T.C
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILAR VE UYGULAMALARI

MURAT KUŞ

ŞUBAT 2017

Matematik Anabilim Dalı Murat KUŞ tarafından hazırlanan Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar ve Uygulamaları adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Üye : Prof. Dr. F.Nejat EKMEKCİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ

07/02/2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILAR
VE
UYGULAMALARI

KUŞ, Murat
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Faik BABADAĞ
Şubat 2017, 50 sayfa

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş, tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgilere yer verilmiştir.
İkinci bölümde ise ilerideki bölümlerde gerekli olacak temel kavramlar ve teoremlere yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde genelleştirilmiş bikompleks sayının genel tanımı yapıldıktan sonra toplama, skaler ile çarpma, çarpma işlemi, eşlenik, norm ve invers özellikleri verilmiştir.
Dördüncü bölümde genelleştirilmiş bikompleks sayıların reel matris gösterimi verilmiştir.
Beşinci bölümde matris Lie grubu, genelleştirilmiş bikompleks sayıların manifold yapısı ve Lie grubuna yer verilmiştir.
Altıncı bölümde Lie cebiri oluşturulmuştur.
Yedinci bölümde ise genelleştirilmiş bikompleks sayıların IR^3 de uygulamalarına yer verilmiştir.
Sekizinci bölümde tartışma ve sonuca yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılar, Hiperyüzey, Lie Cebiri, Lie Grubu, Manifold.

ABSTRACT

GENERALIZED BICOMPLEX NUMBERS
AND
THEIR APPLICATIONS

KUŞ, Murat
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Faik BABADAĞ
February 2017, 50 pages

The thesis consists of eight parts. In the fist part, information about the introduction, thesis purpose and resource summary is given.

In the second section, fundamental concepts and theorems which will be necessary in the next sections are given.

In the third part, after defining the generalized bikomplex number, addition, scaler multiplication, conjure norm and inverse features are given.

In the fourth part, generalized bicomplex numbers real matrix representations are given.

In the fifth part, matrix Lie Grup, generalized bikomplex numbers, monifold structure and Lie grup are given.

In the sixth paragraph lie algebra are given.

In the seventh part the applications of generalized bikomplex numbers on IR^3 are given.

In the eighth part, discussions and results are given.

Key Words: Generalized Bicomplex Numbers, Hypersurface, Lie Algebra, Lie Group, Monifold.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren akademik fikirleri ile katkıda bulunan Yrd.Doç.Dr. Faik BABADAĞ'a çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımlarını gördüğüm hocam Prof. Dr. Yusuf YAYLI ve Prof.Dr.F.Nejat EKMEKCİ'ye en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım süresince birçok fedakarlık göstererek beni destekleyen kızım Nazlı, ablam Nazan, yiğenlerim Öner ve Onur'a en derin duygularım ile teşekkür ederim.
Ayrıca bu tezin yazım çalışmalarında yanımda bulunan öğretmen arkadaşım Hidayet ÇELİK'e ve bütün öğretmen arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

E^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
IR^n	n-boyutlu reel vektör uzayı
$\| \ \|$	Norm işareti
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$\otimes$	Genelleştirilmiş Bikompleks sayıların çarpımı
$\oplus$	Genelleştirilmiş Bikompleks sayıların toplamı
$\mathbb{C}_1$	Bikompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}_\alpha$	Genelleştirilmiş kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{C}_{\alpha\beta}$	Genelleştirilmiş Bikompleks sayılar cümlesi
w^*	w Genelleştirilmiş Bikompleks sayısının eşleniği
w^{-1}	w Genelleştirilmiş Bikompleks sayısının tersi
(X, G)	G Lie Grubunun Lie Cebiri
Hom	Homomorfizma
M	Hiperyüzey

1. GİRİŞ

Bikompleks sayılar, 1892'de cebirin özelliklerini geliştirmek amacı ile yapılan çalışmalar sonucunda, Corrada Serge bir makalesinde yer vermiştir. Burada bikompleks sayılar, trikompleks sayılar, … , n-kompleks sayılar ele alınmıştır.

Bikompleks Sayılar, Price 1991'de analiz yönüyle ele alınmış ve geniş bir şekilde incelenmiştir. Rochon 2006'da bikompleks sayılar için eşlenik kavramlarını ele almıştır.

Bikompleks Sayıların, kuaterniyonlara benzer bir şekilde olduğu görülmüştür. Buradan hareket edilerek bikompleks sayıların reel ve kompleks matris temsilleri kuaterniyonlara benzer şekilde elde edilmiştir. Kuaterniyonlarda değişme özelliği olmadığından sağdan ve soldan çarpımları sonucu farklı matrisler elde edilmişti. Bikompleks sayılarda değişme özelliği olduğu için tek matris elde edilmiştir.

1894'de Scheffers tek kompleks değişkenli fonksiyonların bikompleks fonksiyonlara bir genelleştirilmesini verdi. Bikompleks sayılarla ilgili gelişmelerin en çok kaydedildiği yıllar 1928-1940 yıllarıdır. Özellikle 1933'de yazdığı makalede, Ringleb'in bikompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla tek kompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla arasındaki bağlantıyı vermesi ile bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır. Günümüzde, hiperkompleks sayılar ya da kuaterniyonlar teorisi alanlarında bu sayılarla yapılan çalışmalara rastlanmaktadır. [1-2-3]

Bu tezde,

$$i_1^2 = -\alpha \quad i_2^2 = -\beta \qquad (\alpha, \beta \neq 0)$$

$$i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_3 \quad i_3^2 = (i_1 i_2)^2 = (i_2\, i_1)^2 = \alpha\beta \quad \text{alınarak,}$$

Genelleştirilmiş bikompleks sayılar elde edilmiştir. Genelleştirilmiş bikompleks sayıların eşlenik durumları incelenmiş, reel matris gösterimi, matris Lie grubu, bir M hiperyüzeyinin Lie cebiri yapısı elde edilmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanmasında [4-5-6] nolu kaynaklarda genelleştirilmiş bikompleks sayılar, Lie grup ve Lie cebir ile ilgili bazı temel tanımlar verilmiştir.
Ayrıca [1-2-3-7-8-9-10] nolu kaynaklarda, genelleştirilmiş bikompleks sayıların genel özellikleri, eşlenik durumları incelenmiş, genelleştirilmiş bikompleks sayıların reel matris gösterimi, matris Lie grubu, hiperyüzeyindeki Lie cebirleri elde edilmiş, genelleştirilmiş bikompleks sayılar ile ilgili çeşitli kavramlar ve örneklere yer verilmiştir.

1.2. Tezin Amacı

An Introduction to Multicomplex Spaceces and Functions isimli kitapta Bikompleks sayılar Analiz yönüyle geniş bir şekilde ele alınmış, Bikompleks sayılar yardımıyla bir fonksiyon gibi düşünülerek türevlenebilmesi, integrallenebilmesi şartları incelenmiş ve Cauch.Riemann matrisleri elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Bikompleks sayıların hareket operatörü olarak ele alınması ve incelenmesi amacımızdır. Burada amacımız Genelleştirilmiş Bikompleks sayıların cebir özelliklerini, matris Lie grubu ve Lie cebir yapısını elde etmek olacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lie Grubu

Tanım 2.1.1. (Lie Grubu)

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine Lie Grubu denir.

L_1: M ' nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.

L_2: $M \times M \to M$

$(a,b) \to ab^{-1}$

ifadesi her yerde diferensiyellenebilirdir.

M' ye Lie grubunun temel manifoldu ve G'ye de temel grubu denir. [4]

Tanım 2.1.2. (Matris Lie Grubu)

$\{[a_{ij}]: a_{ij} \in IR\}$ matris uzayının bir alt manifoldu, matrislerin çarpma işlemine göre bir grup ise bu gruba Matris Lie Grubu denir. [4]

Tanım 2.1.3. (Lie Cebiri)

V bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$[\ \ ] : V \times V \to V$

$(X,Y) \to [X,Y]$ işlemi

1) $\forall\, a, b \in IR$ ve $\forall\, X, Y \in V$ için bilineerdir.

a) $[aX + bY, Z]= a[X, Z] + b[Y, Z]$

b) $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$

2) $\forall\, X,Y \in V$ için Antisimetriktir.

$[X, Y] = -[Y, X]$

3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

özeliklerine sahip ise $(X, [\,,])$ ikilisine bir Lie Cebiri denir. [5]

Tanım 2.1.4.

G bir Lie grubu olsun. Belli bir $g_o \in G$ noktasında $I_{g_o} : G \to G$ dönüşümü $\forall g \in G$ için $I_{g_o}(g) = g_o g$ şeklinde tanımlanır ve G üzerinde bir sol paralelizm (öteleme) adını alır. [4]

Tanım 2.2.1. (Sol İnvaryant Vektör Alanı)

G bir matris Lie grubu ve G üzerinde bir vektör alanı X olsun.Eğer $\forall\ g_0,\ g_1 \in$ G için $I_{(g_0)_*}X(g_1) = X(g_0 g_1)$ yani

$\forall$ g $\in$ G için $I_{(g)_*}$ o X = X o $I_{(g)}$

ise X vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı denir.

$\chi_I = \{X \mid X \in \chi,\ I_{(g)_*} \text{ o } X = X \text{ o } I_{(g)}\}$ cümlesi X vektör alanları uzayının bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya sol invaryant vektör alanlarının uzayı denir. [4]

Tanım 2.2.2. (Permanentler)

Bir A $\in M_n(F)$ matrisinin diğer bir skaler değerli fonksiyonu permanent fonksiyonudur. Permanent "artı determinant''olarakta bilinir. [4]

2.3 Süreklilik

Tanım 2.3.1. (Süreklilik)

X ve Y birer topolojik uzay, f: X→ Y fonksiyon $x_0 \in$ X olsun.

$f(x_0)$ noktasının her V komşuluğu için f (U) ⊂ V olacak şekilde x_0 noktasının bir U komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. [6]

Tanım 2.3.2. (Homeomorfizim)

X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir f: X → Y fonksiyonu birebir ve örten fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise f ye X den Y ye bir Homeomorfizim (topolojik dönüşüm) denir. f bir homeomorfizim olduğu zaman X ve Y uzaylarına da topolojik olarak denktirler veya kısaca homeomorfiktirler denir.[6]

Tanım 2.3.3. (E^n de eğri)

n- boyutlu Öklid uzayı E^n ve IR'nin bir irtibatlı açık alt cümlesi I olmak üzere, $\boldsymbol{\alpha}$: I ⊂ IR → E^n dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\boldsymbol{\alpha}$(I) cümlesine E^n de bir eğri denir. [5]

2.4. Hiperyüzey

Tanım 2.4.1.

E^n n-boyutlu Öklid uzayında (n-1) boyutlu bir yüzey veya (n-1) - yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir.

Öyle ki bu M cümlesi M=$\{x \in U \subset E^n \mid f: U \to IR \text{ , dif. bilir, U açık cümle}\}$

$$x \to f(x) = c \quad (c \in IR)$$

$\Delta f\,|_p \neq 0 \,, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^n de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir.

E^nde bir (n-1) - yüzey, n > 3 olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır. [4]

2.5. Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.5.1. (Topolojik Uzay)

X bir küme, τ ise X in altkümelerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir ailesi olsun.

a) $X \in \tau$ ve $\emptyset \in \tau$

b) τ ailesinin sonlu sayıda elemanlarının arakesiti τ ya aittir.

c) τ nun herhangi sayıda elemanının birleşimi yine τ ya aittir. Bu durumda τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir. τ ailesinin her bir elemanına τ-açık küme veya kısaca açık küme, X kümesinin her elamanına da nokta denir. [6]

Tanım 2.5.2. (Hausdorff Uzayı)

Bir (X, τ) Topolojik uzayı verilsin.

X in farklı her x, y noktaları için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde x in bir U, y nin bir V komşuluğu varsa X uzayına Hausdorff Uzayı veya T_2 uzayı denir. [6]

Tanım 2.5.3. (Topolojik Manifold)

M bir Hausdorff uzayı olsun. M' nin her bir açık cümlesi E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorf ve M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebiliyorsa M' ye n-boyutlu topolojik manifold denir. [5]

Tanım 2.6.1. (Harita)

M bir topolojik manifold olsun. $U \subset M$ açık alt cümlesinden E^n bir V açık alt cümlesine bir $X{:}U \to V$ homeomorfizm verilsin. (X, U) ikilisine M 'de bir koordinat komşuluğu veya harita denir. [2]

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "x_i = y_i \circ x"'] & E^n \arrow[d, "y_i"] \\ & IR \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1.

