da

$$\frac{\|f.g\|_1}{\|f\|_p.\|g\|_q} \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q}\|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

elde edilir. Bu da

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p.\|g\|_q$$

olduğunu gösterir.

Özel olarak Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınırsa Cauchy-Schwarz Eşitsizliği elde edilir.

Tanım 2.1.6. $n \geq 1$ olmak üzere p_n, n - inci dereceden bir polinom ve f ile g de $x = 0$ noktasında n - inci dereceden türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$$\lim_{n \to \infty} g(x) = 0$$

olmak üzere

$$f(x) = p_n(x) + x^n\, g(x)$$

yazılabiliyorsa p_n polinomuna $x = 0$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor polinomu denir [4].

Tanım 2.1.7. f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{n!}(x-a)^k$$

serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi denir.

Tanım 2.1.8. (Taylor Formülü): Bir f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı ve $(n+1)$ kez sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda Taylor formülü $x_0 \in [a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

şeklinde tanımlıdır [4].

Teorem 2.1.2. $n \in \mathrm{N}_0$ için $f(x)$, $x = x_0$ noktasında n-kez türevlenebilir olsun. O halde

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!} [f^n(x_0) + \mathcal{E}(x)]$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$$

dır.

2.2. Süreklilik Modülü

Tanım 2.2.1. $f \in C[a, b]$ olmak üzere ; her $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x,t \in [a,b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

olarak tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülünün bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir. Bu özelliklerin ifade ve ispatında [5] ve [6] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Teorem 2.2.1. Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\boldsymbol{i})\ \omega(f;\delta) \geq 0$

$\boldsymbol{ii})\ \delta_{\mathbf{1}} \leq \delta_2\ ise\ \omega(f;\delta_{\mathbf{1}}) \leq \omega(f;\delta_2)$

$\boldsymbol{iii})\ m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta) \leq m\,\omega(f;\delta)$

$\boldsymbol{iv})\ \lambda \in \mathbb{R}^{+}$ için $\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\,\omega(f;\delta)$

$\boldsymbol{v})\ \lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$

$\boldsymbol{vi})\ |f(t) - f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$

$\boldsymbol{vii})\ |f(t) - f(x)| \leq (\frac{|t-x|}{\delta} + 1)\omega(f,\delta)$

İspat.

$\boldsymbol{i})\ \omega(f;\delta) \geq 0$ olduğu açıktır.

$\boldsymbol{ii})\delta_{\mathbf{1}} \leq \delta_2\ \ ise\ |t-x| \leq \delta_{\mathbf{1}}, |t-x| \leq\ \delta_2$ kümesi tarafından kapsanır. Dolayısıyla supremum özelliğinden $\omega(f;\delta_{\mathbf{1}}) \leq \omega(f;\delta_2)$ bulunur.

$\boldsymbol{iii})\ \omega(f,m\delta) = \sup\limits_{\substack{|t-x|\leq m\delta \\ x\in[a,b]}} |f(t) - f(x)|$

$$\omega(f,m\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} |f(x+mh) - f(x)|$$

$$= \sup_{|h|\leq\delta} \left| \sum_{k=0}^{m-1} [f(x+(k+1)h) - f(x+kh)] \right|$$

$$\leq \sup_{|h|\leq\delta} \sum_{k=0}^{m-1} |f(x+(k+1)h) - f(x+kh)|$$

$$\leq \omega(f;\delta) + \omega(f;\delta) + \cdots + \omega(f;\delta)$$

$$= m\omega(f,\delta)$$

iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\|\lambda\| \leq \lambda \leq \|\lambda\| + 1 \leq \lambda + 1$ olduğundan

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq \omega(f;(\|\lambda\|+1)\delta)$$

$$\leq (\|\lambda\|+1)\omega(f;\delta)$$

$$\leq (\lambda+1)\omega(f;\delta)$$

elde edilir.

v) $f,[a,b]$ de sürekli olduğundan aynı zamanda düzgün süreklidir. Yani her $\mathcal{E} > 0$ için $\exists n > 0$ vardır öyle ki $|t-x| < n$ iken $|f(t) - f(x)| < \mathcal{E}$ olur. Eğer $\delta < n$ seçilirse süreklilik modülünün tanımına göre;

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|t-x|<\delta} |f(t) - f(x)| < \mathcal{E}$$

olup buradan

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f;\delta) = 0$$

bulunur.

vi) $\omega(f;\ |t-x|) = \sup_{\substack{|t-x|\leq\delta \\ x\in[a,b]}} |f(t) - f(x)| \geq |f(t) - f(x)|$

elde edilir

$\boldsymbol{vii})$ $iv)$ özelliğini kullanırsak

$$|f(t)-f(x)| \leq \omega(f;\frac{|t-x|}{\delta}.\delta) \leq (\frac{|t-x|}{\delta}+1)\omega(f,\delta)$$

elde edilir.

2.2.1. Süreklilik Modülü ve K- Fonksiyoneli Arasındaki İlişki

Tanım 2.2.1.1. $f \in [a,b]$, $\mathcal{E} \geq 0$ olsun.

$$K(\mathcal{E},f;C[a,b],C^1[a,b]) \coloneqq inf\{\|f-g\| + \mathcal{E}\|g'\| : g \in C^1[a,b]\}$$

ifadesine K-fonksiyoneli denir.

K-fonksiyoneli ve süreklilik modülü arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki eşitliği verelim. Kabaca ispatı için [7] ‘ ye bakınız. Bu eşitlikle ilgili tüm detaylar [8] ‘ e bakınız.

Lemma 2.2.1.1. $a < b$ olacak şekilde $[a,b]$ kapalı aralığı üzerindeki her sürekli f fonksiyonu

$$K\left({}^{\mathcal{E}}/_{2}, f; C[a,b], C^1[a,b]\right) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}(f;\mathcal{E}) \text{ , } 0 \leq \mathcal{E}$$

olup buradaki $\tilde{\omega}(f,.)$ ifadesi ;

$$\tilde{\omega}(f;\mathcal{E}) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{0\leq x\leq \mathcal{E}\leq y\leq b-a \\ x\neq y}} \dfrac{(\mathcal{E}-x)\omega(f,y)+(y-\mathcal{E})\omega(f,x)}{y-x} & ise \;\; 0 \leq \mathcal{E} \leq b-a \text{ ,} \\ \tilde{\omega}(f,b-a) = \omega(f,b-a) & ise \quad \mathcal{E} > b-a \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Verilen tanımdan, $\mathcal{E} > 0$ için

$$\omega(f;.) \leq \tilde{\omega}(f;.)$$

ve Teorem 2.2.1., *iv)* den

$$\tilde{\omega}(f, \xi\mathcal{E}) \leq (1 + \xi)\omega(f, \mathcal{E})$$

eşitsizliğinin her $\mathcal{E} > 0$ ve $\xi = 1,2, \ldots$ için sağlandığı görülebilir. $\tilde{\omega}(f;.)$ ile ilgili diğer özellikler için [9] bakınız.

Teorem 2.2.1.1. $f \in C^n[a,b]$ ve $x, x_0 \in [a,b]$ olsun. Her $n \in N_0$

$$|R_n(f; x_0, x)| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} \tilde{\omega}\left(f^{(n)}; \frac{|x - x_0|}{n + 1}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

İspat. Ortalama değer teoreminden

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\mathcal{E}_x)$$

olduğunu biliyoruz.

$f(x) = f(x_0) + f'(\mathcal{E}_x)(x - x_0)$ eşitsizliğinin ard arda kullanılması ile

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(\mathcal{E}_x)$$

.

.

.

$$= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\mathcal{E}_x)$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n}}{n!} f^{(n)}(\mathcal{E}_x)$$

elde edilir.

$$R_n(f; x_0, x) := f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

gösterimini kullanırsak , $n \geq 1$ için

$$R_n(f; x_0, x) = R_{n-1}(f; x_0, x) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

$$= \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left(f^{(n)}(\mathcal{E}_x) - f^{(n)}(x_0)\right)$$

elde ederiz. Teorem 2.2.1, vi) özelliği kullanılırsa

$$|R_n(f; x_0, x)| \leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} \left|f^{(n)}(\mathcal{E}_x) - f^{(n)}(x_0)\right|$$

$$\leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} \, \omega\left(f^{(n)}; |\mathcal{E}_x - x_0|; \langle x, x_0 \rangle\right)$$

$$\leq \frac{|x - x_0|^n}{n!} \, \omega\left(f^{(n)}; |x - x_0|; \langle x, x_0 \rangle\right)$$

yazılabilir. Burada

$$\mathcal{E}_x \in \langle x, x_0 \rangle = \begin{cases} [x, x_0] \, ; \; x \leq x_0 \\ [x_0, x]; \; x_0 < x \end{cases}$$

olup $f^{(n)}, [a, b]$ kapalı aralığında sürekli iken $x \to x_0$ için

$$\omega\left(f^{(n)};|x-x_0|;[a,b]\right) = o(1)$$

olur. Ayrıca

$$\omega(f;.) \leq \tilde{\omega}(f;.)$$

ve

$$\tilde{\omega}(f;.) \leq (1+\mathcal{E})\,\omega(f;.)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğunu biliyoruz. Süreklilik modülünün tanımından

$$\omega(f^{(n)},\delta) = \sup\left\{\left|f^{(n)}(x)-f^{(n)}(y)\right| : |x-y|<\delta\right\}$$

$$\leq \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(n)}(x)\right| + \sup_{y\in[a,b]}\left|f^{(n)}(y)\right|$$

$$\leq \left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b]} + \left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b]}$$

$$= 2\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b]}$$

olduğundan

$$|R_n(f;x_0,x)| \leq \frac{|x-x_0|^n}{n!}\,\omega\left(f^{(n)};|x-x_0|;[a,b]\right)$$

$$\leq 2\,\frac{|x-x_0|^n}{n!}\left\|f^{(n)}\right\|_{[a,b]}$$

olduğu açıktır. Süreklilik modülü, norm ile sınırlı yani anlamlıdır.
$g \in C^{n+1}[a,b]$ için Lagrange kalan formu kullanılırsa

$$|R_n(g;x_0,x)| = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\left|g^{(n+1)}(\theta_x)\right| \ ,\theta_x \in \langle x, x_0\rangle$$

$$\leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\left\|g^{(n+1)}\right\|_{[a,b]}$$

yazılabilir. Tanım 2.2.1.1. kullanılırsa

$$|R_n(f;x_0,x)| \leq 2\frac{|x-x_0|^{n}}{n!}K\left(\frac{|x-x_0|}{2(n+1)}, f^{(n)}; C[a,b], C'[a,b]\right)$$

$$= \frac{|x-x_0|^{n}}{n!}\tilde{\omega}\left(f^{(n)}; \frac{|x-x_0|}{n+1}\right)$$

olarak ispat tamamlanır.

