T.C

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LOKAL KESİN MAKSİMAL FONKSİYON İÇİN AĞIRLIKLI NORM EŞİTSİZLİKLERİ

DERYA SUCU

HAZİRAN 2016

ÖZET

LOKAL KESİN MAKSİMAL FONKSİYON İÇİN
AĞIRLIKLI NORM EŞİTSİZLİKLERİ

SUCU, Derya
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV
Haziran 2016, 93 sayfa.

Bu tez ilk bölümü giriş olmak üzere yedi temel bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde ölçülebilir fonksiyonun dağılım fonksiyonlarının ve artmayan yeniden düzenlenmelerinin tanımları ve bazı özellikleri ile bir ölçülebilir fonksiyonun medyanı ile ilgili özellikler verilmiştir. Dördüncü bölümde BMO uzayı ile ilgili önemli özellikler ifade edilmiştir. Beşinci bölümde ise John-Strömberg maksimal fonksiyonu ve onun lokal versiyonu tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Altıncı bölümde ağırlıklı John-Strömberg maksimal fonksiyonu ve onun lokal versiyonu tanımlanmış ve fonksiyonun ağırlıklı yeniden düzenlenmesi ile bu fonksiyonun ağırlıklı John-Strömberg maksimal fonksiyonunun ağırlıklı yeniden düzenlenmesi arasındaki bağıntılar ifade edilmiştir. Son bölümde ise ağırlıklı John-Strömberg maksimal fonksiyonu, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve Calderón-Zygmund singüler integral operatörü üzerine ağırlıklı norm kestirimleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dağılım fonksiyonu, artmayan yeniden düzenlenme, medyan, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu, Calderón-Zygmund singüler integral operatörü, BMO uzayı.

ABSTRACT

WEIGHTED NORM INEQUALITIES
FOR THE LOCAL SHARP MAXIMAL FUNCTION

SUCU, Derya
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV
June 2016, 93 pages.

This thesis consists of seven chapters including the introduction part. Some basic definitions and tools are given in the second chapter. The definition and some properties of distribution functions and non-increasing rearrangements of a measurable function, as well as the definition and main properties of median values of any measurable function are presented in the third chapter. BMO space is introduced and some main properties of functions from this space are expressed in the fourth chapter. John-Strömberg maximal function and its local version are defined and some properties of this function are investigated in the fifth chapter. Weighted version of John-Strömberg maximal function and its local version are introduced and relation between weighted non-increasing rearrangements of a function and weighted non-increasing rearrangements of its weighted John-Strömberg maximal function are studied in the sixth chapter. In the last chapter, weighted norm inequalities related to the weighted John-Strömberg maximal functions, Hardy-Littlewood maximal functions and Calderón-Zygmund singular intergaral operators are expressed and proved.

Key Words: Distribution function, non-increasing rearrangement, median, mean oscillation, local maximal function, weight, Hardy-Littlewood maximal function, Calderón-Zygmund singular intergaral operator.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımını esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara sabır ve özveriyle hiçbir destekten kaçınmayan tez danışmanım hocam, Sayın Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV'e, tez çalışmalarım esnasında ve hayatımın her anında hep yanımda olan varlığıyla beni güçlendiren sevgili eşim Ahmet Özhan SUCU'ya, hayatımın neşe kaynakları kızım Ayşe Bahar ve küçük oğlum Murat Metehan'a, manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim babam ve anneme, konu ilim ve eğitim olunca maddi manevi hiçbir desteğini esirgemeyen saygıdeğer kayınpederim Ahmet babama, tez çalışmalarım esnasında çocuklarımın her türlü bakımına yardımcı olan Ayşegül anneme, sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$(\Re, \mu)$	Ölçü uzayı
μ_f	f'nin dağılım fonksiyonu
f^*	f'nin artmayan yeniden düzenlenmesi
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
$M^{\#}$	Fefferman-Stein maksimal fonksiyonu
$M^{\#}_{0,\alpha}$	John-Strömberg maksimal fonksiyonu
L^p	Lebesgue uzayı
BMO	Sınırlı orta salınımlı fonksiyonlar kümesi
$m_f^{\max}$	Maksimal medyan
$m_f^{\min}$	Minimal medyan
w	Ağırlık fonksiyonu
χ	Karakteristik fonksiyon

1. GİRİŞ

Maksimal operatörler, harmonik ve reel analizin en önemli operatörlerinden biridir ve singüler integraller teorisinde, potansiyel teoride, diferensiyellenebilme teorisinde ve diferensiyel denklemler teorisinde geniş ölçüde kullanılmaktadırlar ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]).

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$Mf(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum x i içeren yan ayrıtları eksenlere paralel tüm Q küpleri üzerinden alınmaktadır. $M: \ f \to Mf$ operatörüne maksimal operatör denir.

Bilindiği gibi M, güçlü (p, p) ve zayıf $(1, 1)$ eşitsizliklerini sağlar, yani $1 < p < \infty$ olduğunda

$$\|Mf\|_p \leq c\|f\|_p,$$

$p = 1$ olduğunda ise,

$$t|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx$$

eşitsizlikleri f den bağımsız sabitlerle sağlanır.

Hardy-Littlewood maksimal operatörü integrallenebilir değildir. Bunun yerine $B, \mathbb{R}^n$ de herhangi bir yuvar olmak üzere $f \in L^1(B)$ ve $\operatorname{supp} f \subset B$ olduğunda $\int_B Mf(x)dx < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $f \in L(1 + \log^+ L)(B)$ olmasıdır, yani

$$\int_B |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)dx < \infty$$

dur.

Kesin maksimal fonksiyon herhangi bir $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M^{\#}f(x) \equiv f^{\#}(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \approx \sup_{Q \ni x} \inf_{c \in \mathbb{R}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

şeklinde ilk defa [8] de tanımlanmıştır. Burada f_Q, f fonksiyonunun Q üzerinden ortalama değeridir. $M^{\#} : f \to M^{\#}f$ operatörüne Fefferman-Stein kesin maksimal operatörü denir. $M^{\#}f(x) \leq 2Mf(x)$ olduğundan Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyonu, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun sağladığı birçok özelliği sağlar. Örneğin, $1 < p \leq \infty$ için $M^{\#}$, güçlü (p,p) ve zayıf $(1,1)$ eşitsizliklerini sağlar. Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyonu Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunundan farklı olarak fonksiyonun salınımını ölçmeyi sağlar.

Sınırlı orta salınımlı fonksiyonlar kümesi, $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ uzayı, 1961 yılında F. John ve L. Nirenberg tarafından [9] da tanımlanmıştır ve fonksiyon uzayları ve singüler integraller teorisi başta olmak üzere modern harmonik analizin gelişiminde önemli rol oynamaktadır:

$$f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \qquad \Leftrightarrow \qquad M^{\#}f \in L_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Fonksiyonun salınımını ”ölçmek” için birçok yol mevcuttur. Bu yüksek lisans tezinde ise ölçülebilir bir f fonksiyonunun salınımını incelemek için John [10] ve Strömberg [11] tarafından tanımlanmış $M^{\#}_{0,\alpha}f$ maksimal fonksiyonunun ve onun lokal versiyonu olan $M^{\#}_{0,\alpha;\Omega}f$ maksimal fonksiyonunun detaylı olarak araştırılması planlanmaktadır (Burada Ω, $\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir ölçülebilir alt kümesidir). John-Strömberg maksimal fonksiyonunun Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyondan üstün özelliği yalnız lokal integrallenebilir fonksiyonlar için değil tüm ölçülebilir fonksiyonlar için tanımlı olmasıdır.

f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde kompleks değerli, Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1/2$ olmak üzere $M^{\#}_{0,\alpha}f(x)$ ve $M^{\#}_{0,\alpha;\Omega}f(x)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$M^{\#}_{0,\alpha}f(x) := \sup_{Q \ni x} \inf_{c} ((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{1.1}$$

$$M^{\#}_{0,\alpha;\Omega}f(x) := \sup_{x\in Q\subset\Omega} \inf_{c}((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \quad (x\in\mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Burada c tüm kompleks sayıları, Q ise $\mathbb{R}^n$ de yan ayrıtları koordinat eksenlerine paralel olan x i içeren tüm küpleri tarar. f^* fonksiyonu f fonksiyonunun soldan sürekli artmayan yeniden düzenlenmesi olup,

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : |\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| < t\} \quad (t > 0)$$

eşitliği ile tanımlanabilr. Birçok durumda c ler üzerinden infimum almaya gerek kalmaz, çünkü optimal değerler (medyan değerler) kullanılabilir. Belirtelim ki, reel değerli bir f fonksiyonunun Q küpü üzerinden medyan değeri $m_f(Q)$,

$$|\{x\in Q : f(x) > m_f(Q)\}| \le \frac{|Q|}{2},$$
$$|\{x\in Q : f(x) < m_f(Q)\}| \le \frac{|Q|}{2}$$

eşitsizliklerini sağlar ve tek olmak zorunda değildir. Kompleks değerli $f = f_1 + if_2$ için, $m_f(Q) = m_{f_1}(Q) + im_{f_2}(Q)$ olsun.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen, negatif olmayan bir w fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. $M^{\#}_{0,\alpha}f$ ve $M^{\#}_{0,\alpha;\Omega}f$ fonksiyonlarının ağırlıklı analogları aşağıdaki gibi tanımlanabilir: her $x\in\mathbb{R}^n$ için

$$M^{\#}_{0,\alpha,w}f(x) := \sup_{Q\ni x}\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)^*_w(\alpha w(Q)) \quad (0<\alpha\le 1),$$
$$M^{\#}_{0,\alpha,w;\Omega}f(x) := \sup_{x\in Q\subset\Omega}\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)^*_w(\alpha w(Q)) \quad (0<\alpha\le 1)$$

olsun. Burada f^*_w fonksiyonu f fonksiyonunun $w\,dx$ ölçüsüne göre soldan sürekli artmayan yeniden düzenlenmesi olup aşağıdaki eşitlik yardımıyla tanımlanabilir ve tektir:

$$f^*_w(t) = \inf\{\lambda > 0 : w(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}) < t\}.$$

1.1. Tezin Amacı

Fonksiyonun salınımını ”ölçmek” için birçok yol mevcuttur. Bu yüksek lisans tezinin amacı ölçülebilir bir f fonksiyonun salınımını incelemek için John [10] ve Strömberg [11] tarafından tanımlanmış $M^{\#}_{0,\alpha}f$ maksimal fonksiyonunun ve onun lokal versiyonu olan $M^{\#}_{0,\alpha;\Omega}f$ maksimal fonksiyonunun ağırlıklı analoglarının özelliklerini detaylı olarak araştırmak, bu operatörün M Hardy-Littlewood ve T Calderón-Zygmund singüler integral operatörü üzerinde nasıl davrandığını öğrenmek ve ağırlıklı John-Nirenberg uzayını incelemektir.

1.2. Kaynak Özetleri

Öncelikle [12], [13] ve [14] kaynaklarından ölçülebilir bir fonksiyonun dağılım fonksiyonu ve artmayan yeniden düzenlenmesinin tanım ve özellikleri öğrenilmiştir. Genel olarak [15], [16] ve [17] den yararlanarak ölçülebilir bir fonksiyonun medyan ve orta salınımı incelenmiştir. [10], [11] ve [1] numaralı kaynaklardan yerel maksimal fonksiyonlarla alakalı bazı eşitsizlikler araştırılmıştır. [18] ve [19] numaralı kaynaklardan ise ağırlıklı lokal maksimal fonksiyonun bazı özellikleri araştırılmış, bu operatörün M Hardy-Littlewood ve T Calderón-Zygmund singüler integral operatörü üzerinde nasıl davrandığına bakılmış ve ağırlıklı John-Nirenberg uzayı incelenmiştir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tezde c, ana parametrelerden bağımsız, her bir satırda değişebilen pozitif bir sabit olarak kabul edilecektir. Herhangi bir A, B ifadeleri için, $A \leq cB$ olacak şekilde pozitif bir c sabiti varsa bu durumda $A \lesssim B$ yazılır. Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ aynı anda sağlanırsa $A \approx B$ yazılacak, A ve B birbirine denktir denilecektir.

Tez içerisinde kullanılacak küplerin yan ayrıtlarının, koordinat eksenlerine paralel olduğu kabul edilecektir. Bir $\lambda > 0$ ve Q küpü için λQ, merkezi Q nun merkezi ile aynı ve yan ayrıt uzunluğu, Q nun yan ayrıt uzunluğunun λ katı olan bir küp belirtir. $p \in [1,\infty)$ için, p nin eşleniği $p' = p/(p-1)$ dir.

Şimdi tezdeki konu bütünlüğünün sağlanması açısından kullanılacak uzayların tanımlarını ve bazı özelliklerini verelim:

$(\mathcal{R},\Sigma,\mu)$ total σ-sonlu ölçü uzayını göstersin. $\mathfrak{M}(\mathcal{R},\mu)$, $\mathcal{R}$ üzerindeki genelleştirilmiş skaler-değerli (reel veya kompleks) μ-ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı ve $\mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ de $\mathfrak{M}(\mathcal{R},\mu)$ nün μ hemen hemen her yerde sonlu elemanlarının sınıfı olsun.

$p \in (0,\infty]$ için, $\mathfrak{M}(\mathcal{R},\mu)$ üzerindeki $\|\cdot\|_{p,\mathcal{R},\mu}$ fonksiyoneli

$$\|f\|_{p,\mathcal{R},\mu} := \begin{cases} \left(\int_{\mathcal{R}} |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}, & p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathcal{R}} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır. Bu durumda Lebesgue uzayı

$$L_p(\mathcal{R},\mu) := \{ f \in \mathfrak{M}(\mathcal{R},\mu) : \|f\|_{p,\mathcal{R},\mu} < \infty \}$$

ile verilir ve bu haliyle $\|\cdot\|_{p,\mathcal{R},\mu}$, bir kuasi-norm tanımlar.

Herbir $E \in \Sigma$ için χ_E, E kümesinin karakteristik fonksiyonunu tanımlar. Herhangi bir $E \in \Sigma$ kümesi ve herbir $f \in L_1(E,\mu)$ fonksiyonu için f_E ile f nin E üzerinden ortalama değerini gösterelim, yani $f_E = (1/\mu(E)\int_E f(x)d\mu(x)$.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen, negatif olmayan bir w fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Herhangi bir ağırlık fonksiyonu yardımıyla $w(E) = \int_E w(x)\,dx$ ölçüsünü ele alalım. $w(x) \equiv 1$ olduğunda, $w(E) = |E|$ Lebesgue ölçüsüdür. $w(\mathbb{R}^n) = +\infty$ olarak alınacaktır.

A, $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir alt kümesi olsun. A üzerinde $w \equiv 1$ olduğunda kolaylık açısından $L_p(A,w)$ ve $\|\cdot\|_{p,A,w}$ yerine sırasıyla $L_p(A)$ ve $\|\cdot\|_{p,A}$ yazılacaktır. $\mathbb{R}^n$ nin herbir K kompakt alt kümesi için $\int_K |f(x)|^p w(x)dx < \infty$ ise, bu durumda f lokal integrallenebilirdir denir ve $f \in L^{\mathrm{loc}}_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ ile yazılır.

Tanım 2.1. $p \in [1,\infty)$ olsun. Bu durumda

$$L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n) : \ \|f\|_{L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{0<t<\infty} t^{1/p} f^*(t) < \infty \right\}$$

olarak verilen $L_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyon sınıfına Lorentz uzayı denir ([14, s. 216]).

3. DAĞILIM FONKSİYONU VE ARTMAYAN YENİDEN DÜZENLENMELER

3.1. Artmayan Bir Fonksiyonun Tersi

Teorem 3.1 (Artmayan Bir Fonksiyonun Tersi)**.** $I \subset \mathbb{R}$ soldan sınırlı bir aralık, $u : I \to \mathbb{R}$ artmayan bir fonksiyon, $J \subset \mathbb{R}$, $u(I)$ yı içeren en küçük aralık ve $v : J \to \mathbb{R}$,

$$v(y) := \inf\{z \in I : u(z) < y\}, \quad y \in J$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) v artmayan ve soldan süreklidir;

(ii) v fonksiyonunun bir $y_0 \in J \backslash \{\sup_I u\}$ noktasında sıçrama yapması için gerek ve yeter şart $x_1 < x_2$ olmak üzere bir $(x_1, x_2) \subset I$ aralığındaki her x için $u(x) = y_0$ olmasıdır;

(iii) I üzerinde $x \leq v(u(x))$ eşitsizliği sağlanır ve eşitsizliğin kesin olması için gerek ve yeter şart $z > x$ olmak üzere bir $[x, z] \subset I$ aralığı üzerinde u nun sabit olmasıdır;

(iv) Herhangi bir $x_0 \in I^0$ için $y_1 < y_2$ olmak üzere bir $(y_1, y_2) \subset J$ aralığı üzerinde $v(y) \equiv x_0$ olması için gerek ve yeter şart u nun x_0 noktasında sıçrama yapması ve $(y_1, y_2) \subset (u_+(x_0), u_-(x_0))$ olmasıdır.

Özel olarak, eğer u fonksiyonu kesin azalan ise, bu durumda v fonksiyonu u nun soldan sürekli tersidir ve süreklidir.

İspat. (i) $y_1 < y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in J$ ise, bu durumda

$$\{z \in I : u(z) < y_1\} \subset \{z \in I : u(z) < y_2\}$$

dir ve

$$v(y_1) = \inf\{z \in I : u(z) < y_1\} \geq \inf\{z \in I : u(z) < y_2\} = v(y_2),$$

sağlanır. O halde v artmayan bir fonksiyondur.

v nin soldan sürekli olduğunu göstermek için, $y_0 > \inf J = \inf_I u$ olacak şekilde bir $y_0 \in J$ noktasını alalım. $v(y_0)$ ın tanımından, $z > v(y_0)$ olacak şekildeki her $z \in I$ için $u(z) < y_0$ sağlanır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $z_0 \in I \cap (v(y_0), v(y_0) + \varepsilon]$ noktasını alalım. Bu durumda her $y \in (u(z_0), y_0)$ için

$$v(y) := \inf\{z \in I : u(z) < y\} \leq z_0 \leq v(y_0) + \varepsilon,$$

sağlanır. Yani v fonksiyonu y_0 noktasında soldan süreklidir.

(ii) $y_0 < \sup J = \sup_I u$ olmak üzere bir $y_0 \in J$ noktasında $v_+(y_0) < v(y_0)$ olsun. $v(y_0)$ ın tanımından ve u artmayan olduğundan, her $z < v(y_0)$ için $u(z) \geq y_0$ sağlanır. Diğer yandan, eğer $v_+(y_0) < x < v(y_0)$ ise, v azalan olduğundan, her $y > y_0$ için $v(y) < x$ tir ve dolayısıyla her $y > y_0$ için $u(x) < y$ dir. O halde $u(x) \leq y_0$ sağlanır. Böylece her $z \in (v_+(y_0), v(y_0))$ için $u(z) \equiv y_0$ dır.

Tersine, $x_1 < x_2$ olmak üzere, bir $(x_1, x_2) \subset I$ aralığı üzerinde $u(x) \equiv y_0$ olsun ve $y_0 < \sup J = \sup_I u$ sağlansın. Bu durumda $v(y_0)$ ın tanımından, $v(y_0) \geq x_2$ dir. Diğer taraftan, eğer $y \in (y_0, \sup J)$ ise, her $x \in (x_1, x_2)$ için, $u(x) = y_0 < y$ sağlanır ve böylece $v(y)$ nin tanımından $v(y) \leq x$ tir. $x \to x_1-$ için limit alınırsa, her $y \in (y_0, \sup J)$ için $v(y) \leq x_1$ elde edilir. Özel olarak $v_+(y_0) \leq x_1$ dir. O halde

$$v_+(y_0) \leq x_1 < x_2 \leq v(y_0)$$

doğrudur.

(iii) $v(y)$ nin tanımında $y = u(x)$ alınırsa, $v(u(x)) \geq x$ elde edilir.

Eğer $v(u(x)) > x$, $x \in I$ ise, bu durumda $u(z) \geq u(x)$ olacak şekilde bir $z \in I$, $z > x$ vardır, fakat u fonksiyonu artmayan olduğundan, $[x,z]$ üzerinde $u \equiv u(x)$ tir. Tersine, bir $[x,z] \subset I$ aralığı üzerinde $u \equiv$ const. ise, $v(u(x)) \geq z > x$ sağlanır.

(iv) $y_1 < y_2$ olmak üzere bir $(y_1, y_2) \subset J$ aralığı üzerinde $v \equiv x_0 \in I^0$ olsun. Eğer $z \in I$, $z < x_0$ ise, her $y \in (y_1, y_2)$ için $v(y)$ nin tanımından $u(z) \geq y$ dir. $y \to y_2-$ için limit alınırsa, $u(z) \geq y_2$ elde edilir, böylece $u_-(x_0) \geq y_2$ sağlanır. Diğer yandan, eğer $z \in I$, $z > x_0$ ise, $v(y)$ nin tanımından, her $y \in (y_1, y_2)$ için $u(z) < y$ dir. $y \to y_1+$ için limit alınırsa, $u(z) \leq y_1$ elde edilir, böylece $u_+(x_0) \leq y_1$ sağlanır.

