KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İndirgenmiş Riemann Metriği ve Riemann Manifoldları

Olgun Durmaz

HAZİRAN 2015

Matematik Anabilim Dalında Olgun Durmaz tarafından hazırlanan İNDİRGENMİŞ RİEMANN METRİĞİ VE RİEMANN MANİFOLDLARI adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun oldugunu onaylarım.

Prof.Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof.Dr. Halit GÜNDOĞAN
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan	:Prof.Dr. H.Hüseyin UĞURLU
Üye (Danışman)	:Prof Dr. Halit GÜNDOĞAN
Üye	:Yrd.Doç.Dr. Osman KEÇİLİOGLU

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof.Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

İNDİRGENMİŞ RİEMANN METRİĞİ VE RİEMANN MANİFOLDU

Durmaz, Olgun
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Haziran 2015, 101 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.
Birinci Bölümde diğer bölümler için gerekli olan temel kavramlara ayrılmıştır. İkinci Bölümde Riemann manifoldları tanıtılmıştır. Bir Riemann manifoldu üzerindeki eğrinin yay uzunluğu, bir tanjant vektörün uzunluğu ve iki tanjant vektörün iç çarpımı gibi bazı özellikler incelenmiş ve sonra örnekler verilmiştir. Son olarak, Üçüncü Bölümde Öklid uzayında gömülü yüzey üzerindeki Riemann yapı incelenmiş ve bu yüzey üzerinde Riemann metriğinin katsayıları tanıtılmıştır. Sonra da Pseudo-Riemann metriği, Riemann manifoldunun izometrileri ve Hacim elementi çalışılmıştır.

Anahtar Kelime: Riemann Metriği, Riemann Manifoldu, Pseudo-Riemann Metriği, Hacim Elementi

ABSTRACT

INDUCED RIEMANNIAN METRIC AND RIEMANNIAN MANIFOLDS

Durmaz, Olgun
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Depertment of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
June 2015, 101 pages

This study consists of three chapters.
The first chapter is devoted to some fundamental concepts which will be used in the following chapter.
In the second chapter, The Riemannian manifold is introduced and some properties, such as the length of the curvature, length of the tangent vector and scalar product of two tangent vector on the manifold are investigated and then some examples are given.
Finally, In the third chapter, Riemannian structure on the surface embedded in Euclidean space are researched and Riemannian metric coefficients on these surfaces are defined. Then Pseudo-Riemannian metric, Isometries of Riemannian manifold and Volume element in the Riemannian manifold are studied.

Key Words: Riemannian Metric, Riemannian Manifold, Pseudo-Riemannian Metric, Volume Element

TEŞEKKÜRLER

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi, ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN' a, çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma, büyük fedakarlıklarla bana destek olan arkadaşım Sevgi ACARSOY' a ve desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam
$\int$	İntegral
$\mathbb{R}^n$	n-Boyutlu Standart Reel Vektör Uzayı
$\varnothing$	Boş Küme
τ	Topoloji
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
S^1	Birim Küre
G	Riemann Metriği
$\chi(M)$	M Manifoldu Üzerindeki Vektör Alanlarının Uzayı
V^*	V Reel Vektör Uzayın Duali
I	İndis Kümesi
$\mathcal{L}$	Lineer Fonksiyonlar

1. GİRİŞ

Differensiyel Geometri 19. yüzyılın ortalarına kadar matematik anlamında açık bakış açısına göre, başka bir değişle Öklid uzayında eğriler ve yüzeylerin differensiyeli olarak çalışılmıştır. G. F. G. Riemann (1826-1866) Öklid geometrisini genelleştirerek Riemann geometrisini geliştirdi. Öklid'in postülatlarından biri olan "Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilebilir"'in yerine "Bir doğruya dışındaki bir noktadan hiç bir paralel çizilemez"'i aldı ve Küresel ya da Riemann Geometrisini kurdu. A. Eisntein (1879-1955) genel görelilik (izafiyet) kuramını Riemann Geometrisini kullanarak açıklamıştır.
Riemann manifoldundaki çalışmalar Riemann Geometrisini oluşturur. Bu çalışmada İndirgenmiş Riemann metriğini ve Riemann manifoldu tanıtılmaya çalışılmıştır.

1.1. Kaynak Özeti

Temel kavramlardaki Tensörler tanımı için Hacısalihoğlu ve Ekmekçi'nin "Tensör Geometri" adlı kitabından yararlanılmıştır [1]. Manifold tanımı için Hacısalihoğlu'nun "Diferensiyel Geometri 1. Cilt" ve yine Hacısalioğlu'nun "Diferensiyel Geometri 2. Cilt" adlı kitaplarından faydalanılmıştır [2, 3]. Tensör Demeti ve Tensör Alan tanımları için Gudmundsson 'un "An Introduction to Riemannian Geometry" ve Holopainen ve Sahlsten'in "Riemannian Geometry" adlı kitaplar incelenmiştir [4, 5]. Riemann Metriği ve Manifoldu'nun tanımı için Holopainen ve Sahlsten'in "Riemannian Geometry" ve Khudaverdian'nın "Riemannian Geometry" adlı kitaplarından yararlanılmış-tır [5, 6]. Tanjant vektörlerin uzunluğu, aralarındaki açı ve Eğrinin uzunluğu tanımları Holopainen ve Sahlsten'in "Riemannian Geometry" ve Khudaverdian'nın "Riemannian Geometry" adlı kitaplarından faydalanılmıştır [5, 6]. Öklid uzayında gömülü yüzey üzerindeki Riemann yapı, Tanjant vektörlerin iç ve dış koordinatları, 1. Kuadra-tik Form ve Pseudo-Riemann metriği tanımları için Khudaverdian'nın "Riemannian Geometry" adlı kitabından yararlanılmıştır [6]. Riemann Manifoldunun İzometrileri tanımı için Khudaverdian'nın "Riemannian Geometry" ve Hacısalihoğlu'nun "Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş" adlı kitapları incelenmiştir [6, 7] . Riemann manifoldu içindeki hacim elementi için Khudaverdian'nın "Riemannian Geometry" [6] ve Lee'nin "Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature" [8] adlı kitaplardan yararlanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışması ile Riemann metriği ve manifoldu detaylı bir şekilde incelenip örnekler verilerek somut hale getirilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tensörler

2.1.1. Dual Vektör Uzayı

V, n-boyutlu reel vektör uzayı olsun.

$$F : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall \alpha, \beta \;\epsilon\; V$ ve $\forall a, b, \;\epsilon\; \mathbb{R}$ için

$$F(a\alpha + b\beta) = aF(\alpha) + bF(\beta)$$

ise F' ye lineer fonksiyon denir ve Lineer fonksiyon cümlesi;

$$Hom(V, \mathbb{R}) = \{F \mid F : V \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir. $Hom(V, \mathbb{R})$ cümlesi üzerinde;

$$\begin{aligned} + : Hom(V, \mathbb{R}) \times Hom(V, \mathbb{R}) &\longrightarrow Hom(V, \mathbb{R}) \\ (F, G) &\longrightarrow F + G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times Hom(V, \mathbb{R}) &\longrightarrow Hom(V, \mathbb{R}) \\ (\lambda, F) &\longrightarrow \lambda \cdot F \end{aligned}$$

işlemlerini tanımladığımız da ($Hom(V, \mathbb{R}), +, \cdot)$ bir vektör uzayıdır. Bu $Hom(V, \mathbb{R})$ vektör uzayına V vektör uzayının dual uzayı denir ve

$$V^* = Hom(V, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

V vektör uzayının bir bazı $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ olsun. V^* da $\alpha_j^*(\alpha_i) = \delta_j^i$ olacak şekilde $\{\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*\}$ bazı vardır.

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ cismi üzerinde p-tane vektör uzayı $V_1, ..., V_p$ olsun.

$$f : V_1 \times ... \times V_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

için $u_i, v_j \in V_i$; $\lambda \in \mathbb{R}$ için

1)$f(u_1, u_2, ..., u_i + v_i, ..., u_p) = f(u_1, ..., u_i, ..., u_p) + f(u_1, ..., v_i, ..., u_p)$

2)$f(u_1, u_2, ..., \lambda u_i, ..., u_p) = \lambda f(u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_p)$

özellikleri sağlıyorsa f fonksiyonuna $p-$lineer fonksiyon denir. Bu cümleyi;

$$\mathcal{L}(V_1, ..., V_p; \mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : V_1 \times ... \times V_p \overset{p-\text{lineer}}{\longrightarrow} \mathbb{R} \right\}$$

ile gösterelim.

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(V_1, ..., V_p; \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(V_1, ..., V_p; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(V_1, ..., V_p; \mathbb{R}) \\ (f, g) &\longrightarrow f + g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(V_1, ..., V_p; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(V_1, ..., V_p; \mathbb{R}) \\ (\lambda, f) &\longrightarrow \lambda f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanıyorsa; $(\mathcal{L}(V_1, ..., V_p; \mathbb{R}), +, \cdot)$ üçlüsü bir vektör uzaydır.

Tanım 2.2 (Çok lineer fonksiyonların çarpımı) $V_1, ..., V_p$ ve $W_1, ..., W_q$ reel vektör uzayları olsun.

$$g : W_1 \times ... \times W_q \overset{q-\text{lineer}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$
$$f : V_1 \times ... \times V_p \overset{p-\text{lineer}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının çarpımını $f \otimes g$ ile gösterelim.

$\forall(V_1,...,V_p,W_1,...,W_q)\ \epsilon\ V_1\times...\times V_p\times W_1\times...\times W_q$ elemanına bir $f(V_1,...,V_p)$ $g(W_1,...,W_q)\ \epsilon\ \mathbb{R}$ elemanına karşılık tutar, bu fonksiyon da;

$$f\otimes g : V_1\times...\times V_p\times W_1\times...\times W_q \stackrel{\text{(p+q)-lineer}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

$$(f\otimes g)_{(V_1,...,V_p,W_1,...,W_q)} = f(V_1,...,V_p)\ g(W_1,...,W_q)$$

şeklinde gösterilir.

2.1.2. Vektör Uzaylarda Tensör Çarpımı

$V_1,...,V_p$ ve W birer vektör uzayları olsun. Bu durumda;

$$\otimes : V_1\times...\times V_p \stackrel{\text{p-lineer}}{\longrightarrow} W$$

dönüşümü aşağıdaki iki aksiyomu sağlar ise $(W,\otimes)$ ikilisine $V_1,...,V_p$'nin tensör çarpımı adı verilir.

$$\otimes_1 : \otimes(V_1,...,V_p) = W \qquad \text{(Germe)}$$

$$\begin{tikzcd} \otimes_2 : V_1\times...\times V_p \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p-\text{lineer}"'] & G \arrow[d, "\lambda-\text{lineer}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

diagramı daima değişmelidir. Yani; $\otimes = \lambda\circ f$ olacak şekilde bir $\lambda : G \longrightarrow W$ lineer dönüşümü vardır.

2.1.3. Kovaryant Tensörler

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $r-$tane vektör uzayı $V_1,...,V_r$ ve r-lineer dönüşümlerin cümlesi;

$$\mathcal{L}(V_1,...,V_r;\mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : V_1 \times ... \times V_r \overset{r-\text{lineer}}{\longrightarrow} \mathbb{R} \right\}$$

bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına $V_1^*,...,V_r^*$ dual vektör uzayının tensör çarpımı denir ve

$$\mathcal{L}(V_1,...,V_r;\mathbb{R}) = V_1^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

şeklinde gösterilir.

$V_1^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına r-yinci mertebeden kovaryant tensör (kovaryant r-tensör) denir.

Özel olarak;

$$V_1 = ... = V_r = V$$

$$V_1 \times ... \times V_r = V^r$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V_1,...,V_r;\mathbb{R}) &= \mathcal{L}^r(V,\mathbb{R}) \\ &= \otimes_r V^* = T_r(V) \end{aligned}$$

ifade edilir. Özel olarak;

$$T_0(V) = \otimes_0 V^* = \mathbb{R}$$

$$T_1(V) = \otimes_1 V^* = V^*$$

dır.

♦ $T_r(V) = \otimes_r V^*$ uzayına V vektör uzayı üzerinde bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına r-yinci mertebeden bir kovaryant tensör denir.

♦ Bir V vektör uzayının kovektör uzayı olan V^* uzayının elemanları kovektörler, 1. dereceden birer kovaryant tensörlerdir. Bunun için V^*' ın elemanlarına kovaryant vektör adı verilir.

Örnek 2.1 V reel vektör uzayı üzerinde tanımlanan $\langle , \rangle$ iç çarpım fonksiyonu 2. dereceden kovaryant tensördür.

Teorem 2.1 V bir n- boyutlu reel vektör uzayı ve V' nin bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olsun. $\{e_i\}$ nin dual bazı da $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ yani $e_j^*(e_i) = \delta_j^i$ olsun.

$$\left\{ e^{*i_1} \otimes ... \otimes e^{*i_k},\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2...k \\ i_1 & i_2...i_k \end{smallmatrix}\right),\ 1 \leq k \leq n \right\}$$

biçimindeki k-yıncı mertebeden kovaryant tensör cümlesi $T_k(V)$ için bir bazdır ve

$$boyT_k(V) = n^k$$

dır.

İspat: Germe: $T \,\epsilon\, T_k(V)$ ve $w_1, ..., w_k \,\epsilon\, V$ olsun.
$w_i = a^{j_i} e_{j_i},\ 1 \leq j_i \leq n,\ 1 \leq i \leq k$

$$\begin{aligned} T(w_1, ..., w_k) &= T\left(a^{j_1} e_{j_1}, ..., a^{j_k} e_{j_k}\right) \\ &= a^{j_1}.a^{j_2}...a^{j_k} T(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Diğer yandan;

$$\begin{aligned} \left(e^{*i_1} \otimes ... \otimes e^{*i_k}\right)_{(w_1, ...w_k)} &= a^{j_1} a^{j_2} ... a^{j_k} e^{*i_1}(e_{j_1})\, e^{*i_2}(e_{j_2}) ... e^{*i_k}(e_{j_k}) \\ &= a^{j_1} a^{j_2} ... a^{j_k} \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} ... \delta_{i_k j_k} \\ &= a^{j_1} a^{j_2} ... a^{j_k} \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.2) yi (2.1) de yerine yazarsak;

$$T(w_1, ..., w_k) = T(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) \left(e^{*i_1} \otimes ... \otimes e^{*i_k}\right)_{(w_1, ..., w_k)}$$

olur.

$\forall\,(w_1,...,w_k)$ için bu sağlandığından;

$$T = T\left(e_{j_1},...,e_{j_k}\right)\cdot e^{*^{i_1}}\otimes ...\otimes e^{*^{i_k}}$$

dır.

Lineer Bağımsızlık:

$$\begin{aligned}
a_{j_1}...a_{j_k}e^{*^{i_1}}\otimes ...\otimes e^{*^{i_k}} &= 0\\
\left(a_{j_1}...a_{j_k}e^{*^{i_1}}\otimes ...\otimes e^{*^{i_k}}\right)_{\left(e_{j_1},...,e_{j_k}\right)} &= 0\\
a_{j_1}...a_{j_k}e^{*^{i_1}}\left(e_{j_1}\right)e^{*^{i_2}}\left(e_{j_2}\right)...e^{*^{i_k}}\left(e_{j_k}\right) &= 0\\
a_{j_1}...a_{j_k}\delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2}...\delta_{i_k j_k} &= 0\\
a_{j_1}...a_{j_k} &= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow e^{*^{i_1}}\otimes ...\otimes e^{*^{i_k}}$, $T_k(V)$' nin bir bazıdır.

2.1.4. Kovaryant Tensörün Bileşenleri

Bir $T\,\epsilon\,T_r(V)=\otimes_r V^*$ kovaryant r-tensörünün bileşenleri için V' nin bir $\{e_1,...e_n\}$ bazını ele alalım. Bu durumda $T_r(V)$' nin bir bazı;

$$\left\{e^{*^{j_1}}\otimes ...\otimes e^{*^{j_r}}\right\}\ 1\leq j_1,...,j_r\leq n$$

$T\ \epsilon\ T_r(V)$ kovaryant tensörü için;

$$T: V\times V\times ...\times V\overset{r-\text{lineer}}{\longrightarrow}\mathbb{R}$$

olup $u_1,...,u_r\ \epsilon\ V$ için

$$\begin{aligned}
T\left(u_1,...,u_r\right) &= T\left(a^{i_1}e_{i_1},...,a^{i_r}e_{i_r}\right)\\
&= a^{i_1}...a^{i_r}T\left(e_{i_1},...,e_{i_r}\right) \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

dir. Burada özel olarak;

$$T = e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_r}$$

alırsak;

$$\begin{aligned}
\left(e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_r}\right)_{(u_1,...,u_r)} &= a^{i_1}...a^{i_r}\left(e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_r}\right)_{\left(e_{i_1},...,e_{i_r}\right)} \\
&= a^{i_1}...a^{i_r}\delta_{i_1j_1}\delta_{i_2j_2}...\delta_{i_rj_r} \\
&= a^{i_1}...a^{i_r}
\end{aligned}$$

dir. $j_1, ..., j_r$ yerine $i_1, ..., i_r$ alıp bunu (2.3) de yerine yazarsak;

$$T(u_1, ..., u_r) = T(e_{i_1}, ..., e_{i_r})\left(e^{*i_1} \otimes ... \otimes e^{*i_r}\right)_{(u_1,...u_r)}$$

dır.