Yukarıdaki ifade için eşitlik durumuna bir örnek verelim.

Örnek 2.2.1.1. $x_0 = 0$ ve $e_{n+1}\colon [-1,1] \ni x \to x^{n+1}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon için

$$R_n(e_{n+1};\ 0,x) = x^{n+1}$$

ve

$$\frac{|x-0|^{n}}{n!}\tilde{\omega}\left({e_{n+1}}^{(n)}; \frac{|x-0|}{n+1}\right) = \frac{|x|^{n}}{n!}\tilde{\omega}\left((n+1)!\, e_1; \frac{|x|}{n+1}\right)$$

$$= \frac{|x|^{n}}{n!}(n+1)!\ \frac{|x|}{n+1}$$

$$= |x|^{n+1}$$

olur ve böylece

$$|R_n(e_{n+1};\ 0,x)| = \frac{|x-0|^n}{n!}\tilde{\omega}_1\left(e_{n+1}{}^{(n)};\frac{|x-0|}{n+1}\right)$$

elde edilir.

Örnek 2.2.1.2. Son bölümde gösterilen K-fonksiyoneli kullanılarak $f = e_{n+1}$ için aşağıdaki gibi bir yaklaşım bulunabilir. Gerçekten de

$$\omega\big(e_{n+1}{}^{(n)}; |x-0|; [-1,1]\big) = \omega\big((n+1)!\,e_1; |x|; [-1,1]\big) = (n+1)!\,|x|$$

ve

$$|R_n(e_{n+1};\ 0,x)| \leq (n+1)|x|^{n+1}$$

ve bu ifade $x \neq 0$ için

$$|x|^{n+1} = \frac{|x|^n}{n!}\tilde{\omega}\left(e_{n+1}{}^{(n)};\frac{|x|}{n+1}\right)$$

ifadesinden daha büyüktür.

Örnek 2.2.1.3. Burada örnek vereceğimiz f için

$$\omega\big(f^{(n)}; |x-x_0|\big) \leq \tilde{\omega}\left(f^{(n)};\frac{|x-x_0|}{n+1}\right)$$

olduğunu göstereceğiz. Böylece K-fonksiyoneli yoluyla iyi bir sonuca varabileceğimiz bir yaklaşım gösterebiliriz.

[0,1] kapalı aralığı üzerinde yeni bir süreklilik modülü olan Ω fonksiyonunu oluşturalım. $n \geq 0$ ve $0 < \mathcal{E} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{\mathcal{E}}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ olsun.

$$\Omega(t) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2\mathcal{E}} t, & 0 \le t \le \dfrac{\mathcal{E}}{n+1} \\ \dfrac{1}{2}, & \dfrac{\mathcal{E}}{n+1} \le t \le 1 - \dfrac{\mathcal{E}}{n+1} \\ \dfrac{n+1}{2\mathcal{E}}(t-1)+1, & 1 - \dfrac{\mathcal{E}}{n+1} \le t \le 1 \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyonu süreklilik modülü olduğunu göstermek için Ω 'nın sürekli, azalmayan ve Teorem 2.2.1, v) den $\Omega(0) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\omega(\Omega(.);\delta) = \Omega(\delta), \;\; 0 \le \delta \le 1$$

eşitliği bu fonksiyonun kendisinin süreklilik modülü olduğunu gösterir [10].
$\frac{\mathcal{E}}{n+1} \le t \le 1$ için

$$\tilde{\Omega}(t) = \frac{1}{2(n+1-\mathcal{E})}\big((n+1)(t+1) - 2\mathcal{E}\big)$$

dır. Buradan;

$$\Omega(\mathcal{E}) = \frac{1}{2} = \tilde{\Omega}\left(\frac{\mathcal{E}}{n+1}\right)$$

ifadesi t yerine $\frac{\mathcal{E}}{n+1}$ yazılarak görülebilir. Şimdi $x, x_0 \in [0,1]$ için $|x - x_0| = \mathcal{E}$ olduğunu varsayalım. Ayrıca $f^n(t) = \Omega(\mathrm{t})$ olacak şekilde $f \in C^n[0,1]$ olsun.

$$\omega\big(f^{(n)}; |x - x_0|\big) = \omega(\Omega(.);\, \mathcal{E}) = \Omega(\mathcal{E}) = \tilde{\Omega}\left(\frac{\mathcal{E}}{n+1}\right) = \tilde{\omega}\left(f^{(n)}; \frac{|x - x_0|}{n+1}\right)$$

iddiamızı doğrulamaktadır.

3. OPERATÖRLERİN FARKLARI İÇİN GENEL EŞİTSİZLİKLER

3.1. GİRİŞ

Teorem 3.1.1. $A,\ B : \mathrm{C}[0,1] \to \mathrm{C}[0,1]$ lineer pozitif operatörleri $i = 0,1,\dots,n$ ve $x \in [0,1]$ için

$$(A-B)\big((e_1-x)^i;x\big)=0$$

eşitliğini sağlasın.

$f \in C^n[0,1]$ için

$$|(A-B)(f;x)| \le \frac{1}{n!}(A+B)(|e_1-x|^n;x)\,\tilde{\omega}\left(f^{(n)};\frac{1}{n+1}\frac{(A+B)(|e_1-x|^{n+1};x)}{(A+B)(|e_1-x|^n;x)}\right)$$

elde edilir.

İspat. İlk olarak Taylor açılımı ile Peano kalan formunu kullanarak;

$$|(A-B)(f;x)| = |(A-B)(f(t);x)| = \left|(A-B)\left(\frac{(t-x)^n}{n!}\mu_x(t);x\right)\right|$$

olduğunu gösterelim. Burada tanımlanan

$$\frac{(t-x)^n}{n!}\mu_x(t) \coloneqq f(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(t-x)^k \tag{3.1}$$

dır. (3.1) den dolayı

$$(A-B)\left(\frac{(t-x)^n}{n!}\mu_x(t);x\right)$$
$$=(A-B)(f(t);x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(A-B)((t-x)^k;x)$$

olup

$$|(A-B)(f;x)|\leq(A+B)\left(\frac{(t-x)^n}{n!}\tilde{\omega}\left(f^{(n)};\frac{|t-x|^n}{n+1}\right);x\right)$$

yazılabilir.

Lemma 2.2.1.1. den,

$$|(A-B)(f;x)|\leq(A+B)\left(2\frac{(t-x)^n}{n!}K\left(f^{(n)};\frac{|t-x|^n}{2(n+1)}\right);x\right)$$

Tanım 2.2.1.1. den ise;

$$\leq(A+B)\left(\frac{2|t-x|^n}{n!}\left\{\left\|(f-g)^{(n)}\right\|+\frac{|t-x|}{2(n+1)}\left\|g^{(n+1)}\right\|\right\};x\right),g\in C^{n+1}[0,1]$$

$$=(A+B)\left(\frac{2|t-x|^n}{n!};x\right)\left\|(f-g)^{(n)}\right\|+(A+B)\left(\frac{|t-x|^{n+1}}{(n+1)!};x\right)\left\|g^{(n+1)}\right\|$$

$$=(A+B)\left(\frac{2|t-x|^n}{n!};x\right)\left\{\left\|(f-g)^{(n)}\right\|\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2(n+1)}\frac{(A+B)(|t-x|^{n+1};x)}{(A+B)(|t-x|^n;x)}\left\|g^{(n+1)}\right\|\right\}$$

elde edilir.

$g\in C^{n+1}[0,1]$ üzerinden infimum alarak ve Brudnyi' nin lemmasını kullanarak;

$$|(A-B)(f;x)|$$

$$\leq (A+B)\left(\frac{2|t-x|^n}{n!};x\right)\frac{1}{2}\,\tilde{\omega}\left(f^{(n)};\frac{1}{n+1}\frac{(A+B)(|t-x|^{n+1};x)}{(A+B)(|t-x|^n;x)}\right)$$

$$=\frac{1}{n!}(A+B)(|t-x|^n;x)\tilde{\omega}\left(f^{(n)};\frac{1}{n+1}\frac{(A+B)(|t-x|^{n+1};x)}{(A+B)(|t-x|^n;x)}\right)$$

bulunur.