Tersine, $y \in (u_+(x_0), u_-(x_0))$ olsun. Eğer $z > x_0$ ise, $u(z) < y$ dir, ve böylece $v(y) \leq x_0$ sağlanır. Diğer taraftan u ve v artmayan olduğundan ve (iii) den, $x < x_0$ olacak şekilde her $x \in I$ için,

$$x \leq v(u(x)) \leq v(u_-(x_0)) \leq v(y) \leq x_0$$

sağlanır. $x \to x_0-$ için limit alınırsa, her $y \in (u_+(x_0), u_-(x_0))$ için $v(y) = x_0$ elde edilir.

Son olarak, u kesin artan olsun. Bu durumda (i) ve (ii) den v fonksiyonu süreklidir. (iii) den, her $x \in I$ için $v(u(x)) = x$ sağlanır ki bu v fonksiyonunun u fonksiyonunun sol tersi olduğunu kanıtlar. Böylece ispat tamamlanır. □

3.2. Dağılım Fonksiyonları

Bu alt bölümde ağırlıklı olarak [14, Bölüm 2, Kısım 1] den yararlanılacaktır.

$(\mathcal{R}, \mu)$ total σ-sonlu ölçü uzayını göstersin. $\mathfrak{M}(\mathcal{R}, \mu)$, $\mathcal{R}$ üzerindeki genelleştirilmiş skaler-değerli (reel veya kompleks) μ-ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı ve $\mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ de $\mathfrak{M}(\mathcal{R}, \mu)$ nün μ hemen hemen her yerde sonlu elemanlarının sınıfı olsun.

Tanım 3.1. f, $f_n \in \mathfrak{M}(\mathcal{R},\mu)$, $n = 1, 2, \ldots$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in \mathcal{R} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, $\{f_n\}_n$ dizisi f e ölçüsel yakınsaktır denir.

Not 3.1. Yukarıdaki tanım aşağıdaki ifadeye denktir:

$$\text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \mathcal{R} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Vektör uzayı işlemleri $\mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ üzerinde iyi tanımlıdır ve bu vektör uzayında topoloji sonlu ölçülü kümeler üzerinde ölçüsel yakınsaklık yardımıyla verildiğinde $\mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ metrikleşebilen topoloji vektör uzay olur: $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $(\mathcal{R},\mu)$ nin $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \mathcal{R}$ özelliğini sağlayan sonlu ölçülü ayrık alt kümeleri dizisi olsun. Herbir f, $g \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ için

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\mu(S_n)} \int_{S_n} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$$

metriğini tanımlayalım. Bu durumda $(\mathfrak{M}_0, d)$ bir tam metrik uzaydır ve $(\mathfrak{M}_0, d)$ de $f_n \to f$ olması için gerek ve yeter koşul her bir sonlu ölçülü küme üzerinde $f_n \to f$ ölçüsel yakınsak olmasıdır.

Tanım 3.2. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olmak üzere

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in R : |f(x)| > \lambda\}), \qquad (\lambda \geq 0) \tag{3.1}$$

olarak tanımlanan μ_f fonksiyonuna f nin dağılım fonksiyonu denir.

Dikkat edilmelidir ki μ_f yalnızca f fonksiyonunun mutlak değeri $|f|$ e bağlıdır ve μ_f, $+\infty$ değerini alabilir.

Tanım 3.3. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ ve $g \in \mathfrak{M}_0(S,\nu)$ olmak üzere, eğer f ve g aynı dağılım fonksiyonuna sahipse, yani, her $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ sağlanıyorsa, f ve g ye eş ölçülebilirdir denir.

f ve g eş ölçülebilir fonksiyonlar olsalar da

$$\mu(\{x : f(x) \geq \lambda\}) = \mu(\{x : g(x) \geq \lambda\}) \quad (\lambda \geq 0). \tag{3.2}$$

eşitliği genellikle doğru değildir.

Örneğin, $f(x) = (2/\pi)\arctan x$ ve $g(x) \equiv 1$ fonksiyonları eş ölçülebilir olmalarına rağmen $|\{x : f(x) \geq 1\}| = 0$ ve $|\{x : g(x) \geq 1\}| = \infty$ dur.

Önerme 3.1. $f, g, f_n \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$, $n = 1,2,\ldots$ ve a, sıfırdan farklı bir skaler olsun. Bu durumda μ_f dağılım fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan, artmayan ve sağdan süreklidir. Ayrıca,

$$|g| \leq |f| \quad \mu-\text{h.h.y.} \Longrightarrow \mu_g \leq \mu_f; \tag{3.3}$$

$$\mu_{af}(\lambda) = \mu_f(\lambda/|a|), \qquad (\lambda \geq 0); \tag{3.4}$$

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2), \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \geq 0); \tag{3.5}$$

$$|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n| \, \mu-\text{h.h.y.} \Longrightarrow \mu_f \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}; \tag{3.6}$$

sağlanır. Özel olarak,

$$|f_n| \uparrow |f| \, \mu-\text{h.h.y.} \Longrightarrow \mu_{f_n} \uparrow \mu_f \tag{3.7}$$

dir.

İspat. μ_f in negatif olmayan ve artmayan olduğu açıktır. Sağdan sürekliliği göstermek için

$$E(\lambda) = \{x : |f(x)| > \lambda\}, \qquad (\lambda \geq 0)$$

olsun ve $\lambda_0 \geq 0$ alalım. λ azaldıkça $E(\lambda)$ kümeleri artar ve

$$E(\lambda_0) = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)$$

sağlanır. Dolayısıyla, monoton yakınsaklık teoreminden,

$$\mu_f\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)\right) \uparrow \mu(E(\lambda_0)) = \mu_f(\lambda_0)$$

elde edilir. O halde μ_f sağdan süreklidir.

(3.3) ve (3.4) özellikleri Tanım 3.2 nin direkt sonuçlarıdır.

$$\{x : |f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2\} \subseteq \{x : |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x : |g(x)| > \lambda_2\}$$

olduğundan (3.5) sağlanır. (3.6) yı göstermek için, $\lambda \geq 0$ ve

$$E = \{x : |f(x)| > \lambda\}, \qquad E_n = \{x : |f_n(x)| > \lambda\}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

olsun. $E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n$ olduğu açıktır. O halde, her $m = 1, 2, \ldots$ için

$$\mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_m \inf_{n>m} \mu(E_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

doğrudur. Fakat $\bigcap_{n>m} E_n$, m ye göre artandır, ve monoton yakınsaklık teoremini uygulayarak

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

elde edilir. O halde (3.6) doğrudur.

Şimdi $|f_n| \uparrow |f|$ μ-h.h.y. $\Rightarrow \mu_{f_n} \uparrow \mu_f$ olduğunu gösterelim. Öncelikle, bir önceki iddiadan, $\mu_f \leq \lim_{n\to\infty} \mu_{f_n}$ dir. Diğer yandan, $|f_n| \leq |f|$ μ-h.h.y. olduğundan, $\mu_{f_n} \leq \mu_f$ tir. Sonuç olarak, $\lim_{n\to\infty} \mu_{f_n} \leq \mu_f$ sağlanır. O halde, $\lim_{n\to\infty} \mu_{f_n} = \mu_f$ tir. □

Örnek 3.1. f negatif olmayan bir basit fonksiyon olmak üzere, f in μ_f dağılım fonksiyonunu hesaplamak faydalı olacaktır. E_j kümeleri $\mathcal{R}$ nin sonlu μ-ölçülü, ikili ayrık alt kümeleri ve $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x) \tag{3.8}$$

fonksiyonunu ele alalım. Eğer $\lambda \geq a_1$ ise, $\mu_f(\lambda) = 0$ olduğu açıktır. Fakat, eğer $a_2 \leq \lambda < a_1$ ise, bu durumda $f(x)$, E_1 üzerinde λ dan kesin büyüktür ve bu yüzden $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1)$ dir. Benzer şekilde, eğer $a_3 \leq \lambda < a_2$ ise, bu durumda $f(x)$, $E_1 \cup E_2$ üzerinde λ dan kesin büyüktür ve $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1 \cup E_2) = \mu_1(E_1) + \mu(E_2)$ dir. Genel olarak,

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.9}$$

ve $a_{n+1} := 0$ olmak üzere

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda), \qquad (\lambda \geq 0) \tag{3.10}$$

dır.

3.3. Artmayan Yeniden Düzenlenmeler

Bu alt bölümde genel olarak [12], [13] ve [14] ten yararlanılacaktır.

Bu alt bölüm boyunca $(\mathcal{R}, \Sigma, \mu)$ keyfi bir ölçü uzayı olarak alınacaktır.

Tanım 3.4. $\mu(A) > 0$ ve Σ nın $B \subset A$ olacak şekildeki her B elemanının ölçüsü ya 0 ya da $\mu(A)$ ise, $A \in \Sigma$ kümesine μ ölçüsünün bir atomudur denir.

A_1 ve A_2 iki atom olmak üzere, A_1 ve A_2 birbirinden farklıysa, yani, $d(A_1, A_2) > 0$ ise (diğer bir deyişle, A_1 ve A_2 denk değilse), o halde $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$ dir. Gerçekten, $d(A_1, A_2) = \mu(A_1 \triangle A_2) = \mu(A_1 \backslash A_2) + \mu(A_2 \backslash A_1) > 0$ olduğundan $\mu(A_1 \backslash A_2) > 0$ veya $\mu(A_2 \backslash A_1) > 0$ dır. Genelliği bozmadan $\mu(A_1 \backslash A_2) > 0$ olduğunu kabul edelim. A_1 kümesi atom ve $A_1 \backslash A_2 \subset A_1$ olduğu için $\mu(A_1) = \mu(A_1 \backslash A_2)$ dir. Böylece $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \backslash A_2) = 0$ dir.

Dolayısıyla ikili denk olmayan en fazla sayılabilir sayıda A_n atom kümeleri vardır. Eğer $\mu\left(\mathcal{R} \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ oluyorsa, μ ölçüsüne tamamen atomiktir denir. Eğer hiç atom yoksa, μ ye atomsuzdur denir.

Örnek 3.2. Lebesgue ölçüsü m, $[a,b]$ aralığının ölçülebilir her A kümesi üzerinde atomsuzdur. Ayrıca, keyfi $\alpha \in [0, m(A)]$ sayısı için $m(B) = \alpha$ olacak şekilde bir $B \subset A$ kümesi vardır.

İspat. Lebesgue ölçüsünün sayılabilir toplamsallığından, $F(x) = m(A \cap [a, x))$ fonksiyonu süreklidir. Ortalama değer teoreminin uygulanmasıyla ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2 (Sierpinski Teoremi)**.** μ atomsuz bir ölçü olsun. Bu durumda, her $\alpha \in [0, \mu(\mathcal{R})]$ için $\mu(A) = \alpha$ olacak şekilde bir $A \in \Sigma$ kümesi vardır.

Tanım 3.5. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olsun.

$$f^*(t) = \begin{cases} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{R}} |f(x)|, & t = 0, \\ \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) < t\}, & t > 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

olarak $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanan f^* fonksiyonuna f nin artmayan yeniden düzenlenmesi denir.

Burada $\inf \emptyset = \infty$ olduğu kabul edilmiştir. Böylece, her $\lambda \geq 0$ için $\mu_f(\lambda) \geq t$ ise, $f^*(t) = \infty$

dur. Ayrıca, eğer $(\mathcal{R},\mu)$ sonlu ölçülü bir uzay ise, bu durumda μ_f dağılım fonksiyonu $\mu(\mathcal{R})$ ile sınırlıdır ve dolayısıyla her $t \geq \mu(\mathcal{R})$ için $f^*(t) = 0$ dır. Bu durumda, f^* fonksiyonuna $[0,\mu(\mathcal{R}))$ üzerinde tanımlı denilebilir.

Tanımdan görüldüğü gibi, f^* fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu μ_f in genelleştirilmiş tersidir. Ayrıca dikkat edilmelidir ki, μ_f in sürekli ve azalan olması durumunda f^*, uygun bir aralık üzerinde μ_f in tersidir.

Örnek 3.3. (a) Şimdi, (3.8) de verilen f basit fonksiyonunun artmayan yeniden düzenlenmesini hesaplayalım. $t > m_3$ ise (3.11) den, $f^*(t) = 0$ dır. Ayrıca, $m_3 \geq t > m_2$ ise, $f^*(t) = a_3$ ve $m_2 \geq t > m_1$ ise, $f^*(t) = a_2$ dir. Bu şekilde devam edilerek

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(m_{j-1},m_j]}(t), \qquad (t \geq 0), \tag{3.12}$$

elde edilir. Belirtelim ki burada $m_0 = 0$ alınmıştır.

$$|\{t : f^*(t) > \lambda\}| = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1},a_j)}(\lambda) = \mu_f(\lambda) \quad (\lambda \geq 0),$$

olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak (3.8) ile verilen her f basit fonksiyonu için f ve f^* eş ölçülebilirdir.

Geometrik olarak, aslında f^* artmayan düzenlenmesini elde etmek için, f fonksiyonunun grafiğindeki dikey blokları artmayan bir sırada yeniden düzenlemekteyiz; f^* ın sıçrama noktalarındaki değerleri soldan süreklilik yardımıyla elde edilmektedir.

(b) Bazen fonksiyonu dikey bloklar yerine yatay bloklara ayırmak daha kullanışlı olmaktadır. Bu sayede (3.8) de verilen f basit fonksiyonu aşağıdaki gibi de gösterilebilir:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x). \tag{3.13}$$

Burada b_k lar pozitif sabitler ve F_k kümeleri sonlu ölçülüdür ayrıca $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$ olacak şekilde artan bir dizi oluştururlar. (3.8) ile karşılaştırma yapılırsa,

$$b_k = a_k - a_{k+1}, \qquad F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j, \qquad (k = 1,2,\ldots,n).$$

Bu durumda

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{(0,\mu(F_k)]}. \tag{3.14}$$

Önerme 3.2. f, g, ve f_n, $(n = 1,2,\ldots)$, $\mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve a keyfi bir skaler olsun. f^* ın artmayan yeniden düzenlenmesi negatif olmayan, artmayan ve $[0,\infty)$ üzerinde soldan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca,

(i) f^* ın $t_0 < \mu(\mathcal{R})$ noktasında sıçrama yapması için gerek ve yeter şart $\lambda_1 < \lambda_2$ olmak üzere bir (λ_1,λ_2) aralığındaki her λ için $\mu_f(\lambda) = t_0$ olmasıdır;

(ii) Her $\lambda > 0$ için $\lambda \le f^*(\mu_f(\lambda))$ eşitsizliği sağlanır ve eşitsizliğin kesin olması için gerek ve yeter şart $z > \lambda$ olmak üzere bir $[\lambda,z] \subset I$ aralığı üzerinde μ_f in sabit olmasıdır;

(iii) $t_1 < t_2$ olmak üzere bir (t_1,t_2) aralığı üzerindeki her t ve bir $\lambda_0 > 0$ için $f^*(t) \equiv \lambda_0$ olması için gerek ve yeter şart μ_f in λ_0 noktasında sıçrama yapması ve $(t_1,t_2) \subset (\mu(\lambda_0),\mu(\lambda_0-))$ olmasıdır;

(iv)

$$\mu_f(f^*(t)) \le t, \qquad (f^*(t) < \infty); \tag{3.15}$$

(v)

$$|g| \le |f|\,\mu-\text{a.e.} \Longrightarrow g^* \le f^*; \tag{3.16}$$

(vi)

$$(af)^* = |a| f^*; \tag{3.17}$$

(vii)

$$(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) g^*(t_2), \qquad (t_1, t_2 \geq 0); \tag{3.18}$$

(viii)

$$(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2), \qquad (t_1, t_2 \geq 0); \tag{3.19}$$

(ix) Eğer $\{f_n\}_n$ dizisi bir f fonksiyonuna ölçüsel yakınsak ise, bu durumda $f^*(t)$ nin bütün süreklilik noktalarında $f_n^*(t) \to f^*(t)$ dir;

(x) Eğer $|f_n| \leq g$ ve $f_n \to f$ μ-h.h.y. ise, bu durumda her $t > 0$ için $(f - f_n)^*(t) \to 0$ dır;

Özel olarak,

$$|f_n| \uparrow |f| \, \mu - \text{h.h.y.} \Longrightarrow f_n^* \uparrow f^*;$$

(xi)

$$|f| \leq \liminf_{n \to \infty} |f_n| \, \mu - \text{h.h.y.} \Longrightarrow f^* \leq \liminf_{n \to \infty} f_n^*; \tag{3.20}$$

(xii)

$$f \text{ ve } f^* \text{ eş ölçülebilirdir;} \tag{3.21}$$

(xiii)

$$(|f|^p)^* = (f^*)^p, \qquad (0 < p < \infty). \tag{3.22}$$

İspat. f^* ın negatif olmayan, artmayan ve soldan sürekli olması ayrıca (i), (ii) ve (iii) özelliklerinin sağlanması, Teorem 3.1 den ve $\mu_f(\lambda)$ dağılım fonksiyonunun artmayanlığından elde edilir. (v) ve (vi), 3.1 ve artmayan yeniden düzenlenme tanımından direk elde edilir.

(iv) $t > 0$ ve $\lambda = f^*(t) < +\infty$ olsun. (3.11) den, $\mu_f(\lambda_n) < t$ olacak şekilde $\lambda_n \downarrow \lambda$ dizisi vardır.

Böylece μ_f in sağdan sürekliliğinden

$$\mu_f(f^*(t)) = \mu_f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_n) \leq t.$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\mu_f(f^*(0)) = \mu(\{x : |f(x)| > \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathcal{R}} |f(x)\}) = 0$$

dır. Bu ise (3.15) i ispatlar.

(vii) $\varepsilon > 0$ yeterince küçük olmak üzere, $f^*(t_1 - \varepsilon) = a$ ve $g^*(t_2 - \varepsilon) = b$ alalım.

$$\{x : |f(x)g(x)| > ab\} \subset \{x : |f(x)| > a\} \cup \{x : |g(x)| > b\}$$

olduğundan

$$\mu_{fg}(ab) \leq \mu_f(a) + \mu_g(b) \leq t_1 + t_2 - 2\varepsilon < t_1 + t_2$$

eşitsizliği doğrudur. Böylece

$$(fg)^*(t_1 + t_2) \leq ab = f^*(t_1 - \varepsilon)\, g^*(t_2 - \varepsilon)$$

sağlanır. Yeniden düzenlenmenin soldan sürekliliğinden ispat tamamlanır.

(viii) Dikkat edelim ki her $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R})$ için

$$(e^{|f|})^*(t) = e^{f^*(t)} \quad (t > 0)$$

eşitliği doğrudur.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}(e^{|f|})^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0 : \mu(\{x : e^{|f(x)|} > \lambda\}) < t\} \\ &= \inf\{\lambda \geq 1 : \mu(\{x : e^{|f(x)|} > \lambda\}) < t\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf\{\lambda \geq 1 : \mu(\{x : |f(x)| > \ln\lambda\}) < t\} \\
&= e^{\inf\left\{\ln\lambda\geq 1:\mu(\{x:|f(x)|>\ln\lambda\})<t\right\}} \\
&= e^{\inf\left\{\lambda\geq 0:\mu(\{x:|f(x)|>\lambda\})<t\right\}} = e^{f^*(t)}
\end{aligned}
$$

dir.

O halde, (vii) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
e^{(f+g)^*(t_1+t_2)} &= (e^{|f+g|})^*(t_1+t_2) \\
&\leq (e^{|f|}e^{|g|})^*(t_1+t_2) \\
&\leq (e^{|f|})^*(t_1)(e^{|g|})^*(t_2) \\
&= e^{f^*(t_1)}e^{g^*(t_2)}
\end{aligned}
$$

elde edilir, böylece (viii) sağlanır.

(ix) $\{f_n\}_n$ dizisi f fonksiyonuna ölçüsel yakınsak olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için

$$
n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in \mathcal{R} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \delta
$$

olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon, \delta)$ vardır. Böylece

$$
n > n_0 \quad \Rightarrow \quad (f_n - f)^*(\delta) \leq \varepsilon
$$

dur. (viii) den, her $t > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$
f^*(t+\delta) \leq f_n^*(t) + (f - f_n)^*(\delta)
$$

ve

$$
f_n^*(t) \leq f^*(t-\delta) + (f - f_n)^*(\delta)
$$

yani,

$$
f^*(t+\delta) - (f - f_n)^*(\delta) \leq f_n^*(t) \leq f^*(t-\delta) + (f - f_n)^*(\delta)
$$

eşitsizliği sağlanır. Elde edilen son iki eşitsizlik kullanılarak, her $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ve yeterince büyük n için

$$f^*(t+\delta) - \varepsilon \leq f_n^*(t) \leq f^*(t-\delta) + \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $f^*(t)$ fonksiyonu t de sürekli ise, bu eşitsizlik

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(t) = f^*(t)$$

olduğunu gösterir.