$x_i = y_i \circ x$ olmak üzere x_i lere x haritasına bağlı koordinat fonksiyonları denir. [4]

Tanım 2.6.2. (Atlas)

M n-boyutlu topolojik manifold ve A' da α indislerinin cümlesi olsun. $U_\alpha \subset M$ açık alt cümlelerinin $\{U_\alpha\}_\alpha \in A$ ailesi M nin örtüsü olsun. Her bir U_α nın E^n deki bir V_α açık alt cümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. Böylece elde edilen (X_α, U_α) haritalarının

$$S = \{(X_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

ailesine M nin koordinat komşuluğu sistemi veya atlası denir. [4]

Tanım 2.6.3

E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere bir

$f{:}U \to IR$ fonksiyonu r inci mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyona C^r sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. [5]

Tanım 2.6.4. (C^∞ Sınıfından Fonksiyon)

f, IR^n uzayından IR ye giden bir fonksiyon olsun. f sürekli ise "f fonksiyonu, C^0 sınıfından bir fonksiyondur"denir. IR^n dan IR ye giden C^0 sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^0(IR^n, IR)$ biçiminde gösterilir.

IR^n nın her noktasında f fonksiyonunun kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli ise " f fonksiyonu, C^1 sınıfındandır " denir.

f fonksiyonunun IR^n in her bir noktasında r ıncı basamaktan kısmi türevleri varsa ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise " f fonksiyonu, C^r sınıfındandır " denir. IR^n den IR ye giden C^r sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^r(IR^n, IR)$ biçiminde gösterilir.

IR^n nın her bir p noktasında f fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri varsa "f fonksiyonu, C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur " denir. IR^n den IR ye giden C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(IR^n, IR)$ biçiminde gösterilir.

$p \in IR^n$ için f fonksiyonu p noktasının en az bir açık komşuluğunda düzgün ise " f fonksiyonu, p noktasında C^∞ sınıfındandır veya düzgün (pürüzsüz) fonksiyondur" denir. [4]

Tanım 2.7.1. (C^r sınıfından atlas)

n- boyutlu topolojik manifoldunun bir atlası $S = \{(X_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun.

$$X_\alpha(V_\alpha) \cap X_\beta(V_\beta) \neq \emptyset \quad (\alpha, \beta) \in AXA$$

olacak şekilde her $\alpha, \beta \in A\,X\,A$ için $X_\alpha^{-1} o\, X_\beta$ ve $X_\beta^{-1} o\, X_\alpha$ fonksiyonları $r \in N$ için C^r sınıfından ise S atlasına C^r sınıfından atlas denir. [5]

Tanım 2.7.2. (Diferensiyellenebilir Manifold)

M bir n-boyutlu manifold ve M nin bir S atlası C^r sınıfından ise M'ye n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir. [5]

Tanım 2.7.3. (Diferensiyellenebilir Yapı)

Bir topolojik n-manifold M ve M nin atlası $S = \{(X_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun.

Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere,

$\forall\, \alpha, \beta \in A$ ya karşılık gelen $\Phi_{\beta\alpha}$ ve $\Phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonları C^r sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C^r sınıfından diferensiyellenebilir denir. S atlası M üzerinde C^r sınıfından olduğu zaman M üzerinde C^r sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir. [5]

Tanım 2.8.1. (Bikompleks Sayılar)

Bir bikompleks sayı sıralı dört sayının $+1, i_1, i_2$ ve i_3 gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir. Burada birinci birim 1 bir reel, diğer üç birim ise

$i_1^2 = i_2^2 = -1 \quad i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_3$ özeliklerine sahiptir.

Böylece bikompleks sayı $w_1, w_2, w_3, w_4 \in IR$ olmak üzere,

$w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4$ biçiminde ifade edilebilir. Burada w_1, w_2, w_3, w_4 reel sayılarına w bikompleks sayının bileşenleri denir. Bikompleks sayılar cümlesini $\mathbb{C}_{\mathbf{1}}$ ile gösterelim.

$\mathbb{C}_{\mathbf{1}} = \{w \,|\, w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4\,,\ i_1^2 = i_2^2 = -1,\ i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_3\,,\ w_{1-4} \in IR\}$

biçiminde ifade edilebilir. [7] (2.1)

Tanım 2.8.2. (Genelleştirilmiş Kompleks Sayılar)

Bir genelleştirilmiş kompleks sayılar $c = a + i_1 b$, $i_1^2 = -\alpha$ $a, b, \alpha \in IR$ biçimindedir. Genelleştirilmiş kompleks sayılar cümlesi $\mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha}}$ ile gösterilirse ($\alpha \neq 0$) olmak üzere,

$$\mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha}} = \{c \,|\, c = a + i_1 b \ \ i_1^2 = -\alpha \ \ a, b, \alpha \in IR\} \quad \text{olur.} \tag{2.2}$$

Burada a ve b ye genelleştirilmiş kompleks sayının bileşenleri denir.

Genelleştirilmiş Kompleks Sayılarda Toplama İşlemi

$+ \ : \ \mathbb{C}_\alpha \times \mathbb{C}_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}_\alpha$

$\forall c_1$ ve $c_2 \in \mathbb{C}_\alpha$ olmak üzere $c_1 = a_1 + i_1 b_1 \quad c_2 = a_2 + i_1 b_2$

$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + i_1(b_1 + b_2)$ şeklinde tanımlanır.

Böylece $(\mathbb{C}_\alpha, +)$ ikilisi bir Abel gruptur.

Genelleştirilmiş Kompleks Sayılarda Skaler ile Çarpım

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\odot$: IR x $\mathbb{C}_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}_\alpha$ $\forall c \in \mathbb{C}_\alpha$ ve $\forall \lambda \in$ IR olmak üzere,

$(\lambda, c) \longrightarrow \lambda \odot c = \lambda a + \lambda i_1 b$ şeklinde tanımlanır.

$\forall \lambda, \mu \in$ IR , $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}_\alpha$ için

i) $(\lambda + \mu) \odot c_1 = (\lambda \odot c_1) \oplus (\mu \odot c_1)$

ii) $\lambda \odot (c_1 \oplus c_2) = (\lambda \odot c_1) \oplus (\lambda \odot c_2)$

iii) $(\lambda . \mu) \odot c_1 = \lambda \odot (\mu \odot c_1)$

iv) $1 \odot c_1 = c_1$ özellikleri sağlanır.

Bu durumda $\{\mathbb{C}_\alpha , \oplus , IR, +, \cdot , \odot\}$ cümlesi bir vektör uzayıdır.

Genelleştirilmiş Kompleks Sayılarda Çarpma

$\otimes : \mathbb{C}_\alpha \text{ x } \mathbb{C}_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}_\alpha$

$(c_1, c_2) \longrightarrow c_1 \otimes c_2 = c_2 \otimes c_1$

$\otimes$ işlemini kısaca " . " ile göstereceğiz. $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}_\alpha$ olmak üzere

$c_1 . c_2 = (a_1 a_2 - \alpha b_1 b_2) + i_1(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ dır.

$\otimes$	1	i_1
1	1	i_1
i_1	i_1	$-\alpha$

a) Genelleştirilmiş iki kompleks sayının çarpımı da genelleştirilmiş bikompleks sayıdır.

b) Genelleştirilmiş kompleks sayılarda çarpma işlemi birleşimlidir.

c) Genelleştirilmiş kompleks sayılarda çarpma işlemi dağılımlıdır.

d) Genelleştirilmiş kompleks sayı çarpma işlemi değişmelidir.

Buna göre $\{\mathbb{C}_\alpha, \oplus, \text{IR}, +, \cdot , \odot, \otimes\}$ sistemi bir cebirdir.

Bu cebire genelleştirilmiş kompleks sayılar cebiri denir.

Bu cebirin bir bazı $\{1, i_1\}$ dır ve boyutu 2 dir.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILAR

3.1. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Tanımı ve özellikleri

Bir genelleştirilmiş bikompleks sayı sıralı dört sayının +1, i_1, i_2 ve i_3 gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Burada birinci birim 1 reel sayı, diğer üç birim ise

$$i_1^2 = -\alpha \quad i_2^2 = -\beta$$

$$i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_3 \quad i_3^2 = (i_1 i_2)^2 = (i_2\, i_1)^2 = \alpha\beta \tag{3.1}$$

özelliklerine sahiptir. [1]

Burada $\alpha, \beta \in IR$ ve $\alpha, \beta \neq 0$ olmak üzere bir genelleştirilmiş bikompleks sayı

$$w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4 \tag{3.2}$$

biçiminde ifade edilir. Burada w_1, w_2, w_3, w_4 reel sayılarına w genelleştirilmiş bikompleks sayısının bileşenleri denir. Genelleştirilmiş bikompleks sayılar kümesi

$$\mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} = \left\{ w \middle| w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4 \,,\, i_1^2 = -\alpha \;\; i_2^2 = -\beta \;\; i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_3 \;\; w_{1\text{-}4} \in IR \right\} \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir.

Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Toplama İşlemi

$+ \;:\; \mathbb{C}_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha\beta}$

$\forall\, w, u \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ olmak üzere ,

$w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4 \quad u = u_1 + i_1 u_2 + i_2 u_3 + i_3 u_4$

$w + u = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4 + u_1 + i_1 u_2 + i_2 u_3 + i_3 u_4$

$w + u = (w_1 + u_1) + (w_2 + u_2) i_1 + (w_3 + u_3) i_2 + (w_4 + u_4) i_3$

Şeklinde tanımlanır. Böylece $(\mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}, +)$ ikilisi bir Abel gruptur. Burada etkisiz elaman $0 = 0 + 0i_1 + 0i_2 + 0i_3 = (0, 0, 0, 0)$ genelleştirilmiş bikompleks sayısıdır.

Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Skaler ile Çarpım

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\forall\, w \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ ve $\forall\, \lambda \in$ IR olmak üzere,

$\odot\ :\ \text{IR} \times \mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$

$$(\lambda, w) \longrightarrow \lambda \odot w = \lambda\, w_1 + \lambda i_1 w_2 + \lambda i_2 w_3 + \lambda i_3 w_4$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan bu işlem,

$\forall\, \lambda, \mu \in \text{IR}\ ,\ \forall\ w, u \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ için

1) $\lambda \odot (w \oplus u) = (\lambda \odot w) \oplus (\lambda \odot u)$

2) $(\lambda + \mu) \odot w = (\lambda \odot w) \oplus (\mu \odot w)$

3) $(\lambda . \mu) \odot w = \lambda \odot (\mu \odot w)$

4) $1 \odot w = w$ özellikleri sağlanır.

Bu durumda $\{\mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}\ ,\ \oplus\ ,\ \text{IR}\ , +\ ,\ \cdot\ ,\ \odot\}$ cümlesi bir vektör uzayıdır.

Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Çarpma

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$\otimes : \mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \times \mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha\beta}$

$$(w, u) \longrightarrow w \otimes u = u \otimes w$$

$\otimes$ işlemini kısaca " . " ile göstereceğiz. $\forall\, w, u \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta}}$ olmak üzere,

$w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4$ ve $u = u_1 + i_1 u_2 + i_2 u_3 + i_3 u_4$ için,

$$w.u = \left\{ \begin{matrix} w_1u_1 - \alpha w_2u_2 - \beta w_3u_3 + \alpha\beta w_4u_4 + i_1\left(w_1u_2 + w_2u_1 - \beta w_3u_4 - \beta w_4u_3\right) \\ + i_2\left(w_1u_3 - \alpha w_2u_4 + w_3u_1 - \alpha w_4u_2\right) + i_3\left(w_1u_4 + w_2u_3 + w_3u_2 + w_4u_1\right) \end{matrix} \right\} \tag{3.4}$$

$\otimes$	1	i_1	i_2	i_3
1	1	i_1	i_2	i_3
i_1	i_1	$-\alpha$	i_3	$-\alpha i_2$
i_2	i_2	i_3	$-\beta$	$-\beta i_1$
i_3	i_3	$-\alpha i_2$	$-\beta i_1$	$\alpha\beta$

Şekil 3.1.

Genelleştirilmiş bikompleks sayılar aşağıdaki özelliklere sahip olduğu görülür.[1]

a) Genelleştirilmiş iki bikompleks sayının çarpımı da genelleştirilmiş bikompleks sayıdır.

b) Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda çarpma işlemi birleşimlidir.

c) Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda çarpma işlemi dağılımlıdır.

d) Genelleştirilmiş bikompleks sayı çarpma işlemi değişmelidir.

Buna göre $\{\mathbb{C}_{\alpha\beta},\ \oplus,\ IR,\ +,\ \cdot\ ,\ \odot,\ \otimes\}$ sistemi bir cebirdir.

Bu cebire genelleştirilmiş bikompleks sayılar cebiri denir.

Bu cebirin bir bazı $\{1,\ i_1\ ,\ i_2,\ i_3\}$ dır ve boyutu 4 dür.

3.2. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Eşlenik Kavramı

i_1, i_2 ve i_3 birimlerine Göre Eşlenikler

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda eşlenik kavramı üç şekilde ifade edilir.