Sonuç 3.1.1. $L \coloneqq A+B$ için

$$\frac{L(|t-x|^{n+1};x)}{L(|t-x|^n;x)} \leq \frac{\sqrt{L((t-x)^{2n};x}.\sqrt{L((t-x)^2;x}}{L((t-x)^n;x)}$$

yazılabilir.

İspat. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$L(|t-x|^{n+1};x) = L(|t-x|^n|t-x|;x)$$

$$\leq \sqrt{L(|t-x|^{2n};x}\sqrt{L(|t-x|^2;x}$$

$$= \sqrt{L((t-x)^{2n};x)}\sqrt{L((t-x)^2;x)}$$

yazılır.

n tek olsun. Mutlak moment $L(|t-x|^n;x)$ yazılabilir. A ve B operatörleri için

$$A(e_0,x) = B(e_0,x)\,, x \in [0,1]$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul etmiştik.

$A(e_0, x) = B(e_0, x) = 1\,,\ x \in [0,1]$ olduğunu varsayalım. Yani ;

$$L \coloneqq \frac{1}{2}(A + B)$$

sabit fonksiyonları üretir. Dolayısıyla Hölder eşitsizliğinde lineer pozitif operatörler için $1 \leq s < r$olmak üzere;

$$L(|e_1 - x|)^s; x)^{\frac{1}{s}} \leq L(|e_1 - x|)^r; x)^{\frac{1}{r}}$$

ve

$$(A + B)(|e_1 - x|^n; x) = 2L(|e_1 - x|^n; x) \geq 2\left\{L((e_1 - x)^{n-1}; x)^{\frac{n}{n-1}}\right\}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.2. Teorem 3.1.1.'deki varsayımlar altında n tek ise;

$$|(A - B)(f; x)|$$
$$\leq \frac{1}{n!}(A + B)(|e_1 - x|^n; x)\, \tilde{\omega}\left(f^{(n)}; \frac{1}{2(n+1)} \frac{(A + B)((e_1 - x)^{n+1}; x)}{\left\{\frac{1}{2}(A + B)((e_1 - x)^{n-1}; x)\right\}^{\frac{n}{n-1}}}\right)$$

$$= \frac{1}{n!}(A + B)(|e_1 - x|^n; x)\, \tilde{\omega}\left(f^{(n)}; \frac{2^{\frac{1}{n-1}}}{n+1} \frac{(A + B)((e_1 - x)^{n+1}; x)}{(A + B)((e_1 - x)^{n-1}; x)^{\frac{n}{n-1}}}\right)$$

$\tilde{\omega}(f^{(n)}; .)$ önündeki mutlak momentler hesaplanırsa, Hölder eşitsizliği kullanılarak bir üst sınır elde edilebilir.

Sonuç 3.1.3. Teorem 3.1.1.'deki şartlar altında $g \in C^{n+1}[0,1]$, $x \in [0,1]$ olmak üzere;

$$|(A-B)(g;x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}(A+B)(|t-x|^{n+1};x)\left\|g^{(n+1)}\right\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1.2. Teorem 3.1.1.'de verilen $A\ ve\ B$ için; $Ae_0 = Be_0 = e_0$ ise her $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ için

$$|(A-B)(f;x)| \leq c_1 \omega_{n+1}\left(f; \sqrt[n+1]{1/2(A+B)(|e_1-x|^{n+1};x)}\right)$$

olup burada c_1; $f, x\ ve\ A\ ile\ B$ 'den mutlak bağımsız olarak sabittir.

3.2. Lineer Pozitif Operatörler İçin Hölder Eşitsizliği

$L: C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ lineer pozitif operatörleri ve $n \geq 0$ için

$$L((e_1-x)^n;x) \coloneqq L((e_1-x)^n)(x), x \in [a,b]$$

ve $n \geq 1$ için $n.$ mertebeden mutlak momenti

$$L(|e_1-x|^n;x) = L(|e_1-x|^n)(x)\ , x \in [a,b]$$

olup burada $i \in \{0,1,2,\dots\}$ için $e_i(x) \coloneqq x^i$ şeklinde tanımlayalım.

Çoğu durumda pozitif Hermitian formları için tahmin edilirken Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılır ise $p = q = 2$ durumunda

$$L(|e_1-x|;x) \leq \sqrt{L({e_0}^2;x)}\sqrt{L((e_1-x)^2;x)}$$

eşitsizliği elde edilir [11].

Teorem 3.2.1. $L: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ lineer pozitif operatör ve $L(e_0) = e_0$ olmak üzere $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ için

$$L(|f.g|; x) \leq L(|f|^p; x)^{\frac{1}{p}} L(|g|^q; x)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 3.2.1. L, p, q, f ve x Teorem 3.2.1. ‘deki gibi verilsin ve $0 \leq n = n_1 + n_2$; $n_1, n_2 \geq 0$ alalım.

$$L(|e_1 - x|^n; x) \leq L(|e_1 - x|^{n_1 p}; x)^{\frac{1}{p}} L(|e_1 - x|^{n_2 q}; x)^{\frac{1}{q}}$$

$n = 1$, $n = n_1 + n_2 = 0 + 1$, $p = q = 2$ için Teorem 3.2.1 elde edilir.

Önerme 3.2.2. L: C[0,1]→ $C[0,1]$ lineer pozitif operatörü için

$$L(e_0) = e_0 \ ve \ 1 \leq s < r$$

olmak üzere;

$$L(|e_1 - x|^s; x)^{\frac{1}{s}} \leq L(|e_1 - x|^r; x)^{\frac{1}{r}} \ ; x \in [0,1]$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $1 \leq s < r$, $p := \frac{r}{s} > 1$ olsun. Eğer A yukarıdaki gibi verilirse;

$$A(|f|^s) \leq A(|f|^{ps})^{\frac{1}{p}} = A(|f|^r)^{\frac{s}{r}}$$

olur, böylece;

$$A(|f|^s)^{\frac{1}{s}} \leq A(|f|^r)^{\frac{1}{r}} ; f \in C[0,1] , 1 \leq s < r$$

elde edilir. Özellikle $f(t) := |t - x|; t \in [0,1]$, x sabiti için

$$L(|e_1 - x|^s; x)^{\frac{1}{s}} \leq L(|e_1 - x|^r; x)^{\frac{1}{r}} ; \ 1 \leq s < r$$

elde edilir.

Örnek 3.2.1.

i) L: C[0,1]→ $C[0,1]$ lineer pozitif operatörü için $L(e_0) = e_0$ iken

$$L(|e_1 - x|; x) \leq L((e_1 - x)^2; x)^{\frac{1}{2}} \leq L(|e_1 - x|^3; x)^{\frac{1}{3}} \leq L((e_1 - x)^4; x)^{\frac{1}{4}} \leq \cdots$$

eşitsizliği sağlanır.

ii)

$$L(|e_1 - x|^3; x)^{\frac{1}{3}} \leq L((e_1 - x)^2; x)^{\frac{1}{6}} L((e_1 - x)^4; x)^{\frac{1}{6}}$$

eşitsizliği doğrudur.

iii)

$$B_n((e_1 - x)^4; x) = \frac{1}{n^4}[3n^2x^2(1 - x)^2 + n(x(1 - x) - 6x^2(1 - x)^2)]$$

$$= \frac{x(1 - x)}{n^2}\left[3x(1 - x) + \frac{1 - 6x(1 - x)}{n}\right]$$

ve

$$B_n((e_1 - x)^2; x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

olup $(\boldsymbol{i})$ den;

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) \leq B_n((e_1 - x)^4; x)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{(x(1-x))^{\frac{3}{4}}}{n^{\frac{3}{2}}} \left(3x(1-x) + \frac{1 - 6x(1-x)}{n}\right)^{\frac{3}{4}} =: A$$

denirse $(\boldsymbol{ii})$ den

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) \leq B_n((e_1 - x)^2; x)^{\frac{1}{2}} B_n((e_1 - x)^4; x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x(1-x)}{n^{\frac{3}{2}}} \left(3x(1-x) + \frac{1 - 6x(1-x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}} =: B$$

olup buradan

$$\frac{B}{A} = (x(1-x))^{\frac{1}{4}} \left(3x(1-x) + \frac{1 - 6x(1-x)}{n}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \left(\frac{x(1-x)}{3x(1-x) + \frac{1-6x(1-x)}{n}}\right)^{\frac{1}{4}} \leq 1 \; ; \forall x \in [0,1]$$

bulunur. Böylece Bernstein polinomu için $(\boldsymbol{ii})$ den daha iyi bir yaklaşım elde edilir.

4. POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

4.1.Voronovsaja Teoreminin Bernstein Tipi Operatörlere Uygulaması

Bu kısımda, verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşım hızı hakkında süreklilik modülünün yardımıyla genel teoremlerin yanında, Bernstein polinomlarının verilen fonksiyona yaklaşım hızına da yer verilecektir.

Bu bölümde Voronovskaja teoremi de ispatı ile birlikte verilecektir. Voronovskaja ' nın sonucu ilk olarak [12]' te kanıtlanmış ve DeVore ile Lorentz ' in kitabında yer verilmiştir [13].

Teorem 4.1.1. (Bernstein): Bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu verildiğinde $\{B_n(f\,;\,.)\}$ Bernstein polinomlar dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır.