Bu ifade $\forall (u_1, ..., u_r)$ için doğru olduğundan;

$$T = T(e_{i_1}, ..., e_{i_r})\, e^{*i_1} \otimes ... \otimes e^{*i_r}$$

dir.

$$T(e_{i_1}, ..., e_{i_r}) = T_{i_1...i_r}$$

alırsak;

$$T = T_{i_1...i_r} e^{*i_1} \otimes ... \otimes e^{*i_r}$$

olur.

2.1.5. Kontravaryant Tensörler

V vektör uzayı ve V nin duali V^* olmak üzere $(V^*)^* \cong V$ dir. Kovaryant tensörler için verilen ifadelerde V yerine V^* alırsak V^* s-lineer fonksiyonların vektör uzayı elde edilir. Bu uzaya kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzay;

$$\mathcal{L}^s(V^*) = \mathcal{L}\{V^*, ..., V^*; \mathbb{R}\} = V \otimes ... \otimes V = \otimes^s V$$

veya

$$T^s(V^*) = \otimes^s V$$

dir. Böylece;

$$T^0(V^*) = \mathbb{R}$$

$$T^1(V^*) = V$$

elde edilir.

♦ Bir V^* dual vektörü üzerinde tanımlanan $T^1(V^*) = V$ vektör uzayının elemanları birer adi anlamda vektörlerdir. Aslında bildiğimiz vektörler 1. dereceden birer kontravaryant tensördür. Bu nedenle V' nin elemanlarına kontravaryant vektörler de denir.

Teorem 2.2 V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve bunun duali V^* olsun. V ve V^*' ın birbirinin duali olan bazlar sırası ile $\{e_{j_1}, ..., e_{j_n}\}$ ve $\left\{e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_n}\right\}$ ise;

$$\left\{e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_s}; \begin{pmatrix} 1 \; 2 \; ...s \\ j_1 \; j_2 \; ...j_s \end{pmatrix}, 1 \leq s \leq n\right\}$$

s-yinci mertebeden kontravaryant tensörler için bir bazdır.

2.1.6. Kontravaryant Tensörlerin Bileşenleri

Bir $L \in T^s(V^*) = \otimes^s V$ kontravaryant s-tensörü için,

$$L : V^* \times ... \times V^* \overset{s-\text{lineer}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$
$$v_i^* \epsilon V^*;\ 1 \leq i \leq s \text{ için } v_i^* = b_{j_i} e^{*j_i}$$

yazılabilir ve dolayısıyla;

$$\begin{aligned} L(v_1^*, ..., v_s^*) &= L(b_{j_1} e^{*j_1}, ..., b_{j_s} e^{*j_s}) \\ &= b_{j_1} ... b_{j_s} L(e^{*j_1}, ..., e^{*j_s}) \end{aligned}$$

olur. L yerine özel olarak;

$$L = e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_s}$$

alırsak;

$$\begin{aligned} e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_s}(v_1^*, ..., v_s^*) &= b_{j_1} ... b_{j_s} \delta_{j_1}^{i_1} ... \delta_{j_s}^{i_s} \\ &= b_{j_1} ... b_{j_s} \end{aligned}$$

dir.

$j_1, ..., j_s$ yerine $i_1, ..., i_s$ alırsak;

$$L(v_1^*, ..., v_s^*) = L(e^{*i_1}, ..., e^{*i_s}) e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}(v_1^*, ..., v_s^*)$$

olur.

Her $v_1^*, ..., v_s^*$ için doğru olduğundan;

$$L = L(e^{*i_1}, ..., e^{*i_s}) e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}$$

dir.

$$L(e^{*i_1}, ..., e^{*i_s}) = L^{i_1...i_s}$$

alırsak;

$$L = L^{i_1...i_s} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}$$

elde edilir.

2.1.7. Karışık Tensörler

$\mathbb{R}$ reel sayılar üzerinde n-boyutlu vektör uzayı ve bunun duali, sırasıyla V ve V^* olsun.

$$f : V^r \times V^{*^s} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $r+s$ -lineer olsun. $r+s$- lineer dönüşüm cümlesi;

$$\mathcal{L}(V^r, V^{*^s}; \mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : V^r \times V^{*^s} \overset{r+s-\text{lineer}}{\longrightarrow} \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde gösterelim. Bu cümle üzerinde tanımlanan toplama ve skalar ile çarpma işlemleri ile birlikte vektör uzaydır. Bu vektör uzayı V^* ve V vektör uzayı üzerinde bir tensör uzayı, daha doğrusu r-dereceden kovaryant s-dereceden kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın elemanları (r, s) tipinde karışık tensörler denir ve bu

$$T_r^s(V) = T_r(V) \otimes T^s(V^*)$$

şeklindedir.

♦ Bu uzayın elemanlara (r, s) tipinden tensörler denildiği gibi $\binom{r}{s}$ tipinden de denir.

$$T_0^0(V) = \mathbb{R}$$

dir.

Örnek 2.2 Bir V vektörünün duali olan V^*' ın elemanları (1,0) tipindedir. İç çarpım fonksiyonu (2,0) tipindedir. Determinant fonksiyonu (n,0) tipindedir. V vektör uzayının elemanları (0,1) tipinden tensörlerdir. (0,0) tipinden tensörler $\mathbb{R}$' nin elemanları olarak kabul edilir. Bazı karışık tensörleri belli bir sıra takip etmeden karşımıza çıkar;

$$V \otimes V \otimes V^* = V_2^1$$
$$V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V^* = V_{2_1}^{1^2}$$

dir.Bu uzayın elemanları $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tipindedir.

2.1.8. Karışık Tensörlerin Bileşenleri

V ve V^* birbirinin duali olan iki reel vektör uzayı olsun. V ve V*' ın bazları, sırasıyla;

$\{e_1, ..., e_n\}$ ve $\{e^{*_1}, ..., e^{*_n}\}$; $e^{*_j}(e_i) = \delta_j^i$ olsun. Bu durumda;

$$\left\{ \begin{array}{c} e^{*^{i_1}} \otimes ... e^{*^{i_s}} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_r} \\ \begin{pmatrix} 1\ 2\ ...r \\ i_1\ i_2\ ...i_r \end{pmatrix} ve \begin{pmatrix} 1\ 2\ ...s \\ j_1\ j_2\ ...j_s \end{pmatrix} \end{array} , \begin{array}{c} 1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq n \end{array} \right\}$$

biçimindeki $\binom{r}{s}$ tensörü $T_r^s(V)$ için bir bazıdır. Bu teoreme göre bir $T \in T_r^s(V)$ karşılık tensör bileşenleri için;

$$T : V \times ... \times V \times V^* \times ... \times V^* \xrightarrow{r+s-\text{lineer}} \mathbb{R}$$
$$u_i \in V,\ 1 \leq i \leq r;\ u_j^* \in V^*,\ 1 \leq j \leq s$$

için

$$u_i = x^k e_k \text{ ve } u_j^* = y_l e^{*^l}$$

alalım.

$$\begin{aligned} T(u_1, ..., u_r, u_1^*, ..., u_s^*) &= T\left(x^{i_1}e_{i_1}, ..., x^{i_r}e_{i_r}, y_{j_1}e^{*^{j_1}}, ..., y_{j_s}e^{*^{j_s}}\right) \\ &= x^{i_1}...x^{i_r}.y_{j_1}...y_{j_s}T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e^{*^{j_1}}, ..., e^{*^{j_s}}\right) \quad (2.4) \end{aligned}$$

olur. Burada T yerine özel olarak;

$$T = e^{*^{l_1}} \otimes ... \otimes e^{*^{l_r}} \otimes e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_s}$$

alırsak $e^{*^{l_p}}(e_{i_p}) = \delta_{l_p}^{i_p}$ ve $e_{k_q}(e^{*^{j_q}}) = \delta_{j_q}^{k_q}$ olacağından;

$$\begin{aligned} e^{*^{l_1}} \otimes ... \otimes e^{*^{l_r}} \otimes e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_s}(u_1, ..., u_r, u_1^*, ..., u_s^*) &= x^{i_1}...x^{i_r}.y_{j_1}...y_{j_s}\delta_{l_1}^{i_1}...\delta_{l_r}^{i_r}.\delta_{j_1}^{k_1}...\delta_{j_s}^{k_s} \\ &= x^{i_1}...x^{i_r}.y_{j_1}...y_{j_s} \quad (2.5) \end{aligned}$$

$l_1, ..., l_p, k_1, ...k_s$ yerine $i_1, ..., i_s, j_1, ..., j_r$ alırsak ;

$$T(u_1, ..., u_r, u_1^*, ..., u_s^*) = T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e^{*^{j_1}}, ..., e^{*^{j_s}}\right) \times$$
$$e^{*^{j_1}} \otimes ... \otimes e^{*^{j_r}} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}(u_1, ..., u_r, u_1^*, ..., u_s^*)$$

ve $\forall u_1, ..., u_r, u_1^*, ..., u_s^*$ için doğru olduğundan;

$$\Rightarrow T = T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e^{*^{j_1}}, ..., e^{*^{j_s}}\right) e^{*^{j_1}} \otimes ... \otimes e^{*^{j_r}} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}$$

olur.

$$T\left(e_{i_1}, ..., e_{i_r}, e^{*^{j_1}}, ..., e^{*^{j_s}}\right) = T_{i_1...i_r}^{j_1...j_s}$$

dersek;

$$T = T^{j_1...j_s}_{i_1...i_r} e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_r} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}$$

olur.

2.2. Topolojik Manifoldlar

Tanım 2.3 X bir cümle ve X' in alt cümlelerin bir ailesi τ olsun. τ ailesi aşağıdaki önermeleri sağlar ise X üzerinde bir topoloji denir.

1) $X, \varnothing \epsilon \tau$
2)$\forall A_1, A_2 \epsilon \tau$ için $A_1 \cap A_2 \epsilon \tau$
3)$A_i \epsilon \tau,\ i \epsilon I,\ \bigcup\limits_{i \epsilon I} A_i \epsilon \tau$
dur. (I bir indis kümesidir)

Örnek 2.3 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid x_i \epsilon \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$
afin uzayında $\forall x, y \epsilon \mathbb{R}^n$ için;

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan metrik bir topolojidir.

Tanım 2.4 Bir X cümlesi üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir.

Tanım 2.5 (X, τ) bir topolojik uzay $\varnothing \neq A \subset X$ olsun.

$$\tau_A = \{A \cap U \mid U \epsilon \tau\}$$

ailesi A üzerinde bir topolojidir. τ_A topolojisine A' nin (X, τ) uzayından indirgediği relatif (alt cümle) topolojisi denir.

Tanım 2.6 (Homeomorfizm) X ve Y topolojik uzaylar olsun. Bir

$$f : X \longrightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli, f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise f dönüşümüne homeomorfizm dönüşümü denir.

Tanım 2.7 (Hausdorff Uzay) X bir topolojik uzay; X in p ve q gibi farklı noktalar için X de, sırasıyla, p ve q noktalarını içine alan A_p ve A_q açık alt cümleleri $A_p \cap A_q = \varnothing$ olacak biçimde bulunuyorsa X topolojik uzayına Hausdorff uzay denir.

Tanım 2.8 M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M' ye n-boyutlu topolojik manifold denir.

1) M bir Hausdorff uzaydır.
2) M nin her açık alt cümlesi $\mathbb{R}^n$'ye veya $\mathbb{R}^n$' nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.
3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.9 (Diffeomorfizm) $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında bir açık cümle U olmak üzere;

$$\Psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

fonksiyonu verilsin. Ψ' nin differensiyellenebilmesi şöyle tanımlanır:

Tanım 2.10 $\mathbb{R}^n$ bir açık alt cümle U olmak üzere;

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu k-yıncı mertebeden bütün kismi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna C^k sınıfından differensiyellenebilir denir. Özel olarak, f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir.

$$C^k(U,\mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ve f fonksiyonu } C^k - \text{sınıfından} \right\}$$

Örnek 2.4

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longrightarrow f\,(x_1, x_2) = x_1 x_2 \end{aligned}$$

olsun.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2,\; \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$$

olup kısmi türevler ve süreklidir. O halde $f \,\epsilon\, C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dir.

Ayrıca;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0,\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 1,\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1,\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0$$

olup $f \,\epsilon\, C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dir.

Tanım 2.11 $\mathbb{R}^{n}$' deki bir açık alt cümle U olmak üzere;

$$\begin{aligned} \Psi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ u &\longrightarrow \Psi(u) = (f_1(u), ..., f_m(u)) \end{aligned}$$

fonksiyonu verildiğinde bütün f_i fonksiyonları için

$$f_i \,\epsilon\, C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}),\; 1 \leq i \leq m$$

veya

$$
\begin{array}{ccc}
U \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R}^m \\
& {\scriptstyle f_i} \searrow & \downarrow {\scriptstyle x_i} \\
& & \mathbb{R}
\end{array}
$$

$$f_i = x_i \circ \Psi \;\epsilon\; C^k(U, \mathbb{R})$$

ise

$$\Psi \;\epsilon\; C^k(U, \mathbb{R}^m)$$

dir denir.

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) = \left\{ \Psi \mid \Psi \;\epsilon\; C^k(U, \mathbb{R}^n),\ \text{k} \;\epsilon\; \mathbb{N} \right\}$$

Örnek 2.5

$$
\begin{aligned}
&\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
&\qquad (u, v) \longrightarrow \Psi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv, u^3)
\end{aligned}
$$

olsun. $\Psi = (f_1, f_2, f_3),\ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f_1(u, v) &= u^2 - v^2 \\
f_2(u, v) &= 2uv \\
f_3(u, v) &= u^3
\end{aligned}
$$

dir. f_1, f_2, f_3' ün her mertebeden kismi türevleri var ve sürekli olduğundan $f_1, f_2, f_3 \;\epsilon\; C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ olup $\Psi \;\epsilon\; C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dür.

Tanım 2.12 U ve V, sırasıyla, $\mathbb{R}^m$ *ve* $\mathbb{R}^n$ de iki açık alt cümle olsun.

$$
\begin{aligned}
&\Psi : U \longrightarrow V \\
&\qquad x \longrightarrow \Psi(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))
\end{aligned}
$$

fonksiyonu için $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu C^k-sınıfından ise $\Psi \, \epsilon \, C^k(U,V)$ dir denir.

$$C^\infty(U,V) = \left\{\Psi \mid \Psi \, \epsilon \, C^k(U,V), \ \mathrm{k} \, \epsilon \, \mathbb{N}\right\}$$

f_i fonksiyonlarına Ψ' nin Öklid koordinat fonksiyonları denir.

Tanım 2.13 $\mathbb{R}^n$' nin iki farklı açık alt cümlesi U ve V olsun. Bir $\Psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler doğru ise Ψ' ye C^k-sınıfından bir diffeomorfizm denir ve U ve V' ye k. dereceden diffeomorfiktirler.

i) $\Psi \, \epsilon \, C^k(U,V)$

ii) $\Psi^{-1} : V \longrightarrow U$ var ve $\Psi^{-1} \, \epsilon \, C^k(V,U)$

dur.

Örnek 2.6 $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Psi(x_1, x_2) = (x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} - x_2)$$

olsun. $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

dir.

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} + x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2} - x_2$$

olmak üzere $\Psi = (f_1, f_2)$ dir. Ψ, 1:1 ve örten olup

$$\Psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

olduğundan

$$\Psi^{-1}(x_1 e^{x_2} + x_2, x_1 e^{x_2} + x_2) = (x_1, x_2)$$

olur.

$$x_1 e^{x_2} + x_2 = y_1 \tag{2.6}$$

$$x_1 e^{x_2} + x_2 = y_2 \tag{2.7}$$

olup ikinci denklemi -1 ile çarpıp toplarsak;

$$x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi birinci denklemde yerine yazıp çözersek;

$$x_1 = e^{\frac{y_2 - y_1}{2}} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}$$

olur.

$$\Rightarrow \Psi^{-1}(y_1, y_2) = \left(e^{\frac{y_2 - y_1}{2}} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{y_1 - y_2}{2} \right)$$

dir. Burada $\Psi,\ \Psi^{-1} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
dir.