(x) $|f_n| \leq g$ ve $\mathcal{R}$ üzerinde $f_n \to f$ μ-h.h.y. olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{R} : |g(x)| \leq \varepsilon/2\} \cup \{x \in \mathcal{R} : |g(x)| > \varepsilon/2\} \equiv E_1 \cup E_2$$

dir. Böylelikle

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E_1} |g(x)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{ve} \quad \mu(E_2) < \infty$$

sağlanır.

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E_1} |f(x) - f_n(x)| \leq 2 \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E_1} |g(x)| \leq \varepsilon/2$$

olduğu açıktır. $\mu(E_2) < \infty$ olduğundan, $\mathcal{R}$ üzerinde hemen hemen her yerde $f_n(x) \to f(x)$ olması E_2 üzerinde f_n in f e ölçüsel yakınsak olduğunu gösterir, yani,

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in E_2 : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır.

Sonuç olarak,

$$n > n_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in \mathcal{R} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

sağlanır, yani, $\mathcal{R}$ de $(f_n - f)$, 0 a ölçüsel yakınsaktır. (ix) dan her $t > 0$ için $(f - f_n)^*(t) \to 0$ dır.

(xi) $F_n = \inf_{m\geq n} |f_m|$ ve $h = \liminf_{n\to\infty} |f_n| = \sup_{n\geq 1} F_n$ alalım. $F_n \uparrow h$ olduğundan, (x) dan,

$n \to \infty$ için $F_n^* \uparrow h^*$ dır. Hipotezden $|f| \le h$ sağlanır, böylece $f^* \le h^* = \sup_n F_n^*$ dir. $m \ge n$ için $F_n \le |f_m|$ olduğundan, $m \ge n$ olmak üzere $F_n^* \le f_m^*$ dir; o halde $F_n^* \le \inf_{m \ge n} f_m^*$ dır. Bu özelliklerin hep birlikte ele alınmasıyla, $f^* \le h^* \le \sup_n \inf_{m \ge n} f_m^* = \liminf_{n\to\infty} f_n^*$ elde edilir.

(xii) $\mathfrak{M}_0$ üzerinde tanımlı keyfi bir f fonksiyonu için, $f_n \uparrow |f|$ olacak şekilde f_n, $(n = 1, 2, \ldots)$ negatif olmayan basit fonksiyonlar dizisi bulunabilir. Açıktır ki (karş. Örnek 3.3 (a)) herbir n ıçin, f_n ve f_n^* fonksiyonları eş ölçülebilirdir, yani,

$$\mu_{f_n}(\lambda) = m_{f_n^*}(\lambda), \qquad (\lambda \ge 0) \tag{3.23}$$

sağlanır. Fakat $f_n \uparrow |f|$ ve $f_n^* \uparrow f^*$ ((3.20) den) olduğundan, (3.6), (3.23) teki her dağılım fonksiyonuna uygulanırsa,

$$\mu_f(\lambda) = m_{f^*}(\lambda), \qquad (\lambda \ge 0) \tag{3.24}$$

elde edilir. O halde (3.21) de iddia edildiği gibi f ve f^* eş ölçülebilirdir.

(xiii) Son olarak, (3.24) ten

$$\mu_{|f|^p}(\lambda) = \mu_f(\lambda^{1/p}) = m_{f^*}(\lambda^{1/p}) = m_{(f^*)^p}(\lambda), \qquad (\lambda \ge 0)$$

eşitliği doğrudur. (3.11) kullanılarak artmayan yeniden düzenlenmelere geçilirse, (3.22) elde edilir. □

Sonuç 3.1. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olsun. Eğer $f^*(t)$, $\mu_f(\lambda)$ nın bir süreklilik noktası ise $\mu_f(f^*(t)) = t$ ve eğer $f^*(t)$, $\mu_f(\lambda)$ nın bir süreksizlik noktası ise $\mu_f(f^*(t)) \le t$ dir. Benzer şekilde, eğer $\mu_f(\lambda)$, $f^*(t)$ nin bir süreklilik noktası ise, $f^*(\mu_f(\lambda)) = \lambda$ ve eğer $\mu_f(\lambda)$, $f^*(t)$ nin bir süreksizlik noktası ise $f^*(\mu_f(\lambda)) \ge \lambda$ dır.

Teorem 3.3. Artmayan yeniden düzenlenme tektir.

İspat. Kabul edelim ki f_1^* ve f_2^* aynı f fonksiyonunun iki farklı yeniden düzenlenmesi olsunlar. $f_2^*(t_0) > f_1^*(t_0)$ olsun. $f_2^*(t_0) - \varepsilon > f_1^*(t_0)$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ alalım. f_1^* ın soldan sürekliliğinden $f_1^*(t) < f_2^*(t_0) - \varepsilon$ olacak şekilde bir $[t_1, t_0]$ aralığı vardır. Bu durumda

$$|\{t : f_2^*(t) > f_2^*(t_0) - \varepsilon\}| \geq t_0,$$

ve

$$|\{t : f_1^*(t) > f_2^*(t_0) - \varepsilon\}| \leq t_1 < t_0$$

eşitsizlikleri doğrudur. Böylece f_1^* ve f_2^* eş ölçülebilir değildir ve bu f_1^* ve f_2^* ın f ile eş ölçülebilir olmasıyla çelişir. □

Not 3.2. f^* ın artmayan yeniden düzenlenmesi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$f^*(t) = \sup_{|E|=t} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} |f(x)|, \quad t \in (0, \infty), \tag{3.25}$$

(bkz., örneğin, [20, p. 33] ve [21]).

Aşağıdaki önermede L^p-normlarının, dağılım fonksiyonu ve artmayan yeniden düzenlenme yardımıyla alternatif bir tanımı verilmiştir.

Önerme 3.3. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olsun. Eğer $0 < p < \infty$ ise, bu durumda

$$\int_{\mathcal{R}} |f|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) \, d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt \tag{3.26}$$

dir.

İspat. (3.6), (3.20), ve monoton yakınsaklık teoreminden, keyfi negatif olmayan basit

f fonksiyonu için (3.26) nın sağlandığını göstermek yeterlidir. f fonksiyonu (3.8) formunda yazıldığında, bu fonksiyonun artmayan yeniden düzenlenmesi f^* ın (3.12) olduğu gösterilmişti. Fakat, bu durumda (3.9) dan açıktır ki

$$\int |f|^p \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j^p \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j^p m((m_{j-1}, m_j]) = \int_0^\infty (f^*)^p \, dm$$

dir. Benzer şekilde (3.8) ve (3.10) gösterilimleri ve μ_f dağılım fonksiyonu kullanılarak,

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) \, d\lambda &= p \sum_{j=1}^{n} m_j \int_{a_{j-1}}^{a_j} \lambda^{p-1} \, d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_j^p - a_{j+1}^p) m_j = \sum_{j=1}^{n} a_j^p \mu(E_j) = \int |f|^p \, d\mu, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada üçüncü eşitlik (3.9) ve kısmi toplam formülünden elde edilir. □

Lemma 3.1. g, $(\mathcal{R}, \mu)$ üzerinde negatif olmayan bir basit fonksiyon ve E, $\mathcal{R}$ nin μ-ölçülebilir keyfi bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\int_E g \, d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s) \, ds \tag{3.27}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. g fonksiyonunu (3.13) formunda yazalım. Böylece $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$ ve $b_j > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{F_j}(x)$$

dir. Artmayan yeniden düzenlenme için (3.14) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(E \cap F_j) \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \min\{\mu(E), \mu(F_j)\} &= \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{\mu(E)} \chi_{(0, \mu(F_j))]}(s) \, ds \\ &= \int_0^{\mu(E)} g^*(s) \, ds \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.4 (G.H. Hardy ve J.E. Littlewood)**.** f ve g, $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_R |fg|\,d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds \tag{3.28}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. f^* ve g^* fonksiyonları, f ve g fonksiyonlarının yalnızca mutlak değerlerine bağlı oldukları için, (3.28) eşitsizliğini yalnızca negatif olmayan f ve g fonksiyonları için göstermek yeterlidir. O halde, (3.20) ve monoton yakınsaklık teoreminden, f ve g yi basit fonksiyonlar olarak ele almak da genelliği bozmaz. Bu durumda, $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m$ ve $a_j > 0$, $(j = 1,2,\ldots,m)$ (bkz. (3.13)) olmak üzere

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x)$$

yazılabilir. Öyleyse (karş. (3.14))

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{(0,\mu(E_j))]}(t)$$

doğrudur. Böylece, Lemma 3.1 den,

$$\begin{aligned}
\int |fg|\,d\mu &= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j} g\,d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s)\,ds \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{(0,\mu(E_j))]}(s) g^*(s)\,ds \\
&= \int_0^1 f^*(s)g^*(s)\,ds
\end{aligned}$$

sağlanır ve ispat tamamlanır. $\square$

g, pozitif t ölçülü bir E kümesinin karakteristik fonksiyonu olduğunda, (3.28) Hardy-Littlewood eşitsizliği

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f|\,d\mu \le \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds, \qquad (f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)) \tag{3.29}$$

eşitsizliğine indirgenir. Dolayısıyla, t ölçülü herhangi bir küme üzerinden $|f|$ fonksiyonunun ortalama değeri, karşılık gelen f^* fonksiyonunun $(0,t)$ üzerindeki ortalama değeri ile kontrol edilir. Dikkat edelim ki sağdaki ortalama f fonksiyonun $[0,\infty)$ un tüm t ölçülü alt kümeleri üzerinden alınmış ortalamalar arasında maksimaldır (bu kanıt f^* ın artmayan olmasından direk alınır ya da (3.29) eşitsizliğinin $(\mathcal{R},\mu) = ([0,\infty),m)$ ve $f = f^*$ olarak alınmış özel halidir). Bu yüzden, (3.29) un sağ tarafındaki fonksiyona da maksimal fonksiyon denir.

Tanım 3.6. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olsun. Bu durumda

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds, \qquad (t > 0) \tag{3.30}$$

ile tanımlı f^{**} fonksiyonuna f^* ın maksimal fonksiyonu denir.

$f \to f^{**}$ maksimal operatörünün bazı temel özellikleri aşağıda listelenmiştir.

Önerme 3.4. [14, Bölüm 2, Önerme 3.2] f, g, ve f_n, $(n = 1,2,\ldots)$, $\mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve a bir skaler olsun. Bu durumda, f^{**} negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyondur, ayrıca $(0,\infty)$ üzerinde süreklidir. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$f^{**} \equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0\ \mu-\text{a.e.}; \tag{3.31}$$

$$f^* \le f^{**}; \tag{3.32}$$

$$|g| \le |f|\ \mu-\text{a.e.} \Rightarrow g^{**} \le f^{**}; \tag{3.33}$$

$$(af)^{**} = |a|\, f^{**}; \tag{3.34}$$

$$|f_n| \uparrow |f| \qquad \mu - \text{a.e.} \Rightarrow f_n^{**} \uparrow f^{**}. \tag{3.35}$$

İspat. f^* artmayan olduğundan, (3.30) gösterir ki, $f^{**}(t)$ fonksiyonunun t nin herhangi bir değeri için sonlu olması için gerek ve yeter koşul $f^{**}(t)$ nin her $t > 0$ için sonlu olmasıdır. Diğer bir deyişle, f^{**} fonksiyonu ya her yerde sonludur, ya da her yerde sonsuzdur. Her iki durumda da negatif olmayandır (eğer $+\infty$ değeri dahil edilirse) ve süreklidir.

(3.31), (3.33), (3.34), ve (3.35) özellikleri f^* için Önerme 3.2 de verilmiş özelliklerin direk sonuçlarıdır. (3.32), f^* ın artmayan olmasından kolayca elde edilir. Böylece,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \geq f^*(t)\frac{1}{t}\int_0^t ds = f^*(t)$$

dir. Son olarak, f^* artmayan olduğundan $0 < t \leq s$ ise, $f^*(v) \leq f^*\left(\frac{tv}{s}\right)$ sağlanır. O halde,

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s}\int_0^s f^*(v)\,dv \leq \frac{1}{s}\int_0^s f^*\left(\frac{tv}{s}\right)dv = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)\,du = f^{**}(t)$$

dir ve böylece f^{**} artmayandır. □

Önerme 3.5. [14, Bölüm 2, Teorem 2.7 ve Önerme 3.3] $(\mathcal{R},\mu)$ total σ-sonlu atomsuz bir ölçu uzayı ve t, μ nün herhangi bir pozitif değeri olsun. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olmak üzere,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |f|\,d\mu : \mu(E) = t\right\} \tag{3.36}$$

dir.

Not 3.3. Dikkat edilmelidir ki (3.36), $f \to f^{**}$ maksimal operatörü için belli bir alttoplamsallık özelliğini vermektedir. t, μ nün bir değeri ve $(\mathcal{R},\mu)$ rezonant olmak üzere

$$(f+g)^{**}(t) \le f^{**}(t) + g^{**}(t) \tag{3.37}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.4. Medyanlar ve Bir Fonksiyonun Ortalama Salınımı

Bu alt bölümde genel olarak [15], [16] ve [17] den yararlanılacaktır.

Bu alt bölüm boyunca $(\mathcal{R},\Sigma,\mu)$ keyfi bir ölçü uzayını; E, $\mathcal{R}$ nin, $0 < \mu(E) < \infty$ koşulunu sağlayan ölçülebilir bir alt kümesini, ve f tanım kümesi E yi içeren reel değerli ölçülebilir bir fonksiyonu gösterecektir. H, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi olmak üzere, $f^{-1}(H)$ gösterimi $\{x \in E : f(x) \in H\}$ kümesini ifade edecektir.

E üzerinde f fonksiyonunun ortalama salınımı

$$O(f,E) := \inf_{c\in\mathbb{R}} \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f-c|\, d\mu \tag{3.38}$$

şeklinde tanımlıdır.

$O(f,E)$ fonksiyonlarından oldukça sık kullanılan iki fonksiyon için de birer gösterim vermek uygun olacaktır. E üzerinde integrallenebilen her f fonksiyonu için $A(f,E)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$A(f,E) := \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - f_E|\, d\mu. \tag{3.39}$$

Ayrıca, $D(f,E)$

$$D(f,E) := \frac{1}{\mu(E)^2} \iint_{E\times E} |f(x) - f(y)|\, d\mu(x) d\mu(y) \tag{3.40}$$

biçiminde alınacaktır. (”A” ve ”D” sırasıyla, ”ortalama” ve ”iki katlı integral” ifadelerinin kısaltmalarıdır).

Lemma 3.2. E üzerinde f in en azından bir medyanı vardır, yani,

$$\mu(\{x \in E : f(x) < m\}) \leq \frac{1}{2}\mu(E) \quad \text{and} \quad \mu(\{x \in E : f(x) > m\}) \leq \frac{1}{2}\mu(E) \tag{3.41}$$

sağlanacak şekilde bir m sayısı vardır.

İspat.

$$A := \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) > \alpha\}) > \frac{1}{2}\mu(E)\right\},$$
$$B := \left\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) < \alpha\}) > \frac{1}{2}\mu(E)\right\}$$

kümelerini tanımlayalım. Her iki küme de genişleyen dizi teoremi gereğince boş değildir. A kümesi sol bitim noktası $-\infty$ olan bir aralıktır. B kümesi sağ bitim noktası $+\infty$ olan bir aralıktır. $A \cap B = \emptyset$ olduğu açıktır. Bu durumda $M := \mathbb{R}\backslash A \backslash B$ kümesi uç noktaları $\sup A$ ve $\inf B$ olan, boştan farklı sınırlı bir aralıktır (tek nokta kümesi de olabilir). Her $m \in M$ için (3.41) sağlanır. □

Lemma 3.3. E üzerinde f in ortalama salınımı, f in E üzerindeki her m medyanı için aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$O(f, E) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - m| \, d\mu \tag{3.42}$$

İspat. m, E üzerinde tanımlı f fonksiyonunun herhangi bir medyanı olsun. O halde

$$\mu(\{x \in E : f(x) < m\}) \leq \frac{1}{2}\mu(E) \leq \mu(\{x \in E : f(x) \geq m\}). \tag{3.43}$$

eşitsizliği sağlanır. Açıktır ki

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - m| \, d\mu \leq O(f, E)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Aşağıdaki hesaplamayı $c \leq m$ olacak şekildeki her c sayısı için yapabiliriz. Üçüncü ve dördüncü satırdan beşinci ve altıncı satıra geçişte (3.43) eşitsizliğinden ve $m - c \geq 0$ olmasından yararlanılmıştır.

$$\begin{aligned}
\int_E |f-m|\,d\mu &= \int_{f^{-1}((-\infty,m))} (m-f)\,d\mu + \int_{f^{-1}([m,+\infty))} (f-m)\,d\mu \\
&= \int_{f^{-1}((-\infty,m))} (c-f)\,d\mu + \int_{f^{-1}([m,+\infty))} (f-c)\,d\mu \\
&\quad + (m-c)\mu(f^{-1}((-\infty,m))) + (c-m)\mu(f^{-1}([m,+\infty))) \\
&\leq \int_{f^{-1}((-\infty,m))} (c-f)\,d\mu + \int_{f^{-1}([m,+\infty))} (f-c)\,d\mu \\
&\quad + (m-c)\mu(f^{-1}([m,+\infty))) + (c-m)\mu(f^{-1}([m,+\infty))) \\
&= \int_{f^{-1}((-\infty,m))} (c-f)\,d\mu + \int_{f^{-1}([m,+\infty))} (f-c)\,d\mu \\
&\leq \int_{f^{-1}((-\infty,m))} |c-f|\,d\mu + \int_{f^{-1}([m,+\infty))} |f-c|\,d\mu = \int_E |f-c|\,d\mu.
\end{aligned}$$

$c > m$ olması durumunda ise yukarıdaki hesaplamalar $-f$ fonksiyonu için yapılabilir. $-m$, E üzerinde $-f$ fonksiyonunun bir medyanı ve $-c < -m$ olduğundan

$$\int_E |-f+m|\,d\mu \leq \int_E |-f+c|\,d\mu$$

sağlanır.

Bu iki durum birlikte ele alınırsa, her $c \in \mathbb{R}$ için

$$\int_E |f-m|\,d\mu \leq \int_E |f-c|\,d\mu$$

olduğu görülür. $c \in \mathbb{R}$ üzerinden infimum alınmasıyla

$$\int_E |f-m|\,d\mu \leq \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_E |f-c|\,d\mu = O(f,E)$$

elde edilir. □

Lemma 3.4. E kümesi üzerinde f fonksiyonunun medyanı m olmak üzere, her m için

$$|f_E - m| \le O(f,E) \tag{3.44}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} f_E - m &= \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f_E - m)\, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f - m)\, d\mu \\ &\le \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - m|\, d\mu = O(f,E) \end{aligned}$$

doğrudur ve benzer şekilde $m - f_E \le O(f,E)$ dir. Bu iki ifade birlikte ele alınarak (3.44) elde edilir. □

Lemma 3.5. E üzerinde integrallenebilen her f fonksiyonu için

$$O(f,E) \le A(f,E) \le D(f,E) \le 2\,O(f,E) \tag{3.45}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. m, f nin E üzerinde bir medyanı olsun. Bu durumda Lemma 3.3 ten,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x) - m|\, d\mu(x) &\le \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x) - f_E|\, d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\mu(E)} \int_E \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E (f(x) - f(y))\, d\mu(y) \right| d\mu(x) \\ &\le \frac{1}{\mu(E)^2} \iint_{E\times E} |f(x) - f(y)|\, d\mu(x) d\mu(y) \end{aligned}$$

elde edilir, böylece (3.45) teki ilk iki eşitsizlik elde edilmiş olur. Geri kalan eşitsizlikler için

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(E)^2}\iint_{E\times E}|f(x)-f(y)|\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&\quad\le \frac{1}{\mu(E)^2}\iint_{E\times E}|f(x)-m|\,d\mu(x)d\mu(y)+\frac{1}{\mu(E)^2}\iint_{E\times E}|m-f(y)|\,d\mu(x)d\mu(y)\\
&\quad=\frac{2}{\mu(E)}\int_E|f-m|\,d\mu,
\end{aligned}
$$

doğrudur ki bu da (3.45) in ispatını tamamlar. □

Lemma 3.6. *m_1 ve m_2, E üzerinde f fonksiyonunun $m_1 < m_2$ şartını sağlayan iki medyanı olsun. Bu durumda*

$$\mu(\{x\in E : m_1 < f(x) < m_2\}) = 0 \tag{3.46}$$

dır.

İspat. $f^{-1}((-\infty,m_1])\cap f^{-1}([m_2,+\infty)) = \emptyset$ ve

$$\mu(f^{-1}((-\infty,m_1]))\ge\frac{1}{2}\mu(E)\qquad\text{ve}\qquad\mu(f^{-1}([m_2,+\infty)))\ge\frac{1}{2}\mu(E),$$

olduğundan

$$\mu(f^{-1}((-\infty,m_1]))=\frac{1}{2}\mu(E)\qquad\text{ve}\qquad\mu(f^{-1}([m_2,+\infty)))=\frac{1}{2}\mu(E)$$

sağlanır. O halde

$$f^{-1}((m_1,m_2)) = E\backslash(f^{-1}((-\infty,m_1])\cup f^{-1}([m_2,+\infty))),$$

ve böylece $\mu(f^{-1}((m_1,m_2)))=0$ dır. □

Şimdi, $\mathcal{R}$, $\mathbb{R}^n$ olsun ve Σ, $\mathcal{R}$ nin tüm Lebesgue ölçülebilir alt kümelerini içersin, ayrıca μ, n-boyutlu Lebesgue ölçüsü olsun.