E. Voronovskaja 1932 yılında, S. N. Bernstein tarafından tanımlanan Bernstein polinomları için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 4.1.2. (Voronovskaja): f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve $x \in [0,1]$ noktasında ikinci mertebeden sürekli ise;

$$\lim_{n\to\infty} n[\,B_n(f;x) - f(x)] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. f fonksiyonu sabit x noktası için Tanım 2.1.8. ' den Taylor formülü her $t \in (0,1)$ için

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}[f''(x)(t-x)^2 + g(t;x)(t-x)^2]$$

şeklindedir. Burada $g(.,x)$, x noktasında sürekli ve

$$\lim_{t \to x} g(t;x) = 0$$

dır. Eşitliğinin her iki tarafına Bernstein operatörü uygulanırsa

$$B_n\big((f;x)\big) = f(x)B_n(e_0;x) + f'(x)B_n((e_0 - x);x) + \frac{1}{2}f''(x)B_n((e_0 - x)^2;x)$$
$$+\frac{1}{2}B_n(g(.,)(e_0 - x)^2;x)$$

Buradan, her $x \in [0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(e_1 - x;\ x) = 0 \tag{4.1}$$

$$B_n((e_1 - x)^2;x) = \frac{x(1-x)}{n} \tag{4.2}$$

olup (4.1) ve (4.2) den

$$B_n(f;x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{2n}f''(x) + B_n(g;x)(e_0 - x)^2;x)$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse;

$$n[B_n(f;x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2}f''(x) + nB_n(g;x)(e_0 - x)^2;x)$$

ifadesi bulunur. O halde

$$\lim_{n \to \infty} n\big(B_n(g(.,x)(e_0 - x)^2)\big) = 0$$

olduğu gösterilirse istenilen elde edilir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$n\big((B_n(g(.,x)(e_0 - x)^2)\big) \le (n^2 B_n\,((e_1 - x)^4;\ x))^{\frac{1}{2}}.\,B_n\big((g(.,x))^2;x)\big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.3}$$

eşitsizliği elde edilir. $g(x,x)=0$ olduğundan Teorem 4.1.1. gereğince;

$$\lim_{n\to\infty} B_n(g(.,x)^2;x) = \big(g(x,x)\big)^2 = 0 \tag{4.4}$$

olur. Diğer taraftan

$$B_n\left((e_1-x)^4;\ x)\right) = \frac{x(1-x)[1+3\big(n-2x(1-x)\big)]}{n^3}$$

kullanılırsa; (4.3) ifadesi

$$\begin{aligned} n\big((B_n(g(.,x)(e_1-x)^2)\big) & \\ &\leq \left(n^2\frac{x(1-x)\big[1+3\big(n-2x(1-x)\big)\big]}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}}.(B_n((g(.,x)^2;\ x))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2(B_n((g(.,x)^2;\ x))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla (4.4) den

$$\lim_{n\to\infty} n.\ B_n(g(.\ ,x)(e_1-x)^2;x)=0$$

olur. Bu da istenen sonucu verir.

Şimdi bu sonucun quantiative versiyonunu genel bir lineer pozitif operatör için verelim.

Teorem 4.1.3. $L: C[0,1] \to C[0,1]$ lineer pozitif operatör olmak üzere $i = 0, 1$ için $Le_i = e_i$ olsun. $f \in C^2[0,1],\ x \in [0,1]$ için

$$\left|L(f;x) - f(x) - \frac{1}{2}f''(x)L((e_1 - x)^2;x)\right| \leq \frac{1}{2}L((e_1 - x)^2;x)\tilde{\omega}\left(f'', \frac{1}{3}\sqrt{\frac{L((e_1 - x)^4;x)}{L((e_1 - x)^2;x)}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $L: \mathrm{C}[0,1] \to C[0,1]$ lineer pozitif operatörü, $f \in C^n[0,1],\ x \in [0,1]$ için

$$L(f;x) - f(x) = L(f(t);x) - f(x)$$

$$= L\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\,(t-x)^k;x\right) + L\left(f - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\,(t-x)^k;x\right) - f(x)$$

$$= f(x)[L(e_0;x) - 1] + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)L((e_1 - x)^k;x) + L\left(f - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\,(e_1 - x)^k;x\right)$$

yazabiliriz.

Verilen terimler düzenlenirse;

$$L(f;x) - f(x) - f(x)[L(e_0;x) - 1] - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)L((e_1 - x)^k;x)$$

$$= L\left(f - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\,(e_1 - x)^k;x\right)$$

$$= L\left(\frac{(e_1 - x)^n}{n!}\mu_x(.);x\right) \qquad (4.5)$$

olup burada (3.1) den

$$\frac{(t-x)^n}{n!}\mu_x(t) \coloneqq f(t) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\,(t-x)^k$$

$$\left|\frac{(t-x)^n}{n!}\mu_x(t)\right| \leq \frac{(t-x)^n}{n!}\tilde{\omega}\left(f^{(n)};\frac{|t-x|}{n+1}\right)$$

ve

$$\tilde{\omega}\left(f^{(n)};\frac{|t-x|}{n+1}\right) = o(1)\ ;\ t \to x$$

elde edilir. (4.5) yeniden düzenlenirse

$$\left|L(f;x) - f(x) - \frac{1}{n!}f^n(x)L((e_1-x)^n;x)\right| = \left|L\left(\frac{(e_1-x)^n}{n!}\mu_x(.);x\right)\right|$$

yazılabilir**.**

L pozitif operatörü ve $n = 2$ için

$$\left|L(f;x) - f(x) - \frac{1}{2}f''(x)L((e_1-x)^2;x)\right| \leq L\left(\frac{(e_1-x)^2}{2}|\mu_x(.)|;x\right)$$

$$\leq\ L\left(\frac{(e_1-x)^2}{2}\tilde{\omega}\left(f'';\frac{|e_1-x|}{3}\right);x\right)$$

elde edilir.

Bu son ifade için daha uygun bir üst sınır elde edelim. $g \in C^3[0,1]$ keyfi olmak üzere;

$$L\left(\frac{(e_1-x)^2}{2}\tilde{\omega}\left(f'';\frac{|e_1-x|}{3}\right);x\right)$$

$$= L\left((e_1-x)^2 K\left(\frac{|e_1-x|}{6}, f''; C^0[0,1], C^1[0,1]\right);x\right)$$

$$\leq\ L\left((e_1-x)^2\left\{\|f-g\|'' + \frac{|e_1-x|}{6}\|g'''\|\right\};x\right)$$

$$=\ L((e_1-x)^2;x)\|f-g\|'' + \frac{1}{6}\ L(|e_1-x|^3;x)\|g'''\|$$

$$=\ L((e_1-x)^2;x)\left\{\|f-g\|'' + \frac{1}{6}\frac{L(|e_1-x|^3;x)}{L((e_1-x)^2;x)}\|g'''\|\right\}$$

$g \in C^3[0,1]$ üzerinden infimum alınırsa ve Lemma 2.2.1.1. kullanılırsa

$$L\left(\frac{(e_1-x)^2}{2}\tilde{\omega}\left(f'';\frac{|e_1-x|}{3}\right);x\right)$$

$$\leq\ L((e_1-x)^2;x)K\left(\frac{1}{6}\frac{L(|e_1-x|^3;x)}{L((e_1-x)^2;x)}, f''; C^0, C^1\right)$$

$$= \frac{1}{2}L((e_1-x)^2;x)\tilde{\omega}\left(f'',\frac{1}{3}\frac{L(|e_1-x|^3;x)}{L((e_1-x)^2;x)}\right)$$

yazılabilir.

$L(|e_1 - x|^3; x) = L((e_1 - x)^2 |e_1 - x|; x)$ eşitliğine pozitif lineer fonksiyonlar için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak;

$$L(|e_1 - x|^3; x) \leq \sqrt{L((e_1 - x)^4; x)}\sqrt{L((e_1 - x)^2; x)}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazarsak ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.1. $C[0,1]$ üzerinde $A = I$, $B = L$ pozitif lineer operatör olduğunu varsayalım. Teorem 4.1.3. den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i)

$$|L(f; x) - f(x)| \leq L(|e_1 - x|; x)\tilde{\omega}\left(f'; \frac{1}{2}\frac{L((e_1 - x)^2; x)}{L(|e_1 - x|; x)}\right), f \in C^1[0,1], x \in [0,1]$$

eşitsizliği doğrudur.

ii)

$$|L(g; x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} L((e_1 - x)^2; x)\|g''\|, g \in C^2[0,1], x \in [0,1]$$

olup bu pozitif lineer operatörlerin yaklaşımında iyi bilinen bir eşitsizliktir [14].

iii)

$$|L(f; x) - f(x)| \leq c\omega_2\left(f; \sqrt[2]{\frac{1}{2}L((e_1 - x)^2; x)}\right), f \in C[0,1], x \in [0,1]$$

dir. Bilindiği kadarıyla Esser ‘ in bu eşitsizliği ilk olarak [15] ve [16] ‘ da elde edilmiştir ; daha kesin tahminlere ise [17] ve [18] ‘ de yer verilmiştir.

4.2. Bazı Temel Operatörler ve Momentleri

Bernstein operatörlerinin bir integral genelleşmesi 1967 yılında J. L. Durrmeyer tarafından verilmiştir.

Tanım 4.2.1. $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlara yakınsayan $n \geq 1$ olmak üzere $f \in L^1([0,1])$ ve $x \in [0,1]$ için;

$$D_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^k f(t)dt$$

şeklinde tanımlı operatörlere Bernstein- Durrmeyer operatörü adı verilir.

1969 yılında D. D. Stancu , Bernstein operatörünü şu şekilde genelleştirmiştir:

Tanım 4.2.2. $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), 0 \leq \alpha \leq \beta$$

şeklinde tanımlı operatörlere Stancu operatörleri adı verilir.