Tanım 2.14 (Koordinat Komşuluğu (Harita)):
M, n-boyutlu topolojik manifold ve $U \in \mathbb{R}^n$' in bir açık alt cümlesi olsun. Bu durumda U bir Ψ homeomorfizmi ile M' nin bir W alt cümlesine eşlenebilir.

$$\Psi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow W \subset M$$

(Ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir.
$u \in U$ için $\Psi(u) \in M$ dir ve

$$\Psi(u) = (x_1(u), ..., x_n(u)), \qquad x_i(u) \in \mathbb{R}, \qquad 1 \leq i \leq n$$

dir. Burada $x_i(u)$ reel sayısına $\Psi(u) \in M$ noktasının i-yinci koordinatı ve

$$u_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu da U' nun i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Psi} & W \subset M \\ {}_{u_i} \searrow & & \swarrow_{x_i} \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

$x_i = u_i \circ \Psi^{-1} : W \longrightarrow \mathbb{R}$
fonksiyonuna W' nun i-yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

Örnek 2.7 $S' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,0) = 1\}$
açık çemberini ele alalım. Bu çember için

$$U = \{u \mid 0 < u < 2\pi,\ u \in \mathbb{R}\}$$

dir.

$$\Psi : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow W \subset S' \subset \mathbb{R}^2$$
$$u \longrightarrow \Psi(u) = (\cos u, \sin u)$$

yani $x_1(u) = \cos u,\ x_2(u) = \sin u$ dur.
Ayrıca x_1 *ve* x_2 sürekli ve tersleri de sürekli olduğundan Ψ bir homeomorfizmdir.
♦ İlk tanımda verdiğimiz Ψ homeomerfizmi birebir, örten ve sürekli (hatta tersi de sürekli) olduğundan W' nun p ve q gibi iki noktası için $x_i(p) = x_i(q)$; $1 \leq i \leq n$ ise $p = q$ dur. Yani, $p \in W$ noktası $(x_1(p), ..., x_n(p))$ reel sayısı n-lisi ile belirlenir. Bu nedenle $x_1(p), ..., x_n(p)$ reel sayılarına $p \in W$ noktasının (Ψ, W) koordinat koordinat komşuluğuna göre yerel koordinatları ve W üzerinde tanımlı olan $(x_1, ..., x_n)$ reel değerli fonksiyon n-lisine (Ψ, W) üzerinde lokal koordinat sistemi denir.
♦ İlk tanımdan M bir topolojik n-manifold olduğundan M 'yi, $\mathbb{R}^n$' deki açık alt cümlelere homeomorf olan W_α açık cümlelerin bir $\{W_\alpha\}$ ailesi ile örtebiliriz.

Tanım 2.15 M bir topolojik n-manifold ve M' nin bir açık alt örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere; $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\ \epsilon\ A}$ yazılır. $\mathbb{R}^n$' deki U_α' ya bir Ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle V_α olsun. Böylece ortaya çıkan (Ψ_α, V_α) haritalarının ailesine $\{(\Psi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha\ \epsilon\ A}$ Atlas denir.

Örnek 2.8 $\mathbb{R}^2$' de S', merkezi başlangıç noktası olan birim çember olsun.

$$W_1 = \{(x_1, x_2)\ \epsilon\ S' \mid x_2 > 0\}$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2)\ \epsilon\ S' \mid x_2 < 0\}$$
$$W_3 = \{(x_1, x_2)\ \epsilon\ S' \mid x_1 > 0\}$$
$$W_4 = \{(x_1, x_2)\ \epsilon\ S' \mid x_1 < 0\}$$

cümleleri S'' nin birer açık alt cümleleridir. Ayrıca;

$$S' = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4$$

dir. Diğer yandan;

$$\Psi_i^{-1} : W_i \longrightarrow I = \{x_1 \mid -1 \leq x_1 < 1\}\,,\ i = 1\ ve\ i = 2$$

$$\Psi_j^{-1} : W_j \longrightarrow J = \{x_2 \mid -1 \leq x_2 < 1\}\,,\ j = 3\ ve\ j = 4$$

fonksiyonları sırasıyla;

$$\Psi_1^{-1}(x_1, x_2) = x_1, \qquad \Psi_2^{-1}(x_1, x_2) = x_1, \qquad x_1 = \cos u$$

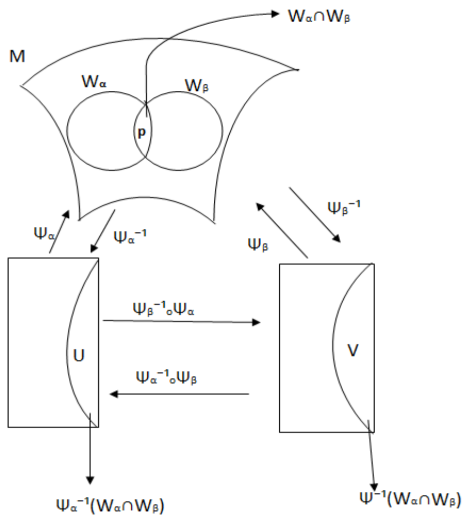
$$\Psi_3^{-1}(x_1, x_2) = x_2, \qquad \Psi_4^{-1}(x_1, x_2) = x_2, \qquad x_2 = \sin u$$

Ψ_i^{-1} ve Ψ_j^{-1} fonksiyonları birer homeomorfizmdir. O halde S' topolojik 1-manifoldunun bir atlası

$$\left\{(\Psi_i, W_i)_{i=1,2,3,4}\right\} = \{(\Psi_1, W_1), (\Psi_2, W_2), (\Psi_3, W_3), (\Psi_4, W_4)\}$$

dir.

Şimdi differensiyellenebilir yapılı bir manifold tanımlayalım. Bir topolojik n-manifold M ve bir $p \epsilon M$ noktasının açık komşulukları da W_α olsun. p noktasının lokal koordinatları $W_\alpha-$lar değiştikçe Ψ_α' da değişeceğinden W_α sayısı kadar Ψ_α vardır. Her bir $\alpha \epsilon A$ için (Ψ_α, W_α) üzerinde lokal sistemini $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ ile gösterelim. p noktasının iki açık komşuluğu $W_\alpha \; ve \; W_\beta$ ise $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$, $W_\alpha \cap W_\beta$'nın her bir noktasında $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ ve $(y_1^\beta, ..., y_n^\beta)$ gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır. Bu iki koordinat sistemi arasınaki bağıntı;



Şekil 2.1. Bağıntı

$$\Psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \qquad \Psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$$

alt cümleleri ikişer açık cümlenin birer homeomorfizmi altındaki görüntüleri olduklarından açık cümlelerdir. Ayrıca;

$$\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha : \Psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \longrightarrow \Psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

ile

$$\Psi_{\alpha}^{-1} \circ \Psi_{\beta} : \Psi_{\beta}^{-1} \left(W_{\alpha} \cap W_{\beta} \right) \longrightarrow \Psi_{\alpha}^{-1} \left(W_{\alpha} \cap W_{\beta} \right)$$

fonksiyonları da ikişer homeomorfizmin bileşimi olduğundan birer homeomorfizmdir.

$$\Psi_{\beta}^{-1} \circ \Psi_{\alpha} = \Phi_{\beta\alpha}$$

ve

$$\Psi_{\alpha}^{-1} \circ \Psi_{\beta} = \Phi_{\alpha\beta}$$

gösterimleri kullanılır.

♦ $\Phi_{\alpha\beta}$' nın diferensiyellenebilir olması için $(\Phi_{\alpha\beta})_i$ bileşenlerinin diferensiyellenebilir olması gerekir. Aynı şey $\Phi_{\beta\alpha}$ için de geçerlidir.

Tanım 2.16 (Diferensiyellenebilir Yapı) Bir topolojik n-manifold M ve M'nin bir

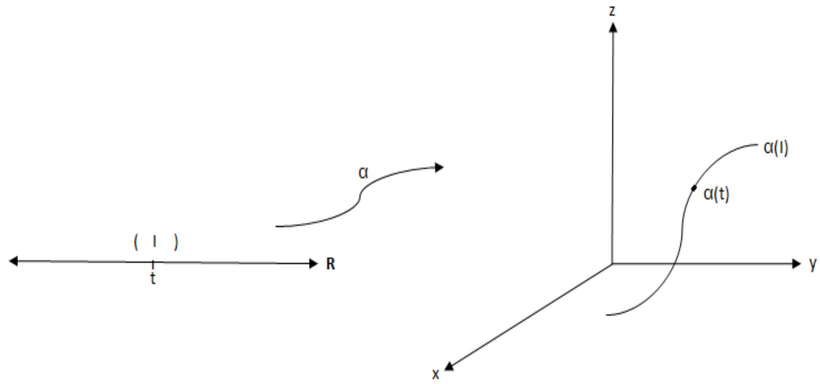
atlası $S = \{(\Psi_{\alpha}, W_{\alpha})\}_{\alpha\ \epsilon\ A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_{\alpha} \cap W_{\beta} \neq \varnothing$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta\ \epsilon\ A$' ya karşılık $\Phi_{\beta\alpha}\ ve\ \Phi_{\alpha\beta}$ fonksiyonları C^k-sınıfından diferensiyellenebilir iseler S' ye C$^k-$sınıfından diferensiyellenebilir denir. S atlası M üzerinde C^k-sınıfından olduğu zaman S' ye M üzerinde C^k- sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir.

Tanım 2.17 (Diferensiyellenebilir Manifold) M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerindeki C^k-sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabiliyor ise M' ye C^k-sınıfından bir diferensiyellenebilir manifold adı verilir.

Tanım 2.18 I, $\mathbb{R}$' nin açık bir aralığı olsun. Bir

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow \alpha(t)$$

diferensiyellenebilir ve regüler ise $\mathbb{R}^n$ de bir eğri adı verilir.



Şekil 2.2. Eğri

$i)$ α' nın diferensiyellenebilirliği:

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t))$$

$1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall \alpha_i$ diferensiyellenebilir ise α diferensiyellenebilirdir.

$ii)$ α' nın regülerliği:

$\forall t \in I$ için $rank J(\alpha)_{(t)} = 1$

dir.

$$J(\alpha)_{(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\,|_t \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial t}\,|_t \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, ..., \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \right) |_t = (\alpha_1'(t), ..., \alpha_n'(t))$$

dir.

$rank J(\alpha)_{(t)} = 1$ dir. $\Leftrightarrow \exists \alpha_i'(t) \neq 0$ dır. $(1 \leq i \leq n)$

Tanım 2.19 (Bir Manifold üzerinde C^k-sınıfından eğri)

M bir diferensiyellenebilir manifold ve

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$$

de C^k-sınıfından bir fonksiyon olsun.
($I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

fonksiyonu C^k-sınıfından olması için $\alpha(t) = p \in M$ komşuluğundaki $\{u_1, ..., u_n\}$ reel koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan α' nın

$$\begin{tikzcd} I \subseteq \mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & M \arrow[d, "u_i"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\alpha_i : u_i \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad 1 \leq i \leq n$
koordinat fonksiyonları C^k-sınıfından olması demektir.)
$\alpha(I) \subset M$ alt cümlesi $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k-sınıfından bir eğri denir.

Tanım 2.20 (Bir Eğrinin Tanjant Vektörü) M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$' da M üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k-sınıfından bir eğri olsun. $\alpha(t) = p \in M$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow V_p(f) = \frac{d\,(f \circ \alpha)}{d(t)} \,|_t \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı V_p fonksiyonuna $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir ve $\alpha(t)$ noktasındaki $\alpha(I)$ tanjant vektörlerinin cümlesini $T_{\alpha(t)}\alpha(I)$ ile gösterelim.
$T_{\alpha(t)}\alpha(I)$ cümlesi üzerinde aşağıdaki tanımlanan iç ve dış işlemler $T_{\alpha(t)}\alpha(I)$' de

reel vektör uzayı yapısı belirtirler. Bu uzaya $\alpha(I)$ eğrisinin $p=\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı denir.

$$+ : T_{\alpha(t)}\alpha(I) \times T_{\alpha(t)}\alpha(I) \longrightarrow T_{\alpha(t)}\alpha(I)$$
$$(V_p, W_p) \longrightarrow V_p + W_p$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times T_{\alpha(t)}\alpha(I) \longrightarrow T_{\alpha(t)}\alpha(I)$$
$$(\lambda, V_p) \longrightarrow \lambda \cdot V_p$$

$\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için $(\lambda \cdot V_p)_{(f)} = \lambda \cdot V_p\,(f)$
dir.

Teorem 2.3 M bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde C^k-sınıfından bir eğri $\alpha(I)$ olsun.
$V_p \in T_p\alpha(I)$ ise;

i) $V_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

lineerdir.

ii)$V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$

dir.$(\forall f, g \in C^\infty(M,\mathbb{R}))$

♦ M manifoldunun bir $p \in M$ noktasından geçen ve sınıfı C^1 olan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerin her birinin tanjant uzaylarının birleşimi olarak M' nin bir tanjant uzayını ele edeceğiz.

Tanım 2.21 (M bir Diferensiyellenebilir Manifoldunun Tanjant Vektörü) M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. Bir

$$V_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin p noktasındaki tanjant vektörü ise V_p' ye M' nin bir p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. M üzerindeki Tanjant vektörlerinin cümlesi T_pM ile gösterilir.

T_pM üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iç ve dış işlemler sayesinde T_pM bir reel vektör uzayı olur.

$$+ : T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$(V_p, W_p) \longrightarrow V_p + W_p$$

$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $(V_p, W_p)_{(f)} = V_p(f) + W_p(f)$
dir.

$$\cdot : \mathbb{R} \times T_pM \longrightarrow T_pM$$
$$(\lambda, V_p) \longrightarrow \lambda \cdot V_p$$

$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $(\lambda \cdot V_p)_{(f)} = \lambda \cdot V_p\,(f)$
dir.

Tanım 2.22 (Tanjant Uzay) M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı T_pM olsun. T_pM vektör uzayına M' nin p noktasındaki tanjant uzayı denir.

Teorem 2.4 M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı da T_pM olsun. O zaman;
$\forall V_p \in T_pM$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için;

$$1) V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow V_p(f)$$

lineerdir.

$$2) V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g) \qquad \text{(leibniz kuralı)}$$

dır.

M' nin bir p noktasındaki yerel koordinat sistemi $\{u_1, ..., u_n\}$ olmak üzere;

$$\frac{\partial}{\partial u_i} |_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

lineer dönüşümü $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\frac{\partial}{\partial u_i} |_p (f) = \frac{\partial f}{\partial u_i} |_p$$

olarak tanımlayalım. O zaman $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} |_p, ..., \frac{\partial}{\partial u_n} |_p \right\}$ sistemi $\{u_1, ..., u_n\}$ sisteminin duali olacaktır.
$(\frac{\partial}{\partial u_i} (u_j) = \delta_{ij})$

Teorem 2.5 M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ noktasındaki bir komşuluğu $\{u_1, ..., u_n\}$ yerel koordinat sisteminde verilsin. O zaman $\{u_1, ..., u_n\}$ sisteminin duali;

$$\phi = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} |_p, ..., \frac{\partial}{\partial u_n} |_p \right\}$$

olmak üzere ϕ, T_pM' nin bir bazıdır.

Tanım 2.23 (Vektör Alanı) M bir diferensiyellenebilir manifold, M üzerindeki bir vektör alan diye;

$$X : M \longrightarrow \bigcup_{p \in U} T_pM$$

olarak tanımlanan X fonksiyonuna denir ve M üzerindeki vektör alanların cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir.
$\chi(M)$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iç ve dış işlemler $\chi(M)$' yi vektör uzay yapısıyla donatırlar.

$$1) + : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X,Y) \longrightarrow X+Y$$

$\forall p \in M$ için $(X+Y)_{(p)} = X_p + Y_p$

$$2) \ \cdot : \mathbb{R} \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(\lambda, X) \longrightarrow \lambda X$$

$\forall p \in M$ için $(\lambda X)_{(p)} = \lambda X(p)$

dir.

Tanım 2.24 (Vektör Alanların Uzayı) M bir diferensiyellenebilir manifold M üzerindeki vektör alanlarının vektör uzayı da $\chi(M)$ olsun. $\chi(M)$' ye M üzerindeki vektör alanlarının uzayı denir.

$$X : M \longrightarrow \bigcup_{p \in U} T_p M$$
$$p \longrightarrow X_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow X_p(f)$$

$X \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $p \in M$ olmak üzere;

$$(Xf)_{(p)} = X_p(f)$$

dir.