Lemma 3.7. Q, $\mathbb{R}^n$ de bir küp olsun. f fonksiyonunun Q üzerindeki her m medyanı, her $c \in \mathbb{R}$ için

$$|m-c| \leq ((f-c)\chi_Q)^*\left(\frac{|Q|}{2}\right) \tag{3.47}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat. m, f in Q üzerinde bir medyanı olsun. Bu durumda

$$|\{x \in Q : f(x) > m\}| \leq \frac{1}{2}|Q| \leq |\{x \in Q : f(x) \geq m\}|$$

doğrudur. Sierpinski Teoremi'nden, $|E'| = |Q|/2$ ve $f(x) \geq m$, $x \in E'$ olacak şekilde $E' \subset Q$ vardır.

$c \leq m$ koşulunu sağlayan her c sayısı için

$$f(x) \geq m \Leftrightarrow f(x) - c \geq m - c \Leftrightarrow |f(x) - c| \geq |m - c|$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} ((f-c)\chi_Q)^*\left(\frac{|Q|}{2}\right) &= \sup_{E \subset Q : |E| = |Q|/2} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} |f(x) - c| \\ &\geq \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E'} |f(x) - c| \geq |m - c| \end{aligned}$$

elde edilir.

Aksine, $c > m$ ise,

$$f(x) \leq m \Leftrightarrow f(x) - c \leq m - c \Leftrightarrow |f(x) - c| \geq |m - c|$$

sağlanır. m, f in Q üzerinde medyanı olduğundan

$$|\{x \in Q : f(x) < m\}| \leq \frac{1}{2}|Q| \leq |\{x \in Q : f(x) \leq m\}|,$$

eşitsizliği doğrudur ve Sierpinski Teoremi'nden, $|E''| = |Q|/2$ ve $f(x) \leq m$, $x \in E''$ olacak şekilde $E'' \subset Q$ vardır.

Böylece

$$((f-c)\chi_Q)^*\left(\frac{|Q|}{2}\right) \geq \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E''} |f(x)-c| \geq |m-c|$$

elde edilir ve bu iki durumun birlikte ele alınmasıyla (3.47) eşitsizliği her $c \in \mathbb{R}$ için sağlanır. □

Lemma 3.8. *Q, $\mathbb{R}^n$ de bir küp ve $0 < s \leq 1/2$ olsun. Bu durumda f in Q üzerindeki her m medyanı için*

$$((f-m)\chi_Q)^*(s|Q|) \leq 2\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)^*(s|Q|) \tag{3.48}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. E, Q nun $|E| = s|Q|$ özelliğine sahip bir alt kümesi olsun.

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} |f(x)-m| \leq \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} |f(x)-c| + |m-c|$$

olduğu açıktır. (3.25) ten,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} |f(x)-c| \leq ((f-c)\chi_Q)^*(s|Q|).$$

elde edilir. $0 < s \leq 1/2$ olduğundan, Lemma 3.7 kullanılarak,

$$m-c| \leq ((f-c)\chi_Q)^*\left(\frac{|Q|}{2}\right) \leq ((f-c)\chi_Q)^*(s|Q|)$$

olduğu görülür. Bu iki eşitsizlik birleştirilirse,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} |f(x)-m| \leq 2((f-c)\chi_Q)^*(s|Q|)$$

dur. (3.25) in tekrar kullanılmasıyla, (3.48) sağlanır. □

Herhangi bir c sabiti için $f \equiv c$ fonksiyonunun medyan değerleri kümesinin bir noktadan oluştuğu kolayca görülebilir. Öte yandan $[0,1]$ üzerinde tanımlı $f = \chi_{[1/2,1)}$ fonksiyonunun medyan değerleri kümesi $[0,1]$ dır. Bu nedenle maksimal ve minimal medyan kavramları verilebilir ve bu değerler tektir.

Tanım 3.7. $Q \subset \mathbb{R}^n$ bir küp ve $f \in \mathfrak{M}_0(Q)$ olmak üzere,

$$m_f^{\max}(Q) = \sup\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \ |\{y \in Q : \ f(y) < \alpha\}| \le \frac{1}{2}|Q|\right\} \tag{3.49}$$

ve

$$m_f^{\min}(Q) = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \ |\{y \in Q : \ f(y) > \alpha\}| \le \frac{1}{2}|Q|\right\} \tag{3.50}$$

değerlerine, sırasıyla f in Q küpü üzerinde maksimal ve minimal medyanı denir.

Açıktır ki,

$$m_f^{\max}(Q) = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \ |\{y \in Q : \ f(y) < \alpha\}| > \frac{1}{2}|Q|\right\}$$

ve

$$m_f^{\min}(Q) = \sup\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \ |\{y \in Q : \ f(y) > \alpha\}| > \frac{1}{2}|Q|\right\}.$$

Kolayca gösterilebilir ki,

$$|\{y \in Q : \ f(y) < m_f^{\max}(Q)\}| \le \frac{1}{2}|Q|. \tag{3.51}$$

Diğer taraftan,

$$B_n := \left\{y \in Q : \ f(y) \ge m_f^{\max}(Q) + \frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

kümeleri için

$$|B_n| \le \frac{1}{2}|Q|, \quad n \in \mathbb{N}$$

ve

$$\{y \in Q:\ f(y) > m_f^{\max}(Q)\} \subset \liminf_{n\to\infty} B_n$$

olduğundan

$$|\{y \in Q:\ f(y) > m_f^{\max}(Q)\}| \leq \liminf_{n\to\infty} |B_n| \leq \frac{1}{2}|Q|$$

doğrudur. Böylece

$$|\{y \in Q:\ f(y) > m_f^{\max}(Q)\}| \leq \frac{1}{2}|Q|. \tag{3.52}$$

(3.51) ve (3.52) eşitsizlikleri $m_f^{\max}(Q)$ nün da bir medyan olduğunu belirtir. Maksimal medyan aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$|\{y \in Q:\ f(y) \leq m_f^{\max}(Q)\}| \geq \frac{1}{2}|Q|, \tag{3.53}$$

$$|\{y \in Q:\ f(y) \geq m_f^{\max}(Q)\}| \geq \frac{1}{2}|Q|. \tag{3.54}$$

Gerçekten,

$$\begin{aligned} |\{y \in Q:\ f(y) \leq m_f^{\max}(Q)\}| &= |Q| - |\{y \in Q:\ f(y) > m_f^{\max}(Q)\}| \\ &\geq |Q| - \frac{1}{2}|Q| = \frac{1}{2}|Q|, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |\{y \in Q:\ f(y) \geq m_f^{\max}(Q)\}| &= |Q| - |\{y \in Q:\ f(y) < m_f^{\max}(Q)\}| \\ &\geq |Q| - \frac{1}{2}|Q| = \frac{1}{2}|Q|. \end{aligned}$$

Not 3.4. Bundan sonra medyan kavramı ele alınırken, maksimal medyan anlaşılacak ve kısaca $m_f(Q)$ ile gösterilecektir.

Maksimal medyanın temel özellikleri aşağıdaki önermede verilmiştir:

Önerme 3.6. $Q \subset \mathbb{R}^n$ bir küp ve $f, g \in \mathfrak{M}_0(Q)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. Hemen hemen her yerde $f \leq g$ ise,

$$m_f(Q) \leq m_g(Q). \tag{3.55}$$

2. c bir sabit olmak üzere,

$$m_f(Q) - c = m_{f-c}(Q). \tag{3.56}$$

3. $m_{-|f|}(Q) \leq m_f(Q) \leq m_{|f|}(Q)$ eşitsizliği doğrudur.

   $m_f(Q) \leq 0$ olması durumunda

$$|m_f(Q)| \leq m_{|f|}(Q) \tag{3.57}$$

   sağlanır.

   Ayrıca keyfi f fonksiyonu için

$$|m_f(Q)| \leq m_{|f|}(Q) \tag{3.58}$$

   dir.

4. $f \geq 0$ lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$m_f(Q) \leq 2 f_Q. \tag{3.59}$$

İspat. 1. Sıfır ölçülü kümeler göz ardı edildiğinde

$$\{y \in Q : \; g(y) < m_f(Q)\} \subset \{y \in Q : \; f(y) < m_f(Q)\}.$$

Dolayısıyla

$$|\{y \in Q: \ g(y) < m_f(Q)\}| \leq |\{y \in Q: \ f(y) < m_f(Q)\}| \leq \frac{1}{2}|Q|,$$

ve $m_f(Q) \leq m_g(Q)$ dır.

2.

$$\{y \in Q: \ f(y) < m_f(Q)\} = \{y \in Q: \ f(y) - c < m_f(Q) - c\},$$

olduğundan

$$|\{y \in Q: \ f(y) < m_f(Q)\}| = |\{y \in Q: \ f(y) - c < m_f(Q) - c\}| \leq \frac{1}{2}|Q|,$$

sağlanır ve

$$m_f(Q) - c \leq m_{f-c}(Q)$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca

$$\{y \in Q: \ f(y) - c < m_{f-c}(Q)\} = \{y \in Q: \ f(y) < m_{f-c}(Q) + c\},$$

olduğundan

$$|\{y \in Q: \ f(y) - c < m_{f-c}(Q)\}| = |\{y \in Q: \ f(y) < m_{f-c}(Q) + c\}| \leq \frac{1}{2}|Q|,$$

sağlanır ve böylece

$$m_{f-c}(Q) + c \leq m_f(Q)$$

dur.

3. $-|f| \leq f \leq |f|$ ve (3.55) ten,

$$m_{-|f|}(Q) \leq m_f(Q) \leq m_{|f|}(Q).$$

Sonuç olarak, $m_f(Q) \geq 0$ için $|m_f(Q)| = m_f(Q) \leq m_{|f|}(Q)$ dir.

Eğer $m_f(Q) \leq 0$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}\{y \in Q : \ |f(y)| < -m_f(Q)\} &= \{y \in Q : \ m_f(Q) < -|f(y)|\} \\ &\subset \{y \in Q : \ m_f(Q) < f(y)\},\end{aligned}$$

ve böylece

$$|\{y \in Q : \ |f(y)| < -m_f(Q)\}| \leq |\{y \in Q : \ m_f(Q) < f(y)\}| \leq \frac{1}{2}|Q|$$

dir. Sonuç olarak,

$$|m_f(Q)| = -m_f(Q) \leq m_{|f|}(Q)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.55) ten, $|m_f(Q)| \leq m_{|f|}(Q)$ olur.

4. $m_f(Q) \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz, aksi taktirde sonuç aşikardır. O halde

$$|\{y \in Q : \ f(y) \geq m_f(Q)\}| \geq \frac{1}{2}|Q|$$

sağlanır. Chebyshev eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}|Q| \leq |\{y \in Q : \ m_f(Q) \leq f(y)\}| \leq \frac{1}{m_f(Q)} \int_Q f(y)\, dy$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

$\square$

Her bir reel değerli $f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ için Lebesgue Diferensiyelleme Teoremine göre

$$\lim_{x \in Q, Q \to x} f_Q = f(x) \text{ h.h.t. } x \in \mathbb{R}^n$$

olduğunu biliyoruz. Benzer özellik medyanlar için de doğrudur.

Teorem 3.5. [17] $f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, hemen hemen tüm $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{x\in Q, Q\to x} m_f(Q) = f(x) \tag{3.60}$$

eşitliği sağlanır.

Özel olarak, (3.60), f in her x süreklilik noktasında doğrudur.

İspat. $1 \leq k \in \mathbb{N}$ ve $j \in \mathbb{Z}$ için

$$E_{k,j} := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\right\}, \ a_{k,j} := \frac{j-1}{2^k}, \ s_k(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{k,j}\chi_{E_{k,j}}(x)$$

olsun. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ olduğundan

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |f(x)| < \infty\} \text{ ve } |B| = 0.$$

olmak üzere, $\mathbb{R}^n = A \cup B$ dir. Ayrıca,

$$A = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} E_{k,j}.$$

Dikkat edelim ki, $x \in A$ ise, $0 \leq f(x) - s_k(x) \leq 2^{-k}$ dir ve böylece

$$s_k(x) \leq f(x) \leq s_k(x) + 2^{-k} \ \Rightarrow \ m_{s_k}(Q) \leq m_f(Q) \leq m_{s_k}(Q) + 2^{-k} \text{ her } Q.$$

$$A_{k,j} := \left\{x \in E_{k,j} : \ \lim_{x\in Q, Q\to x} \frac{|E_{k,j} \cap Q|}{|Q|} = 1\right\}$$

olsun.

Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi'nden

$$E_{k,j} = A_{k,j} \cup F_{k,j}, \ |F_{k,j}| = 0 \text{ dır.}$$

Açıktır ki,

$$\mathbb{R}^n = A \cup B = \left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} E_{k,j}\right) \cup B = \left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} (A_{k,j} \cup F_{k,j})\right) \cup B$$
$$= \left(\bigcap_{k\geq 1}\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A_{k,j}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} F_{k,j}\right)\right) \cup B$$
$$= \left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A_{k,j}\right) \bigcup \left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} F_{k,j}\right) \cup B.$$

$$D := \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} A_{k,j}, \ F := \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} F_{k,j} \cup B$$

olmak üzere, $|F| = 0$ ve $\mathbb{R}^n = D \cup F$ dir.

$x \in D$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O halde $x \in A_{k,j}$ olacak şekilde $\exists k \geq 1 :\ 2^{-k+1} < \varepsilon$, ve $\exists j \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece

$$\lim_{x\in Q, Q\to x} \frac{|A_{k,j} \cap Q|}{|Q|} = 1$$

dir. Limit tanımından, $\exists Q_0 \ni x\ \forall Q \subset Q_0 :\ Q \ni x$

$$\frac{|A_{k,j} \cap Q|}{|Q|} > \frac{1}{2}.$$

Gösterelim ki,

$$m_{s_k}(Q) = a_{k,j}$$

dır. Gerçekten, bir yandan, $y \in A_{k,j}$ için $s_k(y) = a_{k,j}$ olduğundan,

$$|\{y \in Q :\ s_k(y) < a_{k,j}\}| = |\{y \in A_{k.j} \cap Q :\ s_k(y) < a_{k,j}\}|$$
$$+ |\{y \in {}^{c}A_{k.j} \cap Q :\ s_k(y) < a_{k,j}\}|$$
$$= |\{y \in {}^{c}A_{k.j} \cap Q :\ s_k(y) < a_{k,j}\}|$$
$$\leq |{}^{c}A_{k.j} \cap Q| = |Q| - |A_{k.j} \cap Q| < \left(1 - \frac{1}{2}\right)|Q| = \frac{1}{2}|Q|,$$

sağlanır. Böylece $a_{k,j} \leq m_{s_k}(Q)$ elde edilir.

Diğer yandan, keyfi $\gamma > 0$ sayısı için

$$A_{k,j} \cap Q \subset \{y \in Q : \ s_k(y) < a_{k,j} + \gamma\}$$

yazılabilir. Böylece

$$|\{y \in Q : \ s_k(y) < a_{k,j} + \gamma\}| \geq |A_{k,j} \cap Q| > \frac{1}{2}|Q|$$

dur. Dolayısıyla, $a_{k,j} + \gamma \geq m_{s_k}(Q)$ sağlanır. γ keyfi olduğundan

$$a_{k,j} \geq m_{s_k}(Q).$$

Son olarak,

$$m_{s_k}(Q) = a_{k,j}.$$

Dikkat edilmelidir ki

$$m_{s_k}(Q) = a_{k,j} = s_k(x), \ x \in A_{k,j}.$$

O halde

$$\begin{aligned}|m_f(Q) - f(x)| &\leq |m_f(Q) - m_{s_k}(Q)| + |m_{s_k}(Q) - f(x)| \\ &\leq 2^{-k} + (f(x) - m_{s_k}(Q)) \leq 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1} < \varepsilon\end{aligned}$$

dır. Göstermiş olduk ki, $\forall x \in D$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists Q_0 \ni x$ öyle ki; $\forall Q \subset Q_0 : \ Q \ni x$

$$|m_f(Q) - f(x)| < \varepsilon,$$

yani

$$\lim_{x \in Q, Q \to x} m_f(Q) = f(x)$$

dir.

x, f fonksiyonunun bir süreklilik noktası olsun. $\varepsilon > 0$ için, en azından bir $\delta > 0$ vardır öyle ki; $y \in B(x,\delta)$ için $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ dur. Dolayısıyla $\forall Q \subset B(x,\delta) : \ Q \ni x$ için $-\varepsilon \leq$

$f(y) - f(x) \leq \varepsilon$ sağlanır, ve

$$-\varepsilon = m_{-\varepsilon}(Q) \leq m_{f-f(x)}(Q) = m_f(s) - f(x) \leq m_\varepsilon(Q) = \varepsilon.$$

elde edilir. $\square$

4. BMO UZAYI

BMO($\mathbb{R}^n$) uzayı, 1961 yılında F. John ve L. Nirenberg tarafından [9] da tanımlanmıştır ve fonksiyon uzayları ve singüler integraller teorisi başta olmak üzere modern harmonik analizin gelişiminde önemli rol oynamaktadır.

Tanım 4.1. Her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M^{\#}f(x) \equiv f^{\#}(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy \approx \sup_{Q \ni x} \inf_{a \in \mathbb{R}} \int_Q |f(y) - a| dy$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, Fefferman-Stein kesin maksimal fonksiyonu denir.

Buradan

$$f \in \mathrm{BMO} \qquad \Leftrightarrow \qquad M^{\#}f \in L_\infty$$

olduğu açıktır.

Q, $\mathbb{R}^n$ de bir küp olsun.

$$M_Q f(x) := \sup_{\substack{Q' \subseteq Q \\ Q' \ni x}} \left\{ \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f(y)| dy \right\} \chi_Q(x), \tag{4.1}$$

ve

$$f_Q^{\#}(x) := \sup_{\substack{Q' \subseteq Q \\ Q' \ni x}} \left\{ \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} |f - f_{Q'}| \right\} \chi_Q(x)$$

fonksiyonları sırasıyla Q ya göre lokal maksimal fonksiyon ve Q ya göre lokal kesin maksimal fonksiyon olarak adlandırılır. Burada supremum Q nun x noktasını içeren tüm Q' alt küpleri üzerinden alınmaktadır.

Teorem 4.1. ([14, s. 379]) $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$[(f - f_Q)\chi_Q]^{**}(t) \leq c \int_t^{|Q|} (f_Q^{\#})^*(s) \frac{ds}{s}, \qquad \left(0 < t < \frac{|Q|}{6}\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

BMO uzayı ile ilgili en önemli sonuç, F. John ve L. Nirenberg tarafından elde edilen aşağıdaki teoremdir ([9], [14] s. 381, [3] s. 164).

Teorem 4.2. ([14, John-Nirenberg lemması]) Her $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ küpleri ve her $t > 0$ için

$$[(f - f_Q)\chi_Q]^*(t) \leq c\|f\|_* \log^+ \left\{\frac{6|Q|}{t}\right\} \tag{4.2}$$

olacak şekilde f ve Q dan bağımsız bir c sabiti vardır. Buna denk olarak her $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, tüm Q küpleri ve her $t > 0$ için

$$|\{x \in Q : |f(x) - f_Q| > t\}| \leq 6|Q| \exp\left\{-\frac{t}{c\|f\|_*}\right\} \tag{4.3}$$

sağlanacak şekilde f ve Q dan bağımsız bir c sabiti vardır.

Lemma 4.1. ([3, s. 166]) $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $0 < \lambda < c/\|f\|_*$ özelliğini sağlayan her λ sayısı için

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \exp\{\lambda|f(x) - f_Q|\} dx < \infty$$

doğrudur.

Burada c, (4.3) eşitsizliğinde ortaya çıkan sabit ile aynıdır.

Lemma 4.2. ([9] ve [22]) $p \in (0,\infty)$ için $\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n) = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Burada

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_p(\mathbb{R}^n)} := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q|^p dy \right)^{1/p}$$

dir.

5. LOKAL MAKSİMAL FONKSİYONLAR

Bu bölümde [10], [11] ve [1] den yararlanılacaktır.