Bu eşnenikleri sırası ile $w^*_{(i_1)}$, $w^*_{(i_2)}$ ve $w^*_{(i_3)}$ ile gösterelim.

$w = (w_1 + i_1 w_2) + i_2(w_3 + i_1 w_4)$ olmak üzere,

$w^*_{(i_1)} = (w_1 - i_1 w_2) + i_2(w_3 - i_1 w_4)$

$w^*_{(i_2)} = (w_1 + i_1 w_2) - i_2(w_3 + i_1 w_4)$

$w^*_{(i_3)} = (w_1 - i_1 w_2) - i_2(w_3 - i_1 w_4)$ olarak tanımlıdır.

i_1, i_2 ve i_3 Birimlerine Göre Eşleniklerin Özellikleri

$\forall\, w, u \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ ve λ, $\mu \in IR$ olmak üzere

1) $(w^{*})^{*} = w$

2) $(w.u)^{*} = w^{*} u^{*}$

3) $(w + u)^{*} = w^{*} + u^{*}$

4) $(\lambda w)^{*} = \lambda w^{*}$

5) a) $(\lambda w + \mu u)^{*} = \lambda w^{*} + \mu u^{*}$ b) $(\lambda w - \mu u)^{*} = \lambda w^{*} - \mu u^{*}$ dir.

w Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarının,

i_1, i_2 ve i_3 Birimlerine Göre Eşlenikleri ile Çarpımı

1) i_1 - birimine göre ,

$$w.w^{*}_{(i_1)} = [(w_1 + i_1 w_2) + i_2(w_3 + i_1 w_4)][(w_1 - i_1 w_2) + i_2(w_3 - i_1 w_4)]$$

$$w.w^{*}_{(i_1)} = \begin{Bmatrix} (w_1 + i_1 w_2)(w_1 - i_1 w_2) - \beta(w_3 + i_1 w_4)(w_3 - i_1 w_4) + \\ i_2[(w_1 + i_1 w_2).(w_3 - i_1 w_4) + (w_3 + i_1 w_4).(w_1 - i_1 w_2)] \end{Bmatrix}$$

$$w.w^{*}_{(i_1)} = \begin{Bmatrix} (w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 - \beta w_3{}^2 - \alpha\beta w_4{}^2) \\ + i_2[w_1 w_3 - i_1 w_1 w_4 + i_1 w_2 w_3 + \alpha w_2 w_4 \\ + w_3 w_1 - i_1 w_3 w_2 + i_1 w_4 w_1 + \alpha w_4 w_2] \end{Bmatrix}$$

$$w.w^{*}_{(i_1)} = w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 - \beta w_3{}^2 - \alpha\beta w_4{}^2 + 2i_2[w_1 w_3 + \alpha w_2 w_4] \qquad (3.5)$$

2) i_2 - birimine göre ,

$$w.w^{*}_{(i_2)} = [(w_1 + i_1 w_2) + i_2(w_3 + i_1 w_4)][(w_1 + i_1 w_2) - i_2(w_3 + i_1 w_4)]$$

$$w.w^{*}_{(i_2)} = (w_1 + i_1 w_2)^2 + \beta(w_3 + i_1 w_4)^2$$

$$w.w^{*}_{(i_2)} = w_1{}^2 + 2w_1 w_2 i_1 - \alpha w_2{}^2 + \beta(w_3{}^2 + 2w_3 w_4 i_1 - \alpha w_4{}^2)$$

$$w.w^{*}_{(i_2)} = w_1{}^2 + 2w_1 w_2 i_1 - \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + 2\beta w_3 w_4 i_1 - \alpha\beta w_4{}^2$$

$$w.w^{*}_{(i_2)} = w_1{}^2 - \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 - \alpha\beta w_4{}^2 + 2i_1(w_1 w_2 + \beta w_3 w_4) \qquad (3.6)$$

3) i_3 - birimine göre ,

$$w.w^*_{(i_3)} = [(w_1 + i_1w_2) + i_2(w_3 + i_1w_4)][(w_1 - i_1w_2) - i_2(w_3 - i_1w_4)]$$

$$w.w^*_{(i_3)} = \begin{Bmatrix} (w_1 + i_1w_2)(w_1 - i_1w_2) - i_2(w_1 + i_1w_2)(w_3 - i_1w_4) \\ +i_2(w_3 + i_1w_4)(w_1 - i_1w_2) + \beta(w_3 + i_1w_4)(w_3 - i_1w_4) \end{Bmatrix} \qquad (3.7)$$

$$w.w^*_{(i_3)} = \begin{Bmatrix} w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta(w_3{}^2 + \alpha w_4{}^2) \\ +i_2[(w_3 + i_1w_4)(w_1 - i_1w_2) - (w_1 + i_1w_2)(w_3 - i_1w_4)] \end{Bmatrix}$$

$$w.w^*_{(i_3)} = w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + \alpha\beta w_4{}^2 + 2i_1i_2(w_1w_4 - w_3) \quad \text{dir.} \qquad (3.8)$$

3.3. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda Norm Kavramı

Öncelikle,

$\mathbb{C}_{\alpha\beta}{}'$de bir g fonksiyonu,

$\forall\, w, u \in \mathbb{C}_{\alpha\beta} \quad w = w_1 + i_1w_2 + i_2w_3 + i_1i_2w_4 \quad u = u_1 + i_1u_2 + i_2u_3 + i_1i_2u_4$

$g : \mathbb{C}_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}_{\alpha\beta} \longrightarrow IR$

$$(w,\ u) \longrightarrow g(w,\ u) = w_1u_1 + \alpha w_2u_2 + \beta w_3u_3 + \alpha\beta w_4u_4 \qquad (3.9)$$

olarak tanımlıyalım. Bu fonksiyonun hangi şartlarda iç çarpım olacağını inceleyelim.

$\forall\, w, u, z \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ ve $\forall\, \lambda \in IR$ için

i) $g(w,\ u) = g(u,\ w)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} g(w,\ u) &= w_1u_1 + \alpha w_2u_2 + \beta w_3u_3 + \alpha\beta w_4u_4 \\ &= u_1w_1 + \alpha u_2w_2 + \beta u_3w_3 + \alpha\beta u_4w_4 \\ &= g(u,\ w) \text{ dir.} \end{aligned}$$

ii) $g(w,\ u + z) = g(w,\ u) + g(w,\ z)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} &= w_1(u_1 + z_1) + \alpha w_2(u_2 + z_2) + \beta w_3(u_3 + z_3) + \alpha\beta w_4(u_4 + z_4) \\ &= w_1u_1 + \alpha w_2u_2 + \beta w_3u_3 + \alpha\beta w_4u_4 + w_1z_1 + \alpha w_2z_2 + \beta w_3z_3 + \alpha\beta w_4z_4 \\ &= g(w,\ u) + g(w,\ z) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$g(w + u,\ z) = g\,[(w_1 + u_1) + (w_2 + u_2)i_1 + (w_3 + u_3)i_2 + (w_4 + u_4)i_3\ ,\ z]$

$$= (w_1 + u_1)z_1 + \alpha (w_2 + u_2)z_2 + \beta(w_3 + u_3)z_3 + \alpha\beta(w_4 + u_4)z_4$$

$$= w_1z_1+\alpha w_2z_2+\beta w_3z_3+\alpha\beta w_4z_4 + u_1z_1+\alpha u_2z_2+\beta u_3z_3+\alpha\beta u_4z_4$$

$= g(w, z) + g(u, z)$ dir.

iii) $g(\lambda w, u) = g(w, \lambda u) = \lambda g(w, u)$

$$g(\lambda w, u) = \lambda w_1u_1+\lambda\alpha w_2u_2+\lambda\beta w_3u_3+\lambda\alpha\beta w_4u_4$$

$$= \lambda(w_1u_1+\alpha w_2u_2+\beta w_3u_3+\alpha\beta w_4u_4)$$

$$= \lambda g (w, u)$$

Benzer şekilde $g(w, \lambda u) = \lambda g(w, u)$ gösterilebilir.

iv) $g (w, w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$

$g (w, w) = 0$ olsun. $\alpha, \beta > 0$ olduğunu kabul edelim.

$g (w, w) = {w_1}^2 + \alpha {w_2}^2 + \beta {w_3}^2 + \alpha\beta {w_4}^2 = 0$ ise,

Böyle bir toplamın sıfır olması ${w_1}^2 = {w_2}^2 = {w_3}^2 = {w_4}^2 = 0$ olması ile mümkündür.

Buradan da, $w_1=w_2=w_3=w_4 = 0$ bulunur. w = 0 dır.

Şimdi de w = 0 olsun.

$w = 0+i_1 0+i_2 0+i_1 i_2 0$ olarak yazılabilir.

$g (w, w) = 0^2 + \alpha 0^2 + \beta 0^2 + \alpha\beta 0^2 = 0$ dır.

Böylece $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$'de $g (w, u) = w_1u_1+\alpha w_2u_2+\beta w_3u_3+\alpha\beta w_4u_4$ fonksiyonu bir iç çarpımdır.($\mathbb{C}_{\alpha\beta}$, g) ikilisi bir iç çarpım uzayıdır.

$N_{w_{(i_1)}} = \|w_{(i_1)}\|$, $N_{w_{(i_2)}} = \|w_{(i_2)}\|$ ve $N_{w_{(i_3)}} = \|w_{(i_3)}\|$ ile normu gösterelim.

M_{i_1} , M_{i_2} ve M_{i_3} hiperyüzeyleri aşağıdaki şekilde alalım.

$$M_{i_1} = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1w_3 + \alpha w_2w_4 = 0 , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\} \quad (3.10)$$

$$M_{i_2} = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1w_2 + \beta w_3w_4 = 0 , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\} \quad (3.11)$$

$$M_{i_3} = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1w_4 - w_2w_3 = 0 , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\} \quad (3.12)$$

1) M_{i_1} hiperyüzeyi üzerinde ve tanımlanan g(w, u) iç çarpıma göre, i_1 birimi için norm

$$w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 = (w_1 + i_1 w_2) + i_2(w_3 + i_1 w_4)$$

$$w^*_{(i_1)} = (w_1 - i_1 w_2) + i_2(w_3 - i_1 w_4)$$

$$w^*_{(i_1)} = w_1 - i_1 w_2 + i_2 w_3 - i_1 i_2 w_4$$

$N_{w_{(i_1)}} = \|w_{(i_1)}\| = \sqrt{|g(w, w^*_{(i_1)})|}$ olduğundan,

$$N_{w_{(i_1)}} = \sqrt{|g(w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 \,,\, w_1 - i_1 w_2 + i_2 w_3 - i_1 i_2 w_4)|}$$

$N_{w_{(i_1)}} = \sqrt{|w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 - \beta w_3{}^2 - \alpha\beta w_4{}^2|}$ dir. (3.13)

2) M_{i_2} hiperyüzeyi üzerinde ve tanımlanan g(w, u) iç çarpıma göre, i_2 birimi için norm

$$w^*_{(i_2)} = (w_1 + i_1 w_2) - i_2(w_3 + i_1 w_4)$$

$$w^*_{(i_2)} = w_1 + i_1 w_2 - i_2 w_3 - i_1 i_2 w_4$$

$N_{w_{(i_2)}} = \|w_{(i_2)}\| = \sqrt{|g(w, w^*_{(i_2)})|}$ olduğundan,

$$N_{w_{(i_2)}} = \sqrt{|g(w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 \,,\, w_1 + i_1 w_2 - i_2 w_3 - i_1 i_2 w_4)|}$$

$N_{w_{(i_2)}} = \sqrt{|w_1{}^2 - \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 - \alpha\beta w_4{}^2|}$ dir. (3.14)

3) M_{i_3} hiperyüzeyi üzerinde ve tanımlanan g(w, u) iç çarpıma göre, i_3 birimi için norm

$$w^*_{(i_3)} = (w_1 - i_1 w_2) - i_2(w_3 - i_1 w_4)$$

$$w^*_{(i_3)} = w_1 - i_1 w_2 - i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4$$

$N_{w_{(i_3)}} = \|w_{(i_3)}\| = \sqrt{|g(w, w^*_{(i_3)})|}$ olduğundan,

$$N_{w_{(i_3)}} = \sqrt{|g(w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 \,,\, w_1 - i_1 w_2 - i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4)|}$$

$N_{w_{(i_3)}} = \sqrt{|w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + \alpha\beta w_4{}^2|}$ dir. (3.15)

3.4. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayılarda İnvers Kavramı

$\forall w \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ Genelleştirilmiş bikompleks sayısının i_1, i_2 ve i_3 bileşenlerine göre inversleri sırası ile $w_{i_1}^{-1}$, $w_{i_2}^{-1}$ ve $w_{i_3}^{-1}$ olmak üzere,

1) i_1 birimi için w genelleştirilmiş bikompleks sayısının inversi

$$w_{i_1}^{-1} = \frac{w^*_{(i_1)}}{N_{w_{(i_1)}}} = \frac{(w_1 - i_1 w_2) + i_2(w_3 - i_1 w_4)}{\sqrt{|w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 - \beta w_3{}^2 - \alpha\beta w_4{}^2|}} \tag{3.16}$$

2) i_2 birimi için w genelleştirilmiş bikompleks sayısının inversi

$$w_{i_2}^{-1} = \frac{w^*_{(i_2)}}{N_{w_{(i_2)}}} = \frac{(w_1 + i_1 w_2) - i_2(w_3 + i_1 w_4)}{\sqrt{|w_1{}^2 - \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 - \alpha\beta w_4{}^2|}} \tag{3.17}$$

3) i_3 birimi için w genelleştirilmiş bikompleks sayısının inversi

$$w_{i_3}^{-1} = \frac{w^*_{(i_3)}}{N_{w_{(i_3)}}} = \frac{(w_1 - i_1 w_2) - i_2(w_3 - i_1 w_4)}{\sqrt{|w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + \alpha\beta w_4{}^2|}} \tag{3.18}$$

Örnek 3.1.