Açıktır ki $\alpha = \beta = 0$ durumunda Bernstein polinomları elde edilir.

$[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli keyfi f fonksiyonu için n. Bernstein polinomu (operatörü)

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörlerin oluşturulma yapısı binom açılımına dayanmaktadır. Yani; x, y pozitif sayılar ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere binom açılımı

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

biçimindedir. Bu açılımda $x \in [0,1]$ olmak üzere $y = 1 - x$ alınırsa;

$$1 = (x + 1 - x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 4.2.3. Lupaş'ın Beta operatörü $\overline{\mathbb{B}}_n$;

$$\overline{\mathbb{B}}_n = \begin{cases} f(0), & x = 0; \\ \dfrac{1}{B(nx, n-nx)} \displaystyle\int_0^1 t^{nx-1}(1-t)^{n-1-nx} f(t)\,dt, & 0 < x < 1; \\ f(1)\,, & x = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır [19, 20].

$$\overline{\mathbb{B}}_n((e_1 - x)^4; x) = \frac{3nx^2(1-x)^2 + 6x(1-x)(3x^2 - 3x + 1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \tag{4.6}$$

$$\overline{\mathbb{B}}_n((e_1 - x)^2; x) = \frac{x(1-x)}{n+1} \tag{4.7}$$

(4.6) ve (4.7) den ;

$$\frac{\overline{\mathbb{B}}_n((e_1 - x)^4; x)}{\overline{\mathbb{B}}_n((e_1 - x)^2; x)} = \frac{3nx(1-x) + 6(3x^2 - 3x + 1)}{(n+2)(n+3)}$$

$$\leq \frac{2}{n+3}$$

elde edilir.

Önerme 4.2.1.

$$|(B_{n+1}-\overline{\mathbb{B}}_n)(f;x)| \le \frac{x(1-x)}{n+1}\,\tilde{\omega}\left(f'';\sqrt{\frac{(n+1)(6nx(1-x)+7)}{18n^2}}\right), f\in C^2[0,1]$$

$$\le \frac{x(1-x)}{3n\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{6nx(1-x)+7}{2n}}\,\|f'''\|\,,\;\; f\in C^3[0,1]$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Lupaş'ın Beta operatörü $\overline{\mathbb{B}}_n$ 'in 2. ve 4. dereceden momentleri;

$$\overline{\mathbb{B}}_n((e_1-x)^4;x)=\frac{3nx^2(1-x)^2+6x(1-x)(3x^2-3x+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\quad ,$$

$$\overline{\mathbb{B}}_n((e_1-x)^2;x)=\frac{x(1-x)}{n+1}$$

olup

$$(B_{n+1}+\overline{\mathbb{B}}_n)((t-x)^2;x)=\frac{2x(1-x)}{n+1}$$

ve

$$(B_{n+1}+\overline{\mathbb{B}}_n)((t-x)^4;x)$$
$$=\left(\frac{3(n-1)}{(n+1)^3}+\frac{3}{(n+2)(n+3)}\right)x^2(1-x)^2$$
$$+\left(\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)x(1-x)$$

$$\leq \left(\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^2}\right)x^2(1-x)^2+\left(\frac{1}{n^3}+\frac{6}{n^3}\right)\ x(1-x)$$

$$=\frac{x(1-x)}{n^2}\frac{6nx(1-x)+7}{n}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.1. A ve B , Teorem 3.1.1.' deki gibi $Ae_0 = Be_0 = e_0$ olacak şekilde verilsin. Her $f \in C[0,1], x \in [0,1]$ için;

$$|(A-B)(f;x)| \leq c_1\omega_{n+1}\left(f;\sqrt[n+1]{\frac{1}{2}(A+B)(|e_1-x|^{n+1};x)}\right)$$

olup burada c_1 sabit, f , x ve A ile B mutlak süreklilerdir.

Önerme 4.2.2. Her $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ için

$$|(B_{n+1}-\overline{\mathbb{B}}_n)(f;x)| \leq c\omega_3\left(f;\sqrt[3]{\frac{1}{2}(B_{n+1}+\overline{\mathbb{B}}_n)(|e_1-x|^3;x))}\right) \tag{4.8}$$

$$\leq\ c\omega_3\left(f;\sqrt[6]{\frac{x^2(1-x)^2}{n^3}\frac{6nx(1-x)+7}{n}}\right)$$

elde edilir.

İspat. Teorem 3.2.4.' de $n = 2$ için (4.8) numaralı eşitsizlik elde edilir.

$$L := \frac{(B_{n+1}+\overline{\mathbb{B}}_n)}{2}$$

denirse, Hölder eşitsizliğinden

$$L(|e_1 - x|^3; x)^{\frac{1}{3}} \leq L((e_1 - x)^2; x)^{\frac{1}{6}} L((e_1 - x)^4; x)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \left(\frac{x(1-x)}{n+1}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{x(1-x)}{2n^2} \frac{6nx(1-x)+7}{n}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\leq \left(\frac{x(1-x)}{n+1}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{x(1-x)[6nx(1-x)+7]}{n^3}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \left(\frac{x^2(1-x)^2}{n^3} \frac{6nx(1-x)+7}{n}\right)^{\frac{1}{6}}$$

olduğundan;

$$|(B_{n+1} - \overline{\mathbb{B}}_n)(f; x)| \leq c\omega_3\left(f; \sqrt[6]{\frac{x^2(1-x)^2}{n^3} \frac{6nx(1-x)+7}{n}}\right)$$

olarak bulunur.

Önerme 4.2.3. L lineer operatör ve $k \in N_0$ olmak üzere;

$$L((e_1 - x)^k; x) = L(e_k; x) - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} x^{k-l} L((e_1 - x)^l; x).$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Binom açılımından

$$L(e_k; x) = L((e_1 - x + x)^k; x)$$

$$= L\left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^{k-l}((e_1 - x)^l; x)\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^{k-l}\, L((e_1 - x)^l; x)$$

$$= L((e_1 - x)^k; x) + \sum_{l=0}^{k-l} \binom{k}{l} x^{k-l}\, L((e_1 - x)^l; x)$$

elde edilir.

Uyarı 4.2.1.

$\boldsymbol{i}$)Önerme 4.2.3.' teki eşitsizlikte $Le_i = e_i\ , i \in \{0,1\}$ olduğu varsayılmıştır.

$\boldsymbol{ii}$) Bu önermenin anlamı ; $L((e_1 - x)^k; x)$ hesabından, $L(e_k; x)$ ve alt mertebeden momentleri $L((e_1 - x)^l; x)$, $0 \leq l \leq k - 1$ hesaplanabilmesidir.

Sonuç 4.2.1. $Le_i = e_i$, $i \in \{0,1\}$ olacak şekildeki L lineer operatörü için;

$$L((e_1 - x)^3; x) = L(e_3; x) - x^3 - 3xL((e_1 - x)^2; x)$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 4.2.2. $Le_i = e_i$, $i \in \{0,1\}$ olacak şekildeki L lineer operatörü için 4. momentleri

$$L((e_1 - x)^4; x) = L(e_4; x) - x^4 - \{4xL((e_1 - x)^3; x) + 6x^2L((e_1 - x)^2; x)\}$$

ile hesaplanabilir.

Tanım 4.2.4. $U_n = B_n \text{o}\, \overline{\mathbb{B}}_n$ şeklinde verilen Bernstein tipli operatörü $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$ için

$$U_n(f;x) = f(0)p_{n,0}(x) + f(1)p_{n,n}(x) + (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k}(x) \int_0^1 p_{n-2,k-1}(t)f(t)dt$$

şeklinde tanımlanmıştır $[21, 22]$.

$$U_n((e_1-x)^2;x) = \frac{2x(1-x)}{n+1},$$

$$U_n((e_1-x)^4;x) = \frac{12x^2(1-x)^2(n-7)}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{24x(1-x)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

olup [23] ;

$$\left|U_n(f;x) - f(x) - \frac{1}{2}f''(x)U_n((e_1-x)^2;x)\right|$$

$$= \left|U_n(f;x) - f(x) - f''(x)\frac{x(1-x)}{n+1}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}U_n((e_1-x)^2;x)\tilde{\omega}\left(f'', \frac{1}{3}\sqrt{\frac{U_n((e_1-x)^4;x)}{U_n((e_1-x)^2;x)}}\right)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n+1}\,\tilde{\omega}\left(f'', \frac{1}{3}\sqrt{\frac{[12x^2(1-x)^2(n-7)+24x(1-x)](n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)2x(1-x)}}\right)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n+1}\,\tilde{\omega}\left(f'', \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6x(1-x)(n-7)+12}{(n+2)(n+3)}}\right)$$

$$= \frac{x(1-x)}{n+1}\,\tilde{\omega}\left(f'', \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{n+3}}\sqrt{\frac{x(1-x)(n-7)+2}{n+2}}\right)$$

$$\leq \frac{x(1-x)}{n+1}\,\tilde{\omega}\left(f'', \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme 4.2.4. Yukarıda gibi tanımlanan U_n opratörü için, Voronovkskaja' nın formülünün takip eden versiyonu $f \in C^2[0,1]$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$ olmak üzere;

$$|(n+1)[U_n(f;x) - f(x)] - f''(x)x(1-x)| \leq x(1-x)\tilde{\omega}\left(f'', \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 4.2.5. Stancu operatörünün özel bir hali olan $S_n \coloneqq \overline{\mathbb{B}}_n \mathrm{o} B_n$ operatörü [24] ;

$$S_n(f;x) = \frac{2(n!)}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(nx)_k(n-nx)_{n-k}$$

olup

$$(a)_0 = 1, (a)_b = \prod_{k=0}^{b-1}(a-k), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$$

dir.

$$S_n((e_1-x)^4;x) = \frac{2x(1-x)[6n(n-7)x(1-x)+13n-1]}{n(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$S_n((e_1-x)^2;x) = \frac{2x(1-x)}{n+1}$$

olduğundan [25] ,

$$\frac{S_n((e_1-x)^4;x)}{S_n((e_1-x)^2;x)}=\frac{6n(n-7)x(1-x)+13n-1}{n(n+2)(n+3)}\leq\frac{4}{n+3}$$

olarak bulunur.