Tanım 2.25 M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. O zaman $\forall X \in \chi(M)$ için;

i) $X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$

lineerdir

ii)$\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için ;

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

dir.

$$
\begin{aligned}
+ : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \times C^{\infty}(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\
(f,g) &\longrightarrow f+g : M \longrightarrow \mathbb{R} \\
& \qquad\qquad p \longrightarrow (f+g)_{(p)} = f(p)+g(p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdot : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \times C^{\infty}(M,\mathbb{R}) &\longrightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\
(f,g) &\longrightarrow fg : M \longrightarrow \mathbb{R} \\
& \qquad\qquad p \longrightarrow (fg)_{(p)} = f(p)g(p)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (C^{\infty}(M,\mathbb{R}),+,\cdot)$ bir birimli ve değişmeli halkadır.

Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
+ : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\
(X,Y) &\longrightarrow X+Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cdot : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\
(f,X) &\longrightarrow fX
\end{aligned}
$$

öyle ki $p \in M$ için

$$
(fX)_{(p)} = f(p)X_p
$$

şeklinde tanımlanan dış işlem göz önüne alınırsa $\chi(M)$ cümlesi $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ birimli ve değişmeli halkası üzerinde bir modül olur. Yani $\chi(M)$ bir $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ modülüdür.

Tanım 2.26 M diferensiyellenebilir manifold üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
[,] : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\
(X,Y) &\longrightarrow [X,Y]
\end{aligned}
$$

öyle ki $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ içindir.

$$[X, Y]_{(f)} = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlı $[,]$ dönüşümüne $\chi(M)$ üzerinde Lie parantezi operatörü denir.

Teorem 2.6 M diferensiyellenebilir manifold üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve $\chi(M)$ üzerinde Lie parantezi operatörü $[,]$ verilsin. Bu operatör Lie operatörünün üç özelliğini sağlar. Yani;

1) $[,] : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$

dönüşümü 2-lineerdir.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

ve

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

dir.

2) $[,]$ dönüşümü anti-simetriktir.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

dir.

3) $[,]$ dönüşümü Jakobi özdeşliğini sağlar.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

dir.

Tanım 2.27 M bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. O zaman;
$\forall f, g \; \epsilon \; C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve $\forall X, Y \; \epsilon \; \chi(M)$ için

$$[fX, gY] = fg\,[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

dir.

Tanım 2.28 M bir diferensiyellenebilir manifold; M üzerindeki reel değerli C^1-sınıfından bir fonksiyon f olsun. O zaman, f ' nin bir $p \; \epsilon \; M$ noktasındaki tam diferensiyeli;
$\forall V_p \; \epsilon \; T_pM$ için;

$$(df\;|_p)_{(V_p)} = V_p\,[f]$$

dir. Burada;

$$\begin{aligned} V_p : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow V_p(f) = V_p\,[f] \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.7 M bir diferensiyellenebilir manifold ve bir $p \; \epsilon \; M$ noktasındaki M'nin tanjant uzayı T_pM olsun. Bu durumda;

$$df\;|_p \;\; \epsilon \; T_p^*M$$

dir.

İspat :$\forall V_p \; \epsilon \; T_pM$ için;

$df\mid_p (V_p) \in \mathbb{R}$ olduğundan $df\mid_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$

dir. Diğer yandan $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall V_p, W_p \in T_pM$ için;

$$\begin{aligned} df_{|p}(aV_p + bW_p) &= (aV_p + bW_p)[f] \\ &= aV_p[f] + bW_p[f] \\ &= adf\mid_p (V_p) + bdf\mid_p (W_p) \end{aligned}$$

olup $df\mid_p$lineerdir.

O halde $df\mid_p \in T_p^*M$ dir.

Eğer $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X \in \chi(M)$ ise

$$df(X) = Xf,\ Xf = X[f]$$

diyelim. Buna göre;

$$(Xf)_{(p)} = X_p[f]$$

ve

$$\big(df(X)_{(p)}\big) = df\mid_p (X_p)$$

eşitlikleri nedeniyle $df(X) = X[f]$ eşitliği bize bir df fonksiyonunu belirtir.

Üstelik;

$$\begin{aligned} df : \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ X &\longrightarrow df(X) : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad p \longrightarrow (df(X))\mid_p = df\mid_p (X_p) \end{aligned}$$

dir.

($\chi(M)$'nin $C^\infty(M, \mathbb{R})-$ modül yapısına göre df, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ değerli bir lineer dönüşümdür. O halde, df, $\chi(M)$'nin dual modülüne ait bir elemandır. $df \in T_p^*M$ olması bu hal için df 'nin $\chi(M)$ nin dual modülü olmasına karşılık gelir.)

$V_p = (V_1, ..., V_n)$ olmak üzere;

$$df(V_p) = V_p\left[f\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_p V_i$$

dir. Burada;

$$dx_i\left[V_p\right] = V_p\left[x_i\right] = V_i;\ V_p\left[x_i\right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} V_i = V_j$$

dir. Bu durumda;

$$df(V_p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mid_p dx_i(v_p)$$

dir. Bu eşitlik $\forall V_p \,\epsilon\, T_pM$ için doğru olduğundan;

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

dir.

Tanım 2.29 M üzerinde bir koordinat sistemi $\{x_1, ..., x_n\}$ verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} dx_i \mid_p : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ V_p &\longrightarrow dx_i \mid_p (V_p) = V_p\left[x_i\right] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan $dx_i \mid_p$ fonksiyonuna $x_i \,\epsilon\, C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonun diferensiyeli denir.

Teorem 2.8 M üzerinde $\{x_1, ..., x_n\}$ koordinat sistemi verildiğine göre
$\forall p \,\epsilon\, M$ için

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p \mid 1 \leq i \leq n \right\} \text{ ve } \{dx_i \mid_p \mid 1 \leq i \leq n\}$$

birbirinin duali olan iki baz oluşturur. Bunlardan birincisi T_pM'nin ikincisi T_p^*M'ın bir bazıdır.

Sonuç 2.1 Tensörlerde V reel vektör uzayı yerine T_pM alalım. Şimdi tensörleri tekrar ele alalım. V vektör uzay olmak üzere V^*, V'nin duali olsun. Bu durumda;

$T_r(V) = V^* \otimes ... \otimes V^*$ tensör uzayının her bir elemanına r-yinci mertebeden Kovaryant tensör denir. Şimdi $V = T_pM$ alırsak T_pM'nin dualinin T_p^*M olduğunu biliyoruz. Bu durumda;

$$T_r(T_pM) = T_p^*M \otimes ... \otimes T_p^*M$$

şeklinde olur.

V vektör uzayı ve V^* duali olmak üzere; $T^s(V^*) = V \otimes ... \otimes V$ tensör uzayına Kontravaryant tensör uzayı olduğunu biliyoruz. Yine aynı şekilde $V = T_pM$ ve $V^* = T_p^*M$ alırsak;

$$T^s(T_p^*M) = T_pM \otimes ... \otimes T_pM$$

şeklinde olur. Biz burada $T^s(T_p^*M) = T^s(T_pM)$ alacağız.

Şimdi de Karışık tensörler için ele alırsak; biliyoruz ki r-dereceden kovaryant, s-dereceden kontravaryant tensör uzayı;

$$T_r^s(V) = T_r(V) \otimes T^s(V^*)$$

olduğunu biliyoruz. Yine $V = T_pM$ için;

$$T_r^s(T_pM) = T_r(T_pM) \otimes T^s(T_pM)$$

olur.

Tanım 2.30 (Tensör Demeti)

1) r-Kovaryant tensör demeti;

$$T_rM = \bigcup_{p \,\epsilon\, M} T_r(T_pM)$$

2) s-Kontravaryant tensör demeti;

$$T^sM = \bigcup_{p \,\epsilon\, M} T^s(T_pM)$$

3) r-Kovaryant s-Kontravaryant tensör demeti;

$$T_r^sM = \bigcup_{p \,\epsilon\, M} T_r^s(T_pM)$$

şeklindedir.

Tanım 2.31 (Tensör Alan) M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $\chi(M)$'ye vektör alanı denildiğini biliyoruz.

$\tau_r(M) = \{\text{düzgün r-kovaryant tensör alanı}\}$

cümlesi diyelim.

$\tau^s(M) = \{\text{düzgün s-kontravaryant tensör alanı}\}$

$\tau_r^s(M) = \{\text{düzgün (k,l) karısık tensör alanı}\}$

olur.

$\chi(M)$ vektör alanı ve duali $\chi^*(M)$ alalım. Biliyoruz ki $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$, $\chi(M)$'nin bir bazı; $\{dx_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $\chi^*(M)$'ın bir bazıdır.

$$\tau_r(M) = \chi^*(M) \otimes ... \otimes \chi^*(M)$$

şeklindedir.

Burada $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$ $\chi(M)$'nin; $\{dx_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ $\chi^*(M)$'nin bazı olmak üzere $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}(dx_i) = \delta_{ij}\right)$

$$\left\{dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_r},\ \binom{1...r}{i_1...i_r}\ ; 1 \leq r \leq n\right\}$$

$\tau_r(M)$'nin bir bazıdır.

Diğer yandan biliyoruz ki $T \epsilon T_r(V)$ olmak üzere V'nin bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ ve $T_r(V)$'nin bazı $\left\{e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_r}\right\}$; $1 \leq j_1 ... j_r \leq n$ dir. $T \epsilon T_r(V)$ için;

$$T = T_{i_1...i_r} e^{*j_1} \otimes ... \otimes e^{*j_r}$$

dir. O halde $T \epsilon \tau_r(M)$ olmak üzere; $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$ $\chi(M)$'nin bir bazı ve $\tau_r(M)$'nin bazı $\left\{dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_r},\ \binom{1...r}{i_1...i_r};\ 1 \leq r \leq n\right\}$ olduğundan;

$$T = T_{i_1...i_r} dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_r}$$

şeklinde olur.

$$\tau^s(M) = \chi(M) \otimes ... \otimes \chi(M)$$

şeklindedir. $\chi(M)$ ve $\chi^*(M)$'ın bazları sırasıyla $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i} \mid 1 \leq i \leq n\right\}$ ve $\{dx_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ olmak üzere;

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}},\ \binom{1...s}{i_1...i_s}; 1 \leq s \leq n\right\}$$

ise $\tau^s(M)$ nin bir bazıdır.

Diğer yandan $L \epsilon T^s(V^*)$ için V'nin bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ ve $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}\}$; $1 \leq i_1 ... i_s \leq n$ de $T^s(V^*)$'nin bazıdır. $L \epsilon T^s(V^*)$ için;

$$L = L^{i_1...i_s} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s}$$

dir. O halde $L \epsilon \tau^s(M)$ için;

$$L = L^{i_1...i_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}$$

şeklinde olur.

Son olarak;

$$\tau_r^s(M) = \chi^*(M) \otimes ... \otimes \chi^*(M) \otimes \chi(M) \otimes ... \otimes \chi(M)$$

olup;

$$\left\{ dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}};\ \binom{1...r}{i_1...i_r},\ \binom{1...s}{j_1...j_s},\quad \begin{array}{c} 1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq n \end{array} \right\}$$

ise $\tau_r^s(M)$'nin bir bazıdır. O halde;

$T \;\epsilon\; \tau_r^s(M)$ için;

$$T = T_{i_1...i_r}^{j_1...j_s} dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}$$

olur.

Sonuç olarak;

$$T = T_{i_1...i_r} dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_r}$$

r-kovaryant tensör alan;

$$L = L^{i_1...i_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}$$

s-kontravaryant tensör alan;

$$Q = Q_{i_1...i_r}^{j_1...j_s} dx_{i_1} \otimes ... \otimes dx_{i_r} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}$$

(k,s) tensör alanı olur.

Burada $T_{i_1...i_r}, L^{i_1...i_s}$ ve $Q_{i_1...i_r}^{j_1...j_s}$ fonksiyon bileşenleri olarak adlandırılır.

Ayrıca;

$$
\begin{aligned}
\tau_r(M) &= \chi^*(M) \otimes ... \otimes \chi^*(M) \\
&= \mathcal{L}\left(\chi(M), ..., \chi(M); C^\infty(M, \mathbb{R})\right) \\
&= \{f \mid f : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})\}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Aynı şekilde;

$$
\begin{aligned}
\tau^s(M) &= \mathcal{L}(\chi^*(M), ..., \chi^*(M); C^\infty(M, \mathbb{R})) \\
&= \{f \mid f : \chi^*(M) \times ... \times \chi^*(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})\} \\
&= \chi(M) \otimes ... \otimes \chi(M)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\tau_r^s(M) &= \mathcal{L}(\chi(M), ..., \chi(M), \chi^*(M), ..., \chi^*(M); C^\infty(M, \mathbb{R})) \\
&= \{f \mid f : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \times \chi^*(M) \times ... \times \chi^*(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})\} \\
&= \chi^*(M) \otimes ... \otimes \chi^*(M) \otimes \chi(M) \otimes ... \otimes \chi(M)
\end{aligned}
$$

dir.

3. RİEMANN MANİFOLDLARI

3.1. Riemann Manifoldu ve Riemann Metriği

Tanım 3.1 M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki G Riemann metriği simetrik, pozitif tanımlı ve diferensiyellenebilir olan 2-kovaryant vektör alan ($G \,\epsilon\, \tau_2(M)$) ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} G \,\epsilon\, \tau_2(M) \Longrightarrow\ G : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\longrightarrow G(X, Y) : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad\qquad p \longrightarrow G(X, Y) \mid_p \end{aligned}$$

dir.

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ile verilen G Riemann metriği (M, G) Riemann Manifoldu olarak adlandırılır.

Tanım 3.2 M bir n-Riemann manifold olsun. O zaman M üzerindeki metrik tensör ifadesi;

$$G = g_{ik} dx_i \otimes dx_k$$

şeklinde gösterilir. Burada; $g_{ik} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle$ olup matris değerli düzgün fonksiyon adı verilir.

Tanım 3.3 $A, B \,\epsilon\, T_pM$ olmak üzere; $A = A_i \frac{\partial}{\partial x_i}, B = B_k \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (i = 1, ..., n; k = 1, ..., n)$

$$\langle A, B \rangle_G \mid_p = G(A, B) \mid_p = A_i g_{ik} B_k$$

$$= (A_1, ..., A_n) \begin{pmatrix} g_{11} & . & . & . & g_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ g_{n1} & . & . & . & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ . \\ . \\ . \\ B_n \end{pmatrix}$$

dir. Burada;

$i) G(A, B) = G(B, A)$

$ii) A \neq 0$ için $G(A, A) > 0$

$iii) G(A, B) \mid_{p=x}$ diferensiyellenebilir fonksiyon

şeklindedir.

Burada görüldüğü gibi G Riemann metriği $G = g_{ik} dx_i \otimes dx_k$ şeklinde tanımlanır. ω ve η 2 tane 1-formun simetrik çarpımın tanımı ile kısaltabiliriz. Çarpım sembolü olmadan yanyana yazarsak;

$$\omega\eta = \tfrac{1}{2}(\omega \otimes \eta + \eta \otimes \omega)$$

olduğundan;

$$G = g_{ik} dx_i dx_k$$

yazılabilir.

Örnek 3.1 ⧫ $\{x_i\}$, $\mathbb{R}^n$'in kanonik koordinatları olmak üzere G metriği;

$$G = (dx_1)^2 + ... + (dx_n)^2$$

şeklindedir.

$$G = \|g_{ik}\| = diag\,[1, 1..., 1]$$

dir. Skalar çarpım ile tanımlanan n-boyutlu Öklid uzayının temel örneği;

$$G(X,Y) = \langle X,Y \rangle = g_{ik}X_iX_k = X_1Y_1 + ... + X_nY_n$$

şeklindedir.

$$\Longrightarrow G(X,Y) = \langle X,Y \rangle = g_{ik}X_iX_k$$

olur. Bu durumda $\{e_i\}$ temel baz olmak üzere;

$$G(e_i, e_k) = g_{ik}e_ie_k = \delta_{ik}$$

dır.

♦ $\mathbb{R}^2$'de polar koordinatlarda $x_2 > 0$ $(x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta)$ bölgesindeki metrik için;

$$dx_1 = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\ dx_2 = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

dır. Yeni koordinatlar da Riemann metriği $G = dx_1^2 + dx_2^2$ aşağıdaki görünüme sahip olacaktır.

$$\begin{aligned} G &= dx_1^2 + dx_2^2 \\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow G = dr^2 + r^2 d\theta^2$

şeklinde olacaktır. Bu durumda $G = \|g_{ik}\|$ için aşağıdakini söyleyebiliriz.

Kartezyen koordinatlar;

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{x_1x_1} & g_{x_1x_2} \\ g_{x_2x_1} & g_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

dır. Kutupsal koordinatlarda;

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

dır.