$\forall w, u \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ genelleştirilmiş bikompleks sayıları için,

$$\|w.u\|^2 - \|w\|^2\|u\|^2 = \left\{\begin{array}{l} 4\alpha\beta u_1 u_4(w_1 w_4 - w_2 w_3) - 4\alpha\beta u_2 u_3(w_1 w_4 - w_2 w_3), \\ 4\alpha\beta(w_1 w_4 - w_2 w_3).(u_1 u_4 - u_2 u_3), \\ 4\alpha\beta \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{vmatrix} . \end{array}\right\}$$

$$\|w.u\|^2 - \|w\|^2\|u\|^2 = 4\alpha\beta \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{vmatrix} \text{ dir. [2]} \tag{3.19}$$

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILARIN REEL MATRİS GÖSTERİMİ

4.1. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi

Bir $T: \mathbb{C}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}_{\alpha\beta}, \mathbb{C}_{\alpha\beta})$

$w \longrightarrow T(w) = T_W$ dönüşümünü,

$\forall\, u \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ için

$$T_W: \mathbb{C}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\alpha\beta}$$

$$u \longrightarrow T_W(u) = w \times u = u \times w \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4 \quad u = u_1 + i_1 u_2 + i_2 u_3 + i_3 u_4$$

olmak üzere,

i. $T_W(u+z) = w \times (u+z)$
$= (w \times u) + (w \times z)$
$= T_W(u) + T_W(z)$

ii. $T_W(\lambda u) = w \times (\lambda u)$ $\quad \lambda \in IR$
$= \lambda(w \times u)$
$= \lambda T_W(u)$ olduğundan T_W lineerdir.

Şimdi T_W lineer dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulalım.

$$T_W(1) = w \times 1 = w = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 \tag{4.2}$$

$$T_W(i_1) = w \times i_1 = (w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4) \times i_1$$

$$T_W(i_1) = w \times i_1 = -\alpha w_2 + w_1 i_1 - \alpha i_2 w_4 + i_1 i_2 w_3 \tag{4.3}$$

$$T_W(i_2) = w \times i_2 = (w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4) \times i_2$$

$$= -\beta w_3 - \beta w_4 i_1 + w_1 i_2 + w_2 i_1 i_2 \tag{4.4}$$

$$T_W(i_1 i_2) = w \times i_1 i_2 = (w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4) \times i_1 i_2$$

$$= \alpha\beta w_4 - \beta w_3 i_1 - \alpha w_2 i_2 + w_1 i_1 i_2 \tag{4.5}$$

$$T(w) = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Bu matris Hamilton operatörlerine benzerdir. Kuaterniyon değişimli olmadığı için sağdan ve soldan çarpımlarının her biri için ayrı ayrı farklı iki matris bulunur. Fakat genelleştirilmiş bikompleks sayılar değişimli olduğu için bir matris elde edilir. Bu matrisini $T(w)$ ile göstereceğiz.

$$T(w) = w_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + w_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ w_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ şeklinde yazılabilir.} \tag{4.7}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$T(w) = w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3 + w_4 K_4$ şeklinde yazılabilir. (4.9)

$G_{\alpha\beta} = \{T(w) | w \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}\}$ $G_{\alpha\beta}$ matris cümlesi IR_4^4 uzayının alt uzayıdır.

$Sp\{K_1, K_2, K_3, K_4\} = G_{\alpha\beta}$ dir ve boy $G_{\alpha\beta} = 4$ dür.

$1 \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ için $T(1) = K_1$

$i_1 \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ için $T(i_1) = K_2$

$i_2 \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ için $T(i_2) = K_3$

$i_1 i_2 \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ için $T(i_1 i_2) = K_4$ olduğu görülür.

Şimdi K_1, K_2, K_3, K_4 arasındaki bağıntıları gösterelim.

1)

$$K_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2^2 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = -\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\alpha K_1$$

$K_2^2 = -\alpha K_1$ dir. (4.10)

2)

$$K_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3^2 = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -\beta K_1$$

$K_3^2 = -\beta K_1$ dir. (4.11)

3)

$$K_4^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4^2 = \begin{bmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} = \alpha\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha\beta K_1$$

$K_4^2 = \alpha\beta K_1$ dir. (4.12)

4)

$$K_2K_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K_4$$

$$K_3K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K_4$$

$K_2K_3 = K_3K_2 = K_4$ dir. (4.13)

5)

$$K_4K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4K_3 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 1 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = -\beta \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\beta K_2$$

$$K_3K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3K_4 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} = -\beta \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -\beta K_2 \quad \text{dir.}$$

$$K_4K_3 = K_3K_4 = -\beta K_2 \quad \text{dir.} \tag{4.14}$$

6)

$$K_2K_4 = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha K_3$$

$$K_4K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_4K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\alpha K_3 \text{ dir.}$$

$$K_2K_4 = K_4K_2 = -\alpha K_3 \quad \text{dir.} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} K_2^2 &= -\alpha K_1 \\ K_3^2 &= -\beta K_1 \\ K_4^2 &= \alpha\beta K_1 \\ K_2K_3 &= K_3K_2 = K_4 \\ K_3K_4 &= K_4K_3 = -\beta K_2 \\ K_2K_4 &= K_4K_2 = -\alpha K_3 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sonuç olarak,

$$\frac{K_2^2}{-\alpha} = \frac{K_3^2}{-\beta} = \frac{K_4^2}{\alpha\beta} = K_1$$

$$-\alpha\beta K_1 = \beta K_2^2 = \alpha K_3^2 = -K_4^2 \quad \text{dir.}$$

4.2. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Bir Diğer Matris Gösterimi

Şimdi (3.3) de verilen

$\mathbb{C}_{\alpha\beta}=\left\{w \middle| w = w_1+i_1w_2+i_2w_3+i_3w_4 \text{ , } i_1^2 =-\alpha \;\; i_2^2=-\beta \;\; i_1i_2 = i_2i_1 = i_3 \; w_{1\text{-}4}\in IR\right\}$

cümlesini ele alalım.

$w = w_1+i_1w_2+i_2w_3+i_3$ genelleştirilmiş bikompleks sayısı,

$w= w_1+i_1w_2+i_2w_3+i_1i_2w_4$ şeklinde yazılabilir.

$$w = \underbrace{(w_1 + i_1w_2)}_{a_1} + i_2\underbrace{(w_3 + i_1w_4)}_{a_2} = a_1 + i_2a_2 \qquad i_2^2 = -\beta \tag{4.17}$$

$w = a_1 + i_2a_2$ şeklinde düzenleyebiliriz. Buradaki $a_1, a_2 \in \mathbb{C}_{\alpha}$ dir.

$\mathbb{C}_{\alpha}=\{c|c = a + i_1b \text{ , } i_1^2 = -\alpha \;\; a, b, \alpha \in IR\}$ dır.

$\mathbb{C}_{\beta} = \left\{w \middle| w = a_1 + i_2a_2 \text{ , } i_2^2 = -\beta \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}_{\alpha} \right\}$ şeklinde yazılabilir. (4.18)

$\mathbb{C}_{\beta}$, $\mathbb{C}_{\alpha}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.Bu uzayın bir bazı $\{1, i_2\}$ dir. (4.19)

$T_W: \mathbb{C}_{\beta} \longrightarrow \mathbb{C}_{\beta}$

$$u \longrightarrow T_W(u) = wu = uw \quad w = a_1 + i_2a_2$$

$T_W(1) = w.1= a_1 + i_2a_2$

$T_W(i_2) = w.\, i_2 =(a_1 + i_2a_2)\, i_2= a_1i_2 - \beta a_2 = -\beta a_2 + a_1i_2$

$$T(w)=\begin{bmatrix} a_1 & -\beta a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ = diyelim.

$T(w) = a_1F_1 + a_2F_2$ olarak yazılır. (4.21)

Özel olarak a_1 , a_2 kompleks sayılarını $a_1 = a$, $a_2 = b$ $\forall$ a,b∈IR

T(w)= $\begin{bmatrix} a & -\beta b \\ b & a \end{bmatrix}$ bu ise $w = a + i_2 b$ sayısının matris gösterimidir.

Şimdi $\mathbb{C}_\beta$ cümlesinin halka olduğunu gösterelim.

$\mathbb{C}_\alpha = \{c | c = a + i_1 b,\ i_1^2 = -\alpha\ \ a,b,\alpha \in IR\}$

$\mathbb{C}_\beta = \{w | w = a_1 + i_2 a_2, i_2^2 = -\beta\ \ a_1, a_2 \in \mathbb{C}_\alpha\}$

$\forall w, u \in \mathbb{C}_\beta$ $w = a_1 + i_2 a_2$ $u = b_1 + i_2 b_2$ olsun.

a)

$$w + u = a_1 + i_2 a_2 + b_1 + i_2 b_2$$

$$= \underbrace{(a_1 + b_1)}_{c_1} + i_2 \underbrace{(a_2 + b_2)}_{c_2} = c_1 + i_2 c_2 \in \mathbb{C}_\beta$$

b)

$$w.u = (a_1 + i_2 a_2).(b_1 + i_2 b_2)$$

$$= a_1 b_1 + i_2 a_1 b_2 + i_2 a_2 b_1 + i_2^2 a_2 b_2$$

$$= a_1 b_1 + i_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1) - \beta a_2 b_2$$

$$= \underbrace{(a_1 b_1 - \beta a_2 b_2)}_{d_1} + i_2 \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{d_2} = d_1 + i_2 d_2 \in \mathbb{C}_\beta$$

O halde $(\mathbb{C}_\beta, +, .)$ Değişmeli bir halkadır**.**

Burada $0 = 0 + i_2 0$ ve $1 = 1 + i_2 0$ olarak belirlidir.

Ayrıca , $\forall w, u, y \in \mathbb{C}_\beta$ iken

$w(u + y) = wu + wy$ dır.

$w = a_1 + i_2 a_2$ $u = b_1 + i_2 b_2$ $y = c_1 + i_2 c_2$ olsun.

$$w(u + y) = (a_1 + i_2 a_2)[(b_1 + i_2 b_2) + (c_1 + i_2 c_2)]$$

$$= (a_1 + i_2 a_2)[(b_1 + c_1) + i_2 (b_2 + c_2)]$$

$$= (a_1 + i_2 a_2)(b_1 + c_1) + i_2 (a_1 + i_2 a_2)(b_2 + c_2)$$

$= a_1b_1 + a_1c_1 + i_2a_2 b_1 + i_2a_2 c_1 + i_2a_1b_2 + ja_1c_2 - \beta a_2b_2 - \beta a_2c_2$

$$= (a_1b_1 + a_1c_1 - \beta a_2b_2 - \beta a_2c_2) + i_2(a_2 b_1 + a_2 c_1 + a_1b_2 + a_1c_2) \quad (4.22)$$

$wu + wy = (a_1 + i_2a_2)(b_1 + i_2b_2) + (a_1 + i_2a_2)(c_1 + jc_2)$

$= a_1b_1 + i_2a_1b_2 + i_2a_2 b_1 - \beta a_2b_2 + a_1c_1 + i_2a_1c_2 + i_2a_2c_1 - \beta a_2c_2$

$$= (a_1b_1 + a_1c_1 - \beta a_2b_2 - \beta a_2c_2) + i_2(a_2 b_1 + a_2 c_1 + a_1b_2 + a_1c_2) \quad (4.23)$$

(4.22) ve (4.23) den $w (u + y) = wu + wy$ dır.

Teorem 4.1.