Fonksiyonun salınımını ”ölçmek” için birçok yol mevcuttur. Bu bölümde f fonksiyonun salınımını ”ölçmek” için John [10] ve Strömberg [11] tarafından tanımlanmış $M^{\#}_{0,\alpha}f$ maksimal fonksiyonunun detaylı olarak incelenmesini planlamaktayız. Bu maksimal fonksiyonun diğer metotlardan üstün özelliği yalnız lokal integrallenebilir fonksiyonlar için değil tüm ölçülebilir fonksiyonlar için tanımlı olmasıdır.

f, $\mathbb{R}^n$ üzerinde kompleks değerli, Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1/2$ olmak üzere $M^{\#}_{0,\alpha}f(x)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} M^{\#}_{0,\alpha}f(x) :&= \sup_{Q \ni x} \inf_{c} \inf\{\lambda \geq 0 : |\{y \in Q : |f(y) - c| > \lambda\}| < \alpha|Q|\} \\ &= \sup_{Q \ni x} \inf_{c} ((f - c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Burada c tüm kompleks sayıları, Q ise $\mathbb{R}^n$ de yan ayrıtları koordinat eksenlerine paralel olan x ı içeren tüm küpleri tarar. Dikkate alalım ki birçok durumda c ler üzerinden infimum almaya gerek kalmaz, çünkü optimal değerler (medyan değerler) kullanılabilir. Hatırlatalım ki, reel değerli bir f fonksiyonunun Q küpü üzerinden medyan değeri $m_f(Q)$,

$$|\{x \in Q : f(x) > m_f(Q)\}| \leq \frac{|Q|}{2},$$
$$|\{x \in Q : f(x) < m_f(Q)\}| \leq \frac{|Q|}{2}$$

eşitsizliklerini sağlar ve tek olmak zorunda değildir.

Kompleks değerli $f = f_1 + if_2$ için, $m_f(Q) = m_{f_1}(Q) + im_{f_2}(Q)$ olsun.

Lemma 5.1. Keyfi $x \in Q$ için,

$$|\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > 2\sqrt{2}M^{\#}_{0,\alpha}f(x)\}| < \alpha|Q| \tag{5.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $M^{\#}_{0,\alpha}f(x)$ tanımından

$$\inf_c((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \leq M^{\#}_{0,\alpha}f(x), \qquad \forall x \in Q$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\inf_c((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \leq \inf_{x\in Q} M^{\#}_{0,\alpha}f(x)$$

sağlanır. Lemma 3.8 dan

$$((f-m_f(Q))\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \leq 2\inf_c((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \leq 2\inf_{x\in Q} M^{\#}_{0,\alpha}f(x)$$

elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\inf\{\lambda \geq 0 : |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > \lambda\}| < \alpha|Q|\} \leq 2\inf_{x\in Q} M^{\#}_{0,\alpha}f(x).$$

Böylece

$$|\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > 2\sqrt{2}\inf_{x\in Q} M^{\#}_{0,\alpha}f(x)\}| < \alpha|Q|.$$

eşitsizliği doğrudur. □

Lemma 5.2. $0 < \alpha \leq 1/4$ olsun. Eğer $Q_0 \subseteq Q_1$, $|Q_1| \leq 2|Q_0|$ olacak şekilde iki küp ise, bu durumda

$$|m_f(Q_1) - m_f(Q_0)| \leq 20\inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha}f(x) \tag{5.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Aksini kabul edelim, yani,

$$|m_f(Q_1) - m_f(Q_0)| > 20 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)$$

olsun. Bu durumda $\{y \in Q_0 : |f(y) - m_f(Q_0)| \leq 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\}$ ve $\{y \in Q_0 : |f(y) - m_f(Q_1)| \leq 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\}$ kümeleri ayrıktır. Gerçekten, $y \in Q_0$, $|f(y) - m_f(Q_0)| \leq 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)$ eşitsizliğini sağlasın. O halde

$$\begin{aligned} |f(y) - m_f(Q_1)| &\geq |m_f(Q_1) - m_f(Q_0)| - |f(y) - m_f(Q_0)| \\ &> 20 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x) - 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \\ &= 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \end{aligned} \tag{5.4}$$

doğrudur.

Lemma 5.1 den

$$\begin{aligned} &|\{y \in Q_1 : |f(y) - m_f(Q_1)| > 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\}| \\ &\leq |\{y \in Q_1 : |f(y) - m_f(Q_1)| > 10 \inf_{x\in Q_1} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\}| < \alpha |Q_1| \end{aligned}$$

ve

$$|\{y \in Q_0 : |f(y) - m_f(Q_0)| \leq 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\} \geq (1-\alpha)|Q_0|$$

elde edilir. (5.4) ün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} (1-\alpha)|Q_0| &\leq |\{y \in Q_0 : |f(y) - m_f(Q_0)| \leq 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\} \\ &\leq |\{y \in Q_1 : |f(y) - m_f(Q_1)| > 10 \inf_{x\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\} \\ &\leq \alpha |Q_1| \leq 2\alpha |Q_0| \end{aligned}$$

sağlanır ki bu bir çelişkidir. □

Tanımdan, $M^{\#}_{0,\alpha}f(x)$ in x in bir alttan yarısürekli fonksiyon olduğu ve

$$M^{\#}_{0,\alpha}(f+g)(x) \leq 2(M^{\#}_{0,\alpha/2}f(x) + M^{\#}_{0,\alpha/2}g(x))$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülebilir.

$M^{\#}_{0,\alpha}f(x)$ in diğer özellikleri, $\mathbb{R}^n$ üzerinde kompleks değerli, Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonları için $0 < \alpha \leq 1/2$ olmak üzere

$$M_{0,\alpha}f(x) := \sup_{Q \ni x}(f\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \tag{5.5}$$

ile tanımlı $M_{0,\alpha}f$ maksimal fonksiyonu yardımıyla elde edilebilir. $M_{0,\alpha}f$ fonksiyonu da alttan yarı-süreklidir,

$$M_{0,\alpha}(f+g)(x) \leq 2(M_{0,\alpha/2}f(x) + M_{0,\alpha/2}g(x)) \tag{5.6}$$

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > \lambda\}| \leq |\{y \in \mathbb{R}^n : M_{0,\alpha}f(y) > \lambda\}| \tag{5.7}$$

$$\alpha|\{y \in \mathbb{R}^n : M_{0,\alpha}f(y) > \lambda\}| \leq 5^n|\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > \lambda\}| \tag{5.8}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(5.7) eşitsizliği

$$\{y \in \mathbb{R}^n : M_{0,\alpha}f(y) > \lambda\} = \{y \in \mathbb{R}^n : M(\chi_{|f|>\lambda})(y) > \alpha\} \tag{5.9}$$

eşitliğinin direk sonucudur. Burada, M, Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür. Gerçekten, $|f| \leq Mf$ yardımıyla,

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \chi_{\{|f|>\lambda\}}(y) > \alpha\} \subset \{y \in \mathbb{R}^n : M(\chi_{|f|>\lambda})(y) > \alpha\}$$

olduğu açıktır. Bu durumda

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : \chi_{\{|f|>\lambda\}}(y) > \alpha\}| \leq |\{y \in \mathbb{R}^n : M(\chi_{|f|>\lambda})(y) > \alpha\}| \tag{5.10}$$

sağlanır. Ayrıca

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \chi_{\{|f|>\lambda\}}(y) > \alpha\} = \{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > \lambda\} \qquad \alpha \in (0,1] \tag{5.11}$$

eşitliği doğrudur.

(5.10), (5.11) ve (5.9) un birlikte ele alınmasıyla, (5.7) elde edilir.

(5.9) un ispatı için

$$\begin{aligned}
y \in \mathbb{R}^n : M_{0,\alpha} f(y) > \lambda \quad &\Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R}^n : \sup_{Q \ni y} (f\chi_Q)^*(\alpha|Q|) > \lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \exists Q \ni y : (f\chi_Q)^*(\alpha|Q|) > \lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \exists Q \ni y : |\{x \in Q : |f(x)| > \lambda\}| > \alpha|Q| \\
&\Leftrightarrow \quad \exists Q \ni y : \frac{1}{|Q|} \int_{\{x \in Q : |f(x)| > \lambda\}} dx > \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad \exists Q \ni y : \frac{1}{|Q|} \int_Q \chi_{\{x : |f(x)| > \lambda\}}(x) dx > \alpha \\
&\Leftrightarrow \quad M(\chi_{\{x : |f(x)| > \lambda\}})(y) > \alpha
\end{aligned}$$

olduğunu belirtelim.

$M : L^1 \to L^{1,\infty}$ sınırlı olduğundan, yani,

$$\alpha|\{y \in \mathbb{R}^n : Mf(y) > \alpha\}| \leq 5^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy$$

eşitsizliği sağlandığından, (5.9) un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\alpha|\{y \in \mathbb{R}^n : M_{0,\alpha} f(y) > \lambda\}| &= \alpha|\{y \in \mathbb{R}^n : M(\chi_{|f|>\lambda})(y) > \alpha\}| \\
&\leq 5^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{|f|>\lambda}(y)\, dy \\
&= 5^n |\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > \lambda\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (5.8) sağlanır.

Ω, $\mathbb{R}^n$ de açık küme olmak üzere, supremum altındaki küpleri Ω nın alt küplerine kısıtlayarak, $M^{\#}_{0,\alpha}$ ve $M_{0,\alpha}$ maksimal fonksiyonlarının lokalleştirilmiş versiyonları olan $M^{\#}_{0,\alpha;\Omega}$ ve $M_{0,\alpha;\Omega}$ aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$M^{\#}_{0,\alpha;\Omega} f(x) := \sup_{x \in Q \subset \Omega} \inf_{c} ((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|)$$

ve

$$M_{0,\alpha;\Omega} f(x) := \sup_{x \in Q \subset \Omega} (f\chi_Q)^*(\alpha|Q|).$$

”Temel eşitsizlik” ispatında, Whitney- tipi ayrımın aşağıdaki versiyonu kullanılacaktır.

Lemma 5.3. $Q_0 \subset \mathbb{R}^n$ bir küp ve O, Q_0 a göre açık olsun (yani $x \in O$ için $x \in U$ ve $U \cap Q_0 \subset O$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ de bir U açık kümesi olsun) ve $O \subsetneq Q_0$ olsun. Bu durumda

$$O = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

$$|Q_i \cap Q_j| = 0 \qquad \text{eğer} \quad i \neq j,\, i,\, j \geq 1,$$

$$\operatorname{diam} Q_k \leq \operatorname{dist}(Q_k, Q_0 \cap O^c) \leq 4 \operatorname{diam} Q_k, \qquad k \geq 1.$$

özelliklerini sağlayan bir $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ küpler dizisi vardır.

Lemmanın ispatı [1, p. 167] de yanızca basit değişiklikler yapılarak elde edilebilir. Q_k küpleri $m = m(k)$, $k \geq 1$ tamsayısı için $\operatorname{diam} Q_k = 2^{-m} \operatorname{diam} Q_0$ olacak şekilde seçilebilir.

Şimdi f ile $M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f$ nin ”ölçü” leri arasındaki bağıntıyı ifade eden ”temel eşitsizliği” ispat edebiliriz.

Teorem 5.1. Q_0, $\mathbb{R}^n$ de bir küp ve $f \in \mathfrak{M}(Q_0)$ olsun. Bu durumda her $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, her

$0 < \beta \leq 1$ ve her $t > 0$ için

$$\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y) - m_f(Q_0)| > t,\ M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right|$$
$$\leq \alpha c(n) \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y) - m_f(Q_0)| > (1-\beta)t,\ M_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right|$$

sağlanacak şekilde bir $c(n) > 0$ sabiti vardır.

İspat. Genelliği bozmaksızın $m_f(Q_0) = 0$ alalım.

$$\mathcal{U}_1 := \left\{y \in Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}$$

ve

$$\mathcal{U} := \left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\ M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}$$
$$\cup \left\{y \in Q_0 : M_{0,1/4;O_1} f(y) > (1-\beta)t\right\}$$

olsun.

O_1, Q_0 da, $\mathcal{U}_1 \subset O_1$ olacak şekilde açık bir küme olsun. Bu durumda

$$\mathcal{U} \subset \left\{y \in Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\} \cup \left\{y \in Q_0 : M_{0,1/4;O_1} f(y) > (1-\beta)t\right\}$$
$$\subset \mathcal{U}_1 \cup O_1 \subset O_1$$

elde edilir.

O da $\mathcal{U} \subset O$ sağlanacak şekilde başka bir açık küme olsun. $|\mathcal{U}| = \inf_{O \supset \mathcal{U}} |O|$ olduğundan $\mathcal{U} \subset O \subset O_1$ olduğunu varsayabiliriz.

Öncelikle $O \subsetneq Q_0$ olacak şekilde bir O kümesi bulabileceğimizi farzedelim ve $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$, Lemma 5.3 te verilen ayrım olsun. Bu ayrımın yapısı gereği aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\exists Q_k' \subset Q_0 : \quad Q_k' \cap O^c \neq \emptyset, \quad Q_k' \subset O_1, \quad \operatorname{diam} Q_k' \leq 10n^{1/2} \operatorname{diam} Q_k,\ k \geq 1. \tag{5.12}$$

$x_k \in Q_k' \cap O^c$ ve $c_k = m_f(Q_k')$, $k \geq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x)\chi_O + f(x)\chi_{O^c} \\ &= f(x)\chi_{\cup_k Q_k} + f(x)\chi_{O^c} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(f(x) - c_k)\chi_{Q_k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_{Q_k}(x) + f(x)\chi_{O^c} \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \{y \in Q_0 : |f(y)| > t\} &= \{y \in Q_0 \cap O : |f(y)| > t\} \cup \{y \in Q_0 \cap O^c : |f(y)| > t\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\{y \in Q_k \cap O : |f(y)| > t\} \cup \{y \in Q_0 \cap O^c : |f(y)| > t\} \end{aligned}$$

dir. $O^c \subset \mathcal{U}^c$ olduğundan, her $y \in Q_0 \cap O^c$ için $|f(y)| \leq (1-\beta)t$ eşitsizliği doğrudur. Fakat bu eşitsizlik $|f(y)| > t$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla

$$\{y \in Q_0 \cap O^c : |f(y)| > t\} = \emptyset$$

dir.

$$\{y \in Q_k : |f(y)| > t\} \subset \{y \in Q_k : |f(y) - c_k| > \beta t\} \cup \{y \in Q_k : |c_k| > (1-\beta)t\},$$

olduğundan

$$\{y \in Q_0 : |f(y)| > t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{y \in Q_k : |f(y) - c_k| > \beta t\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\{y \in Q_k : |c_k| > (1-\beta)t\}$$

sağlanır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} &\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > t,\ M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\} \\ &\quad \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{y \in Q_k : |f(y) - c_k| > \beta t,\ M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ y \in Q_k : |c_k| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \le \frac{\beta t}{10} \right\} \\
&\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ y \in Q_k : |f(y) - c_k| > \beta t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \le \frac{\beta t}{10} \right\} \\
&\cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ y \in Q_k : |c_k| > (1-\beta)t \right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece

$$
\begin{aligned}
&\left| \left\{ y \in Q_0 : |f(y)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \le \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \\
&\quad \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\{ y \in Q_k : |f(y) - c_k| > \beta t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \le \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\{ y \in Q_k : |c_k| > (1-\beta)t \right\} \right| =: \sum_{k=1}^{\infty} A_k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k
\end{aligned}
$$

eşitsizliği sağlanır.

İkinci toplamdaki her B_k sıfırdır. Gerçekten,

$$
|m_f(Q)| \le (f\chi_Q)^* \left(\frac{|Q|}{2} \right) \le (f\chi_Q)^* (\alpha' |Q|) \qquad \left(0 < \alpha' \le \frac{1}{2} \right),
$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$
|m_f(Q)| \le M_{0,\alpha';O_1} f(y) \quad \forall y \in Q \subset O_1
$$

bulunur. Böylece

$$
|m_f(Q)| \le \inf_{y \in Q} M_{0,\alpha';O_1} f(y)
$$

dir. $Q'_k \subset O_1$ ve $x_k \in Q'_k \cap O^c$ olduğundan

$$
|c_k| = |m_f(Q'_k)| \le M_{0,1/4;O_1} f(x_k) \le (1-\beta)t
$$

elde edilir. O halde $|B_k| = 0$, $k \in \mathbb{N}$ dir ve $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = 0$ sağlanır.

Birinci toplamı ele alalım. Keyfi $x \in Q'_k$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} A_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\{ y \in Q_k : |f(y) - c_k| > \beta t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\{ y \in Q'_k : |f(y) - c_k| > \beta t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\{ y \in Q'_k : |f(y) - m_f(Q'_k)| > \beta t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\{ y \in Q'_k : |f(y) - m_f(Q'_k)| > 10 M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(x) \right\} \right|
\end{aligned}$$

dir. Her Q küpü ve keyfi $x \in Q$ için

$$|\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > 10 M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(x)\}| < \alpha |Q| \tag{5.13}$$

eşitsizliği sağlanır.

O halde

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k < \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |Q'_k| \leq \alpha (10 n^{1/2})^n \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| = \alpha (10 n^{1/2})^n |O|$$

yazılabilir.

$|\mathcal{U}| = \inf_{O \supset \mathcal{U}} |O|$ olduğundan,

$$\left| \left\{ y \in Q_0 : |f(y)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \leq \alpha (10 n^{1/2})^n |\mathcal{U}|$$

dur. Böylece

$$\begin{aligned}
&\left| \left\{ y \in Q_0 : |f(y)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \\
&\quad \leq \alpha (10 n^{1/2})^n \left\{ \left| \left\{ y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta) t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10} \right\} \right| \right. \\
&\qquad \left. + \left| \left\{ y \in Q_0 : M_{0,1/4;Q_1} f(y) > (1-\beta) t \right\} \right| \right\}
\end{aligned}$$

doğrudur.

$$\left|\left\{y \in Q_0 : M_{0,1/4;O_1} f(y) > (1-\beta)t\right\}\right|$$
$$\leq 4 \cdot 5^n |\{y \in O_1 : |f(y)| > (1-\beta)t\}|$$
$$= 4 \cdot 5^n |O_1 \cap \{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t\}|$$

olduğunu hatırlatalım.

Bunların birlikte ele alınmasıyla

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| \\
&\leq \alpha(10n^{1/2})^n \left\{\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| \right.\\
&\left. + 4 \cdot 5^n |O_1 \cap \{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t\}|\right\}
\end{aligned}$$

sağlanır.

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{U}_1 \cap \{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t\}| \\
&= \inf_{O_1 \supset \mathcal{U}_1} |O_1 \cap \{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t\}|
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| \\
&\leq \alpha(10n^{1/2})^n \left\{\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| \right.\\
&\quad \left. + 4 \cdot 5^n \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right|\right\} \\
&= \alpha(10n^{1/2})^n (1 + 4 \cdot 5^n) \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| \\
&\equiv \alpha c(n) \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $O \subsetneq Q_0$ olacak şekilde bir O nun bulunabileceği halde ispatı tamamlar.

Fakat $O \subsetneq Q_0$ olacak şekilde bir O nun bulunamaması aşağıdaki iki durumda mümkündür:

$$\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}$$

veya

$$\left\{y \in Q_0 : M_{0,1/4;O_1} f(y) > (1-\beta)t\right\}$$

kümelerinden birinin esasen Q_0 olması durumunda, yani,

$$\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| = |Q_0|$$

veya

$$\left|\left\{y \in Q_0 : M_{0,1/4;O_1} f(y) > (1-\beta)t\right\}\right| = |Q_0|.$$

Her iki durumda

$$20^{-n}|Q_0| \leq |\{y \in O_1 : |f(y)| > (1-\beta)t\}|$$

dir. Gerçekten, (5.7) ve (5.8) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}
|Q_0| &= \begin{cases} \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| \\ \left|\left\{y \in Q_0 : M_{0,1/4;O_1} f(y) > (1-\beta)t\right\}\right| \end{cases} \\
&\leq \left|\left\{y \in Q_0 : M_{0,1/4;O_1} f(y) > (1-\beta)t\right\}\right| \\
&\leq 4 \cdot 5^n \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t\right\}\right| \\
&\leq 20^n \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t\right\}\right|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$m_f(Q_0) = 0$ olduğundan, (5.13) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \leq \frac{\beta t}{10}\right\}\right| \\
&\qquad \leq \alpha|Q_0| \leq \alpha 20^n |\{y \in O_1 : |f(y)| > (1-\beta)t\}|
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \le \frac{\beta t}{10}\right\}\right|$$
$$= \inf_{O_1 \supset \mathcal{U}_1} |\{y \in O_1 : |f(y)| > (1-\beta)t\}|$$

olduğundan

$$\left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \le \frac{\beta t}{10}\right\}\right|$$
$$\le \alpha c(n) \left|\left\{y \in Q_0 : |f(y)| > (1-\beta)t,\, M^{\#}_{0,\alpha;Q_0} f(y) \le \frac{\beta t}{10}\right\}\right|$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Aşağıdaki sonuç John [10] ve Strömberg [11] tarafından verilmiştir.

Sonuç 5.1. $\exists \alpha_0 = \alpha_0(n)\ \forall \alpha : 0 < \alpha \le \alpha_0\ \exists c_j = c_j(\alpha, n),\ j = 1, 2$

$$c_1 \|f\|_* \le \left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_\infty \le c_2 \|f\|_* \quad (f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)).$$

İspat. $t f^*(t) \le t f^{**}(t) \le \|f\|_1$ olduğundan

$$\alpha|Q|((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \le \|(f-c)\chi_Q\|_1 = \int_Q |f(y)-c|\, dy$$

dir. O halde

$$\alpha \inf_c ((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \le \inf_c \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-c|\, dy.$$

yazılabilir. Böylece

$$\alpha M^{\#}_{0,\alpha} f(x) = \alpha \sup_{Q \ni x} \inf_c ((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \le \sup_{Q \ni x} \inf_c \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)-c|\, dy = \|f\|_*$$

sağlanır.