Önerme 4.2.5. Her $f\in C[0,1]$, $x\in[0,1]$ için

$$|(B_n-U_n)(f;x)|\leq\ c\omega_2\left(f;\sqrt[2]{\frac{3x(1-x)}{2n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.1. ‘ te $n=1$ alınırsa;

$$|(B_n-U_n)(f;x)|\leq\ c\omega_2\left(f;\sqrt[2]{\frac{1}{2}(B_n+U_n)((e_1-x)^2;x)}\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$B_n((e_1-x)^2;x)=\frac{x(1-x)}{n} \tag{4.9}$$

$$U_n((e_1-x)^2;x)=\frac{2x(1-x)}{n+1} \tag{4.10}$$

olup (4.9) ve (4.10) den;

$$\frac{1}{2}(B_n+U_n)((e_1-x)^2;x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x(1-x)}{n}+\frac{2x(1-x)}{n+1}\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{x(1-x)}{n}+\frac{2x(1-x)}{n}\right]$$

$$=\frac{3x(1-x)}{2n}$$

olur. Buradan

$$|(B_n-U_n)(f;x)| \leq \ c\omega_2\left(f;\sqrt[2]{\frac{3x(1-x)}{2n}}\right)$$

elde edilerek ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.6. Her $x \in [0,1]$ için

$$|(D_n-U_n)(f;x)| \leq \frac{2x(1-x)}{n+1}\tilde{\omega}\left(f'',\sqrt{\frac{(n+1)(8nx(1-x)+13)}{12n^3}}\right), f \in C^2[0,1]$$

$$\leq \frac{x(1-x)}{n\sqrt{n+1}}\sqrt{\frac{8nx(1-x)+13}{3n}}\,\|f'''\|\,, f \in C^3[0,1]$$

elde edilir. Bu önerme Teorem 4.1.4. ‘deki verilerin bir uygulamasıdır.

Önerme 4.2.7. Her $f \in C[0,1]\,, x \in [0,1]$ için

$$|(D_n-U_n)(f;x)| \leq \ c\omega_3\left(f;\sqrt[3]{(1/2)(D_n-U_n)(|e_1-x|^3;x)}\right) \tag{4.11}$$

$$\leq \ c\omega_3\left(f;\sqrt[6]{\frac{x^2(1-x)^2(24nx(1-x)+39}{(n+1)n^3}}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Teorem 4.1.5. ‘de $n = 2$ yazılırsa; (4.11) açıkça görülebilir.

$$L := \frac{(D_n + \mathrm{U}_n)}{2}$$

denirse, Hölder eşitsizliğinden;

$$L(|e_1 - x|^3; x)^{\frac{1}{3}} \leq L((e_1 - x)^2; x)^{\frac{1}{6}} L((e_1 - x)^4; x)^{\frac{1}{6}}$$

dır. Ayrıca

$$\mathrm{D}_n((e_1 - x)^2; x) = \frac{2x(1-x)}{n+1} \tag{4.12}$$

$$\mathrm{U}_n((e_1 - x)^2; x) = \frac{2x(1-x)}{n+1} \tag{4.13}$$

olup (4.12) ve (4.13) den;

$$(\mathrm{D}_n + \mathrm{U}_n)((e_1 - x)^2; x) = \frac{4x(1-x)}{n+1}$$

elde edilir.

$$\mathrm{D}_n((e_1 - x)^4; x)$$
$$= \frac{1}{n^2(n+1)^3}\{12(n^3 - 6n^2 + 4n - 1)x^2(1-x)^2 + (15n^2 - 9n + 2)x^2(1-x)^2\}$$

$$\mathrm{U}_n((e_1 - x)^4; x) = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\{12(n-7)x^2(1-x)^2 + 24x(1-x)\}$$

olup

$$(\mathrm{D}_n+\mathrm{U}_n)((e_1-x)^4;x)$$

$$=x^2(1-x)^2\left\{\frac{12(n^3-6n^2+4n-1)}{n^2(n+1)^3}+\frac{12(n-7)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$+x(1-x)\left\{\frac{15n^2-9n+2}{n^2(n+1)^3}+\frac{24}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

$$\leq\left(\frac{12}{n^2}+\frac{12}{n^2}\right)x^2(1-x)^2+\left(\frac{15}{n^3}+\frac{24}{n^3}\right)x(1-x)$$

$$=\frac{x(1-x)[24nx(1-x)+39]}{n^3}$$

bulunur.

$$L(|e_1-x|^3;x)^{\frac{1}{3}}\leq\ L((e_1-x)^2;x)^{\frac{1}{6}}L((e_1-x)^4;x)^{\frac{1}{6}}$$

$$\leq\left(\frac{2x(1-x)}{n+1}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\frac{x(1-x)[24nx(1-x)+39]}{2n^3}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\leq\left(\frac{x^2(1-x)^2[24nx(1-x)+39]}{(n+1)n^3}\right)^{\frac{1}{6}}$$

ve

$$L(|e_1-x|^3;x)\leq\ L(|e_1-x|^3;x)^{\frac{1}{3}}$$

olduğundan

$$|(D_n-U_n)(f;x)|\leq c\omega_3\left(f;\sqrt[6]{\frac{x^2(1-x)^2}{(n+1)n^3}}(24nx(1-x)+39\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.8. $\overline{\mathbb{B}}_n$ operatörü ile n, f ve x için

$$\left|(n+1)[\overline{\mathbb{B}}_n(f;x)-f(x)]-\frac{1}{2}f''(x)x(1-x)\right| \leq \frac{1}{2}x(1-x)\tilde{\omega}\left(f'',\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{n+3}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 4.2.9. B_n Bernstein operatörleri için $n \geq 1$ olmak üzere

$$\left|n[B_n(f;x)-f(x)]-\frac{1}{2}f''(x)x(1-x)\right| \leq \frac{x(1-x)}{2}\tilde{\omega}\left(f'',\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. 4. [26] ve 2. dereceden momentlerin gösterimini kullanırsak;

$$B_n((e_1-x)^4;x)=\frac{1}{n^4}[3n^2x^2(1-x)^2+n(x(1-x)-6x^2(1-x)^2)]$$

$$B_n((e_1-x)^2;x)=\frac{x(1-x)}{n}$$

olup buradan;

$$\frac{B_n((e_1-x)^4;x)}{B_n((e_1-x)^2;x)}=\frac{3}{n}x(1-x)+\frac{1}{n^2}(1-6x(1-x)) \leq \frac{1}{n}\ ; n \geq 1$$

bulunur. Böylece;

$$\left|B_n(f;x)-f(x)-\frac{1}{2}f''(x)x(1-x)\right| \leq \frac{x(1-x)}{2n}\tilde{\omega}\left(f'',\frac{1}{3\sqrt{n}}\right)$$

elde edilir ve her iki tarafı n ile çarpılırsa istenilen eşitsizliği verir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.2. Önerme 4.2.1.' deki eşitsizlik, daha küçük $\frac{B_n(|e_1-x|^3;x)}{B_n((e_1-x)^2;x)}$ yerine $\sqrt{\frac{B_n((e_1-x)^4;x)}{B_n((e_1-x)^2;x)}}$ terimi dikkate alınarak elde edilmiştir. İkinci oranın uç noktaları 0 ve 1 alınarak aşağıdaki gibi bir tahmin elde edilebilir. $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ olsun.

$$B_n(|e_1-x|^3;x) = \sum_{j=0}^{n} \left|\frac{j}{n} - x\right|^3 p_{nj}(x)$$

$$= x^3 p_{n,0}(x) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n} - x\right)^3 p_{nj}(x)$$

$$= 2x^3 p_{n,0}(x) + \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{j}{n} - x\right)^3 p_{nj}(x)$$

$$= 2x^3(1-x)^n + B_n((e_1-x)^3;x)$$

$$= 2x^3(1-x)^n + \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}$$

$$= \frac{x(1-x)}{n^2}[2n^2x^2(1-x)^{n-1} + 1 - 2x]$$

$$\leq \frac{3x(1-x)}{n^2}, n \geq 1$$

dir. Aynı eşitsizlik $x \in \left[1-\frac{1}{n}, 1\right]$ için de doğrudur. $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \cup \left[1-\frac{1}{n}, 1\right]$ için

$$\frac{B_n(|e_1-x|^3;x)}{B_n((e_1-x)^2;x)} \leq \frac{3x(1-x)}{n^2}\frac{n}{x(1-x)} = \frac{3}{n}$$

olup buradan

$$\left|n[B_n(f;x)-f(x)]-\frac{1}{2}f''(x)x(1-x)\right| \leq \frac{x(1-x)}{2}\tilde{\omega}\left(f'',\frac{1}{3}\frac{B_n(|e_1-x|^3;x)}{B_n((e_1-x)^2;x)}\right)$$

$$\leq \frac{x(1-x)}{2}\ \tilde{\omega}\left(f'';\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir.