$\mathbb{C}_{\alpha}=\{c|c=a+i_1b,\ i_1^2=-\alpha\ \ a,b,\alpha\in IR\}$

$\mathbb{C}_{\beta} = \{w|w = a_1 + i_2a_2,\ i_2^2 = -\beta\ \ a_1, a_2 \in \mathbb{C}_{\alpha}\}$

$w = a_1 + i_2a_2 \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C}_{\alpha}$ için

1) $w\,.\,w^*_{(i_1)} = |a_1|^2 - \beta|a_2|^2 + 2i_2Re(a_1\overline{a_2})$

2) $w\,.\,w^*_{(i_2)} = |a_1|^2 + \beta|a_2|^2$

3) $w\,.\,w^*_{(i_3)} = |a_1|^2 + \beta|a_2|^2 - 2i_2Im(a_1\overline{a_2})$ dir.

İspat 4.1.

1) $w\,.\,w^*_{(i_1)} = (a_1 + i_2a_2).(\overline{a_1} + i_2\overline{a_2})$

$= a_1\overline{a_1} + i_2a_1\overline{a_2} + i_2a_2\overline{a_1} - \beta a_2\overline{a_2}$

$= (a_1\overline{a_1} - \beta a_2\overline{a_2}) + i_2(a_1\overline{a_2} + a_2\overline{a_1})$

$$= |a_1|^2 - \beta |a_2|^2 + i_2(a_1\overline{a_2} + a_2\overline{a_1}) \quad (4.24)$$

$a_1\overline{a_2} = (w_1 + i_1w_2)(w_3 - i_1w_4) = (w_1w_3 + \alpha w_2w_4) + i_1(w_2w_3 - w_1w_4)$

$a_2\overline{a_1} = (w_3 + i_1w_4)(w_1 - i_1w_2) = (w_3w_1 + \alpha w_2w_4) + i(w_1w_4 - w_2w_3)$

$$a_1\overline{a_2} + a_2\overline{a_1} = 2(w_1w_3 + \alpha w_2w_4) = 2Re(a_1\overline{a_2}) \quad (4.25)$$

(4.23) eşitliğini (4.22) de yerine yazalım.

$w\,.\,w^*_{(i_1)} = |a_1|^2 - \beta|a_2|^2 + 2\, i_2Re(a_1\overline{a_2})$ elde edilir.

2) $\quad w\,.\,w^*_{(i_2)} = (a_1 + i_2a_2).(a_1 - i_2a_2)$

$$= {a_1}^2 - i_2a_1a_2 + i_2a_2a_1 - (-\beta){a_2}^2$$

$$= {a_1}^2 - (-\beta){a_2}^2 = {a_1}^2 + \beta{a_2}^2$$

$w\,.\,w^*_{(i_2)} = |a_1|^2 + \beta|a_2|^2$ elde edilir. (4.26)

3) $\quad w\,.\,w^*_{(i_3)} = (a_1 + i_2a_2).(\overline{a_1} - i_2\overline{a_2})$

$$= a_1\overline{a_1} - i_2a_1\overline{a_2} + i_2a_2\overline{a_1} - (-\beta)a_2\overline{a_2}$$

$$= |a_1|^2 - i_2a_1\overline{a_2} + i_2a_2\overline{a_1} + \beta|a_2|^2$$

$$w\,.\,w^*_{(i_3)} = |a_1|^2 + \beta|a_2|^2 - i_2(a_1\overline{a_2} - a_2\overline{a_1}) \quad (4.27)$$

$$a_1\overline{a_2} = (w_1w_3 + \alpha w_2w_4) + i_1(w_2w_3 - w_1w_4)$$

$$a_2\overline{a_1} = (w_3w_1 + \alpha w_2w_4) + i_1(w_1w_4 - w_2w_3)$$

$a_1\overline{a_2} - a_2\overline{a_1} =$

$= (w_1w_3 + \alpha w_2w_4) + i_1(w_2w_3 - w_1w_4) - (w_3w_1 + \alpha w_2w_4) - i_1(w_1w_4 - w_2w_3)$

$= w_1w_3 + \alpha w_2w_4 + i_1w_2w_3 - i_1w_1w_4 - w_3w_1 - \alpha w_2w_4 - i_1w_1w_4 + i_1w_2w_3$

$= i_1w_2w_3 - i_1w_1w_4 - i_1w_1w_4 + i_1w_2w_3$

$= 2i_1w_2w_3 - 2i_1w_1w_4 = (2w_2w_3 - 2w_1w_4)i_1$

$a_1\overline{a_2} - a_2\overline{a_1} = 2(w_2w_3 - w_1w_4)i_1 = 2\mathrm{Im}(a_1\overline{a_2})$ (4.28)

(4.26) eşitliğini (4.25) de yerine yazalım.

$w\,.\,w^*_{(i_3)} = |a_1|^2 + \beta|a_2|^2 - 2i_2\mathrm{Im}(a_1\overline{a_2})$ olur.

Sonuç:

$$w \,.\, w^*_{(i_2)} = |a_1|^2 + \beta|a_2|^2$$

$\|w\|=\sqrt{|\,|a_1|^2 + \beta|a_2|^2|}$ $\quad |a_1|^2 + \beta|a_2|^2 \neq 0$ dır. w nin inversi vardır.

w nin inversini w^{-1} ile gösterelim. (4.29)

$$w^{-1} = \frac{w^*_{(i_2)}}{\sqrt{|\,|a_1|^2 + \beta|a_2|^2|}} = \frac{a_1 - i_2 a_2}{\sqrt{|\,|a_1|^2 + \beta|a_2|^2|}}$$ olarak bulunur.

5. MATRİS LİE GRUBU

5.1. Matris Lie Grubu

Genelleştirilmiş bikompleks sayılarda w= $w_1+i_1w_2+i_2w_3+i_3w_4$ olmak üzere,

$$N=\left\{\begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} : w_i, \alpha, \beta \in IR\right\} \text{ cümlesini ele alalım.} \qquad (5.1)$$

$\{N, +, IR, +, ., .\}$ Sistemi bir vektör uzayıdır.

N kümesi matris çarpımına göre bir cebirdir.

$T \; : \; \mathbb{C}_{\alpha\beta} \quad \rightarrow \quad N$

$\forall w \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ w= $w_1+i_1w_2+i_2w_3+i_3w_4$ olmak üzere,

$$T(w) = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

T , birebir ve örtendir.

$\forall$ w , u $\in \mathbb{C}_{\alpha\beta}$ ve $\forall \lambda \in$ IR olmak üzere,

$w = w_1+i_1w_2+i_2w_3+i_3w_4$ $\qquad$ $u = u_1 + i_1u_2 + i_2u_3 + i_3u_4$ alındığında,

a) w = u $\Leftrightarrow T(w) = T(u)$.

w = u olduğunu kabul edelim. Bu durumda (5.2) eşitliğinden

$$T(w) = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \quad T(u) = \begin{bmatrix} u_1 & -\alpha u_2 & -\beta u_3 & \alpha\beta u_4 \\ u_2 & u_1 & -\beta u_4 & -\beta u_3 \\ u_3 & -\alpha u_4 & u_1 & -\alpha u_2 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $w_1 = u_1 \quad w_2 = u_2 \quad w_3 = u_3 \quad w_4 = u_4$ olduğundan

$T(w) = T(u)$ dir.

Şimdi kabul edelimki $T(w) = T(u)$ olsun. Bu durumda $w = u$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & -\alpha u_2 & -\beta u_3 & \alpha\beta u_4 \\ u_2 & u_1 & -\beta u_4 & -\beta u_3 \\ u_3 & -\alpha u_4 & u_1 & -\alpha u_2 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

İki matris eşitliğinden $w_1 = u_1 \quad w_2 = u_2 \quad w_3 = u_3 \quad w_4 = u_4$ dir.

$w = u$ olduğu görülmektedir. O halde $w = u \iff T(w) = T(u)$ olur.

b) $T(w+u) = T(w) + T(u)$ eşitliğini gösterelim.

$$w + u = w_1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_3 w_4 + u_1 + i_1 u_2 + i_2 u_3 + i_3 u_4$$

$$w + u = (w_1 + u_1) + (w_2 + u_2)i_1 + (w_3 + u_3)i_2 + (w_4 + u_4)i_3$$

$$T(w+u) = \begin{bmatrix} w_1 + u_1 & -\alpha(w_2 + u_2) & -\beta(w_3 + u_3) & \alpha\beta(w_4 + u_4) \\ w_2 + u_2 & w_1 + u_1 & -\beta(w_4 + u_4) & -\beta(w_3 + u_3) \\ w_3 + u_3 & -\alpha(w_4 + u_4) & w_1 + u_1 & -\alpha(w_2 + u_2) \\ w_4 + u_4 & w_3 + u_3 & w_2 + u_2 & w_1 + u_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 & -\alpha u_2 & -\beta u_3 & \alpha\beta u_4 \\ u_2 & u_1 & -\beta u_4 & -\beta u_3 \\ u_3 & -\alpha u_4 & u_1 & -\alpha u_2 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

$= T(w) + T(u)$ bulunur. (5.3)

c) $T(w.u) = T(w).T(u)$ olduğunu gösterelim.

$$T(w.u) = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 & -\alpha u_2 & -\beta u_3 & \alpha\beta u_4 \\ u_2 & u_1 & -\beta u_4 & -\beta u_3 \\ u_3 & -\alpha u_4 & u_1 & -\alpha u_2 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

Matris çarpımı yapılıp gerekli düzenlemeler sonucunda,

$T(w.u) = T(w).T(u)$ olduğu görülür. (5.4) d)

$$T(\lambda w) = \begin{bmatrix} \lambda w_1 & -\lambda\alpha w_2 & -\lambda\beta w_3 & \lambda\alpha\beta w_4 \\ \lambda w_2 & \lambda w_1 & -\lambda\beta w_4 & -\lambda\beta w_3 \\ \lambda w_3 & -\lambda\alpha w_4 & \lambda w_1 & -\lambda\alpha w_2 \\ \lambda w_4 & \lambda w_3 & \lambda w_2 & \lambda w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \lambda . T(w) \quad \text{olur.}$$

$$T(\lambda . w) = \lambda . T(w) \tag{5.5}$$

e)

$T(1) = T(I_4)$

$1 = 1 + i_1 0 + i_2 0 + i_3 0$ alalım.

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha 0 & -\beta 0 & \alpha\beta 0 \\ 0 & 1 & -\beta 0 & -\beta 0 \\ 0 & -\alpha 0 & 1 & -\alpha 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

O halde $T(1) = T(I_4)$ eşitliği bulunur.

O halde T fonksiyonu bir cebir izomorfizmidir.

$\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ ve N nin izomorf olması nedeniyle $\mathbb{C}_{\alpha\beta}$ üzerindeki incelemeri N de yapacağız.

Bunun için şimdi bir

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{bmatrix} \in IR_4^4 \text{ matrisini ele alalım.}$$

Bu matrisin elemanları aşağıdaki bağıntıları sağlasın.

$w_{11} = w_{22} \quad \Rightarrow \quad w_{11} - w_{22} = 0$

$w_{11} = w_{33} \quad \Rightarrow \quad w_{11} - w_{33} = 0$

$w_{11} = w_{44} \quad \Rightarrow \quad w_{11} - w_{44} = 0$

$$
\begin{aligned}
w_{14} &= -\alpha w_{23} &\Rightarrow\quad & w_{14} + \alpha w_{23} = 0\\
w_{14} &= -\beta w_{32} &\Rightarrow\quad & w_{14} + \beta w_{32} = 0\\
w_{14} &= \alpha\beta w_{41} &\Rightarrow\quad & w_{14} - \alpha\beta w_{41} = 0\\
w_{12} &= -\alpha w_{21} &\Rightarrow\quad & w_{12} + \alpha w_{21} = 0\\
w_{13} &= w_{24} &\Rightarrow\quad & w_{13} - w_{24} = 0\\
w_{13} &= -\beta w_{31} &\Rightarrow\quad & w_{13} + \beta w_{31} = 0\\
w_{13} &= -\beta w_{42} &\Rightarrow\quad & w_{13} + \beta w_{42} = 0\\
w_{34} &= -\alpha w_{21} &\Rightarrow\quad & w_{34} + \alpha w_{21} = 0\\
w_{21} &= w_{43} &\Rightarrow\quad & w_{21} - w_{43} = 0
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Bu denklem sistemi homojen lineer denklem sistemi olup 16 bilinmeyen 12 denklemden oluşur. Katsayılar matrisinin rankı 12 dir. Çözüm uzayının boyutu 4 olmalıdır. 16 bilinmeyenin 4 tanesini keyfi seçersek diğer bilinmeyenler bunlar cinsinden bulunur.

$w_{11} = w_1 \qquad w_{12} = -\alpha w_2 \qquad w_{13} = -\beta w_3 \qquad w_{14} = \alpha\beta w_4$

Seçersek bu denklem sisteminin çözümü,

$$
\begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4\\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3\\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2\\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix}
$$

biçimindeki matrisler olur.