Diğer taraftan, bir Q küpü ve yeterinde büyük N sayısı için,

$$\begin{aligned}
I(N) :=& \int_0^N |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t\}| dt \\
=& \int_0^{20\|M^{\#}_{0,\alpha} f\|_\infty} |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t\}| dt \\
&+ \int_{20\|M^{\#}_{0,\alpha} f\|_\infty}^N |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t\}| dt \\
\leq& 20\|M^{\#}_{0,\alpha} f\|_\infty |Q| + \int_{20\|M^{\#}_{0,\alpha} f\|_\infty}^N |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t\}| dt
\end{aligned}$$

sağlanır. Son integrali hesaplamak için, $\beta = 1/2$ ve $\alpha \leq \alpha_0(n) = 1/(4c(n))$ olmak üzere Teorem 5.1 kullanılırsa, $20\left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_\infty \leq t \leq N$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&|\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t\}| \\
&\quad \leq \left|\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t, \left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_\infty \leq t/20\}\right| \\
&\quad \leq |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t, M^{\#}_{0,\alpha} f(y) \leq t/20\}| \\
&\quad \leq c(n)\alpha\left|\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t/2, \left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_\infty \leq t/20\}\right| \\
&\quad \leq (1/4)|\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t/2\}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&\int_{20\|M^{\#}_{0,\alpha} f\|_\infty}^N |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t\}| dt \\
&\qquad \leq (1/4) \int_0^N |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t/2\}| dt \\
&\qquad \leq (1/2) \int_0^{N/2} |\{y \in Q : |f(y) - m_f(Q)| > t\}| dt \\
&\qquad \leq (1/2) I(N)
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$I(N) \leq 20\left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_\infty |Q|$$

sağlanır. N sonsuza giderken, bütün c ler üzerinden infimum ve Q üzerinden supremum alınmasıyla

$$\|f\|_* \leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - m_f(Q)|\,dy \leq 40\left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_\infty$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 5.2. $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $\exists\alpha_0 = \alpha_0(n)$ $\forall\alpha : 0 < \alpha \leq \alpha_0$ $\exists c_j = c_j(\alpha, n)$, $j = 1, 2$

$$\forall f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) \quad \exists c_f \in \mathbb{R} \quad c_1\|f - c_f\|_p \leq \left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_p \leq c_2\|f - c_f\|_p. \tag{5.14}$$

İspat. (5.14) eşitsizliğinin sağ tarafının ispatını yapmak için dikkat edelim ki

$$M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \leq M_{0,\alpha}(f - c)(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

eşitsizliği her $c \in \mathbb{R}$ için doğrudur. O halde (5.8) eşitsizliğinden

$$\alpha\left|\{y \in \mathbb{R}^n : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > \lambda\}\right| \leq 5^n|\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y) - c| > \lambda\}| \qquad (\lambda > 0)$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\left\|M^{\#}_{0,\alpha} f\right\|_p^p &= \int_0^\infty \left|\{y \in \mathbb{R}^n : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > \lambda\}\right| d\lambda^p \\ &\leq \frac{5^n}{\alpha}\int_0^\infty |\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y) - c| > \lambda\}|\,d\lambda^p = \frac{5^n}{\alpha}\|f - c\|_p\end{aligned}$$

sağlanır.

Şimdi (5.14) eşitsizliğinin sol tarafını ispatlayalım.

Eğer $M^{\#}_{0,\alpha} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ise, $\mathbb{R}^n$ deki Q küpü için

$$\begin{aligned}\inf_{x\in Q} M^{\#}_{0,\alpha} f(x) &= \inf_{x\in Q} M^{\#}_{0,\alpha} f(x)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q dy\Big)^{1/p} = \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q (\inf_{x\in Q} M^{\#}_{0,\alpha} f(x))^p\,dy\Big)^{1/p} \\ &\leq \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q (M^{\#}_{0,\alpha} f(y))^p\,dy\Big)^{1/p} \leq |Q|^{-1/p}\|M^{\#}_{0,\alpha} f\|_p \end{aligned} \tag{5.15}$$

yazılabilir.

$0 < \alpha \leq 1/4$ ve Q_0 merkezi orjinde olan birim küp olsun. Lemma 5.2 ve (5.15) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
|m_f(2^k Q_0) - m_f(2^{k+1} Q_0)| &\leq 20 \inf_{x \in 2^k Q_0} M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \leq 20 |2^k Q_0|^{-1/p} \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|_p \\
&= 20 \cdot 2^{-kn/p} \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|_p, \quad k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her $l \in \mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
|m_f(2^{k+l} Q_0) - m_f(2^k Q_0)| &= \left| \sum_{s=k}^{k+l-1} [m_f(2^{s+1} Q_0) - m_f(2^s Q_0)] \right| \\
&\leq \sum_{s=k}^{k+l-1} \left| m_f(2^{s+1} Q_0) - m_f(2^s Q_0) \right| \\
&\leq 20 \cdot \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|_p \sum_{s=k}^{k+l-1} 2^{-sn/p} \\
&\leq 20 \cdot \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|_p 2^{-kn/p} (1 - 2^{-n/p})^{-1} \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

dir. O halde $\{m_f(2^k Q_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir, dolayısıyla yakınsaktır.

$$
c_f := \lim_{k \to \infty} m_f(2^k Q_0)
$$

olsun. $l \to \infty$ in (5.16) içi limit alınırsa,

$$
|m_f(2^k Q_0) - c_f| \leq 20 (1 - 2^{-n/p})^{-1} 2^{-kn/p} \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|_p =: A_k \qquad (5.17)
$$

elde edilir.

Yeterince büyük her N için

$$
\begin{aligned}
&\int_0^N |\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - c_f| > t\}| \, dt^p \\
&\qquad \leq \int_0^N |\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/2\}| \, dt^p
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^{2A_k} |\{y \in 2^k Q_0 : |m_f(2^k Q_0) - c_f| > t/2\}| \, dt^p =: I_1 + I_2$$

olduğu açıktır.

Öncelikle I_1 i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&|\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/2\}| \\
&\qquad \le \left|\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/2,\, M^{\#}_{0,\alpha} f(y) \le t/40\}\right| \\
&\qquad\quad + \left|\{y \in 2^k Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > t/40\}\right|
\end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilirse, $\beta = 1/2$ ve $\alpha \le \alpha_0 = 1/c(n)4^{p+1}$ olmak üzere Teorem 5.1 in uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}
&\left|\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/2,\, M^{\#}_{0,\alpha} f(y) \le t/40\}\right| \\
&\quad \le \frac{1}{4^{p+1}} \left|\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/4,\, M^{\#}_{0,\alpha} f(y) \le t/40\}\right|
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^N |\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/2\}| \, dt^p \\
&\le \frac{1}{4^{p+1}} \int_0^N \left|\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/4,\, M^{\#}_{0,\alpha} f(y) \le t/40\}\right| dt^p \\
&\quad + \int_0^N \left|\{y \in 2^k Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > t/40\}\right| dt^p \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{N/4} |\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t,\, M^{\#}_{0,\alpha} f(y) \le t/10\}| \, dt^p \\
&\quad + \int_0^N \left|\{y \in 2^k Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > t/40\}\right| dt^p \\
&= \frac{1}{4} \int_0^N |\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - m_f(2^k Q_0)| > t/2\}| \, dt^p \\
&\quad + \int_0^N \left|\{y \in 2^k Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > t/40\}\right| dt^p \\
&= \frac{1}{4} I_1 + \int_0^N \left|\{y \in 2^k Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > t/40\}\right| dt^p,
\end{aligned}$$

dir ve

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4} I_1 &\leq \int_0^N \left|\{y \in 2^k Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > t/40\}\right| dt^p \\
&\leq 40^p \int_0^\infty \left|\{y \in 2^k Q_0 : M^{\#}_{0,\alpha} f(y) > t\}\right| dt^p \\
&= 40^p \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|^p_{p,2^k Q_0} \leq 40^p \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|^p_p
\end{aligned}
$$

sağlanır.

$$
I_2 \leq (2A_k)^p |2^k Q_0| = c_p^p \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|^p_p
$$

olduğu açıktır. Burada $c_p = 40(1-2^{-n/p})^{-1}$ dir.

Böylece, $c'_p = 40^p + c_p^p$ olmak üzere

$$
\frac{3}{4} \int_0^N |\{y \in 2^k Q_0 : |f(y) - c_f| > t\}| \, dt^p \leq c'_p \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|^p_p
$$

elde edilir.

Önce N nin sonra k nın sonsuza giderken limiti alınırsa,

$$
\|f - c_f\|^p_p = \int_0^\infty |\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y) - c_f| > t\}| \, dt^p \leq \frac{4}{3} c'_p \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|^p_p
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sabit bir $p > 0$, uygun bir f fonksiyonu ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$
\begin{aligned}
M_p f(x) &:= [M(|f|^p)(x)]^{1/p} = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^p \, dy \right)^{1/p}, \\
M^{\#}_p f(x) &:= [M^{\#}(|f|^p)(x)]^{1/p} = \sup_{Q \ni x} \inf_c \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - c|^p \, dy \right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

olsun.

Lemma 5.4. $0 < p < \infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Her ölçülebilir f fonksiyonu için

$$M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \leq c M^{\#}_{p} f(x)$$

olacak şekilde bir $c = c(p,\alpha)$ sabiti vardır.

İspat. x, $\mathbb{R}^n$ de bir nokta ve Q, x noktasını içeren bir küp olsun. $|E| = \alpha|Q|$ özelliğine sahip her $E \subset Q$ için

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess\,inf}_{z\in E} |f(z) - c| &= \left(\frac{1}{|E|}\int_E \big(\operatorname*{ess\,inf}_{z\in E} |f(z) - c|\big)^p\, dy\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\frac{1}{|E|}\int_E |f(y) - c|^p\, dy\right)^{1/p} \\
&\leq \alpha^{-1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - c|^p\, dy\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

olduğundan

$$((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \leq \alpha^{-1/p}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - c|^p\, dy\right)^{1/p}$$

dir. O halde

$$M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \leq \alpha^{-1/p} M^{\#}_{p} f(x)$$

sağlanır. □

Lemma 5.5. $0 < p < \infty$ olsun. $f \in L^p(\mathbb{R}^n) + \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere öyle c_1, c_2 sabitleri vardır ki yeterince küçük $0 < \alpha \leq \alpha(n)$ için

$$c_1 M_p M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \leq M^{\#}_{p} f(x) \leq c_2 M_p M^{\#}_{0,\alpha} f(x)$$

sağlanır.

İspat. x_0 noktasını iŗren keyfi bir Q_0 alalım. Sonuç 5.2 dan, $\exists\alpha_0 = \alpha_0(n)\ \forall\alpha : 0 < \alpha \leq \alpha_0$

$\exists c = c(\alpha, n)\ \forall f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$

$$\Big(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} |f(y) - m_f(Q)|^p\, dy\Big)^{1/p} \le c\Big(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} (M^{\#}_{0,\alpha} f(y))^p\, dy\Big)^{1/p} \le M_p\, M^{\#}_{0,\alpha} f(x_0),$$

sağlanır ki böylece

$$M^{\#}_p f(x_0) \le c M_p M^{\#}_{0,\alpha} f(x_0)$$

dır.

Tersine, yeniden x_0 noktasını içeren bir Q_0 alalım.

$$M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \le M^{\#}_{0,\alpha;2Q_0} f(x) + R_{0,\alpha;2Q_0} f(x)$$

olduğu açıktır. Burada

$$R_{0,\alpha;2Q_0} f(x) := \sup_{Q \ni x : Q \cap (2Q_0)^c \neq \emptyset} \inf_c ((f - c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

dir.

Keyfi c için

$$M^{\#}_{0,\alpha;2Q_0} f(x) \le M_{0,\alpha;2Q_0}(f - c)(x)$$

olduğundan, (5.8) den

$$\begin{aligned}
\int_{Q_0} (M^{\#}_{0,\alpha;2Q_0} f(x))^p\, dx &\le \int_{Q_0} (M_{0,\alpha;2Q_0}(f - c)(x))^p\, dx \\
&= \int_0^\infty |\{x \in Q_0 : M_{0,\alpha;2Q_0}(f - c)(x) > \lambda\}|\, d\lambda^p \\
&\le \frac{5^n}{\alpha} \int_0^\infty |\{x \in 2Q_0 : |f(x) - c| > \lambda\}|\, d\lambda^p \\
&= \frac{5^n}{\alpha} \int_{2Q_0} |f(x) - c|^p\, dx
\end{aligned} \tag{5.18}$$

elde edilir.

Eğer $x \in Q_0$ ve Q küpü için $Q \ni x$ ve $Q \cap (2Q_0)^c \neq \emptyset$ ise, bu durumda $Q_0 \subset (3/2)Q$ dur.

Öyleyse, $\alpha' := (2/3)^n\alpha$ olmak üzere her $y \in Q$ için

$$\begin{aligned}
R_{0,\alpha;2Q_0}f(x) &\leq \sup_{Q:(3/2)Q\supset Q_0} \inf_c ((f-c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \\
&\leq \sup_{Q:(3/2)Q\supset Q_0} \inf_c ((f-c)\chi_{(3/2)Q})^*\left(\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\frac{3}{2}Q\right|\right) \\
&\leq \sup_{Q:Q\supset Q_0} \inf_c ((f-c)\chi_Q)^*(\alpha'|Q|) \\
&\leq \sup_{Q\ni y}\inf_c ((f-c)\chi_Q)^*(\alpha'|Q|) = M^{\#}_{0,\alpha'}f(y)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\sup_{x\in Q_0} R_{0,\alpha;2Q_0}f(x) \leq \inf_{y\in Q_0} M^{\#}_{0,\alpha'}f(y) \tag{5.19}$$

dir.

(5.18) ve (5.19) un kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} (M^{\#}_{0,\alpha}f(x))^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} (M^{\#}_{0,\alpha;2Q_0}f(x))^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} (R^{\#}_{0,\alpha;2Q_0}f(x))^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\lesssim \left(\frac{1}{|2Q_0|}\int_{2Q_0} |f(x)-c|^p\,dx\right)^{1/p} + M^{\#}_{0,\alpha'}f(x_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Lemma 5.4 den

$$\left(\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0} (M^{\#}_{0,\alpha}f(x))^p\,dx\right)^{1/p} \lesssim M^{\#}_p f(x_0) + M^{\#}_{0,\alpha'}f(x_0) \lesssim M^{\#}_p f(x_0)$$

bulunur. O halde

$$M_p\, M^{\#}_{0,\alpha}f(x_0) \lesssim M^{\#}_p f(x_0)$$

dır ve ispat tamamlanır. □

6. AĞIRLIKLI JOHN-STRÖMBERG MAKSİMAL FONKSİYONU

Bu bölümde [18] ve [19] dan yararlanılacaktır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen, negatif olmayan bir w fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir. Herhangi bir ağırlık fonksiyonu yardımıyla $w(E) = \int_E w(x)\,dx$ ölçüsünü ele alalım. $w(x) \equiv 1$ olduğunda, $w(E) = |E|$ Lebesgue ölçüsüdür. $w(\mathbb{R}^n) = +\infty$ olarak alınacaktır.

Bu bölümde, $\mathcal{R}$, $\mathbb{R}^n$ yi ve Σ, $\mathcal{R}$ nin Lebesgue ölçülebilir alt kümelerinin kümesini gösterecektir. $d\mu = w dx$ olarak alınacaktır.

f, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $w dx$ ölçüsüne göre dağılım fonksiyonu

$$d_f(\lambda) := w(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}) \qquad (0 < \lambda < \infty)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. $d_f(\lambda) < \infty$, $\lambda > 0$ olsun.

Eğer $f_w^*(t)$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde artmayan ve $|f(x)|$ ile eş ölçülebilir ise, yani, her $\lambda > 0$ için

$$|\{t \in (0, +\infty) : f_w^*(t) > \lambda\}| = d_f(\lambda)$$

sağlanıyorsa, $f_w^*(t)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun $w dx$ ölçüsüne göre artmayan yeniden düzenlenmesi denir. Yeniden düzenlenmenin soldan sürekli bir fonksiyon olduğu kabul edilebilir. Bu durumda $f_w^*(t)$ aşağıdaki eşitlik yardımıyla tanımlanabilir ve tektir:

$$f_w^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : d_f(\lambda) < t\}$$

veya (bkz., örneğin, [20, p. 33] ve [21]):

$$f_w^*(t) = \sup_{w(E)=t} \operatorname*{ess\,inf}_{x \in E} |f(x)| \qquad (0 < t < \infty)$$

dir (w üzerindeki şartlardan dolayı, her $t > 0$ için $w(E) = t$ olacak şekilde bir E kümesi vardır).

$$f_w^{**}(t) = t^{-1}\int_0^t f_w^*(\tau)\,d\tau$$

olsun.

Yeniden düzenlenmenin eş ölçülebilirliğinden aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\,dx = \int_0^\infty (f_w^*(t))^p\,dt \quad (p > 0). \tag{6.1}$$

Aşağıdaki eşitsizlikler Hardy tarafından verilmiştir :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)\,dy\right)^p x^{-r-1}\,dx\right)^{1/p} \le \frac{p}{r}\left(\int_0^\infty (yf(y))^p y^{-r-1}\,dy\right)^{1/p}, \tag{6.2}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(y)\,dy\right)^p x^{r-1}\,dx\right)^{1/p} \le \frac{p}{r}\left(\int_0^\infty (yf(y))^p y^{r-1}\,dy.\right)^{1/p}, \tag{6.3}$$

Burada $f \ge 0$, $p \ge 1$, ve $r > 0$ (bkz., örneğin, [1, p. 272]).

Lemma 6.1. *f, g fonksiyonları için*

$$f_w^*(t) \le c\,g_w^*(\gamma t) + f_w^*(2t) \qquad (0 < t < \infty, \gamma > 0) \tag{6.4}$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca $f_w^*(+\infty) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{p,w} \le c_{p,\gamma}\|g\|_{p,w} \qquad (0 < p < \infty) \tag{6.5}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. (6.4) ün arka arkaya uygulanmasıyla

$$f_w^*(t) \le c\sum_{k=0}^\infty g_w^*(2^k\gamma t) = c\sum_{k=0}^\infty g_w^*(2^k\gamma t)\frac{1}{\ln 2}\int_{2^{k-1}\gamma t}^{2^k\gamma t}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\leq \frac{c}{\ln 2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k-1}\gamma t}^{2^k \gamma t} g_w^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{c}{\ln 2} \int_{\gamma t/2}^{\infty} g_w^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

elde edilir.

$1 \leq p < \infty$ olsun. (6.3) ve (6.5) Hardy eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,w} = \|f_w^*\|_p &\leq \frac{c}{\ln 2} \left\| \int_{\gamma t/2}^{\infty} g_w^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\|_p = \frac{c}{\ln 2} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/p} \left\| \int_{t}^{\infty} g_w^*(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right\|_p \\ &\leq \frac{c}{\ln 2} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/p} p \|g_w^*\|_p = \frac{c}{\ln 2} \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{1/p} p \|g\|_{p,w} \end{aligned}$$

sağlanır.

Şimdi $0 < p < 1$ olsun.

$$(f_w^*(t))^p \leq (c\, g_w^*(\gamma t))^p + (f_w^*(2t))^p,$$

olduğundan

$$(f_w^*(t))^p \leq c \sum_{k=0}^{\infty} (g_w^*(2^k \gamma t))^p \leq \frac{c}{\ln 2} \int_{\gamma t/2}^{\infty} (g_w^*(\tau))^p \frac{d\tau}{\tau}$$

eşitsizliği doğrudur. Fubini Teoremi'nin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,w} = \left(\int_0^{\infty} (f_w^*(t))^p \, dt \right)^{1/p} &\leq \left(\frac{c}{\ln 2} \right)^{1/p} \left(\int_0^{\infty} \int_{\gamma t/2}^{\infty} (g_w^*(\tau))^p \frac{d\tau}{\tau} \, dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{c}{\ln 2} \right)^{1/p} \left(\frac{2}{\gamma} \right)^{1/p} \left(\int_0^{\infty} \int_t^{\infty} (g_w^*(\tau))^p \frac{d\tau}{\tau} \, dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{2c}{\gamma \ln 2} \right)^{1/p} \left(\int_0^{\infty} (g_w^*(\tau))^p \, d\tau \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{2c}{\gamma \ln 2} \right)^{1/p} \|g\|_{p,w} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Bu bölümde $f_w^*(t)$ $(w \in A_\infty)$ yeniden düzenlenmesinin hesabı $M_{0,\alpha}^{\#} f$ maksimal fonksiyonu yardımıyla yapılmıştır.