Örnek 3.2 $\mathbb{R}^3$'de $G = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ şeklindedir. Burada;

$G = \|g_{ik}\| = [1, 1, 1]$ dir.

$V = (1, 2, -1),\ W = (0, 3, 1)\ \epsilon\ \mathbb{R}^3$ olsun.

$G(V, W) = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)\,(V, W)$

şeklindedir.

$$V = 1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\frac{\partial}{\partial x_3};\ W = 0\frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} + 1\frac{\partial}{\partial x_3}$$

dir.

$$\begin{aligned} G(V, W) &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)(V, W) \\ &= dx_1^2\,(V, W) + dx_2^2\,(V, W) + dx_3^2\,(V, W) \end{aligned}$$

olup;

$$\begin{aligned} dx_1^2\,(V, W) &= dx_1 \otimes dx_1 \left(1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\frac{\partial}{\partial x_3}, 0\frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} + 1\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ &= dx_1 \left(1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2} - 1\frac{\partial}{\partial x_3}\right) dx_1 \left(0\frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} + 1\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ &= 1dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdot 0dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
dx_2^2\,(V,W) &= dx_2 \otimes dx_2 \left(1\frac{\partial}{\partial x_1}+2\frac{\partial}{\partial x_2}-1\frac{\partial}{\partial x_3}, 0\frac{\partial}{\partial x_1}+3\frac{\partial}{\partial x_2}+1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= dx_2\left(1\frac{\partial}{\partial x_1}+2\frac{\partial}{\partial x_2}-1\frac{\partial}{\partial x_3}\right) dx_2\left(0\frac{\partial}{\partial x_1}+3\frac{\partial}{\partial x_2}+1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= 2dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\cdot 3dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&= 6
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
dx_3^2\,(V,W) &= dx_3 \otimes dx_3 \left(1\frac{\partial}{\partial x_1}+2\frac{\partial}{\partial x_2}-1\frac{\partial}{\partial x_3}, 0\frac{\partial}{\partial x_1}+3\frac{\partial}{\partial x_2}+1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= dx_3\left(1\frac{\partial}{\partial x_1}+2\frac{\partial}{\partial x_2}-1\frac{\partial}{\partial x_3}\right) dx_3\left(0\frac{\partial}{\partial x_1}+3\frac{\partial}{\partial x_2}+1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= (-1)dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot 1dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= -1
\end{aligned}$$

dir.

$$\Longrightarrow G(V,W) = 0+6-1 = 5$$

olur.

$$G(X,Y) = g_{ik}X_iX_k = X_1Y_1 + ... + X_nY_n$$

dir.

$$\begin{aligned}
G(X,Y) &= g_{ik}V_iW_k\\
&= V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3\\
&= 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1\\
&= 5
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 3.3 Çember de $[0, 2\pi)$ aralığında Riemann metriği;

$$G = a^2 dx_1^2$$

dir. (a çemberin yarıçapıdır.)

Bunu görelim. $\mathbb{R}^2$, Öklid uzayında gömülü $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ çemberi için;

$$x_1 = a\cos\theta,\ x_2 = a\sin\theta,\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

dir.

Riemann metriği $G = dx_1^2 + dx_2^2$ olup;

$$\begin{aligned} dx_1 &= -a\sin\theta d\theta \\ dx_2 &= a\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} G &= (-a\sin\theta d\theta)^2 + (a\cos\theta d\theta)^2 \\ &= a^2\sin^2\theta d\theta^2 + a^2\cos^2\theta d\theta^2 \\ &= a^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

olur.

$$\Longrightarrow G = a^2 d\theta^2$$

elde edilir. Alışılmış formül için θ yerine x_1 yazarsak;

$$G = a^2 dx_1^2$$

dir.

Şimdi $x_1^2 + x_2^2 = 1$ çemberini göz önüne alalım. $a = 1$ olduğundan $G = a^2 d\theta^2$ olup $G = d\theta^2$ olur.

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longrightarrow \alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}$$

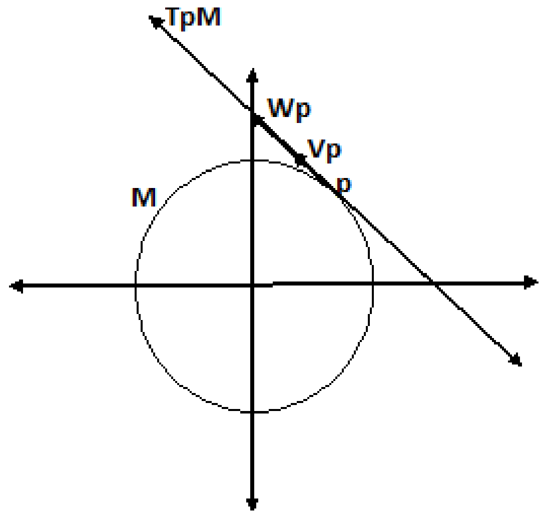
1-yarıçaplı çemberdir.

$p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olsun. $\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ olur.

$\alpha'(t) = (-\sin\theta, \cos\theta) \Longrightarrow \alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = V_p = \frac{\partial}{\partial\theta}$

$W_p = 2V_p$ alısak $W_p = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 2\frac{\partial}{\partial\theta}$

olur.



Şekil 3.1. Çember

$G = d\theta^2$ olup;

$$\begin{aligned}
G(V_p, W_p) &= d\theta^2(V_p, W_p) \\
&= d\theta \otimes d\theta(V_p, W_p) \\
&= d\theta\left(V_p\right) d\theta\left(W_p\right) = d\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) d\theta\left(2\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= 1 d\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \cdot 2 d\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$$V_p = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$W_p = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\begin{aligned}
G(V_p, W_p) &= \left(dx_1^2 + dx_2^2\right)(V_p, W_p) \\
&= dx_1 \otimes dx_1(V_p, W_p) + dx_2 \otimes dx_2(V_p, W_p) \\
&= dx_1(V_p)dx_1(W_p) + dx_2(V_p)dx_2(W_p) \\
&= dx_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) dx_1\left(-\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + dx_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) dx_2\left(-\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \cdot \sqrt{2} dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\Longrightarrow$Her iki işlemde de $G(V_p, W_p) = 2$ dir.

Örnek 3.4 (Silindir Yüzeyi) $\mathbb{R}^3$ de $D = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 < 2\pi\}$ bölgesindeki Riemann metriği;

$$G = a^2 dx_1^2 + dx_2^2$$

dir. a; $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ silindirin yarıçapıdır. Bunu görelim.
$\mathbb{R}^3$, Öklid uzayında gömülü $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ silindiri için;

$$x_1 = a \cos u$$

$$x_2 = a \sin u; \qquad 0 \leq u < 2\pi, \ -\infty < v < \infty$$

$x_3 = v$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} dx_1 &= -a \sin u du \\ dx_2 &= a \cos u du \\ dx_3 &= dv \end{aligned}$$

dir. Yeni koordinatlar da $G = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ Riemann metriğinin görünümü;

$$\begin{aligned} G &= (-a \sin u du)^2 + (a \cos u du)^2 + dv^2 \\ &= a^2 \sin^2 u du^2 + a^2 \cos^2 u du^2 + dv^2 \\ &= a^2 du^2 + dv^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Alışılmış formül için $x_1 \longrightarrow u,\ x_2 \longrightarrow v$ alalim. Bu durumda;

$$G = a^2 dx_1^2 + dx_2^2$$

olur.

Şimdi $\mathbb{R}^3$; $x_1^2 + x_2^2 = 1$ silindirini göz önüne alalım.

$$F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow F(U) = M$$
$$(u, v) \longrightarrow F(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

silindirin paremetrizasyon denklemidir. (F dif.bilir ve rankJ(F)=2 olmalıdır.)
$p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ alalım. Bu p silindirin üzerindedir. $F(q) = p$ olacak şekilde $q \in U$'yu bulalım. $(q = (u, v))$

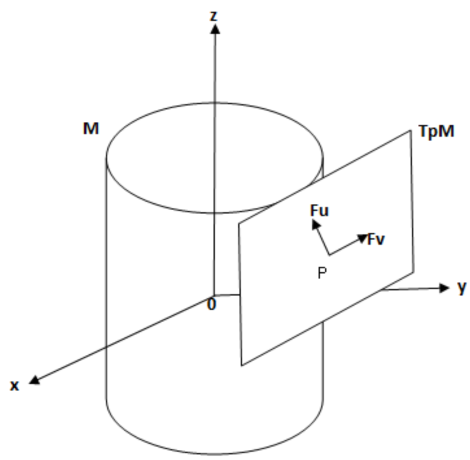
$$F(u, v) = (\cos u, \sin u, v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$
$$\Rightarrow u = \frac{\pi}{4};\ v = 1$$
$$\Rightarrow q = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$

olur.

$$F\mid_u(q) = (-\sin u, \cos u, 0)\mid_q = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$F\mid_v(q) = (0,0,1)$$

olur.



Şekil 3.2. Silindir

$$\begin{aligned} F_{*_q} : T_q\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{F(q)}\mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial}{\partial u} &\longrightarrow F_{*_q}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = F_u(q) \end{aligned}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} F_{*_q} : T_q\mathbb{R}^2 &\longrightarrow T_{F(q)}\mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial}{\partial v} &\longrightarrow F_{*_q}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) = F_v(q) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$F_u(q) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = V_p = (1,0) = 1F_u\mid_q + 0F_v\mid_q$$

$$F_v(q) = (0,0,1) = (0,1)\mid_q = 0F_u \mid_q +1F_v \mid_q$$

olur.

$$V_p = F_u(q) = 1F_u \mid_q +0F_v \mid_q \overset{F_*-\text{lineer}}{\longleftarrow} (1,0) = 1\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\Longrightarrow V_p = (1,0) = 1\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v}$$

$$W_p = -2V_p = (-2,0) = -2\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v}$$

olur.

x_1, x_2, x_3 koordinat sistemine göre $V_p = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ iken u, v'ye göre $V_p = (1,0)$ dır. Aynı şekilde $W_p = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right)$ iken u, v'ye göre $W_p = (-2,0)$ olur. $G = a^2du^2 + dv^2$ olup $a = 1$ olduğundan $G = du^2 + dv^2$ dir.

$$\begin{aligned}
G(V_p, W_p) &= \left(du^2 + dv^2\right)(V_p, W_p) \\
&= du \otimes du(V_p, W_p) + dv \otimes dv(V_p, W_p) \\
&= du(V_p)du(W_p) + dv(V_p)dv(W_p) \\
&= du\left(1\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v}\right) du\left(-2\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&\quad + dv\left(1\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v}\right) dv\left(-2\frac{\partial}{\partial u} + 0\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= 1du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \cdot (-2)\, du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + 0dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \cdot 0dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \\
&= -2
\end{aligned}$$

olur.

$$\Longrightarrow G(V_p, W_p) = -2$$

dir.

Şimdi $G(V_p, W_p)$'yi x_1, x_2, x_3 koordinat sisteminde;

$$G = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

metriğine göre bulalım.

$$V_p = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_2} + 0\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$W_p = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right) = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2} + 0\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\begin{aligned}
G(V_p, W_p) &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)(V_p, W_p) \\
&= dx_1^2(V_p, W_p) + dx_2^2(V_p, W_p) + dx_3^2(V_p, W_p) \\
&= dx_1 \otimes dx_1(V_p, W_p) + dx_2 \otimes dx_2(V_p, W_p) + dx_3 \otimes dx_3(V_p, W_p) \\
&= dx_1(V_p)dx_1(W_p) + dx_2(V_p)dx_2(W_p) + dx_3(V_p)dx_3(W_p) \\
&= dx_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)dx_1\left(\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + dx_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)dx_2\left(-\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + dx_3\left(-0\frac{\partial}{\partial x_3}\right)dx_3\left(+0\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\cdot\sqrt{2}dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right)dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + 0dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot 0dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 0\cdot 0 \\
&= -2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow G(V_p, W_p) = -2$$

olarak bulunur.

Şimdi;

$$X_p = 2F_u\mid_q + 7F_v\mid_q = (2,7) \overset{F_*-lineer}{\longleftarrow} (2,7) = 2\frac{\partial}{\partial u} + 7\frac{\partial}{\partial v}$$

$$Y_p = -4F_u\mid_q + 5F_v\mid_q = (-4,5) \overset{F_*-lineer}{\longleftarrow} (-4,5) = -4\frac{\partial}{\partial u} + 5\frac{\partial}{\partial v}$$

olur.

$$\begin{aligned}
G(X_p, Y_p) &= \left(du^2 + dv^2\right)(X_p, Y_p) \\
&= du^2(X_p, Y_p) + dv^2(X_p, Y_p) \\
&= du \otimes du(X_p, Y_p) + dv \otimes dv(X_p, Y_p) \\
&= du(X_p)du(Y_p) + dv(X_p)dv(Y_p) \\
&= du\left(2\frac{\partial}{\partial u} + 7\frac{\partial}{\partial v}\right) du\left(-4\frac{\partial}{\partial u} + 5\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&\quad + dv\left(2\frac{\partial}{\partial u} + 7\frac{\partial}{\partial v}\right) dv\left(-4\frac{\partial}{\partial u} + 5\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= 2du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \cdot (-4)\, du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) + 7dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \cdot 5dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 5 \\
&= 27
\end{aligned}$$

dir.

$$F_u\mid_q = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right); \;\; F\mid_v (q) = (0,0,1)$$

$$X_p = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + 7\,(0,0,1) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 7\right)$$

$$Y_p = -4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + 5\,(0,0,1) = \left(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 5\right)$$

olur.

$G = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$'ye göre $G(X_p, Y_p)$'yi bulalım.

$$
\begin{aligned}
G(X_p, Y_p) &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)(X_p, Y_p) \\
&= dx_1^2(X_p, Y_p) + dx_2^2(X_p, Y_p) + dx_3^2(X_p, Y_p) \\
&= dx_1 \otimes dx_1(X_p, Y_p) + dx_2 \otimes dx_2(X_p, Y_p) + dx_3 \otimes dx_3(X_p, Y_p) \\
&= dx_1(X_p)dx_1(Y_p) + dx_2(X_p)dx_2(Y_p) + dx_3(X_p)dx_3(Y_p) \\
&= dx_1\left(-\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) dx_1\left(2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&\quad + dx_2\left(\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) dx_2\left(-2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + dx_3\left(7\frac{\partial}{\partial x_3}\right) dx_3\left(5\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \left(-\sqrt{2}\right) dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cdot 2\sqrt{2}dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\
&\quad + \sqrt{2}dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \cdot \left(-2\sqrt{2}\right) dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + 7dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \cdot 5dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\
&= \left(-\sqrt{2}\right) \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \left(-2\sqrt{2}\right) + 7 \cdot 5 \\
&= -4 - 4 + 35 \\
&= 27
\end{aligned}
$$

olur.

$$\Longrightarrow G(X_p, Y_p) = 27$$

dir.

Örnek 3.5 (Küre)$-\pi \leq x_1 \leq \pi$; $-\frac{\pi}{2} \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ bölgesindeki G Riemann metriği;

$$G = a^2 dx_2^2 + a^2 \cos^2 x_2 dx_1^2$$

şeklinde olup $a : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$ küresinin yarıçapıdır. Bunu görelim.
$-\pi \leq u \leq \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere;

$$x_1 = a\cos u\cos v$$
$$x_2 = a\sin u\cos v$$
$$x_3 = a\sin v$$

dir.

$$dx_1 = -a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv$$
$$dx_2 = a\cos u\cos v du - a\sin u\sin v dv$$
$$dx_3 = a\cos v dv$$

olur.

$$G = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
G &= (-a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv)^2 + (a\cos u\cos v du - a\sin u\sin v dv)^2 \\
&\quad + (a\cos v dv)^2 \\
&= a^2\sin^2 u\cos^2 v du^2 + a^2\cos^2 u\sin^2 v dv^2 + 2a^2\sin u\cos v\cos u\sin v du dv \\
&\quad + a^2\cos^2 u\cos^2 v du^2 + a^2\sin^2 u\sin^2 v dv^2 - 2a^2\sin u\cos v\cos u\sin v du dv \\
&\quad + a^2\cos^2 v dv^2 \\
&= a^2\cos^2 v du^2\left(\sin^2 u + \cos^2 u\right) + a^2\sin^2 v dv^2\left(\sin^2 u + \cos^2 u\right) + a^2\cos^2 v dv^2 \\
&= a^2\cos^2 v du^2 + a^2\sin^2 v dv^2 + a^2\cos^2 v dv^2 \\
&= a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2\left(\sin^2 v + \cos^2 v\right) \\
&= a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow G = a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$$

olur. $u \longrightarrow x_1,\ v \longrightarrow x_2$ yazarsak;

$$G = a^2 dx_2^2 + a^2\cos^2 x_2 dx_1^2$$

olarak bulunur.