Önerme 4.2.10. Stancu' nun S_n operatörleri için $n \geq 1$ olmak üzere

$$|(n+1)[S_n(f;x)-f(x)]-f''(x)x(1-x)|$$
$$\leq x(1-x)\tilde{\omega}\left(f'',\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{n+3}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.2. $A,B : C[0,1] \to C[0,1]$ pozitif lineer operatörler olmak üzere

$$(A-B)\big((e_1-x)^i;x\big)=0\ ;\ i=0,1,2,3 \text{ ve } x \in [0,1]$$

dir ve $f \in C^3[0,1]$ için

$$|(A-B)(f;x)| \leq \frac{1}{6}(A+B)(|e_1-x|^3;x)\tilde{\omega}\left(f''',\frac{1}{4}\frac{(A+B)((e_1-x)^4;x)}{(A+B)(|e_1-x|^3;x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Taylor açılımı ve Peano kalanında $n = 3$ için

$$|(A-B)(f;x)| = |(A-B)(f(t);x)|$$

$$= \left|(A-B)\left(\frac{(t-x)^3}{6}\mu_x(t);x\right)\right|$$

$$\leq (A+B)\left|\left(\frac{|t-x|^3}{6}|\mu_x(t)|;x\right)\right|$$

$$\leq (A+B)\left|\left(\frac{|t-x|^3}{3!}\tilde{\omega}\left(f^{(3)},\frac{|t-x|}{4};x\right)\right)\right|$$

$$= (A+B)\left|\left(\frac{|t-x|^3}{3}K\left(f^{(3)},\frac{|t-x|}{8};x\right)\right)\right|$$

$$\leq (A+B)\left(\frac{|t-x|^3}{3}\left\{\left\|(f-g)^{(3)}\right\| + \frac{|t-x|}{8}\left\|g^{(4)}\right\|\right\};x\right), g \in C^4 \ keyfi$$

$$= (A+B)\left(\frac{|t-x|^3}{3};x\right)\left\|(f-g)^{(3)}\right\| + (A+B)\left(\frac{(t-x)^4}{4!};x\right)\left\|g^{(4)}\right\|$$

$$= (A+B)\left(\frac{|t-x|^3}{3};x\right)\left\{\left\|(f-g)^{(3)}\right\| + \frac{3}{4!}\frac{(A+B)((t-x)^4;x)}{(A+B)(|t-x|^3;x)}\left\|g^{(4)}\right\|\right\}$$

dir. $g \in C^4$ üzerinden infimum alınarak ve K fonksiyonel ile least konkav majorant arasındaki eşitlik kullanılarak görülür ki;

$$|(A-B)(f;x)| \leq (A+B)\left(\frac{|t-x|^3}{3};x\right)\frac{1}{2}\tilde{\omega}\left(f''',\frac{1}{4}\frac{(A+B)((t-x)^4;x)}{(A+B)(|t-x|^3;x)}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(A+B)(|t-x|^3;x)\tilde{\omega}\left(f''',\frac{1}{4}\frac{(A+B)((t-x)^4;x)}{(A+B)(|t-x|^3;x)}\right)$$

eşitsizliği vardır.

Uyarı 4.2.3.

$\boldsymbol{i}$) Hiçbir zorluğu olmadan

$$(A-B)\big((e_1-x)^i;x\big)=0\,;\,i=0,\dots,n\,;\,n\geq 0$$

durumlarında Teorem 1.1.9. ‘in eşitsizliği üretilebilir. Bu durumdaki sonuç $\tilde{\omega}\big(f^{(n)};.\big)$ nın açısından bir eşitsizliktir. Fakat biz $n=3$ durumunu sadece incelemeye devam edeceğiz.

$\boldsymbol{ii}$) $(A+B)(|e_1-x|^3;x)$ için $Ae_0=Be_0=e_0$ ve $s=2,r=3$ olması durumunda Önerme 3.2.2. kullanılarak görülür ki;

$$\left[\frac{1}{2}(A+B)((e_1-x)^2;x)\right]^{\frac{1}{2}}\leq\left[\frac{1}{2}(A+B)(|e_1-x|^3;x)\right]^{\frac{1}{3}}$$

veya

$$2^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(A+B)((e_1-x)^2;x)\right]^{\frac{3}{2}}\leq(A+B)(|e_1-x|^3;x),$$

olur ve böylece

$$|(A-B)(f;x)|\leq\frac{1}{6}(A+B)(|e_1-x|^3;x)\tilde{\omega}\left(f''',\frac{1}{4}\sqrt{2}\frac{(A+B)((e_1-x)^4;x)}{(A+B)((e_1-x)^2;x)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.3. Eğer A ve B Teorem 4.2.1**.** ‘ daki gibi verilirse $g \in C^4, x \in [0,1]$ için;

$$|(A-B)(g;x)| \leq \frac{1}{24}(A+B)((e_1-x)^4;x)\left\|g^{(4)}\right\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 4.2.1. $I=[0,1]$ ve $f \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}_0$ olsun. Herhangi bir $h \in (0,1]$ ve $s \in \mathbb{N}$ için var olan $f_{h,r+s} \in C^{2r+s}(I)$ ile

i) $\left\|f^{(j)}-f_{h,r+s}^{(j)}\right\| \leq c\omega_{r+s}\left(f^{(j)};h\right); 0 \leq j \leq r,$

ii) $\left\|f_{h,r+s}^{(j)}\right\| \leq ch^{-j}\omega_j(f;h); 0 \leq j \leq r+s,$

iii) $\left\|f_{h,r+s}^{(j)}\right\| \leq ch^{-(r+s)}\omega_{r+s}\left(f^{(j-r-s)};h\right); r+s \leq j \leq 2r+s$

eşitsizlikleri doğru olup, burada c sabiti sadece r ve s ‘ye bağlıdır.

Biz yukarıdaki lemmada $r=0, s=4$ için $h \in (0,1]$ ve $f \in C(0,1]$ fonksiyonlarından $f_{h,4}$ ‘ ü elde edeceğiz.

$$\|f-f_{h,4}\| \leq c\omega_4(f;h), \left\|f_{h,4}^{(4)}\right\| \leq ch^{-4}\omega_4(f;h)$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 4.2.1**.** yardımıyla aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 4.2.3. Eğer A ve B Teorem 4.2.1.' deki gibi verilirse, $Ae_0 = Be_0 = e_0$ olmak üzere tüm $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ için

$$|(A-B)(f;x)| \leq c_1\omega_4\left(f; \sqrt[4]{\frac{1}{2}(A+B)(e_1-x)^4;x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır ve burada c_1 sabiti; f, x, A ve B ' den mutlak bağımsızdır.

İspat. $f \in [0,1]$, $g = f_{h,4}$sabit, $0 < h \leq 1$ olmak üzere yukarıdaki gibi verilsin. Lemma 4.2.1. ' den c sabiti ile

$$|(A-B)(f;x)| \leq |(A-B)(f-g;x)| + |(A-B)(g;x)|$$

$$\leq (\|A\| + \|B\|)\|f-g\| + \frac{1}{24}(A+B)((e_1-x)^4;x)\left\|g^{(4)}\right\|$$

$$\leq 2c\omega_4(f;h) + c\frac{1}{24}(A+B)((e_1-x)^4;x)\frac{1}{h^4}\omega_4(f;h)$$

elde edilir.

$(A+B)((e_1-x)^4;x) = 0$ iken $-h > 0$ keyfi olmak üzere $|(A-B)(f;x)| = 0$ alabiliriz. Aksi halde;

$$h = \sqrt[4]{\frac{1}{2}(A+B)((e_1-x)^4;x)} \leq 1$$

$$|(A-B)(f;x)| \leq c_1\omega_4\left(f; \sqrt[4]{\frac{1}{2}(A+B)(e_1-x)^4;x)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 4.2.11. S_n ve U_n yukarıdaki gibi verilmek üzere;

$$|(S_n - U_n)(f;x)| \leq c_1 \omega_4\left(f; \sqrt[4]{\frac{3x(1-x)}{n(n+1)}}\right)$$

eşitsizliği doğru olup burada c_1 ; $f, n,$ ve x ‘ten mutlak bağımsızdır.

İspat. Tüm kalanlara 4. momentin uygulanması ile S_n ve U_n ‘ den;

$$(S_n + U_n)\,((e_1 - x)^4; x) = \frac{2x(1-x)[12n(n-7)x(1-x) + 25n - 1]}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\leq \frac{6x(1-x)}{n(n+1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.1. ‘ den istenilen eşitsizlik elde edilir.

4.2.1. Momentler Hakkında Ek Açıklamalar

Uyarı 4.2.1.1. $n = 1, 2, \dots ;\ s = 0,1, \dots$ için

$$B_n((e_1 - x)^s; x) = \frac{1}{n^s}\sum_{v=0}^{n}(v - nx)^s p_{n,v}(x) =: \frac{1}{n^s} T_{n,s}(x),$$

$$T_{n,s+1} = x(1-x)\left[T'_{n,s}(x) + nsT_{n,s-1}(x)\right]$$

dir. $s \geq 1$ için olan momentler cinsinden

$$B_n((e_1 - x)^{s+1}; x) = \frac{x(1-x)}{n}\left[\frac{d}{dx}B_n((e_1 - x)^s; x) + sB_n((e_1 - x)^{s-1}; x)\right].$$

$r = 0,1, \ldots$ ‘ in her biri için A_r sabit olmak üzere;

$$0 \leq B_n((e_1 - x)^{2r}; x) \leq A_r n^{-r}$$

eşitsizliği vardır.