Eğer her Q küpü ve her ölçülebilir $E \subset Q$ için

$$\frac{w(E)}{w(Q)} \leq c\left(\frac{|E|}{|Q|}\right)^{\delta} \tag{6.6}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c, \delta > 0$ sayıları varsa, w ağırlık fonksiyonu A_∞ Muckenhoupt koşulunu sağlar denir. A_∞ un bu tanıma denk diğer tanımları için [23] e bakılabilir.

Eğer keyfi Q küpü için

$$w(2Q) \leq cw(Q)$$

sağlanıyorsa, w doubling koşulunu sağlar ($w \in D$) denir. A_∞ şartı sağlanıyorsa, doubling koşulu sağlanır fakat tersi doğru değildir (bkz. [24]).

Lemma 6.2. $w \in D$ ve $0 < \lambda < 1$ olsun.

(i) Q_0 bir küp ve $E \subset Q_0$, $w(E) \leq \lambda w(Q_0)$ olacak şekilde keyfi ölçülebilir bir küme ise, E yi örten ve

$$\lambda w(Q_i) < w(Q_i \cap E) \leq c_w \lambda w(Q_i) \tag{6.7}$$

koşulunu sağlayan ikili ayrık $\{Q_i\} : Q_i \subset Q_0$ küpleri vardır.

(ii) $E \subset \mathbb{R}^n$, pozitif w-ölçülü keyfi ölçülebilir bir küme olmak üzere, E yi örten ve (6.7) eşitsizliğini sağlayan ikili ayrık $\{Q_i\}$ küpleri vardır .

İspat. (i) şıkkı ağırlıklı Calderón-Zygmund lemmasından elde edilir (bkz. [25]):

Eğer $\frac{1}{w(Q_0)} \int_{Q_0} |f(y)| w(y)\, dy \leq \lambda$ ise, bu durumda

$$\lambda < \frac{1}{w(Q_i)} \int_{Q_i} |f(y)| w(y)\, dy \leq c_w \lambda$$

ve hemen hemen her $x \in Q_0 \setminus \bigcup_i Q_i$ için $|f(x)| \leq \lambda$ olacak şekilde ikili ayrık $\{Q_i\} : Q_i \subset Q_0$

küpleri vardır (ispat Calderón-Zygmund lemmasının [1, p. 17] ispatıyla aynıdır). $f(y) = \chi_E(y)$ alınırsa, (i) elde edilir.

(ii) nin ispatı için, $\mathbb{R}^n$ yi $w(E \cap Q_k) \leq \lambda w(Q_k)$ özelliğine sahip, yeterince büyük, kesişmeyen Q_k küpleriyle ayırmamız gerekir. E kümesi sonlu w-ölçüsüne sahip olduğundan bunu yapmamız mümkündür. O halde her bir Q_k küpü için (i) şıkkının uygulanması yeterlidir. Böylelikle ispat tamamlanır. □

Not 6.1. Lemma 6.2 nin formülasyonunda Q_i küpleri E kümesini hemen her yerde örtmektedir, yani, $|E \setminus \cup_i Q_i| = 0$ dır. Belirtelim ki [25] de verilen lemmada $\{Q_i\}$ küpler ailesi hemen hemen her yerde $|f(x)| \leq \lambda$ olması durumunda boş olabilir. Fakat bizim ele aldığımız durumda $\lambda < 1$ ve $f = \chi_E$ olduğundan, bu mümkün değildir.

Lemma 6.3. $w \in D$ olsun. Her ölçülebilir f fonksiyonu ve her Q küpü için

$$(f\chi_Q)_w^*(\lambda w(Q)) \leq 2 \inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)_w^*(\lambda w(Q)) + (f\chi_Q)_w^*((1-\lambda)w(Q)) \tag{6.8}$$

eşitsizliği her $\lambda \in (0,1)$ için doğrudur.

İspat. $1/2 \leq \lambda < 1$ ise,

$$(f\chi_Q)_w^*(\lambda w(Q)) \leq (f\chi_Q)_w^*((1-\lambda)w(Q)),$$

doğrudur ve sonuç aşikardır.

$0 < \lambda < 1/2$ olsun. Her keyfi c için

$$\begin{aligned}|c| &\leq \inf_{x\in Q}(|c-f(x)| + |f(x)|) \leq ((|c-f| + |f|)\chi_Q)_w^*(w(Q)) \\ &\leq ((f-c)\chi_Q)_w^*(\lambda w(Q)) + (f\chi_Q)_w^*((1-\lambda)w(Q))\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(f\chi_Q)^*_w(\lambda w(Q)) &= ((f-c)\chi_Q + c\chi_Q)^*_w(\lambda w(Q))\\ &\le ((f-c)\chi_Q)^*_w(\lambda w(Q)) + |c|\\ &\le 2((f-c)\chi_Q)^*_w(\lambda w(Q)) + (f\chi_Q)^*_w((1-\lambda)w(Q))\end{aligned}$$

sağlanır. Sonuç olarak

$$(f\chi_Q)^*_w(\lambda w(Q)) \le 2\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)^*_w(\lambda w(Q)) + (f\chi_Q)^*_w((1-\lambda)w(Q))$$

elde edilir. □

Şimdi $M^{\#}_{0,\alpha}f$ ve $M^{\#}_{0,\alpha;\Omega}f$ fonksiyonlarının aşağıdaki ağırlıklı analoglarını ele alalım:

$$M^{\#}_{0,\alpha,w}f(x) := \sup_{Q\ni x}\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)^*_w(\alpha w(Q)) \quad (0<\alpha\le 1),$$

$$M^{\#}_{0,\alpha,w;\Omega}f(x) := \sup_{x\in Q\subset\Omega}\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_Q)^*_w(\alpha w(Q)) \quad (0<\alpha\le 1).$$

Lemma 6.4. $w\in A_\infty$ ise, her $\alpha\le 1$ için $\alpha', \alpha''\le 1$ sayıları vardır, öyle ki, her $x\in\mathbb{R}^n$ için

$$M^{\#}_{0,\alpha''}f(x) \le M^{\#}_{0,\alpha,w}f(x) \le M^{\#}_{0,\alpha'}f(x) \tag{6.9}$$

sağlanır.

İspat. $E\subset Q$ ve $w(E)=\alpha w(Q)$ olsun. Bu durumda (6.6) dan belli $c,\delta>0$ için

$$|E| \ge \frac{\alpha^{1/\delta}}{c}|Q|$$

dur. O halde

$$\inf_{x\in E}|f(x)-\xi| \le ((f-\xi)\chi_Q)^*(|E|) \le ((f-\xi)\chi_Q)^*\Big(\frac{\alpha^{1/\delta}}{c}|Q|\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

doğrudur. $w(E) = \alpha w(Q)$ özelliğine sahip bütün $E \subset Q$ kümeleri üzerinden supremum alınırsa,

$$((f-\xi)\chi_Q)^*_w(\alpha w(Q)) \le ((f-\xi)\chi_Q)^*\Big(\frac{\alpha^{1/\delta}}{c}|Q|\Big), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha' = \alpha^{1/\delta}/c$ olmak üzere (6.9) eşitsizliğinin sağ tarafını verir.

$E \subset Q$ ve $|E| = \alpha''|Q|$ olsun. Bu durumda $|Q\backslash E| = (1-\alpha'')|Q|$ dur ve dolayısıyla $w(Q\backslash E) \le c(1-\alpha'')^\delta w(Q)$ yazılabilir. Böylece

$$w(E) \ge (1-(1-\alpha'')^\delta)w(Q)$$

ve

$$\inf_{x\in E}|f(x)-\xi| \le ((f-\xi)\chi_Q)^*_w(w(E)) \le ((f-\xi)\chi_Q)^*_w((1-(1-\alpha'')^\delta)w(Q)), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

elde edilir. $\alpha = 1-(1-\alpha'')^\delta$ alınırsa, $\alpha'' = 1-((1-\alpha)/c)^{1/\delta}$ dır. O halde (6.9) eşitsizliğinin sol tarafı $\alpha'' = 1-((1-\alpha)/c)^{1/\delta}$ ile sağlanır. □

Teorem 6.1. $w \in D$ olsun. Her ölçülebilir f fonksiyonu ve her Q küpü için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$(f\chi_Q)^*_w(t) \le 2(M^\#_{0,\alpha,w;Q}f)^*_w(2t) + (f\chi_Q)^*_w(2t) \quad (0 < t \le w(Q)/(5c_w)), \tag{6.10}$$

$$f^*_w(t) \le 2(M^\#_{0,\alpha,w}f)^*_w(2t) + f^*_w(2t) \quad (0 < t < \infty). \tag{6.11}$$

Burada c_w, (6.7) deki sabittir ve $0 < \alpha \le 1/(5c_w)$ dir.

İspat. Keyfi $Q \subset \mathbb{R}^n$ küpü alalım. $\alpha \le 1/(5c_w)$, $t \le w(Q)/(5c_w)$ ve $E \subset Q$, $w(E) = t$. olacak şekilde keyfi ölçülebilir bir küme olsun. Lemma 6.2 (i) den E yi örten,

$$\frac{1}{5c_w}w(Q_i) < w(Q_i \cap E) \leq \frac{1}{5}w(Q_i) \tag{6.12}$$

özelliğine sahip, ikili ayrık $\{Q_i\} : Q_i \subset Q$ küpleri vardır.

O halde

$$\sum_i w(Q_i) \geq 5 \sum_i w(Q_i \cap E) = 5w(E) = 5t \tag{6.13}$$

dir. $\{Q_i\}$ küpler ailesinden

$$E^* := \{x \in Q : M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f(x) > (M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f)^*_w(2t)\},$$

kümesi tarafından kapsanan $\{Q_i''\}$ küpleri seçelim ve $\{Q_i'\} = \{Q_i\}\backslash\{Q_i''\}$ olsun. Diğer bir deyişle, Q_i' için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\inf_c ((f-c)\chi_{Q_i'})^*_w(\alpha w(Q_i')) \leq (M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f)^*_w(2t).$$

Bu bağıntı ve Lemma 6.3 ten

$$\begin{aligned}
(f\chi_{Q_i'})^*_w\Big(\frac{w(Q_i')}{5c_w}\Big) &\leq 2\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_{Q_i'})^*_w\Big(\frac{w(Q_i')}{5c_w}\Big) + (f\chi_{Q_i'})^*_w\Big(\Big(1-\frac{1}{5c_w}\Big)w(Q_i')\Big) \\
&\leq 2\inf_{c\in\mathbb{R}}((f-c)\chi_{Q_i'})^*_w(\alpha w(Q_i')) + (f\chi_{Q_i'})^*_w\Big(\Big(1-\frac{1}{5c_w}\Big)w(Q_i')\Big) \\
&\leq 2(M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f)^*_w(2t) + (f\chi_{Q_i'})^*_w\Big(\Big(1-\frac{1}{5c_w}\Big)w(Q_i')\Big) \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

doğrudur. Ayrıca, $w(E^*) \leq 2t$ ve Q_i küpleri ikili ayrık olduğundan, (6.13) ün de göz önüne alınmasıyla,

$$\sum_i w(Q_i') = \sum_i w(Q_i) - \sum_i w(Q_i'') \geq \sum_i w(Q_i) - w(E^*) \geq 5t - 2t = 3t$$

elde edilir.

Böylece

$$
\begin{aligned}
\inf_i (f\chi_{Q_i'})_w^*\left(\left(1-\frac{1}{5c_w}\right)w(Q_i')\right) &\le (f\chi_{\cup_i Q_i'})_w^*\left(\left(1-\frac{1}{5c_w}\right)w(\cup_i Q_i')\right)\\
&\le (f\chi_Q)_w^*\left(\left(1-\frac{1}{5c_w}\right)w(\cup_i Q_i')\right)\\
&\le (f\chi_Q)_w^*\left(\left(1-\frac{1}{5c_w}\right)3t\right) \le (f\chi_Q)_w^*(2t) \qquad (6.15)
\end{aligned}
$$

sağlanır. (6.12), (6.14) ve (6.15) in kullanılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
\inf_{x\in E}|f(x)| \le \inf_i \inf_{x\in E\cap Q_i'}|f(x)| &\le \inf_i (f\chi_{Q_i'})_w^*(w(Q_i'\cap E))\\
&\le \inf_i (f\chi_{Q_i'})_w^*\left(\frac{w(Q_i')}{5c_w}\right) \le 2(M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f)_w^*(2t)+(f\chi_Q)_w^*(2t)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $w(E)=t$ özelliğine sahip $E\subset Q$ kümeleri üzerinden supremum alınırsa, (6.10) elde edilir. (6.11) eşitsizliği, Lemma 6.2 (ii) kullanılarak, veya (6.10) da $Q\to\mathbb{R}^n$ için limit alınarak benzer şekilde ispatlanır. □

(6.10) ve (6.11) eşitsizlikleri "iyi λ eşitsizlikleri" nden (bkz. Teorem 5.1) artmayan düzenlenme kestirimlerine geçişi ifade etmektedir.

Lemma 6.4 ve (6.11) eşitsizliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1. $w\in A_\infty$ olsun. Her ölçülebilir f fonksiyonu için

$$
f_w^*(t) \le 2(M^{\#}_{0,\alpha}f)_w^*(2t)+f_w^*(2t) \quad (0<t<\infty,\ 0<\alpha<\alpha_0(w)) \qquad (6.16)
$$

eşitsizliği sağlanır.

(6.16) eşitsizliği ve Lemma 6.1 uygulanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 6.2. $w\in A_\infty$ olsun. Bu durumda $f_w^*(+\infty)=0$ koşulunu sağlayan her f fonksiyonu için

$$\|f\|_{p,w} \leq c_{p,w} \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|_{p,w} \quad (0 < t < \infty,\ 0 < \alpha < \alpha_0(w)) \tag{6.17}$$

eşitsizliği sağlanır.

Ağırlıksız durumda bu sonuçlar [26] da verilmiştir.

7. AĞIRLIKLI NORM EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölumde, (6.16) temel eşitsizliğinin ve

$$\|f\|_* \leq c_n \left\| M^{\#}_{0,\alpha} f \right\|_\infty \qquad (0 < \alpha \leq 1/2), \tag{7.1}$$

ile verilen John-Strömberg eşitsizliğinin (Sonuç 5.1) bazı bilinen sonuçlar için daha kısa ispatlar verilmesine imkan verdiği gösterilecektir.

Bunun için öncelikle $M^{\#}_{0,\alpha}$ operatörünün, M Hardy-Littlewood ve T Calderón-Zygmund singüler integral operatörü üzerinde nasıl davrandığına bakalım.

Teorem 7.1. $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer hemen hemen her yerde $Mf(x) < \infty$ ise, her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M^{\#}_{0,\alpha}(Mf)(x) \leq c_{n,\alpha} f^{\#}(x) \qquad (0 < \alpha \leq 1) \tag{7.2}$$

sağlanır.

İspat. Q küpünü alalım. $x \in Q$ ve Q', x noktasını içeren keyfi bir küp olsun. $Q' \subset 3Q$ olması durumunda

$$\begin{aligned} |f|_{Q'} = \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f| &= \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f - f_{3Q} + f_{3Q}| \\ &\leq \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} |f - f_{3Q}|\chi_{3Q} + |f|_{3Q} \\ &\leq M((f - f_{3Q})\chi_{3Q})(x) + \inf_{\xi \in Q} Mf(\xi) \end{aligned} \tag{7.3}$$

sağlanır.

$Q' \not\subset 3Q$ olsun. Bu durumda $Q \subset 3Q'$ dür ve

$$|f|_{Q'} \leq |f - f_{3Q'}|_{Q'} + |f|_{3Q'} = 3^n \frac{1}{|3Q'|} \int_{3Q'} |f - f_{3Q'}| + |f|_{3Q'}$$
$$\leq 3^n \inf_{\xi \in Q} f^{\#}(\xi) + \inf_{\xi \in Q} Mf(\xi)$$

elde edilir.

(7.3) ün uygulanmasıyla her $x \in Q$ için

$$Mf(x) \leq M((f - f_{3Q})\chi_{3Q})(x) + 3^n \inf_{\xi \in Q} f^{\#}(\xi) + \inf_{\xi \in Q} Mf(\xi) \tag{7.4}$$

sağlanır. M operatörünün zayıf (1,1) olduğu kullanılırsa, (7.4) ten

$$\inf_c ((Mf - c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \leq ((Mf - \inf_{\xi \in Q} Mf(\xi))\chi_Q)^*(\alpha|Q|)$$
$$\leq (M((f - f_{3Q})\chi_{3Q}))^*(\alpha|Q|) + 3^n \inf_{\xi \in Q} f^{\#}(\xi)$$
$$\leq \frac{c_n}{\alpha|Q|} \int_{3Q} |f(y) - f_{3Q}| dy + 3^n \inf_{\xi \in Q} f^{\#}(\xi)$$

doğrudur. x noktasını içeren tüm Q küpleri üzerinden supremum alınarak (7.2) elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Belirtelim ki (7.2) eşitsizliği lokal olarak daha zayıf durumda [26] da ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 7.1. (i) $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ ve hemen hemen her yerde $Mf(x) < \infty$ ise, $Mf \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ dir ve

$$\|Mf\|_* \leq c_n \|f\|_*$$

sağlanır.

(ii) $w \in A_\infty$ ise, her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ için

$$(Mf)_w^*(t) \le c_{n,w}(f^\#)_w^*(2t) + (Mf)_w^*(2t) \quad (t > 0) \tag{7.5}$$

sağlanır.

(iii) $w \in A_\infty$ ise, $(Mf)_w^*(+\infty) = 0$ özelliğine sahip her f fonksiyonu için

$$\|Mf\|_{p,w} \le c_{n,p,w}\|f^\#\|_{p,w} \quad (0 < p < \infty) \tag{7.6}$$

sağlanır.

İspat. (i) (7.1) ve (7.2) kullanılarak,

$$\|Mf\|_* \le c_n \left\| M^\#_{0,1/2}(Mf) \right\|_\infty \le c_n \|f^\#\|_\infty = c_n \|f\|_*$$

elde edilir. Bu sonuç [27] de ispatlanmıştır.

(ii) (6.16) ve (7.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}(Mf)_w^*(t) &\le 2(M^\#_{0,\alpha}(Mf))_w^*(2t) + (Mf)_w^*(2t)\\ &\le c_{n,\alpha}(f^\#)_w^*(2t) + (Mf)_w^*(2t)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç [28] de ispatlanmıştır.

(iii) (6.17) veya (7.2) kullanılarak

$$\|Mf\|_{p,w} \le c_{p,w} \left\| M^\#_{0,\alpha}(Mf) \right\|_{p,w} \le c_{n,p,w} \|f^\#\|_{p,w}$$

elde edilir. Bu sonuç [8] de verilen ağırlıklı Fefferman-Stein teoremidir. □

$k(x)$ çekirdeği aşağıdaki standart koşulları sağlasın:

$$
\begin{aligned}
|k(x)| \leq \frac{c}{|x|^n}, \quad \int_{R_1<|x|<R_2} k(x)\,dx = 0 \quad (0 < R_1 < R_2 < \infty), \\
|k(x) - k(x-y)| \leq \frac{c|y|^\alpha}{|x|^{n+\alpha}} \quad (|y| \leq |x|/2,\ \alpha > 0).
\end{aligned} \tag{7.7}
$$

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ için

$$
\begin{aligned}
Tf(x) &= \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y)\,dy, \\
T^* f(x) &= \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y) f(y)\,dy \right|
\end{aligned}
$$

olsun.

Aşağıdaki teorem [26] da ispatlanmıştır. Başka bir ispat için [18] e bakılabilir.

Teorem 7.2. $1 \leq p < \infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda $c = c_{n,\alpha} > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$
M^{\#}_{0,\alpha}(Tf)(x) \leq c_{n,\alpha} Mf(x), \tag{7.8}
$$

$$
M^{\#}_{0,\alpha}(T^* f)(x) \leq c_{n,\alpha} Mf(x) \tag{7.9}
$$

eşitsizlikleri her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için doğrudur.