Şimdi $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9$ denklemiyle verilen küreyi alalım. $p=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ alalım.

$$F: U\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow M\subset\mathbb{R}^3$$
$$(u,v)\longrightarrow F(u,v)=(3\cos v\cos u, 3\cos v\sin u, 3\sin v)$$

$F(q)=p$ olacak şekilde $q=(u,v)$'yi bulalım.

$$(3\cos v\cos u, 3\cos v\sin u, 3\sin v)=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \sin v=\frac{1}{2}\Longrightarrow v=\frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow 3\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos u=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Longrightarrow\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos u=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow \cos u=1$$

$$\Longrightarrow u=0$$

$q=\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ olarak bulunur.

$$F_u\mid_q=(-3\cos v\sin u, 3\cos v\cos u, 0)\mid_q=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$$

$$F_v\mid_q=(-3\sin v\cos u, -3\sin v\sin u, 3\cos v)\mid_q=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

dır.

$$F_u\mid_q=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)=(1,0)=1F_u\mid_q+0F_v\mid_q\overset{F_*-\text{lineer}}{\longleftarrow}1\frac{\partial}{\partial u}+0\frac{\partial}{\partial v}=(1,0)$$

$$F_v\mid_q=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=(0,1)=0F_u\mid_q+1F_v\mid_q\overset{F_*-\text{lineer}}{\longleftarrow}0\frac{\partial}{\partial u}+1\frac{\partial}{\partial v}=$$
$(0,1)$

dır.

$$V_p = 6F_u\mid_q - 2F_v\mid_q = (6,-2) = 6\frac{\partial}{\partial u} - 2\frac{\partial}{\partial v}$$

$$W_p = -4F_u\mid_q + 2F_v\mid_q = (-4,2) = -4\frac{\partial}{\partial u} + 2\frac{\partial}{\partial v}$$

$G = a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$ olup $a = 3$ ve $v = \frac{\pi}{6}$ olup;

$$G = 3^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 du^2 + 3^2 dv^2$$

$$G = \frac{27}{4}du^2 + 9dv^2$$

olur.

$$\begin{aligned}
G(V_p, W_p) &= \left(\frac{27}{4}du^2 + 9dv^2\right)(V_p, W_p) \\
&= \frac{27}{4}du^2(V_p, W_p) + 9dv^2(V_p, W_p) \\
&= \frac{27}{4}du \otimes du(V_p, W_p) + 9dv \otimes dv(V_p, W_p) \\
&= \frac{27}{4}du(V_p)du(W_p) + 9dv(V_p)dv(W_p) \\
&= \frac{27}{4}du\left(6\frac{\partial}{\partial u} - 2\frac{\partial}{\partial v}\right)du\left(-4\frac{\partial}{\partial u} + 2\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&\quad +9dv\left(6\frac{\partial}{\partial u} - 2\frac{\partial}{\partial v}\right)dv\left(-4\frac{\partial}{\partial u} + 2\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= \frac{27}{4}\cdot 6du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\cdot(-4)\,du\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \\
&\quad +9\cdot(-2)\,dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdot 2dv\left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= \frac{27}{4}\cdot 6\cdot(-4) + 9\cdot(-2)\cdot 2 \\
&= -162 - 36 \\
&= -198
\end{aligned}$$

olur.

$$F_u\mid_q=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$$

$$F_v\mid_q=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

olup

$$V_p=6F_u\mid_q-2F_v\mid_q=6\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)-2\left(-\frac{3}{2},0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\left(3,9\sqrt{3},-3\sqrt{3}\right)$$

$$W_p=-4F_u\mid_q+2F_v\mid_q=-4\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)+2\left(-\frac{3}{2},0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-3,-6\sqrt{3},3\sqrt{3}\right)$$

dir.

$$\begin{aligned}
G(V_p,W_p) &= \left(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2\right)(V_p,W_p)\\
&= dx_1^2(V_p,W_p)+dx_2^2(V_p,W_p)+dx_3^2(V_p,W_p)\\
&= dx_1\otimes dx_1(V_p,W_p)+dx_2\otimes dx_2(V_p,W_p)+dx_3\otimes dx_3(V_p,W_p)\\
&= dx_1(V_p)dx_1(W_p)+dx_2(V_p)dx_2(W_p)+dx_3(V_p)dx_3(W_p)\\
&= dx_1\left(3\frac{\partial}{\partial x_1}\right)dx_1\left(-3\frac{\partial}{\partial x_1}\right)+dx_2\left(9\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)dx_2\left(-6\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&\quad +dx_3\left(-3\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)dx_3\left(3\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= 3dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\cdot(-3)\,dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\\
&\quad +9\sqrt{3}dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\cdot\left(-6\sqrt{3}\right)dx_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&\quad +\left(-3\sqrt{3}\right)dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\cdot 3\sqrt{3}dx_3\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\\
&= 3\cdot(-3)+9\sqrt{3}\cdot\left(-6\sqrt{3}\right)+\left(-3\sqrt{3}\right)\cdot 3\sqrt{3}\\
&= -9-162-27\\
&= -198
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

♦ $\alpha_1=(1,0,3)\,,\ \alpha_2=(1,-3,2)$ olmak üzere, $W=Sp\{\alpha_1,\alpha_2\}\subseteq\mathbb{R}^3$ olsun.

$$X = (x_1, y_1) = x_1\alpha_1 + y_1\alpha_2$$

$$Y = (x_2, y_2) = x_2\alpha_1 + y_2\alpha_2$$

olsun. Bu durumda;

$$X = x_1 (1, 0, 3) + y_1 (1, -3, 2)$$

$$Y = x_2 (1, 0, 3) + y_2 (1, -3, 2)$$

dir. İndirgenmiş metrik;

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_G &= \langle X, Y \rangle \\ &= 10x_1x_2 + 3y_1x_2 + 3x_1y_2 + 14y_1y_2 \end{aligned}$$

dir.

♦ $\langle , \rangle : \mathbb{R}_2^2 \times \mathbb{R}_2^2 \to \mathbb{R}_2^2$
$$(A, B) \to \langle A, B \rangle = iz\left(AB^T\right)$$

dır.
$W = \left\{A \mid A^T = A\right\}$ alalım.

$$W = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

olsun.

$$X = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = x_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda İndirgenmiş metrik;

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle_G &= \langle X, Y\rangle \\ &= x_1x_2 + y_1y_2\end{aligned}$$

dir.

3.1.1. Tanjant Vektörlerin Uzunluğu ve Arasındaki Açı

Riemann metriği verilen noktaya bağlı tanjant vektörlerin scalar çarpımı ile tanımlanır. Bundan dolayı tanjant vektörlerin uzunluğunu ve aralarındaki açıları tanımlayabiliriz.

$X = X_m\dfrac{\partial}{\partial x_m}$, $Y = Y_m\dfrac{\partial}{\partial x_m}$; $x_1, x_2, ..., x_n$ koordinatları ile Riemann metriğinin p noktasındaki iki tanjant vektörü iseler bu tanjant vektörlerinin uzunluğunun eşiti;

$$|X| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{g_{ik}X_iX_k}$$

$$|Y| = \sqrt{\langle Y, Y\rangle} = \sqrt{g_{ik}Y_iY_k}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu vektörlerin arasındaki açı θ olmak üzere bunlar arasındaki bağıntı;

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X|\,|Y|} = \frac{g_{ik}X_iY_k}{\sqrt{g_{ik}X_iX_k}\sqrt{g_{ik}Y_iY_k}}$$

şeklindedir.

Örnek 3.6 M, 3-boyutlu Riemann manifoldu olsun. (x_1, x_2, x_3) lokal yerel koordinat ile M'nin p noktasına bağlı

$$X = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\frac{\partial}{\partial x_2} - 2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

vektörlerini tanımlayalım. ($p = (1,1,0)$). Bu koordinatlarda Riemann metriği;

$$G = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

olsun.

Burada görülmektedir ki;

$$g_{ik} = \eta(x_1, x_2, x_3)\delta_{ik};\ \eta(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}\delta_{ik}\ ,$$

$$i = k \Longrightarrow \delta_{ik} = 1;\ i \neq k \Longrightarrow \delta_{ik} = 0$$

dır.

$X = (2, 2, -1);\ Y = (1, -2, -2)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} |X| &= \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{g_{ik}X_iX_k} \\ &= \sqrt{\eta(x_1, x_2, x_3)X_iX_i} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}} \cdot 3 \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + 1^2 + 1^2}} \cdot 3 \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $|Y| = \sqrt{3}$ olur.

$\Longrightarrow |X| = |Y| = \sqrt{3}$ dur. Bu iki vektör arasındaki açı θ olmak üzere;

$$\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X|\,|Y|} = \frac{\langle X, Y\rangle}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\langle X, Y\rangle}{3}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\langle X,Y\rangle &= g_{ik}X_iY_k=\eta(x_1,x_2,x_3)\delta_{ik}X_iY_k \\
&= \eta(x_1,x_2,x_3)X_iY_i \\
&= \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\left(X_1Y_1+X_2Y_2+X_3Y_3\right) \\
&= \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}\left(2\cdot 1+2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \cos\theta=0$

$\Longrightarrow$Bu iki vektör ortogonal vektörlerdir.

3.1.2. Eğrinin Uzunluğu

$\mu : x_i = x_i\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right),...,x_n\left(t\right)\right),\ \left(1\leq i\leq n\right),\ \left(a\leq t\leq b\right);$

(M,G) Riemann manifoldu üzerinde bir eğri olsun. Bu eğrinin her noktasındaki hız vektörü (Tanjant Vektörü)

$$V\left(t\right)=\left(\dot{x}_1\left(t\right),...,\dot{x}_n\left(t\right)\right)$$

dir. Bu hız vektörünün x noktasındaki uzunluğu $(V\ \epsilon\ T_xM)$

$$|V|\ |_x=\sqrt{\langle V,V\rangle_G\ |_x}=\sqrt{g_{ik}V_iV_k}\ |_x=\sqrt{g_{ik}\frac{dx_i\left(t\right)}{dt}\frac{dx_k\left(t\right)}{dt}}\ |_x$$

şeklindedir.

Eğrinin uzunluğu hız vektörünün uzunluğunun integrali olarak;

$$L_\mu=\int_a^b\sqrt{\langle V,V\rangle_G\ |_{x(t)}}dt=\int_a^b\sqrt{g_{ik}\left(x\left(t\right)\right)\dot{x}_i\left(t\right)\dot{x}_k\left(t\right)}dt$$

biçiminde tanımlanır.

$G=g_{ik}dx_idx_k$ metriği genellikle ve çoğunlukla;

$$G = ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin 2-boyutlu Riemann manifoldunda Riemann metriği;

$$\|g_{ik}(u,v)\| = \begin{pmatrix} g_{11}(u,v) & g_{12}(u,v) \\ g_{21}(u,v) & g_{22}(u,v) \end{pmatrix}$$

olup buradan;

$$\begin{aligned} G &= ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k \\ &= g_{11}(u,v)\,du^2 + 2g_{12}(u,v)\,dudv + g_{22}(u,v)\,dv^2 \end{aligned}$$

dir.

$\mu : u = u(t)\,;\ v = v(t)$ eğrisinin uzunluğu $t_0 < t < t_1$' e göre eşiti:

$$\begin{aligned} L_\mu &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle V, V \rangle_G}\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ik}(x(t))\, \dot{x}_i(t)\, \dot{x}_k(t)}\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{11}(u_t, v_t)\, u_t^2 + 2g_{12}(u_t, v_t)\, u_t v_t + g_{22}(u_t, v_t)\, v_t^2}\, dt \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada;

$$u_t^2 = \frac{du}{dt}\frac{du}{dt},\ \ u_t v_t = \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt},\ \ v_t^2 = \frac{dv}{dt}\frac{dv}{dt}$$

dir.

Örnek 3.7 $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında kartezyen koordinatlarda standart metrik;

$$G = dx_1^2 + ... + dx_n^2$$

dir. Örneğin 3-boyutlu uzay için;

$$
\begin{aligned}
L_\mu &= \int_a^b \sqrt{g_{ik}(x(t))\,\dot{x}_i(t)\,\dot{x}_k(t)}dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_2(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_3(t)\right)^2}dt
\end{aligned}
$$

dir.

Örnek 3.8 $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ çemberini göz önüne alalım.

$$
\begin{aligned}
&\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
&\qquad t \longrightarrow \alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)
\end{aligned}
$$

şeklinde olur. $0 \le t \le 2\pi$ için;

$$
L_\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_2(t)\right)^2}dt
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= r\cos t \Longrightarrow \dot{x}_1(t) = -r\sin t \\
x_2(t) &= r\sin t \Longrightarrow \dot{x}_2(t) = r\cos t
\end{aligned}
$$

olup buradan;

$$
\begin{aligned}
L_\alpha &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}dt \\
&= \int_0^{2\pi} r\,dt \\
&= r(2\pi - 0) \\
&= 2\pi r
\end{aligned}
$$

dir.

Diğer yandan; $G = dx_1^2 + dx_2^2$ ve $x_1(t) = r\cos t,\ x_2(t) = r\sin t$ olup buradan;

$$G = r^2 dt^2$$

olur.

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \frac{dt}{dt}\frac{dt}{dt}}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} r dr \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

dir.

♦ Uzunluk eğrinin paremetrizasyonundan bağımsızdır.

$a \le t \le b$ için $\mu : x_i = x_i(t)\,,\ (i = 1, ..., n)$ olsun.

$$L_\mu = \int_a^b \sqrt{g_{ik}(x(t))\,\dot{x}_i(t)\,\dot{x}_k(t)}dt$$

şeklindedir. Şimdi

$$\begin{aligned} h : [a', b'] &\longrightarrow [a, b] \\ s &\longrightarrow h(s) \end{aligned}$$

h^{-1} diferensiyellenebilir olsun.

$$\begin{aligned} [a', b'] &\xrightarrow{h} [a, b] \xrightarrow{x_i} \mathbb{R}^n \\ s &\longrightarrow h(s) = t \longrightarrow x_i(t) = x_i(h(s)) \end{aligned}$$

$$y_i(s) = x_i(h(s))$$

$$\dot{y}_i(s) = h'(s)\,\dot{x}_i(h(s))$$

$$\dot{y}_i(s) = \tfrac{dh}{ds}\dot{x}_i(t)$$

$$\dot{x}_i(t) = \dot{y}_i(s)\,\frac{1}{\frac{dh}{ds}}$$

olur.

$$\begin{aligned}
L_\mu &= \int_a^b \sqrt{g_{ik}(x(t))\,\dot{x}_i(t)\,\dot{x}_k(t)}dt \\
&= \int_{a'}^{b'} \sqrt{g_{ik}(y(s))\,\dot{y}_i(s)\,\frac{1}{\frac{dh}{ds}}\dot{y}_k(s)\,\frac{1}{\frac{dh}{ds}}}dt \\
&= \int_{a'}^{b'} \sqrt{g_{ik}(y(s))\,\dot{y}_i(s)\,\dot{y}_k(s)}\frac{1}{\frac{dh}{ds}}dh(s) \\
&= \int_{a'}^{b'} \sqrt{g_{ik}(y(s))\,\dot{y}_i(s)\,\dot{y}_k(s)}ds
\end{aligned}$$

olur. Yani bir eğrinin paremetresi değiştiği zaman uzunluğu değişmez.

Örnek 3.9

$$\begin{aligned}
&\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
&\qquad t \longrightarrow \alpha(t) = \left(-t, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2, t^3\right)
\end{aligned}$$

eğrisinin $\alpha(-2)$ ve $\alpha(1)$ noktaları arasındaki yay uzunluğunu hesaplayalım.

$$L_\alpha = \int_{-2}^{1} \sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_2(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_3(t)\right)^2}dt$$

dir.

$$x_1 = -t \Longrightarrow \dot{x}_1 = -1$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}t^2 \Longrightarrow \dot{x}_2 = \sqrt{6}t$$

$$x_3 = t^3 \Longrightarrow \dot{x}_3 = 3t^2$$

dir.

$$\begin{aligned}
L_\alpha &= \int\limits_{-2}^{1} \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{6}t\right)^2 + (3t^2)^2} dt \\
&= \int\limits_{-2}^{1} \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} dt \\
&= \int\limits_{-2}^{1} \sqrt{(3t^2 + 1)^2} dt \\
&= \int\limits_{-2}^{1} \left|3t^2 + 1\right| dt \\
&= \int\limits_{-2}^{1} 3t^2 + 1 dt \\
&= t^3 + t \ \Big|_{-2}^{1} \\
&= (1+1) - (-8-2) \\
&= 12
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi parametreyi değiştirelim.

$$\begin{aligned}
h &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
&\quad s \longrightarrow h(s) = \frac{s}{2} = t
\end{aligned}$$

alalım.

$$\Longrightarrow \alpha(t) = \alpha(h(s)) = \alpha\left(\frac{s}{2}\right) = \left(-\frac{s}{2}, \frac{\sqrt{6}}{8}s^2, \frac{s^3}{8}\right)$$

olur. Ayrıca;

$t = -2$ olup $t = \dfrac{s}{2}$ olduğundan $s = -4$
$t = 1$ olup $t = \dfrac{s}{2}$ olduğundan $s = 2$

olur. Bu durumda;

$$L_\alpha = \int\limits_{-4}^{2} \sqrt{\left(\dot{y}_1(s)\right)^2 + \left(\dot{y}_2(s)\right)^2 + \left(\dot{y}_3(s)\right)^2} ds$$

dir.

$$y_1 = -\frac{s}{2} \Longrightarrow \dot{y}_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y_2 = \frac{\sqrt{6}}{8}s^2 \Longrightarrow \dot{y}_2 = \frac{\sqrt{6}}{4}s$$
$$y_3 = \frac{s^3}{8} \Longrightarrow \dot{y}_3 = \frac{3s^2}{8}$$

dir.