Uyarı 4.2.1.2. $r = 0,1, \ldots$ için

$$B_n(|e_1 - x|^{2r+1}; x) = o\left(\frac{1}{n^r}\right), n \to \infty$$

dır.

Uyarı 4.2.1.3. Bernstein operatörleri için mutlak moment

$$B_n(|e_1 - x|; x) = \frac{2}{n}(n-r)\binom{n}{r} x^{r+1}(1-x)^{n-r},$$

$r := [nx]$; nx ‘ i aşmayan en büyük tam sayıyı belirtir $[27, 28]$.

Uyarı 4.2.1.4. $B_n(|e_1 - x|; x)$ ‘ in 3. mutlak momenti için , $(\mathcal{E}_n) \to 0$ şeklinde tanımlı bir dizi olmak üzere;

$$\sup_{x \in [0,1]} B_n(|e_1 - x|^3; x) \leq \mathcal{E}_n \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği elde edilir.

Noktasal yakınsaklığından

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) \leq \mathcal{E}_n(x) \frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}$$

olup $\mathcal{E}_n(x) \le \mathcal{E}_n\,; x \in [0,1]$ dir.

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) \le \frac{x(1-x)}{n^{\frac{3}{2}}}\left(3x(1-x) + \frac{1-6x(1-x)}{n}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$x \in [0,1]$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{n} \le x \le 1 - \frac{1}{n}\,,\;\; n \ge 2$$

olsun.

$$3x(1-x) + \frac{1-6x(1-x)}{n} \le 4x(1-x) \tag{4.14}$$

(4.14) için açıktır ki; $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right]$ için doğru değildir. En azından $x \in \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ için

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) \le 2\left[\frac{x(1-x)}{n}\right]^{\frac{3}{2}} = 2B_n((e_1 - x)^2; x)^{\frac{3}{2}}.$$

Tüm $x \in [0,1]$ için c mutlak sabit olmak üzere;

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) \le cB_n((e_1 - x)^2; x)^{\frac{3}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 4.2.1.1. $n \ge 1$ sabit olsun. Herhangi bir $\alpha > 2$ için böyle bir mutlak c sabiti yoktur ki;

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) \le cB_n((e_1 - x)^2; x)^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliği tüm $x \in [0,1]$ için gerçeklenir. $\alpha = 2$ ve $c = 1$ için eşitsizlik açıktır. Sabit n leri göz önüne alırsak ; $x \in [0,\frac{1}{n}]$ için

$$B_n(|e_1 - x|^3; x) = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right|^3 p_{n,k}(x)$$

$$= x^3(1-x)^n + \left(\frac{1}{n} - x\right)^3 nx(1-x)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^3 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

dir. $\alpha > 2$ için

$$B_n((e_1 - x)^2; x)^{\frac{\alpha}{2}} = \left[\frac{x(1-x)}{n}\right]^{\frac{\alpha}{2}} ; 0 < x \leq \frac{1}{n}$$

dir.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{B_n(|e_1 - x|^3; x)}{B_n((e_1 - x)^2; x)^{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} n^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ x^{3-\frac{\alpha}{2}}(1-x)^{n-\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{1}{n} - x\right)^3 nx^{1-\frac{\alpha}{2}}(1-x)^{n-1-\frac{\alpha}{2}} + \cdots \right\}$$

dir. İkinci terim sonsuza giderken $x \to 0^+$ ise tüm $\alpha > 2$ için iddiamızı doğrular.

Uyarı 4.2.1.5. Voronovskaja tipi eşitsizliğin güçlü bir formu aşağıda verilmiştir [29, 30].

$g \in C^3[0,1]$ için

$$\left\| B_n g - g - \frac{1}{2n} \varphi^2 g'' \right\| \leq C n^{-\frac{3}{2}} \|\varphi^3 g'''\|$$

eşitsizliği sağlanır ve burada

$$C \neq C(g,n) \; ve \; \varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

dır.

Yukarıda yapılanlara benzer bir şekilde , $B_n(|e_1 - x|^3; x)$; $\frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$ olmak üzere ispat için bir tahmin oluşur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın başlangıcında; gerekli tanımlar yapılmış ve ilgili teoremler verilmiştir. Devamında ise süreklilik modülünün bazı özelliklerine değinilmiş, lineer pozitif operatörler ve özellikle Bernstein polinomları ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmamıza konu olan operatörler için bazı genel eşitsizliklere; özelliklere Hölder, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerine değinilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Voronovskaja Teoremi'nin uygulaması olarak başta Bernstein polinomları olmak üzere bazı özel fonksiyonların yaklaşım hızları incelenmiş, momentleri hesaplanmıştır.

Sonuç olarak da momentler hakkında ek açıklamalara yer verilerek pozitif lineer operatörlerin farkları konulu çalışmamız neticelendirilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Lorentz, G. G. , 1953. Bernstein Polynomials. Math. Expo. , vol. 8, Univ. Of Tronto Press, Toronto.

[2] H. Gonska, P. Pitul and I. Raşa, On differences of positive linear operators, Carpathian Math. J. 22 (2006), No. 1 - 2, 65 – 78

[3] Gonska, H., Piţul, P.and Raşa, I., On Peano's form of the Taylor remainder,Voronovskaja's theorem and the commutator of positive linear operators, Submitted for publication. Temporary reference: Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität Duisburg-Essen, SM-DU-629 (2006)

[4] Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N. ve Ekincioğlu, ·I. 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I. Tekağaç Eylül Yayıncılık. 366p., Ankara.

[5] Korovkin, P.P., 1960. Linear Operators and Approximation Theory. RussianMonog-raphs and Texts on advanced Math., III, 1-63p., Gordon&Breach.

[6] Natanson, I.P., 1964. Constructive Function Theory. Frederick Ungar Publishing Company. 75-78p., New York.

[7] B.S. Mitjagin and E.M. Semenov, Lack of interpolation of linear operators in spaces of smooth functions, Math. USSR-Izv., 11 (1977), 1229-1266.

[8] A. Sperling, Konstanten in den Sätzen von Jackson und in den Ungleichungen zwischen K-Funktionalen und Stetigkeitsmodulen, Diplomarbeit, Universität Duisburrg, 1984.

[9] V. K. Dzjadyk, Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials (Russian), Izdat. Nauka, Moscow, 1977.

[10] G.G. Lorentz, Approximation of Functions, Chelsea, New York, 1986.

[11] J. Dieudonné, Grundzüge der modernen Analysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.

[12] E. Voronovkaja, Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polyômes de M. Bernstein, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 4 (1932), 86-92.

[13] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer, Berlin et al., 1993.

[14] DeVore, R. A., The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972

[15] Esser, H., On pointwise convergence estimates for positive linear operators on $C[a, b]$, Indag. Math. 38 (1976), 189-194

[16] Esser, H., Abschätzungen durch Stetigkeitsmoduli bei Folgen von linearen Funktionalen, In: Approximation Theory (Proc. Internat. Colloq., Inst. Angew. Math., Univ. Bonn, Bonn, 1976), pp. 184–190, Springer, Berlin, 1976

[17] Gonska, H., Quantitative Korovkin type theorems on simultaneous approximation, Math. Z. 186 (1984), no. 3, 419–433

[18] Păltănea, R., Approximation Theory using Positive Linear Operators, Birkhäuser, Boston, 2004

[19] A. Lupaş, Die Folge der Betaoperatoren, Dissertation, Universität Stuttgart 1972

[20] A. Lupaş, The approximation by means of some linear positive operators, in Approximation Theory (M.W. Müller et al., eds.), Akademie-Verlag, Berlin,1995, pp. 201-227.

[21] T. N. T. Goodman and A. Sharma, A modified Bernstein-Schoenberg operator, in “Constructive Theory of Functions - Varna 1987” (Bl. Sendov et al., eds.), Bulgar. Acad. Sci., Sofia, 1988, pp. 166-173.

[22] P. P. Parvanov and B. D. Popov, The limit case of Bernstein’ s operators with Jacobi weights, Math. Balkanica N. S. , 8(1994), 165-177.

[23] D. Kacsó, On certain Bernstein-Durrmeyer-type operators, Manuscript 2006.

[24] Stancu, D. D., Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 13 (1968), 1173–1194

[25] L. Lupaş and A. Lupaş, Polynomials of binomial type and approximation operators, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 32(1987), no. 4,61-70.

[26] Stancu, D. D., Coman, Gh., Agratini, O., and Trâmbiţaş, R., Analiză numerică şi teoria approximării I, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001

[27] J. Meier, Zur Approximation durch gewöhnliche und modifizierte Bernstein-Operatoren unter besonderer Berücksichtigung quantitativer Aussagen und asymptotischer Formeln, Staatsexamensarbeit, Universität Duisburg, 1982.

[28] F. Schurer and F.W. Steutel, On the degree of approximation of functions in $C^1[0,1]$ by Bernstein polynomials, T. H. Report 75-WSK-07, Eindhoven University of Technology 1975.

[29] H.-B. Knoop and Xin-long Zhou, The lower estimate for linear positive operators (II), Resultate Math., 25(1994), 315-330.

[30] Chr. Fleischmann, Abschätzungen bei der Approximation durch Bernstein-Polynome, Diplomarbeit, Universität Duisburg-Essen, 2003.