Bu matrislerin cümlesi N olduğundan denklem sisteminin çözüm kümeside N dir.

5.2. N nin Manifold Yapısı

$g: \quad N \rightarrow IR^4$

$$
W=\begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4\\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3\\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2\\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \rightarrow g(W) = (w_1, w_2, w_3, w_4)
$$

g fonksiyonu birebir ve örtendir.

$g(W) = IR^4$ olup açıktır. w_i ler sürekli olduğundan g ve g^{-1} süreklidir.

(g, N) ikilisi N nin bir haritasıdır.

Ayrıca $\{(g, N)\}$ tek haritalı atlas diferensiyellenebilirdir.

Böylece N bu atlasla birlikte diferensiyellenebilir bir manifoldtur.

N nin çarpma işlemine göre grup yapısı yoktur.

Şimdi N nin bir alt cümlesinin Lie grup yapısını araştıralım.

$$\widetilde{M}_{i_3} = \left\{ W = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} : w_1 w_4 = w_2 w_3 \ (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0} \right\}$$

$\widetilde{M}_{i_3} \subset N$ dir.

$\widetilde{M}_{i_3}$ nin homeomorfizmlerini kurmak içn IR^4 deki açık alt cümlelerini belirliyelim.

$$A_1 = \{(w_1, w_2, w_3) | \ w_4 = 0 \ , w_1 \neq 0 \}$$

$$A_2 = \{(w_1, w_2, w_4) | \ w_3 = 0 \ , w_2 \neq 0 \}$$

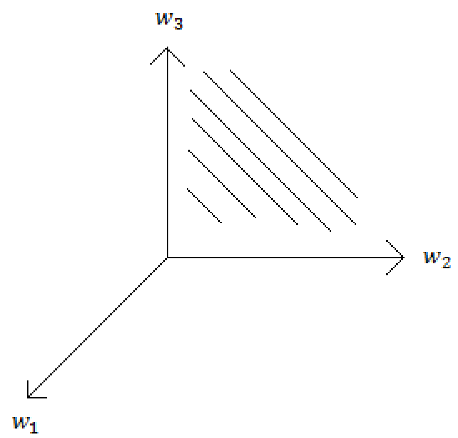
$$A_3 = \{(w_1, w_3, w_4) | \ w_2 = 0 \ , w_3 \neq 0 \}$$

$$A_4 = \{(w_2, w_3, w_4) | \ w_1 = 0 \ , w_4 \neq 0 \}$$

$$M_i = \left\{ W = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} : w_1 w_4 = w_2 w_3 \ , w_i \neq \overrightarrow{0} \right\} \quad (5.7)$$

$$w_1 \neq 0 \quad \aleph_1 : \ M_1 \ \rightarrow \ A_1$$

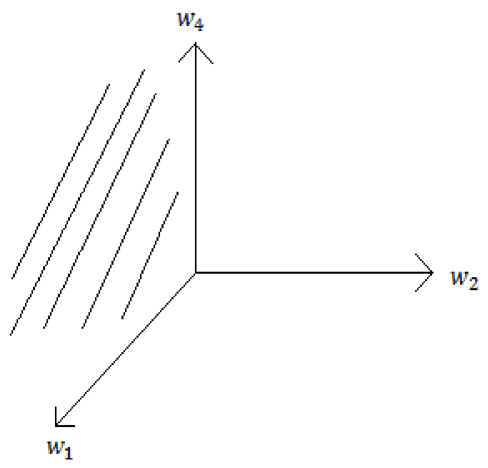
$$\left(w_1, w_2, w_3, \frac{w_2 . w_3}{w_1}\right) \rightarrow (w_1, w_2, w_3)$$



Şekil.5.1.

$$w_2 \neq 0 \quad \aleph_2 : \quad M_2 \quad \rightarrow \; A_2$$

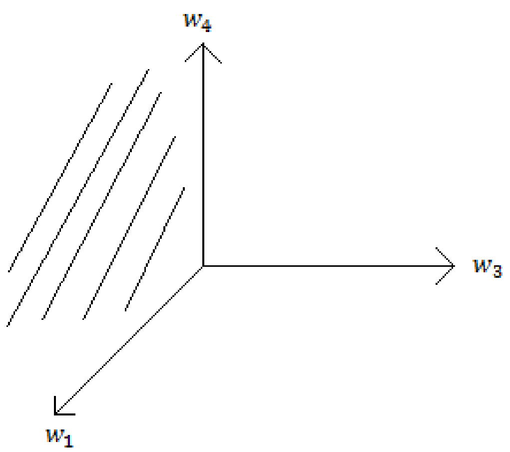
$$\left(w_1, w_2, \frac{w_1.w_4}{w_2}, w_4\right) \rightarrow (w_1, w_2, w_4)$$



Şekil.5.2.

$$w_3 \neq 0 \quad \aleph_3 : \quad M_3 \quad \rightarrow \quad A_3$$

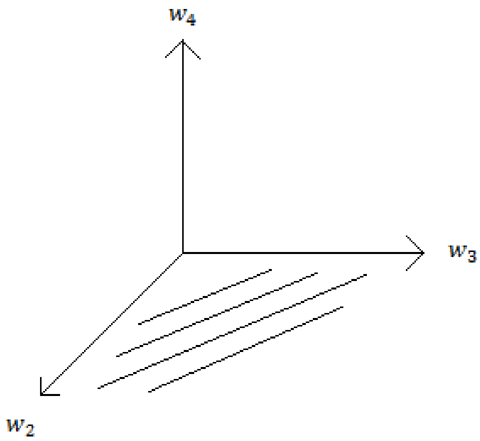
$$\left(w_1, \frac{w_1.w_4}{w_3}, w_3, w_4\right) \rightarrow (w_1, w_3, w_4)$$



Şekil.5.3.

$$w_4 \neq 0 \quad \aleph_4 : \; M_4 \quad \rightarrow \; A_4$$

$$\left(\frac{w_2 . w_3}{w_4}, w_2, w_3, w_4 \right) \rightarrow (w_2, w_3, w_4 \,)$$



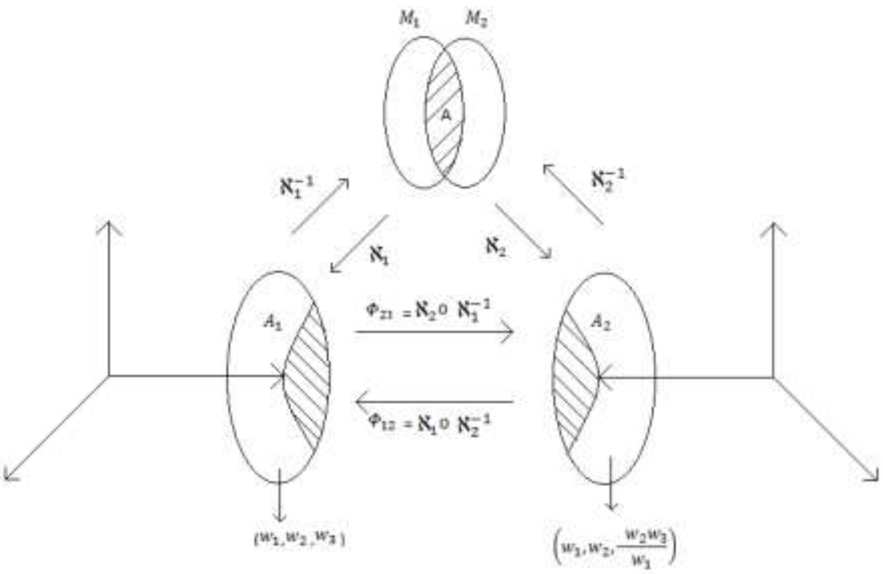
Şekil.5.4.

$(\aleph_i \;, M_i\,)$ ler $\widetilde{M}_{i_3}$ nin birer haritalarıdır.

$\{\,(\aleph_i \;,\; M_i \;)\,\}_{i=1,2,3,4}$ de $\widetilde{M}_{i_3}$ nin bir atlasıdır.

Şimdi M_{i_3} nin diferensiyellenebilir Manifold olduğunu gösterelim.

$w_1 \neq 0\,,\; T(W) \;\in M_1 \quad w_2 \neq 0 \;\; T(W) \;\in M_2 \quad A = T(W) \in M_1 \cap \; M_2$ dir.



Şekil.5.5.

$$\Phi_{21}: IR^3 \rightarrow IR^3$$

$$(w_1, w_2, w_3) \rightarrow \left(w_1, w_2, \frac{w_2 w_3}{w_1}\right)$$

$\Phi_{21}(w_1, w_2, w_3) = \left(w_1, w_2, \frac{w_2 w_3}{w_1}\right)$ ve $\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial w_i}$, $\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial w_i}$ mevcut ve süreklidir.

Dolayısıyla bir manifolddur.

5.3. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların Lie Grubu

$$M_{i_3} = \left\{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1 w_4 = w_2 w_3 \ , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\right\} \quad (5.8)$$

hiperyüzeyi üzerindeki Lie grup yapılarını elde edeceğiz.

$W = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\widetilde{M}_{i_3} = \left\{W : w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0 \, , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\right\} \quad (5.9)$$

cümlesi $\{\widetilde{M}_{i_3}, +, IR, \cdot, .\}$ bir vektör uzayıdır. $\widetilde{M}_{i_3}$ nin üzerinde grup işlemi olarak matris çarpımını ele alırsak

i. $\widetilde{M}_{i_3} \times \widetilde{M}_{i_3} \longrightarrow \widetilde{M}_{i_3}$

$(W, U) \longrightarrow W.U$

$W \in \widetilde{M}_{i_3}$ ise $w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0$

$U \in \widetilde{M}_{i_3}$ ise $u_1 u_4 - u_2 u_3 = 0$ dır.

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 & -\alpha u_2 & -\beta u_3 & \alpha\beta u_4 \\ u_2 & u_1 & -\beta u_4 & -\beta u_3 \\ u_3 & -\alpha u_4 & u_1 & -\alpha u_2 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

$$W.U = \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 & -\alpha u_2 & -\beta u_3 & \alpha\beta u_4 \\ u_2 & u_1 & -\beta u_4 & -\beta u_3 \\ u_3 & -\alpha u_4 & u_1 & -\alpha u_2 \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

$$W.U = Z = \begin{bmatrix} z_1 & -\alpha z_2 & -\beta z_3 & \alpha\beta z_4 \\ z_2 & z_1 & -\beta z_4 & -\beta z_3 \\ z_3 & -\alpha z_4 & z_1 & -\alpha z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$z_1 = w_1u_1 - \alpha w_2u_2 - \beta w_3u_3 + \alpha\beta w_4u_4$$

$$z_2 = w_1u_2 + w_2u_1 - \beta w_3u_4 - \beta w_4u_3$$

$$z_3 = w_1u_3 + w_3u_1 - \alpha w_2u_4 - \alpha w_4u_2$$

$$z_4 = w_1u_4 + w_2u_3 + w_3u_2 + w_4u_1 \quad \text{dır.}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} z_1z_4 - z_2z_3 = {} & \alpha {w_1}^2(u_1u_4 - u_2u_3) + \alpha\beta {u_4}^2(w_1w_4 - w_2w_3) \\ & + {u_1}^2(w_1w_4 - w_2w_3) + \alpha {u_2}^2(w_1w_4 - w_2w_3) \\ & + \beta {u_3}^2(w_1w_4 - w_2w_3) + \alpha {w_2}^2(u_1u_4 - u_2u_3) \\ & + \beta {w_3}^2(u_1u_4 - u_2u_3) + \alpha\beta {w_4}^2(u_1u_4 - u_2u_3) = 0 \\ & z_1z_4 - z_2z_3 = 0 \quad \text{yani} \quad z_1z_4 = z_2z_3 \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde $W.U = Z \in \widetilde{M}_{i_3}$

Ayrıca $\det Z = \det(W.U) = \det W . \det U$ $\quad \det W \neq 0$ ve $\det U \neq 0$ olduğundan, $\det Z \neq 0$ olmalıdır.

Bu durumda, $(z_1, z_2, z_3, z_4) \neq \vec{0}$ olur.

ii.

$\forall\, W, U$ ve $Z \in \widetilde{M}_{i_3}$ için

$(W.U).Z = W.(U.Z)$ birleşme özelliği vardır.

iii.

$\forall\, W \in \widetilde{M}_{i_3}$ için

$I_4.W = W.I_4 = W$

iv.

$\forall\, w \in \widetilde{M}_{i_3}$ için

$$w^{-1} = \frac{w^T}{{w_1}^2 + \alpha {w_2}^2 + \beta {w_3}^2 + \alpha\beta {w_4}^2} \qquad {w_1}^2 + \alpha {w_2}^2 + \beta {w_3}^2 + \alpha\beta {w_4}^2 \neq 0$$

olduğundan $w^{-1} \in \widetilde{M}_{i_3}$ dir. (5.11)

v.