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \int_{-4}^{2} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}s\right)^2 + \left(\frac{3s^2}{8}\right)^2} ds \\ &= \int_{-4}^{2} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6}{16}s^2 + \frac{9}{64}s^4} ds \\ &= \int_{-4}^{2} \sqrt{\frac{16 + 24s^2 + 9s^4}{64}} ds \\ &= \frac{1}{8}\int_{-4}^{2} \sqrt{(3s^2+4)^2} ds \\ &= \frac{1}{8}\int_{-4}^{2} \left|3s^2+4\right| ds \\ &= \frac{1}{8}\int_{-4}^{2} \left(3s^2+4\right) ds \\ &= 12 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\Longrightarrow$Eğrinin uzunluğu paremetreye bağlı değildir.

Örnek 3.10 (Non-Dejenere olma hali)

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = \left(-t, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2, t^3\right) \end{aligned}$$

eğrisinin $\alpha(-2)$ ve $\alpha(1)$ noktaları arasındaki yay uzunluğunu farklı bir metrikte bulalım.

$$L_\alpha = \int_{-2}^{1} \sqrt{\left(\dot{x}_1(t)\right)^2 - \left(\dot{x}_2(t)\right)^2 + \left(\dot{x}_3(t)\right)^2} dt$$

olarak hesaplayalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \int_{-2}^{1} \sqrt{(-1)^2 - \left(\sqrt{6}t\right)^2 + (3t^2)^2} dt \\ &= \int_{-2}^{1} \sqrt{(3t^2-1)^2} dt \\ &= \int_{-2}^{1} \left|3t^2 - 1\right| dt \\ &= \int_{-2}^{1} \left(3t^2 - 1\right) dt \\ &= t^3 - t \Big|_{-2}^{1} \\ &= (1-1) - (-8+2) \\ &= 6 \end{aligned}$$

olur. Şimdi paremetreyi değiştirelim.

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longrightarrow h(s) = \frac{s}{2} = t$$

$$y(s) = \alpha(t) = \alpha(h(s)) = \alpha\left(\tfrac{s}{2}\right) = \left(-\frac{s}{2}, \frac{\sqrt{6}}{8}s^2, \frac{s^3}{8}\right)$$

olur. Ayrıca;

$t = -2$ olup $t = \dfrac{s}{2}$ olduğundan $s = -4$
$t = 1$ olup $t = \dfrac{s}{2}$ olduğundan $s = 2$

dir. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
L_\alpha &= \int_{-4}^{2} \sqrt{\left(\dot{y}_1(s)\right)^2 - \left(\dot{y}_2(s)\right)^2 + \left(\dot{y}_3(s)\right)^2}ds \\
&= \int_{-4}^{2} \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}s\right)^2 + \left(\frac{3s^2}{8}\right)^2}ds \\
&= \frac{1}{8}\int_{-4}^{2} \sqrt{(3s^2-4)^2}ds \\
&= \frac{1}{8}\int_{-4}^{2} \left|3s^2-4\right| ds \\
&= \frac{1}{8}\int_{-4}^{2} \left(3s^2-4\right) ds \\
&= \frac{1}{8}\left(s^3-4s\right) \Big|_{-4}^{2} \\
&= \frac{1}{8}\left((8-8)-(-64+16)\right) \\
&= \frac{1}{8}\cdot 48 \\
&= 6
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

♦ Eğer bir eğri $\mu = \mu_1 + \mu_2$ yani $\mu : x_i(t),\ a \leq t \leq b;$
$\mu_1 : x_i(t),\ a \leq t \leq c;\ \mu_2 : x_i(t),\ c \leq t \leq b$ ise

$$
L_\mu = L_{\mu_1} + L_{\mu_2}
$$

dir. Yani;

$$
\begin{aligned}
L_\mu &= \int_a^b \sqrt{g_{ik}(x(t))\,\dot{x}_i(t)\,\dot{x}_k(t)}dt \\
&= \int_a^c \sqrt{g_{ik}(x(t))\,\dot{x}_i(t)\,\dot{x}_k(t)}dt + \int_c^b \sqrt{g_{ik}(x(t))\,\dot{x}_i(t)\,\dot{x}_k(t)}dt
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

4. YÜZEYLER İÇİN RİEMANN METRİĞİ

4.1. Öklid Uzayında Gömülü Yüzey Üzerinde Riemann Yapı

4.1.1. Tanjant Vektörlerin İç ve Dış Koordinatları

$r = r(u,v)$ Öklid uzayında gömülü M yüzeyinin paremetrizasyonu olsun.

$$r(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$$

((x_1, x_2, x_3), $\mathbb{R}^3$'deki kartesyen koordinatlar)
M yüzeyinde keyfi bir p noktası olsun. M yüzeyinde p noktasına bağlı vektörler alalım. Bu vektörlerin bulunduğu düzleme tanjant düzlem denir ve T_pM olarak gösterilir.
$p \in M$ noktasında u, v paremetrelerine göre T_pM tanjant uzayının bazı tanımlanabilir.
$\forall (u,v)$ noktası için tanjant baz vektörleri;

$$\begin{aligned} r_u &= \left(\frac{\partial x_1(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial x_2(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial x_3(u,v)}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial x_1(u,v)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2(u,v)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3(u,v)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} r_v &= \left(\frac{\partial x_1(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial x_2(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial x_3(u,v)}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial x_1(u,v)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2(u,v)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3(u,v)}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x_3} \end{aligned}$$

dir.

$\forall X \in T_pM$ vektörü bu bazlara göre yazılabilir:

$$X = ar_u + br_v$$

a, b; X vektörünün katsayı bileşenleridir.
$r = r(t), p$ noktası vasıtasıyla yüzeye bağlı bir eğri;

$$r(t) = r(u(t), v(t))\,; \; p = r(t_0)$$

$$r_t = \frac{dr}{dt} = \frac{dr(u(t), v(t))}{dt}$$

T_pM tanjant düzlemine bir vektördür.

$$r_t = \frac{dr}{dt} = \frac{dr(u(t), v(t))}{dt} = u_t r_u + v_t r_v \tag{4.1}$$

olduğu için vektörün bileşenleri olan a, b'nin eşiti $a = u_t, \; b = v_t$
dir.
Dış gözlemci p noktasına bağlı $\mathbb{R}^3$'deki vektör olarak r_t vektörünü tanımlar. İç gözlemci ise (4.1) deki formüle göre r_u, r_v bazları için (u_t, v_t) bileşenlerine sayip olan vektör olarak tanımlanır.
$X \in T_pM$ keyfi bir tanjant vektörü olsun.

$$\begin{aligned} X &= ar_u + br_v \\ &= a(x_{1_u}(u,v), x_{2_u}(u,v), x_{3_u}(u,v)) + b(x_{1_v}(u,v), x_{2_v}(u,v), x_{3_v}(u,v)) \\ &= (ax_{1_u}(u,v) + bx_{1_v}(u,v), ax_{2_u}(u,v) + bx_{2_v}(u,v), ax_{3_u}(u,v) + bx_{3_v}(u,v)) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu formül içindeki son kolon yerel uzay içerisinde X vektörünün üç bileşenini temsil eder.
(a, b) çifti X tanjant vektörünün iç koordinatları olarak tanımlanır. İç gözlemci (a, b) koordinatlarına dayanarak X vektörünü ele alır. Dış gözlemci ise son kolonda yazdığımız üç dış koordinatlara göre X vektörünü ele alır. (Üç boyutlu yerel uzay içerisinde gömülü yüzeyde)
(u, v) koordinatları yerine sıklıkla $u_\alpha = (u_1, u_2)$'yı kullanacağız.

$$r_\alpha = \frac{dr}{du_\alpha},\ r_u = r_1,\ r_v = r_2$$

$\Longrightarrow X$ vektörü de;

$$X = X_\alpha r_\alpha = X_1 r_1 + X_2 r_2\ ;\ X_1 = a, X_2 = b$$

şeklindedir.
Bu kısaltmaları kullandığımız zaman bildiğimiz toplam formülünü dahil etmeden kullanırız. Yani;
$\sum u_\alpha r_\alpha$ yerine $u_\alpha r_\alpha$'yı kullanacağız. Ayrıca;

$$du_\alpha \left(r_\beta\right) = \delta_{\alpha\beta}$$

dır. Buradan

$$du_1 \left(r_1\right) = du_2 \left(r_2\right) = 1;\ du_1 \left(r_2\right) = du_2 \left(r_1\right) = 0$$

dır.
$p \epsilon M$ noktasının M yüzeyinin iki tanjant vektörü X ve Y olsun.
♦ Dış gözlemci $\mathbb{R}^3$'deki skalar çarpımı kullanarak $p \epsilon \mathbb{R}^3$'deki iki vektör olarak alıp skalar çarpımı hesaplar.
♦ İç gözlemci ise G, Riemann metriğini kullanarak bu iki vektörü M tanjant yüzeyinin iki vektörü olarak alıp skalar çarpımı hesaplar.
♦ L, M de bir eğri olsun. Dış gözlemci bu eğriyi $\mathbb{R}^3$'deki bir eğri olarak hesaplar. Bu eğrinin uzunluğunu yerel uzayın Öklidyen skalar çarpımını kullanarak hesaplar. İç gözlemci ise Riemann metriğini kullanarak bunu yapar.

Tanım 4.1 M, Öklidyen uzayda gömülü bir yüzey olsun. G_M metriği Öklidyen metrik tarafından indirgenmiş metriktir.
G metriğine dayanarak keyfi $A, B \epsilon T_pM$ iki tanjant vektörünün skalar çarpımı hesaplanırsa bu iki vektörünün Öklidyen skalar çarpımı eşittir. Yani;

$$\langle A, B \rangle_{G_M} = \langle A, B \rangle_{G_{\text{Öklidyen}}} \tag{4.2}$$

dir. Dış ve İç gözlemciye göre Tanjant vektörlerinin skalar çarpımı aynı sonucu verir. Bu durumda İç ve Dış gözlemciye göre eğrinin uzunluğu yine aynıdır.

4.1.2. İndirgenen Riemann Metriği İçin Aşikar formül (Birinci Kuadratik Form)

$M : r = r(u, v)$; $\mathbb{R}^3$ içerisinde gömülü yüzey olsun. Yukarıda (4.2) ile verilen ifadenin anlamı;

$r_u = \partial_u$; $r_v = \partial_v$ baz vektörlerinin skalar çarpımı yerel uzayda ve yüzey üzerinde hesabı aynı olmak zorundadır. Örneğin İç gözlemci tarafından hesaplanan $\langle \partial_u, \partial_v \rangle = g_{uv}$ skalar çarpımı; Dış gözlemci tarafından hesaplanan $\langle r_u, r_v \rangle_{\mathbb{R}^3}$ skalar çarpımı eşittir.

$$G = \begin{pmatrix} g_{uu} & g_{uv} \\ g_{vu} & g_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \partial_u, \partial_u \rangle & \langle \partial_u, \partial_v \rangle \\ \langle \partial_v, \partial_u \rangle & \langle \partial_v, \partial_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle_{\mathbb{R}^3} & \langle r_u, r_v \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ \langle r_v, r_u \rangle_{\mathbb{R}^3} & \langle r_v, r_v \rangle_{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$\langle , \rangle_{\mathbb{R}^3}$, yerel Öklidyen uzayda skalar çarpımdır.

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle_{\mathbb{R}^3} & \langle r_u, r_v \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ \langle r_v, r_u \rangle_{\mathbb{R}^3} & \langle r_v, r_v \rangle_{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix}; \ g_{\alpha\beta} = \langle r_\alpha, r_\beta \rangle$$

dir. (u, v) paremetresi u_1, u_2 ile ve $r = r(u, v)$ yerine $r = r(u_1, u_2)$ gösterelim.

$$G_M = g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2$$

dir. Bu formül yüzey üzerinden İndirgenmiş Riemann metriği için formüldür ve buna 1. Kuadratik Form denir.

X, Y Tanjant düzlemde iki tanjant vektör ise p noktasındaki $G(X, Y)$, X ile

Y'nin skalar çarpımına eşittir.

$$\begin{aligned}
\langle X, Y\rangle &= \langle X_1 r_1 + X_2 r_2, Y_1 r_1 + Y_2 r_2\rangle \\
&= X_1 \langle r_1, r_1\rangle Y_1 + X_1 \langle r_1, r_2\rangle Y_2 + X_2 \langle r_2, r_1\rangle Y_1 + X_2 \langle r_2, r_2\rangle Y_2 \\
&= X_\alpha \langle r_\alpha, r_\beta\rangle Y_\beta = X_\alpha g_{\alpha\beta} Y_\beta \\
&= G(X, Y)
\end{aligned}$$

dir.

Kartezyen koordinatlarda $\langle X, Y\rangle = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$ yani; kartezyen koordinatlarda Öklid metriği;

$$G_{\mathbb{R}^3} = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

dir.

$$G_{\mathbb{R}^3} \mid_{r=r(u,v)} = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \mid_{r=r(u,v)} = G_M = g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta$$

dir. Yani;

$$\begin{aligned}
G_{\mathbb{R}^3} \mid_{r=r(u,v)} &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \mid_{r=r(u,v)} \\
&= \left(\frac{\partial x_1(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial x_1(u,v)}{\partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial x_2(u,v)}{\partial v}dv\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\partial x_3(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial x_3(u,v)}{\partial v}dv\right)^2 \\
&= \left(x_{1_u}du + x_{1_v}dv\right)^2 + \left(x_{2_u}du + x_{2_v}dv\right)^2 + \left(x_{3_u}du + x_{3_v}dv\right)^2 \\
&= \left(x_{1_u}^2 + x_{2_u}^2 + x_{3_u}^2\right) du^2 + 2\left(x_{1_u}x_{1_v} + x_{2_u}x_{2_v} + x_{3_u}x_{3_v}\right) dudv \\
&\quad + \left(x_{1_v}^2 + x_{2_v}^2 + x_{3_v}^2\right) dv^2
\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan;

$$G_M = g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

$$\Longrightarrow g_{11} = g_{\mathrm{uu}} = \left(x_{1_u}^2 + x_{2_u}^2 + x_{3_u}^2\right) = \langle r_u, r_u\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$g_{12} = g_{21} = g_{uv} = g_{vu} = \left(x_{1_u}x_{1_v} + x_{2_u}x_{2_v} + x_{3_u}x_{3_v}\right) = \langle r_u, r_v\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

$$g_{22} = g_{vv} = \left(x_{1_v}^2 + x_{2_v}^2 + x_{3_v}^2\right) = \langle r_v, r_v\rangle_{\mathbb{R}^3}$$

dir.

Dış gözlemci (Öklid metriğini kullanarak) tarafından hesaplanan eğrinin ve tanjant vektörünün boyu; İç gözlemci (İndirgenen Riemann metriğini kullanarak) tarafından hesaplanana eşittir.

Dış gözlemci tarafından hesaplanan X vektörünün boyu, $X = ar_u + br_v$ olmak üzere;

$$|X|^2 = \langle X, X\rangle = \langle ar_u + br_v, ar_u + br_v\rangle = a^2\langle r_u, r_u\rangle + 2ab\langle r_u, r_v\rangle + b^2\langle r_v, r_v\rangle \tag{4.3}$$

dir. $\langle , \rangle$; $\mathbb{R}^3$'de skalar çarpımdır.

İç gözlemci tarafından hesaplanan X vektörünün boyu;

$$G(X, X) = (a, b)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = a^2 g_{11} + 2ab g_{12} + b^2 g_{22} \tag{4.4}$$

dir.