İspat. İspatı yapmak için fonksiyonu iki kısma ayıralım. x_Q, Q küpünün merkezi olsun. $f_1 = f \cdot \chi_{3Q}$, $f_2 = f \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus (3Q)}$ fonksiyonlarını alalım. Hölder eşitsizliğinden

$$
\|f_1\|_1 = \int_{3Q} |f(y)|\,dy \leq |3Q|^{1/p'} \left(\int_{3Q} |f(y)|^p\,dy \right)^{1/p} < \infty
$$

olduğu görülür. T operatörü zayıf (1,1) olduğundan ([1, s. 30]),

$$
(Tf_1)^*(\alpha|Q|) \leq \frac{c}{\alpha|Q|} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)|\,dy = \frac{c}{\alpha|Q|} \int_{3Q} |f(y)|\,dy \leq c' \inf_{x \in Q} Mf(x)
$$

elde edilir. O halde

$$M_{0,\alpha}^{\#}(Tf_1)(x) \leq c' Mf(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{7.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer yandan, çekirdek üzerindeki (7.7) koşulunu kullanarak, her $x', x'' \in Q$ için

$$|Tf_2(x') - Tf_2(x'')| \leq c \inf_{x \in Q} Mf(x) \tag{7.11}$$

olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten,

$x', x'' \in Q$ ve $y \in \mathbb{R}^n \backslash (3Q)$ olsun. Bu durumda $2|x' - x''| \leq |x' - y|$ dir, ve (7.7) den

$$|k(x' - y) - k(x'' - y)| \leq \frac{c|x' - x''|^{\alpha}}{|x' - y|^{n+\alpha}}$$

elde edilir. $2|x' - y| \geq |x_Q - y|$ olduğundan

$$|k(x' - y) - k(x'' - y)| \leq \frac{c|x' - x''|^{\alpha}}{|x_Q - y|^{n+\alpha}}$$

sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
|Tf_2(x') - Tf_2(x'')| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n \backslash (3Q)} f(y) k(x' - y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n \backslash (3Q)} f(y) k(x'' - y)\, dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n \backslash (3Q)} |f(y)||k(x' - y) - k(x'' - y)|\, dy \\
&\leq c|x' - x''|^{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n \backslash (3Q)} \frac{|f(y)|}{|x_Q - y|^{n+\alpha}}\, dy \\
&= c|x' - x''|^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{2^{m+1}(3Q) \backslash 2^m(3Q)} \frac{|f(y)|}{|x_Q - y|^{n+\alpha}}\, dy
\end{aligned}$$

dir. $y \in 2^{m+1}(3Q) \backslash 2^m(3Q)$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ için, $|x_Q - y| \approx |2^{m+1}(3Q)|^{1/n}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece

$$|Tf_2(x') - Tf_2(x'')| \leq c|x' - x''|^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{|2^{m+1}(3Q)|^{(n+\alpha)/n}} \int_{2^{m+1}(3Q)} |f(y)|\, dy$$

$$\le c \inf_{x\in Q} Mf(x)|x'-x''|^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{|2^{m+1}(3Q)|^{\alpha/n}}$$

$$\approx c \inf_{x\in Q} Mf(x)|x'-x''|^{\alpha}|Q|^{\alpha/n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m\alpha}} \le c \inf_{x\in Q} Mf(x)$$

sağlanır.

(7.11) den, her $x' \in Q$ için

$$\left|Tf_2(x') - \inf_{y\in Q} Tf_2(y)\right| \le c \inf_{x\in Q} Mf(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

E, Q nun, $|E| = \alpha|Q|$ özelliğine sahip herhangi bir ölçülebilir alt kümesi olsun.

$$\inf_{x'\in E}\left|Tf_2(x') - \inf_{y\in Q} Tf_2(y)\right| \le c \inf_{x\in Q} Mf(x)$$

olduğundan

$$((Tf_2 - \inf_{y\in Q} Tf_2(y))\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \le c \inf_{x\in Q} Mf(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda

$$\inf_{c\in\mathbb{R}}((Tf_2 - c)\chi_Q)^*(\alpha|Q|) \le c \inf_{x\in Q} Mf(x)$$

tir ve sonuç olarak

$$M^{\#}_{0,\alpha}(Tf_2)(x) \le cMf(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n) \tag{7.12}$$

elde edilir.

(7.11) ve (7.12) birlikte ele alınarak,

$$M^{\#}_{0,\alpha}(Tf)(x) \le M^{\#}_{0,\alpha/2}(Tf_1)(x) + M^{\#}_{0,\alpha/2}(Tf_2)(x) \le cMf(x) \quad (x\in\mathbb{R}^n)$$

olduğu görülür.

(7.9) eşitsizliği benzer şekilde ispatlanır. □

Sonuç 7.2. (i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ise, $Tf, T^*f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ dir. Ayrıca,

$$\|Tf\|_* \leq c_n \|f\|_\infty,$$
$$\|T^*f\|_* \leq c_n \|f\|_\infty$$

sağlanır.

(ii) $w \in A_\infty$ ise, her $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ için

$$(Tf)^*_w(t) \leq c_{n,w}(Mf)^*_w(2t) + (Tf)^*_w(2t) \quad (t > 0),$$
$$(T^*f)^*_w(t) \leq c_{n,w}(Mf)^*_w(2t) + (T^*f)^*_w(2t) \quad (t > 0);$$

sağlanır.

(iii) $w \in A_\infty$ ise, $(T^*f)^*_w(+\infty) = 0$ özelliğine sahip her f fonksiyonu için

$$\|T^*f\|_{p,w} \leq c_{n,p,w}\|Mf\|_{p,w} \quad (0 < p < \infty) \tag{7.13}$$

sağlanır.

İspat. (i) $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. $M : L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ sınırlı olduğundan, (7.1), (7.8) ve (7.9) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\|Tf\|_* \leq c_n \left\| M^{\#}_{0,1/2}(Tf) \right\|_\infty \leq c_n \|Mf\|_\infty \leq c_n \|f\|_\infty,$$
$$\|T^*f\|_* \leq c_n \left\| M^{\#}_{0,1/2}(T^*f) \right\|_\infty \leq c_n \|Mf\|_\infty \leq c_n \|f\|_\infty$$

olduğu görülür. Belirtelim ki (i) ifadesi [29] da Stein tarafından verilmiştir.

(ii) $w \in A_\infty$ olsun. (6.16), (7.8) ve (7.9) eşitsizliklerinin birlikte kullanılmasıyla, her $t > 0$ için

$$(Tf)^*_w(t) \le 2(M^{\#}_{0,\alpha}(Tf))^*_w(2t) + (Tf)^*_w(2t) \le c_{n,w}(Mf)^*_w(2t) + (Tf)^*_w(2t),$$
$$(T^*f)^*_w(t) \le 2(M^{\#}_{0,\alpha}(T^*f))^*_w(2t) + (T^*f)^*_w(2t) \le c_{n,w}(Mf)^*_w(2t) + (T^*f)^*_w(2t).$$

sağlanır. (ii) ifadesi [30] da elde edilmiştir. Daha açık ifade etmek gerekirse [30] da Bagby ve Kurtz, her $\gamma \in (0,1)$ için

$$(T^*f)^*_w(t) \le c(\gamma)(Mf)^*_w(\gamma t) + (T^*f)^*_w(2t) \quad (t > 0),$$

olacak şekilde bir $c(\gamma)$ sabitinin varlığını göstermişlerdir. Dolayısıyla [30] da kullanılan metotta $(Mf)^*_w(2t)$ alınamaz.

(iii) $w \in A_\infty$ olsun ve f, $(T^*f)^*_w(+\infty) = 0$ şartını sağlasın. $\alpha_0(w)$, Theorem 6.2 deki gibi tanımlanmış olmak üzere $0 < \alpha < \alpha_0(w)$ olsun. Bu durumda (6.17) ve (7.9) eşitsizliklerinin birlikte ele alınmasıyla

$$\|T^*f\|_{p,w} \le c_{p,w}\left\|M^{\#}_{0,\alpha}(T^*f)\right\|_{p,w} \le c_{n,p,w}\|Mf\|_{p,w} \quad (0 < p < \infty)$$

elde edilir. Belirtelim ki (7.13) eşitsizliği [23] de ispatlanmıştır. □

Not 7.1. Cordoba ve Fefferman, [31] de

$$(Tf)^{\#}(x) \le c_p M_p f(x) \quad (1 < p < \infty) \tag{7.14}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir. Bu eşitsizlik biraz geliştirilebilir. Bunun için $p = 1$ durumunda Lemma 5.5 kullanılırsa, her $f \in L^p(\mathbb{R}^n) + \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ için $0 < \alpha \le \alpha(n)$ yeterince küçük olmak üzere,

$$c_1 M M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \le f^{\#}(x) \le c_2 M M^{\#}_{0,\alpha} f(x) \tag{7.15}$$

eşitsizliğini sağlayan c_1, c_2 sabitleri vardır. (7.8) ve (7.15) eşitsizliklerinden

$$(Tf)^{\#}(x) \leq cMM^{\#}_{0,\alpha}(Tf)(x) \leq cMMf(x)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik (7.14) ten daha kesindir. Gerçekten [32] de gösterildiği gibi,

$$MM_pf(x) \leq cM_pf(x) \quad (p > 1)$$

ve böylece

$$MMf(x) \leq MM_pf(x) \leq cM_pf(x) \quad (p > 1)$$

dir.

Şimdi (6.10) eşitsizliğinin bazı sonuçlarını verelim.

$$f_{Q,w} = \frac{1}{w(Q)} \int_Q f(y)w(y)\,dy$$

olmak üzere

$$\|f\|_{*,w} \equiv \sup_Q \frac{1}{w(Q)} \int_Q |f(y) - f_{Q,w}|w(y)\,dy < \infty$$

özelliğine sahip f fonksiyonlarının uzayını BMO(w) ile gösterelim.

John-Nirenberg lemmasının (Lemma 4.2) ağırlıklı analoğunu vererek başlayalım. Bu lemmanın doubling koşulunu sağlayan her bir ölçü için de doğru olduğu [25] te belirtilmiştir.

Teorem 7.3 (John-Nirenberg)**.** $w \in D$ olsun. Bu durumda her $f \in$ BMO(w) fonksiyonu ve her Q küpü için

$$((f - f_{Q,w})\chi_Q)^*_w(t) \leq c\,\|f\|_{*,w} \log^+ \frac{2w(Q)}{t} \quad (0 < t < \infty),$$

eşitsizliği sağlanır, veya buna denk olarak,

$$w(\{x \in Q : |f(x) - f_{Q,w}| > \lambda\}) \leq 2w(Q) \exp\left(-\frac{\lambda}{c\|f\|_{*,w}}\right) \quad (0 < \lambda < \infty),$$

doğrudur. Burada c, yalnızca w fonksiyonuna bağlıdır.

İspat. (6.10) eşitsizliğinden

$$((f - f_{Q,w})\chi_Q)^*_w(t) \leq 2(M^{\#}_{0,1/(5c_w),w;Q}f)^*_w(2t) + ((f - f_{Q,w})\chi_Q)^*_w(2t) \quad \left(0 < t \leq \frac{w(Q)}{5c_w}\right)$$

yazılabilir.

$$\alpha\left\|M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f\right\|_\infty \leq \|f\|_{*,w} \quad (0 < \alpha \leq 1),$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\left\|M^{\#}_{0,1/(5c_w),w;Q}f\right\|_\infty \leq 5c_w\|f\|_{*,w},$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$(M^{\#}_{0,1/(5c_w),w;Q}f)^*_w(t) \leq 5c_w\|f\|_{*,w} \quad (t > 0)$$

dir. Dolayısıyla $0 < t < w(Q)/(5c_w)$ olmak üzere

$$((f - f_{Q,w})\chi_Q)^*_w(t) \leq 10c_w\|f\|_{*,w} + ((f - f_{Q,w})\chi_Q)^*_w(2t) \tag{7.16}$$

sağlanır. Fakat $t \geq w(Q)/(5c_w)$ için

$$((f - f_{Q,w})\chi_Q)^*_w(t) \leq \frac{5c_w}{w(Q)} \int_Q |f(y) - f_{Q,w}| w(y)\, dy \leq 5c_w\|f\|_{*,w}$$

dir. O halde (7.16) eşitsizlgi her $t > 0$ için sağlanır.

Şimdi $w(Q)/2^{k+1} < t \le w(Q)/2^k$ olsun. (7.16) nın k defa uygulanmasıyla

$$((f - f_{Q,w})\chi_Q)^*_w(t) \le 10c_w\|f\|_{*,w}(k+1) \le \frac{10c_w}{\log 2}\|f\|_{*,w}\log^+\frac{2w(Q)}{t}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Not 7.2. Benzer şekilde (6.10) eşitsizliğinden John and Strömberg teoreminin ağırlıklı analogu elde edilir: Her Q küpü için öyle bir $a_{Q,w}$ sabiti vardır ki

$$((f - a_{Q,w})\chi_Q)^*_w(t) \le c\left\|M^{\#}_{0,\alpha,w}f\right\|_\infty \log^+\frac{2w(Q)}{t} \quad (0 < t < \infty, 0 < \alpha \le 1/(5c_w))$$

sağlanır. O halde

$$\begin{aligned}\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y) - f_{Q,w}|w(y)\,dy &\le 2\frac{1}{w(Q)}\int_Q |f(y) - a_{Q,w}|w(y)\,dy \\ &\le \frac{c\left\|M^{\#}_{0,\alpha,w}f\right\|_\infty}{w(Q)}\int_0^{w(Q)} \log^+\frac{2w(Q)}{t}\,dt \le c'\left\|M^{\#}_{0,\alpha,w}f\right\|_\infty\end{aligned}$$

dur. Böylece

$$\|f\|_{*,w} \approx \left\|M^{\#}_{0,\alpha,w}f\right\|_\infty \tag{7.17}$$

yazılabilir. $\alpha \le 1/2$ için $\|f\|_* \approx \left\|M^{\#}_{0,\alpha}f\right\|_\infty$ olduğundan (bkz., Sonuç 5.1), (7.17) eşitsizliği ve Lemma 6.4 Muckenhoupt ve Wheeden tarafından [25] te verilen sonucu belirtir, yani $w \in A_\infty$ ise, BMO(w) = BMO dir.

Bennett, DeVore ve Sharpley, [27] te aşağıdaki eşitsizliği ispatlamışlardır: Her $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve her $Q \subset \mathbb{R}^n$ küpü için,

$$(f\cdot\chi_Q)^{**}(t) - (f\cdot\chi_Q)^*(t) \le c(f^{\#})^*(t) \quad (0 < t < |Q|/6) \tag{7.18}$$

sağlanır.

Bu sonuç, özel durumda, Fefferman ve Stein teoremini verir (bkz. [8]):

$$\|Mf\|_p \approx \|f^{\#}\|_p \quad (1 < p < \infty).$$

Daha sonra Bagby ve Kurtz [28] de aşağıdaki ağırlıklı eşitsizliği elde etmişlerdir: $w \in A_\infty$ ise, her $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için,

$$f_w^*(t) \le c(f^{\#})_w^*(2t) + f_w^*(2t) \quad (t > 0) \tag{7.19}$$

sağlanır. [28] de ve onu izleyen makale [30] da Mf ve $f^{\#}$ in, Tf ve Mf in artmayan düzenlenmelerini birbirlerine bağlayan kestirimler elde edilmiştir. Bu kestirimler bilinen "iyi λ eşitsizlikleri" nin (bkz. [8, 23]) artmayan düzenlenme terimlerindeki analoglarıdır.

Şimdi gösterelim ki (6.10) eşitsizliğinden Bennett, DeVore ve Sharpley tarafından verilen (7.18) eşitsizliğini elde etmek mümkündür. Gerçekten, (6.10) eşitsizliği integre edilerek,

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t (f\chi_Q)_w^*(\tau)\,d\tau &\le 2\frac{1}{t}\int_0^t (M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f)_w^*(2\tau)\,d\tau + \frac{1}{t}\int_0^t (f\chi_Q)_w^*(2\tau)\,d\tau\\ &= 2\frac{1}{2t}\int_0^{2t} (M^{\#}_{0,\alpha,w;Q}f)_w^*(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2t}\int_0^{2t} (f\chi_Q)_w^*(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

elde edilir, yani, $0 < t < w(Q)/(5c_w)$, $0 < \alpha \le 1/(5c_w)$ olmak üzere

$$(f\cdot\chi_Q)_w^{**}(t) - \frac{1}{2t}\int_0^{2t} (f\cdot\chi_Q)_w^*(\tau)\,d\tau \le 2(M^{\#}_{0,\alpha,w}f)_w^{**}(2t)$$

sağlanır. O halde

$$\begin{aligned}(f\cdot\chi_Q)_w^{**}(t) - (f\cdot\chi_Q)_w^*(t) &\le 2\left[(f\cdot\chi_Q)_w^{**}(t) - \frac{1}{2t}\int_0^{2t} (f\cdot\chi_Q)_w^*(\tau)\,d\tau\right]\\ &\le 4(M^{\#}_{0,\alpha,w}f)_w^{**}(2t)\end{aligned} \tag{7.20}$$

dir. $w \equiv 1$ olsun. Bu durumda Hardy-Littlewood-Hertz eşitsizliğinden (bkz. [22])

$$c_1 f^{**}(t) \le (Mf)^*(t) \le c_2 f^{**}(t) \quad (0 < t < \infty)$$

sağlanır. Bu eşitsizliğin sol tarafı, (7.15) ve (7.20) kullanılarak (7.18) elde edilir.

8.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle ölçülebilir fonksiyonun dağılım fonksiyonlarının ve artmayan yeniden düzenlenmelerinin tanımları ve bir ölçülebilir fonksiyonun medyanı ile ilgili özellikler verildi. BMO uzayı ile ilgili önemli özellikler ifade edildi. Daha sonra John-Strömberg maksimal fonksiyonu ve onun lokal versiyonu tanımlanıp bazı özellikleri incelendi. Ağırlıklı John-Strömberg maksimal fonksiyonu ve onun lokal versiyonu tanımlandı ve fonksiyonun ağırlıklı yeniden düzenlenmesi ile bu fonksiyonun ağırlıklı John-Strömberg maksimal fonksiyonunun ağırlıklı yeniden düzenlenmesi arasındaki bağıntılar ifade edildi. Son olarak ağırlıklı John-Strömberg maksimal fonksiyonunun, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve Calderón-Zygmund singüler integral operatörü üzerine ağırlıklı norm eşitsizlikleri incelendi.

KAYNAKLAR

[1] Stein, E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton, N.J., 1970.

[2] Guzmán, M. de, Differentiation of integrals in Rn. Lecture notes in Mathematics, Berlin-New York, 1975.

[3] Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia, J. L., Weighted norm inequalities and related topics. Amsterdam, 1985.

[4] Torchinsky, A., Real-variable methods in harmonic analysis. Pure and Applied Mathematics, vol. 123, Orlando,1986.

[5] Stein, E. M., Harmonic analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals. Princeton,NJ, 1993.

[6] Grafakos, L., Classical Fourier analysis. Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2008.

[7] Grafakos, L., Modern Fourier analysis. Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[8] Fefferman, C., Stein, E. M., H^p spaces of several variables. Acta Math. 129, 137-193, 1972.

[9] John, F., Nirenberg, L., On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math. 14, 415-426, 1961.

[10] John, F., Quasi-isometric mappings. Seminari 1962/63 Anal. Alg. Geom. e Topol., Rome, 462-473, 1965.

[11] Strömberg, J. O., Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy spaces. Indiana Univ. Math. J. 28, 511-544, 1979.

[12] Bogachev, V. I., Measure theory. Berlin, 2007.

[13] Krein, S. G., Petunin, Yu. I., Semenov, E. M., Interpolation of linear operators. Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, Providence, 1982.

[14] Bennett, C., Sharpley, R., Interpolation of operators. Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Boston, 1988.

[15] Cwikel, W., Sagher Y., Shvartsman, P., A new look at the John-Nirenberg and John-Strömberg theorems for BMO. J. Funct. Anal. 263, 129-166, 2012.

[16] Poelhuis, J., Torchinsky, A., Medians, continuity and vanishing oscillation. Studia Math. 213, 227-242, 2012.

[17] Fujii, N., A condition for a two-weight norm inequality for singular operators. Studia Math, 98, 175-190, 1991.

[18] Lerner, A. K., On weighted estimates of non-increasing rearrangements. East J. Approx. 4, 277-290, 1998.

[19] Lerner, A. K., Weighted norm inequalities fort he local sharp maximal function. J. Fourier Anal. Appl. 10 , 465-474, 2004.

[20] Chong, K. M., Rice, N. M., Equimeasurable rearrangements of functions. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, (28), Kingston, Ont., 1971.

[21] Koljada, V. I., The imbedding of certain classes of functions of several variables, Sibirsk. Mat. Z. 14. 766-790, 1973.

[22] Bennett, C., Sharpley, R.,Weak type inequalities for HP and BMO. Proc. Sympos. Pure. Math., 201-229, 1979.

[23] Coifman, R. R., Fefferman, C., Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. Studia Math. 51, 241-250, 1974.

[24] Fefferman, C., Muckenhoupt, B., Two nonequivalent conditions for weight functions. Proc. Amer. Math. Soc. 45, 99-104, 1974.

[25] Muckenhoupt, B., Wheeden, R. L., Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform. Studia Math. 54, 221-237, 1975.

[26] Jawerth, B., Torchinsky, A., Local sharp maximal functions. J. Approx. Theory 43, 231-270, 1985.

[27] Bennett, C., DeVore, R.A., Sharpley, R., Weak-L^∞ and BMO. Ann. of Math. 113 (2), 601-611, 1981.

[28] Bagby, R.J., Kurtz, D.S., Covering lemmas and the sharp function. Proc. Amer. Math. Soc. 93 (2), 291-296, 1985.

[29] Stein, E. M., Singular integrals, harmonic functions, and differentiability properties of functions of several variables. (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, III., 1966) Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 316-335, 1967.

[30] Bagby, R.J., Kurtz, D.S., A rearranged good λ inequality. Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1), 71-81, 1986.

[31] Cordoba, A., Fefferman, C., A weighted norm inequality for singular integrals. Studia Math. 57, 97-101, 1976.

[32] Coifman, R. R., Rochberg, R., Another characterization of BMO. Proc. Amer. Math. Soc. 79, 249-254, 1980.