$\forall\, w.U \in \widetilde{M}_{i_3}$ için

$w.U = U.w$

Dolayısıyla $(\widetilde{M}_{i_3}\,, .)$ ikilisi bir Abel grubudur.

vi.

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix}$$ olmak üzere; $\forall\, w \in \widetilde{M}_{i_3}$ için $w^T.\varepsilon.w = \lambda\,\varepsilon$ dır.

$w^T \varepsilon\, w =$

$$= \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ -\alpha w_2 & w_1 & -\alpha w_4 & w_3 \\ -\beta w_3 & -\beta w_4 & w_1 & w_2 \\ \alpha\beta w_4 & -\beta w_3 & -\alpha w_2 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$ olsun.

Çarpma işlemi yapıldığında;

$w_1 w_4 = w_2 w_3$ hiperyüzeyinde aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı görülür.

$$a_{11} = {w_1}^2 + \alpha {w_2}^2 + \beta {w_3}^2 + \alpha\beta {w_4}^2$$

$$a_{12} = -\alpha w_1 w_2 + \alpha w_1 w_2 - \alpha\beta w_3 w_4 + \alpha\beta w_3 w_4 = 0$$

$$a_{13} = -\beta w_1 w_3 - \alpha\beta w_2 w_4 + \beta w_1 w_3 + \alpha\beta w_2 w_4 = 0$$

$$a_{14} = -\alpha\beta w_1 w_4 - \alpha\beta w_2 w_3 - \alpha\beta w_2 w_3 + \alpha\beta w_4 w_1 = 0$$

$$a_{21} = -\alpha w_1 w_2 + \alpha w_1 w_2 - \alpha\beta w_3 w_4 + \alpha\beta w_3 w_4 = 0$$

$$a_{22} = \alpha^2 w_2{}^2 + \alpha w_1{}^2 + a^2 \beta w_4{}^2 + \alpha\beta w_3{}^2$$

$$a_{22} = \alpha[w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + \alpha\beta w_4{}^2]$$

$$a_{23} = \alpha\beta w_2 w_3 - \alpha\beta w_1 w_4 - \alpha\beta w_1 w_4 + \alpha\beta w_2 w_3 = 0$$

$$a_{24} = -\alpha^2 \beta w_2 w_4 - \alpha\beta w_1 w_3 + \alpha^2 \beta w_2 w_4 + \alpha\beta w_1 w_3 = 0$$

$$a_{31} = -\beta w_1 w_3 - \alpha\beta w_2 w_4 + \beta w_1 w_3 + \alpha\beta w_2 w_4 = 0$$

$$a_{32} = \alpha\beta w_2 w_3 - \alpha\beta w_1 w_4 - \alpha\beta\alpha w_1 w_4 + \alpha\beta w_2 w_3 = 0$$

$$a_{33} = \beta^2 w_3{}^2 + \alpha\beta^2 w_4{}^2 + \beta w_1{}^2 + \alpha\beta w_2{}^2$$

$$a_{33} = \beta[w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + \alpha\beta w_4{}^2]$$

$$a_{34} = -\alpha\beta^2 w_3 w_4 + \alpha\beta^2 w_3 w_4 - \alpha\beta w_1 w_2 + \alpha\beta w_1 w_2 = 0$$

$$a_{41} = \alpha\beta w_1 w_4 - \alpha\beta w_2 w_3 - \alpha\beta w_2 w_3 + \alpha\beta w_1 w_4 = 0$$

$$a_{42} = -a^2 \beta w_2 w_4 - \alpha\beta w_1 w_3 + \alpha^2 \beta w_2 w_4 + \alpha\beta w_1 w_3 = 0$$

$$a_{43} = -\alpha\beta^2 w_3 w_4 + \alpha\beta^2 w_3 w_4 - \alpha\beta w_1 w_2 + \alpha\beta w_1 w_2 = 0$$

$$a_{44} = \alpha^2 \beta^2 w_4{}^2 + \alpha\beta^2 w_3{}^2 + \alpha^2 \beta w_2{}^2 + \alpha\beta w_1{}^2$$

$$a_{44} = \alpha\beta[w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + \alpha\beta w_4{}^2]$$

$\lambda = w_1{}^2 + \alpha w_2{}^2 + \beta w_3{}^2 + \alpha\beta w_4{}^2$ olmak üzere,

$$W^T \varepsilon\, W = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\beta\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha\beta\lambda) \end{bmatrix} = \lambda\varepsilon$$

$$W^T \varepsilon\, W = \lambda\varepsilon \tag{5.12}$$

$$W^T \varepsilon = (\lambda\varepsilon)\, W^{-1} \qquad (\lambda\varepsilon)^{-1}\, W^T \varepsilon = W^{-1}$$

$$\widetilde{M}_{i_3} x\ \widetilde{M}_{i_3} \longrightarrow \widetilde{M}_{i_3}$$

$$(W, U) \longrightarrow W.U^{-1}$$

$$IR^3\ x\ IR^3 \longrightarrow IR^3$$

$$(w_1, w_2, w_3)\ x\ (u_1, u_2, u_3) \longrightarrow (f_1, f_2, f_3)$$

Burada f_1, f_2, f_3 fonksiyonları w_i ve u_i Öklid fonksiyonlarına bağlıdırlar.

f_1, f_2, f_3 fonksiyonları diferansiyellenebilirdir.

Dolayısıyla $(\widetilde{M}_{i_3}\ , .)$ bir lie grubudur.

boy$\widetilde{M}_{i_3}$ = 3 tür.

6. M LİE GRUBUNUN LİE CEBİRİ

6.1. M Lie Grubunun Lie Cebiri

a) E^4de,

$M_{i_3} = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1w_4 - w_2w_3 = 0 \ , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\}$

verilen M_{i_3} hiperyüzeyinin 3-boyutlu Lie grubu olduğunu biliyoruz.

Şimdi M_{i_3} nin Lie cebirini oluşturalım.

$M_{i_3}{}^*$ ile M_{i_3} nin lie cebirini gösterelim.

M_{i_3} üzerinde $\gamma(0) = 1$, yani $\gamma_1(0) = 1$ $\gamma_2(0) = \gamma_3(0) = \gamma_4(0) = 0$ olan bir eğri

$\gamma(t) = \gamma_1(t)1 + \gamma_2(t)i_1 + \gamma_3(t)i_2 + \gamma_4(t)i_1i_2$ olsun.

$\gamma_1(t)\gamma_4(t) - \gamma_2(t)\gamma_3(t) = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$\gamma_1'(t)\gamma_4(t) + \gamma_1(t)\gamma_4'(t) - \gamma_2'(t)\gamma_3(t) - \gamma_2(t)\gamma_3'(t) = 0$

elde edilir. Eğer t= 0 yazılırsa $\gamma_4'(t) = 0$ elde edilir. Böylece Lie cebiri

$$\xi = \xi_m \left(\frac{\sigma}{\sigma\alpha_m}\right) \Big|_{\alpha = 1} \quad m = 1, 2, 3$$

formundaki vektörlerle oluşturulur. ξ vektörü genelleştirilmiş bikompleks sayı olarak $\xi = \xi_1 + \xi_2 i_1 + \xi_3 i_2$ şeklinde yazılabilir.

$W|_{\alpha-1} = \xi$

için M_{i_3} üzerindeki W sol invaryant vektör alanlarını bulalım.

b(t) eğrisi $b(0) = 1$ ve $b'(0) = \xi$ şartını sağlayan bir eğri olsun.

Bu durumda w genelleştirilmiş bikompleks sayı olmak üzere b eğrisinin sol ötelemesi

$$L_w(b(t)) = wb(t) \text{ dir.}$$

Bunun tanjant vektörü L_w^* $(b'(0)) = w\xi$ dir. Özel olarak, M_{i_3} üzerindeki sol invaryant vektör alanlar W_m ile gösterilirse,

$$W_m \;|_{\alpha-1} = \frac{\partial}{\partial_{\alpha m}}\Big|_{\alpha-1} \;, \; m = 1, 2, 3$$

Bu vektör alanlar w= $w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4$ olmak üzere $(W_1)_w = w.\ 1$, $(W_2)_w = w.\ i_1$, $(W_3)_w = w.\ i_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
W_1 &= w.1 \\
&= w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 \qquad (6.1)\\
&= (w_1, w_2, w_3, w_4) \\
W_2 &= w.i_1 \\
&= (w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4)\, i_1 \\
&= (w_1 i_1 - \alpha w_2 + w_3 i_1 i_2 - \alpha w_4\, i_2) \qquad (6.2)\\
&= (-\alpha w_2, w_1, -\alpha w_4, w_3) \\
W_3 &= w.\ i_2 \\
&= (w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4).\ i_2 \\
&= (w_1\, i_2 + w_2 i_1 i_2 - \beta w_3 - \beta w_4 i_1) \qquad (6.3)\\
&= (-\beta w_3, -\beta w_4, w_1, w_2)
\end{aligned}$$

elde edilir .

$M_{i_3}{}^*$ Lie cebiri için $Sp\{W_1, W_2, W_3\}$ dir.

b) E_2^4de,

$$M_{i_1} = \left\{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1 w_3 + \alpha w_2 w_4 = 0\, , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\right\}$$

verilen M_{i_1} hiperyüzeyinin de M_{i_3} gibi 3-boyutlu Lie grubu olduğu gösterilebilir. Şimdi M_{i_1} nin Lie cebirini oluşturalım.

$M_{i_1}{}^*$ ile M_{i_1} nin lie cebirini gösterelim.

M_{i_1} üzerinde $\gamma(0) = 1$, yani $\gamma_1(0) = 1$ $\gamma_2(0) = \gamma_3(0) = \gamma_4(0) = 0$ olan bir eğri

$\gamma(t) = \gamma_1(t)1 + \gamma_2(t)i_1 + \gamma_3(t)i_2 + \gamma_4(t)i_1 i_2$ olsun.

$\gamma_1(t)\gamma_3(t) + \alpha\gamma_2(t)\gamma_4(t) = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$\gamma_1'(t)\gamma_3(t) + \gamma_1(t)\gamma_3'(t) + \alpha\gamma_2'(t)\gamma_4(t) + \alpha\gamma_2(t)\gamma_4'(t) = 0$

Eğer $t = 0$ yazılırsa $\alpha_3'(t) = 0$ elde edilir. Böylece Lie cebiri

$$\xi = \xi_m \left(\frac{\sigma}{\sigma\alpha_m}\right) \Big|_{\alpha = 1} \qquad m = 1, 2, 4$$

formundaki vektörlerle oluşturulur. ξ vektörü genelleştirilmiş bikompleks sayı olarak $\xi = \xi_1 + \xi_2 i_1 + \xi_4 i_1 i_2$ şeklinde yazılabilir.

$W|_{\alpha-1} = \xi$

için M_{i_1} üzerindeki W sol invaryant vektör alanlarını bulalım.

b(t) eğrisi $b(0) = 1$ ve $b'(0) = \xi$ şartını sağlayan bir eğri olsun.

Bu durumda w genelleştirilmiş bikompleks sayı olmak üzere b eğrisinin sol ötelemesi,

$$L_w\big(b(t)\big) = wb(t) \text{ dir.}$$

Bunun tanjant vektörü $L_w^*\ (b'(0)) = w\xi$ dir. Özel olarak, M_{i_1} üzerindeki sol invaryant vektör alanlar W_m ile gösterilirse,

$$W_m\ |_{\alpha-1} = \frac{\partial}{\partial_{\alpha m}}\Big|_{\alpha-1}, \quad m = 1, 2, 4$$

Bu vektör alanlar $w = w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4$ olmak üzere

$(W_1)_w = w.1$, $(W_2)_w = w.i_1$, $(W_4)_w = w.i_1 i_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} W_1 &= w.1 \\ &= w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 \qquad (6.4) \\ &= (w_1, w_2, w_3, w_4) \\ W_2 &= w.i_1 \\ &= (w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4) i_1 \\ &= (w_1 i_1 - \alpha w_2 + w_3 i_1 i_2 - \alpha w_4 i_2) \qquad (6.5) \\ &= (-\alpha w_2, w_1, -\alpha w_4, w_3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_4 &= w.i_1i_2 \\
&= (w_1 1 + i_1w_2 + i_2w_3 + i_1i_2w_4)\, i_1i_2 \\
&= (w_1i_1i_2 - \alpha w_2i_2 - \beta w_3i_1 + \alpha\beta w_4) \qquad (6.6) \\
&= (\alpha\beta w_4, -\beta w_3, -\alpha w_2, w_1)
\end{aligned}
$$

elde edilir .

${M_{i_1}}^*$ Lie cebiri için $Sp\{W_1, W_2, W_4\}$ dir.

c) E_2^4de ,

$$M_{i_2} = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1w_2 + \beta w_3w_4 = 0, (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \vec{0}\}$$

verilen M_{i_2} hiperyüzeyinde M_{i_3} gibi 3-boyutlu Lie grubu olduğu gösterilebilir. Şimdi M_{i_2} nin Lie cebirini oluşturalım.

${M_{i_2}}^*$ ile M_{i_2} nin lie cebirini gösterelim.

M_{i_2} üzerinde $\gamma(0) = 1$, yani $\gamma_1(0) = 1$ $\gamma_2(0) = \gamma_3(0) = \gamma_4(0) = 0$ olan bir eğri

$\gamma(t) = \gamma_1(t)1 + \gamma_2(t)i_1 + \gamma_3(t)i_2 + \gamma_4(t)i_1i_2$ olsun.

$\gamma_1(t)\gamma_2(t) + \beta\gamma_3(t)\gamma_4(t) = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \beta\gamma_3'(t)\gamma_4(t) + \beta\gamma_3(t)\gamma_4'(t) = 0$

Eğer $t = 0$ yazılırsa $\gamma_2'(t) = 0$ elde edilir. Böylece Lie cebiri

$$\xi = \xi_m \left(\frac{\sigma}{\sigma\alpha_m}\right)\Big|_{\alpha = 1} \quad m = 1, 3, 4$$

formundaki vektörlerle oluşturulur. ξ vektörü genelleştirilmiş bikompleks sayı olarak $\xi = \xi_1 + \xi_3 i_2 + \xi_4 i_1i_2$ şeklinde yazılabilir.

$W|_{\alpha-1} = \xi$

için M_{i_2} üzerindeki W sol invaryant vektör alanlarını bulalım.

b(t) eğrisi $b(0) = 1$ ve $b'(0) = \xi$ şartını sağlayan bir eğri olsun.

Bu durumda w genelleştirilmiş bikompleks sayı olmak üzere b eğrisinin sol ötelemesi,

$$L_w(b(t)) = wb(t) \text{ dir.}$$

Bunun tanjant vektörü $L_w^*\ (b'(0)) = w\xi$ dir. Özel olarak, M_{i_2} üzerindeki sol invaryant vektör alanlar W_m ile gösterilirse,

$$W_m\ |_{\alpha-1} = \frac{\partial}{\partial_{\alpha m}}\bigg|_{\alpha-1}, \quad m = 1, 3, 4$$

Bu vektör alanlar w= $w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4$ olmak üzere

$(W_1)_w = w\,.\,1$, $(W_3)_w = w.\ i_2$, $(W_4)_w = w.\ i_1 i_2$ olduğundan

$$\begin{aligned} W_1 &= w.1 \\ &= w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4 \qquad (6.7) \\ &= (w_1, w_2, w_3, w_4) \\ W_3 &= w.i_2 \\ &= (w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4)\, i_2 \\ &= (w_1 i_2 + w_2 i_1 i_2 - \beta w_3 - \beta w_4 i_1) \qquad (6.8) \\ &= (-\beta w_3, -\beta w_4, w_1, w_2) \\ W_4 &= w.i_1 i_2 \\ &= (w_1 1 + i_1 w_2 + i_2 w_3 + i_1 i_2 w_4)\, i_1 i_2 \\ &= (w_1 i_1 i_2 - \alpha w_2 i_2 - \beta w_3 i_1 + \alpha\beta w_4) \qquad (6.9) \\ &= (\alpha\beta w_4, -\beta w_3, -\alpha w_2, w_1) \end{aligned}$$

elde edilir.

$M_{i_2}{}^*$ Lie cebiri için $Sp\{W_1, W_3, W_4\}$ dir.

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİKOMPLEKS SAYILARIN IR^3 DE UYGULAMALARI

7.1. Genelleştirilmiş Bikompleks Sayıların IR^3 de Uygulamaları

$M_{i_3} = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \mid w_1 w_4 - w_2 w_3 = 0 \; , (w_1, w_2, w_3, w_4) \neq \overrightarrow{0}\}$

E^4 de bir hiper yüzey ve

$$S^3_{\alpha\beta} = \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \in E^4 | {w_1}^2 + \alpha {w_2}^2 + \beta {w_3}^2 + \alpha\beta {w_4}^2 = 1\} \tag{7.1}$$

olmak üzere,

$a: I \subset IR \rightarrow S^3_{\alpha\beta} \cap M_{i_3}$

$a(t) = w_1(t) + i_1 w_2(t) + i_2 w_3(t) + i_1 i_2 w_4(t) \quad t \in I$ eğrisini ele alalım.

$a(t)$ eğrisini bir genelleştirilmiş bikompleks sayı gibi düşünebiliriz.

$a(t) = w_1(t) + i_1 w_2(t) + i_2 w_3(t) + i_1 i_2 w_4(t)$ eğrisine karşılık gelen matris

$$N(a(t)) = \begin{bmatrix} w_1(t) & -\alpha w_2(t) & -\beta w_3(t) & \alpha\beta w_4(t) \\ w_2(t) & w_1(t) & -\beta w_4(t) & -\beta w_3(t) \\ w_3(t) & -\alpha w_4(t) & w_1(t) & -\alpha w_2(t) \\ w_4(t) & w_3(t) & w_2(t) & w_1(t) \end{bmatrix} = B(t)$$ şeklinde yazılabilir.

$B(t)$ matrislerinin kümesini G ile gösterirsek;

$$G = \{B(t) = N(a(t)) \mid a(t) \in S^3_{\alpha\beta} \cap M_{i_3}\} \text{ dir.} \tag{7.2}$$

1) G değişmeli bir gruptur.

$A(t)$ ve $B(t) \in G$ ise $A(t).B(t) \in G$ dir.

2) G bir Lie grubudur.Bu grubun R^3 üzerine etkisini araştıralım.

$A(t) \in G$ için,

$A(t) : R^3 \rightarrow R^3$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad \to \quad Y(t) = A(t).\begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 & -\alpha w_2 & -\beta w_3 & \alpha\beta w_4 \\ w_2 & w_1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ w_3 & -\alpha w_4 & w_1 & -\alpha w_2 \\ w_4 & w_3 & w_2 & w_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

A(t) dönüşümü ,

$-\alpha w_2 y_2 - \beta w_3 y_3 + \alpha\beta w_4 y_4 = 0$ olmak üzere bir-parametreli dönme hareketi verir.

Bu dönme hareketinin eksenini bulalım.

Bunun için $V(w_2, w_3, w_4)$ olmak üzere A(t)V =V denklemini çözelim.

$$\begin{aligned} w_1 y_2 - \beta w_4 y_3 - \beta w_3 y_4 &= y_2 \\ -\alpha w_4 y_2 + w_1 y_3 - \alpha w_2 y_4 &= y_3 \\ w_3 y_2 + w_2 y_3 + w_1 y_4 &= y_4 \end{aligned}$$

Bu denklem sistem, homojen denklem sistemine indirgenir.

$$\begin{aligned} (w_1 - 1) y_2 - \beta w_4 y_3 - \beta w_3 y_4 &= 0 \\ -\alpha w_4 y_2 + (w_1 - 1) y_3 - \alpha w_2 y_4 &= 0 \\ w_3 y_2 + w_2 y_3 + (w_1 - 1) y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Buradan sisteminin katsayılar matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} w_1 - 1 & -\beta w_4 & -\beta w_3 \\ -\alpha w_4 & w_1 - 1 & -\alpha w_2 \\ w_3 & w_2 & w_1 - 1 \end{bmatrix} \text{ olup determinantı ,} \tag{7.4}$$

$\det A = (w_1 - 1)[(w_1 - 1)^2 + \alpha\, w_2^2 + \beta\, w_3^2 - \alpha\beta\, w_4^2] + 2\alpha\beta w_2 . w_3 . w_4$ dır.

Eğer bu determinant sıfırdan farkı olursa sistemin tek çözümü var olup $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ dır ki, bu istenen çözüm değildir. Dönme ekseni bir doğrudur. Doğrular 1-parametreli geometrik yerlerdir. O halde denklemin bir parametreye bağlı çözümleri bulunmalıdır. Bunun için detA=0 olması gerekir.

$(w_1 - 1)[(w_1 - 1)^2 + \alpha\, w_2^2 + \beta\, w_3^2 - \alpha\beta\, w_4^2] + 2\alpha\beta w_2 . w_3 . w_4 = 0$ dır.

Denklemin sonsuz çözümü vardır. Bu çözümler (y_2, y_3, y_4) dir.

Burada $y_2 = \lambda$ seçilirse,

$$\begin{aligned} w_1 w_4 - w_2 w_3 &= 0 \\ {w_1}^2 + \alpha {w_2}^2 + \beta {w_3}^2 + \alpha\beta {w_4}^2 &= 1 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Şartları altında

$-\beta w_4 y_3 - \beta w_3 y_4 = -(w_1 - 1)\lambda$

$w_2 y_3 + (w_1 - 1) y_4 = - w_3 \lambda$

elde edilir.

$\beta w_4 y_3 + \beta w_3 y_4 = (w_1 - 1)\lambda$

$w_2 y_3 + (w_1 - 1) y_4 = - w_3 \lambda$

Burada y_3 ve y_4 bilinmeyenlerdir. 1. dereceden 2 bilinmeyenli denklem sistemi gibi düşünülüp gerekli işlemler yapılırsa,

$y_2 = \lambda$

$y_3 = \lambda \dfrac{\beta(w_1 - 1)w_4 - \beta w_3 (w_1 w_2 - w_2 + \beta w_3 w_4)}{\beta^2\, w_4^2}$

$y_4 == \lambda \dfrac{(w_1 w_2 - w_2 + \beta w_3 w_4)}{\beta w_4}$

O halde

$\vec{V} = \lambda \left(1 , \dfrac{\beta(w_1 - 1)w_4 - \beta w_3 (w_1 w_2 - w_2 + \beta w_3 w_4)}{\beta^2\, w_4^2} , \dfrac{(w_1 w_2 - w_2 + \beta w_3 w_4)}{\beta w_4} \right)$dir.

Örnek 7.1.

$w_1 = \frac{1}{2}$ $\quad w_2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ $\quad w_3 = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$ $\quad w_4 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}$ alınırsa,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\alpha \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & -\beta \frac{1}{2\sqrt{\beta}} & \alpha\beta \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & \frac{1}{2} & -\beta \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & -\beta \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\beta}} & -\alpha \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & \frac{1}{2} & -\alpha \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & \frac{1}{2\sqrt{\beta}} & \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\alpha} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2} \\ \frac{\sqrt{\beta}}{2\beta} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\beta} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \\ \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\alpha\beta} & \frac{\sqrt{\beta}}{2\beta} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

Matrisi için eksen,

$$Sp\left(X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \text{ dir.}$$

Gerçekten,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \\ \frac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\alpha} & -\frac{\sqrt{\beta}}{2} \\ \frac{\sqrt{\beta}}{2\beta} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\beta} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \\ \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2\alpha\beta} & \frac{\sqrt{\beta}}{2\beta} & \frac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ bulunur.} \tag{7.8}$$

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada genelleştirilmiş bikompleks sayılar tanımlanmış i_1, i_2 ve i_3 birimlerine göre eşlenik, norm ve invers özellikleri incelenmiştir. Genelleştirilmiş bikompleks sayıların reel matris gösterimi bulunmuştur. Ayrıca bir M hiperyüzey üzerinde Lie Grup ve Lie Cebir yapısı incelenerek genelleştirilmiş bikompleks sayıların IR^3 de uygulaması verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] PRICE,G.B., An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions, Monog raph and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 140, Marcel Dekker, Inc. New York, 1991

[2] Rochon.D.Shapıro M. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers, An.Univ.Oradea Fasc.Mat.11. (2004),71-110

[3] O'Neill,B.Elementary "Differential Geometry, Academic Press".(1997)

[4] Hacısalihoğlu H. H. **,** "Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş", Fırat Üniversi tesi Fen Fakültesi Yayınları, 2006.

[5] Hacısalihoğlu H. H. , " Diferansiyel Geometri ", Ankara Üniversitesi Fen Fak. Yayını, Ankara, 1998.

[6] Gürkalı Turan A. "Topoloji Ders Notları "Ondokuz Mayıs Üniversitesi Basım Evi, (1989), Samsun.

[7] Babadağ, F. "Bikompleks Sayıların Uygulamaları" Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 1995

[8] Babadağ F. " Dual Bikompleks Sayılar ve Uygulamaları " Doktora Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 2009

[9] Babadağ F.Yaylı Y.Ekmekci N. Homotetic Motions at E^8 with Bikomplex Numbers C_3.Int.J.Contemp. Math.Scies, Vol.4.no.33,(2009).

[10] Özkaldı Karakuş S. Aksoyak .F. Generalized Numbers and Lie Groups. Bilecik Şeyh Edabali University, Deparment of Mathematics, Bilecik, Erciyes University, Deparment of Mathematics, Kayseri, TURKEY