Dış gözlemci (4.3) formülünü kullanarak tanjant vektörlerinin uzunluğunu hesaplar. İç gözlemci ise (4.4) formülünü kullanarak iç koordinatlar içinde bu vektörün boyunu hesaplar.

$r(t) = r(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$ yüzey üzerinde bir eğri olsun. Bu eğrinin hızı;

$$V = \varepsilon r_u + \mu r_v,\ V = \frac{dr(t)}{dt} = u_t r_u + v_t r_v$$

dir. Bu eğrinin uzunluğu;

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |V(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\langle V(t), V(t)\rangle_{\mathbb{R}^3}}dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle u_t r_u + v_t r_v, u_t r_u + v_t r_v\rangle_{\mathbb{R}^3}}dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle r_u, r_u\rangle_{\mathbb{R}^3} u_t^2 + 2\langle r_u, r_v\rangle_{\mathbb{R}^3} u_t v_t + \langle r_v, r_v\rangle_{\mathbb{R}^3} v_t^2}dt \end{aligned} \tag{4.5}$$

ve

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{11} u_t^2 + 2 g_{12} u_t v_t + g_{22} v_t^2} dt \tag{4.6}$$

dir.

Dış gözlemci (4.5) kullanarak eğrinin boyunu hesaplarken, İç gözlemci (4.6) kullanarak yüzey üzerindeki Riemann metriğini kullanarak eğrinin boyunu hesaplar ve ikisi de aynı sonucu verir.

Örnek 4.1 $x_3 - F(x_1, x_2) = 0$ olsun. Bu yüzey için paremetrizasyon;

$$r(u,v) : x_1 = u; \ x_2 = v; \ x_3 = F(u,v)$$

dir.

$$r_u = (1, 0, F_u)$$

$$r_v = (0, 1, F_v)$$

olup buradan;

$$\langle r_u, r_u \rangle = 1 + F_u^2$$

$$\langle r_u, r_v \rangle = F_u F_v$$

$$\langle r_v, r_v \rangle = 1 + F_v^2$$

dir. İndirgenmiş Riemann metriğinin eşiti;

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u \rangle & \langle r_u, r_v \rangle \\ \langle r_v, r_u \rangle & \langle r_v, r_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + F_u^2 & F_u F_v \\ F_u F_v & 1 + F_v^2 \end{pmatrix}$$

olup;

$$G_M = ds^2 = (1 + F_u^2)\, du^2 + 2F_u F_v du dv + (1 + F_v^2)\, dv^2$$

dir.

$r(t) = r(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$ yüzey üzerindeki eğrinin uzunluğu;

$$L = \int_a^b \sqrt{(1 + F_u^2)\, u_t^2 + 2F_u F_v u_t v_t + (1 + F_v^2)\, v_t^2}\, dt$$

dir.

Alışılmış formülü kullanarak hesaplarsak;

$$G_M = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)\, |_{x_1 = u\ ;\ x_2 = v\ ;\ x_3 = F(u,v)}$$

$$dx_1 = du\ ;\ dx_2 = dv\ ;\ dx_3 = F_u du + F_v dv$$

yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} G_M &= du^2 + dv^2 + (F_u du + F_v dv)^2 \\ &= \left(1 + F_u^2\right) du^2 + 2F_u F_v du dv + \left(1 + F_v^2\right) dv^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2 (Silindir) $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ silindir denklemi olsun. Bu yüzeyin paremetrizasyonu;

$$r(u, v) : x_1 = a \cos u,\ x_2 = a \sin u,\ x_3 = v$$

dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} G_{\text{Silindir}} &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) |_{r = r(u,v)} \\ &= (-a \sin u du)^2 + (a \cos u du)^2 + dv^2 \\ &= a^2 du^2 + dv^2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Tanjant vektörlerin skalar çarpımına dayanarak aynı formül;

$$r_u = (-a\sin u, a\cos u, 0)$$

$$r_v = (0, 0, 1)$$

$$\langle r_u, r_u\rangle = a^2,\ \langle r_u, r_v\rangle = \langle r_v, r_u\rangle = 0,\ \langle r_v, r_v\rangle = 1$$

$$\Longrightarrow \|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_u\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olup

$$G = a^2du^2 + dv^2$$

olarak bulunur.

Silindir üzerinde $r(t) = r(u(t), v(t))$; $a \leq t \leq b$ eğrisinin uzunluğu;

$$L = \int_a^b \sqrt{a^2u_t^2 + v_t^2}dt$$

dir.

Örnek 4.3 (Koni) Koninin denklemi $x_1^2 + x_2^2 - k^2x_3^2 = 0$ dır. Bu yüzeyin paremetrizasyonu;

$$r(h, \theta) : x_1 = kh\cos\theta;\ x_2 = kh\sin\theta;\ x_3 = h$$

dır. Burada;

$$dx_1 = -kh\sin\theta d\theta + k\cos\theta dh$$

$$dx_2 = kh\cos\theta d\theta + k\sin\theta dh$$

$$dx_3 = dh$$

olup

$$
\begin{aligned}
G &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)|_{x_1=kh\cos\theta\ ;\ x_2=kh\sin\theta\ ;\ x_3=h} \\
&= \left(-kh\sin\theta d\theta + k\cos\theta dh\right)^2 + \left(kh\cos\theta d\theta + k\sin\theta d\theta\right)^2 + dh^2 \\
&= k^2h^2d\theta^2 + \left(1+k^2\right)dh^2
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} 1+k^2 & 0 \\ 0 & k^2h^2 \end{pmatrix}
$$

olur. Şimdi

$$
r_h = (k\cos\theta, k\sin\theta, 1)
$$

$$
r_\theta = (-kh\sin\theta, kh\cos\theta, 0)
$$

dır.

$$
\langle r_h, r_h\rangle = 1+k^2,\ \langle r_h, r_\theta\rangle = \langle r_\theta, r_h\rangle = 0,\ \langle r_\theta, r_\theta\rangle = k^2h^2
$$

olup yine G metriği;

$$
G = k^2h^2d\theta^2 + (1+k^2)\,dh^2
$$

dir.

Koni üzerinde $r(t) = (h(t), \theta(t))\,;\ a \leq t \leq b$ eğrisinin uzunluğu;

$$
L = \int_a^b \sqrt{k^2h^2\theta_t^2 + (1+k^2)\,h_t^2}dt
$$

dir.

Örnek 4.4 (Küre) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ kürenin denklemi olsun. Bu yüzeyin paremetrizasyonu;

$$r\left(u,v\right): x_1 = a\cos u\cos v,\;\; x_2 = a\sin u\cos v,\;\; x_3 = a\sin v$$

dir. Burada;

$$\begin{aligned}
dx_1 &= -a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv \\
dx_2 &= a\cos u\cos v du - a\sin u\sin v dv \\
dx_3 &= a\cos v dv
\end{aligned}$$

olup;

$$\begin{aligned}
G &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)|_{x_1=a\cos u\cos v\ ;\ x_2=a\sin u\cos v\ ;\ x_3=a\sin v} \\
&= \left(-a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv\right)^2 + \left(a\cos u\cos v du - a\sin u\sin v dv\right)^2 \\
&\quad + \left(a\cos v dv\right)^2 \\
&= a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2
\end{aligned}$$

dir.

$$\Longrightarrow G = a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$$

dir.

$$\Longrightarrow \|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} a^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

dir. Yine aynı şekilde;

$$r_u = \left(-a\sin u\cos v, a\cos u\cos v, 0\right)$$

$$r_v = \left(-a\cos u\sin v, -a\sin u\sin v, a\cos v\right)$$

olup;

$$\langle r_u, r_u\rangle = a^2\cos^2 v,\;\; \langle r_u, r_v\rangle = \langle r_v, r_u\rangle = 0,\;\; \langle r_v, r_v\rangle = a^2$$

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_u\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

olur.

$$\Longrightarrow G = a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$$

dir.

a-yarıçaplı kürenin üzerinde $r(t) = (u(t), v(t))$; $a \le t \le b$ eğrisinin uzunluğu;

$$L = \int_a^b \sqrt{a^2\cos^2 v u_t^2 + a^2 v_t^2} dt$$

dir.

Örnek 4.5 (Eyer) Eyerin denklemi $x_3 - x_1x_2 = 0$ dır. Bu yüzeyin standart paremetrizasyonu;

$$r(u,v) : x_1 = u,\ x_2 = v,\ x_3 = uv$$

dir. İndirgenmiş metrik;

$$\begin{aligned} G &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)|_{x_1=u\ ;\ x_2=v\ ;\ x_3=uv} \\ &= du^2 + dv^2 + (udu + vdv)^2 \\ &= \left(1+v^2\right)du^2 + 2uvdudv + \left(1+u^2\right)dv^2 \end{aligned}$$

olur.

$$r_u = (1,0,v)$$

$$r_v = (0,1,u)$$

$$\langle r_u, r_u\rangle = 1+v^2,\ \langle r_u, r_v\rangle = \langle r_v, r_u\rangle = uv,\ \langle r_v, r_v\rangle = 1+u^2$$

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_v, r_u\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

olur.

$$\Longrightarrow G = (1+v^2)\,du^2 + 2uvdudv + (1+u^2)\,dv^2$$

dir.

$r(t) = r(u(t), v(t))\,;\ a \leq t \leq b$ eğrisinin uzunluğu;

$$L = \int_a^b \sqrt{(1+v^2)\,u_t^2 + 2uvu_tv_t + (1+u^2)\,v_t^2}dt$$

dir.

Örnek 4.6 (Tek ve Çift Kanatlı Hiperboloid) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = c$ denklemi için;

$c = 0 \Longrightarrow$Koni

$c>0 \Longrightarrow$Tek kanatlı hiperboloid

$c<0 \Longrightarrow$Çift kanatlı hiperboloid

denklemidir.

Tek Kanatlı Hiperboloid: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a^2$ denklemi verilsin. Bunun paremetrizasyonu;

$$r(\theta, \varphi) : x_1 = a\cosh\theta\cos\varphi,\ x_2 = a\cosh\theta\sin\varphi,\ x_3 = a\sinh\theta$$

dir. İndirgenmiş Riemann metriği;

$$
\begin{aligned}
G &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) |_{x_1 = a\cos\theta\cos\varphi, x_2 = a\cosh\theta\sin\varphi, x_3 = a\sinh\theta} \\
&= (a\sinh\theta\cos\varphi d\theta - a\cosh\theta\sin\varphi d\varphi)^2 + (a\sinh\theta\sin\varphi d\theta + a\cosh\theta\cos\varphi d\varphi)^2 \\
&\quad + (a\cosh\theta d\theta)^2 \\
&= a^2\sinh^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 + a^2\cosh^2\theta\sin^2\varphi d\varphi^2 - 2a^2\sinh\theta\cos\varphi\cosh\theta\sin\varphi d\theta d\varphi \\
&\quad + a^2\sinh^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2 + a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi d\varphi^2 + 2a^2\sinh\theta\sin\varphi\cosh\theta\cos\varphi d\theta d\varphi \\
&\quad + a^2\cosh^2\theta d\theta^2 \\
&= a^2\sinh^2\theta d\theta^2 + a^2\cosh^2\theta d\varphi^2 + a^2\cosh^2\theta d\theta^2 \\
&= a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) d\theta^2 + a^2\cosh^2\theta d\varphi^2
\end{aligned}
$$

dir.

$$\Longrightarrow G = a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) d\theta^2 + a^2\cosh^2\theta d\varphi^2$$

dır.

$$r_\theta = (a\sinh\theta\cos\varphi, a\sinh\theta\sin\varphi, a\cosh\theta)$$

$$r_\varphi = (-a\cosh\theta\sin\varphi, a\cosh\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\langle r_\theta, r_\theta\rangle = a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right),\ \langle r_\theta, r_\varphi\rangle = \langle r_\varphi, r_\theta\rangle = 0,\ \langle r_\varphi, r_\varphi\rangle = a^2\cosh^2\theta$$

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \langle r_\theta, r_\theta\rangle & \langle r_\theta, r_\varphi\rangle \\ \langle r_\varphi, r_\theta\rangle & \langle r_\varphi, r_\varphi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) & 0 \\ 0 & a^2\cosh^2\theta \end{pmatrix}$$

olur.

$$\Longrightarrow G = a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) d\theta^2 + a^2\cosh^2\theta d\varphi^2$$

yine aynıdır.

Çift Kanatlı Hiperboloid: $x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2$ şeklindedir. Paremetrizasyonu ise;

$$r(\theta,\varphi) : x_1 = a\sinh\theta\cos\varphi,\ \ x_2 = a\sinh\theta\sin\varphi,\ \ x_3 = a\cosh\theta$$

İndirgenmiş Riemann metriği;

$$\begin{aligned}
G &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)|_{x_1=a\sinh\theta\cos\varphi, x_2=a\sinh\theta\sin\varphi, x_3=a\cosh\theta} \\
&= (a\cosh\theta\cos\varphi d\theta - a\sinh\theta\sin\varphi d\varphi)^2 + (a\cosh\theta\sin\varphi d\theta + a\sinh\theta\cos\varphi d\varphi)^2 \\
&\quad + (a\sinh\theta d\theta)^2 \\
&= a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2 + a^2\sinh^2\theta\sin^2\varphi d\varphi^2 - 2a^2\cosh\theta\cos\varphi\sinh\theta\sin\varphi d\theta d\varphi \\
&\quad + a^2\cosh^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2 + a^2\sinh^2\theta\cos^2\varphi d\varphi^2 + 2a^2\cosh\theta\sin\varphi\sinh\theta\cos\varphi d\theta d\varphi \\
&\quad + a^2\sinh^2\theta d\theta^2 \\
&= a^2\cosh^2\theta d\theta^2 + a^2\sinh^2\theta d\varphi^2 + a^2\sinh^2\theta d\theta^2 \\
&= a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) d\theta^2 + a^2\sinh^2\theta d\varphi^2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow G = a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) d\theta^2 + a^2\sinh^2\theta d\varphi^2$$

dir.

$$r_\theta = (a\cosh\theta\cos\varphi, a\cosh\theta\sin\varphi, a\sinh\theta)$$

$$r_\varphi = (-a\sinh\theta\sin\varphi, a\sinh\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\langle r_\theta, r_\theta\rangle = a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right),\ \langle r_\theta, r_\varphi\rangle = \langle r_\varphi, r_\theta\rangle = 0,\ \langle r_\varphi, r_\varphi\rangle = a^2\sinh^2\theta$$

$$\|g_{\alpha\beta}\| = \begin{pmatrix} \langle r_\theta, r_\theta\rangle & \langle r_\theta, r_\varphi\rangle \\ \langle r_\varphi, r_\theta\rangle & \langle r_\varphi, r_\varphi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) & 0 \\ 0 & a^2\sinh^2\theta \end{pmatrix}$$

olur.

$$\Longrightarrow G = a^2\left(1 + 2\sinh^2\theta\right) d\theta^2 + a^2\sinh^2\theta d\varphi^2$$

aynı olur.

4.1.3. Pseudo-Öklidyen Uzayda Gömülü İki Kanatlı Hiperbolik Üzerinde İndirgenmiş Metrik

Pseduo-Skalar çarpım (Pseudo-Öklidyen uzayda gömülü iki kanatlı hiperbolik üzerinde) bilineer form tarafından

$$\langle X,Y\rangle_{\text{pseudo}} = X_1Y_1 + X_2Y_2 - X_3Y_3$$

şeklinde tanımlanır.
Bu "pseudo-skalar" çarpım bilineer, simetrik ve non-dejeneredir. Pozitif tanımlı değildir.
$X = (a\cos\theta, a\sin\theta, \mp a)$ vektörünün pseudo uzunluğu sıfırdır.

$$X = (a\cos\theta, a\sin\theta, \mp a) \Longrightarrow \langle X,X\rangle_{\text{pseudo}} = 0$$

dır. Pseudo-Riemann metriği;

$$G_{\text{Pseudo}} = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$$

dır.
3-boyutlu Pseudo-Öklidyen uzay içerisindeki Pseudo-Riemann metriği, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ iki kanatlı hiperbolik üzerindeki Riemann metriği sonucu çıkarılır.
İki kanatlı hiperboliğin paremetriasyonu;

$$r(\theta,\varphi) : x_1 = a\sinh\theta\cos\varphi,\ x_2 = a\sinh\theta\sin\varphi,\ x_3 = a\cosh\theta$$

olup;

$$G = (dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)\ |_{x_1=a\sinh\theta\cos\varphi, x_2=a\sinh\theta\sin\varphi, x_3=a\cosh\theta}$$

$$= (a\cosh\theta\cos\varphi d\theta - a\sinh\theta\sin\varphi d\varphi)^2 + (a\cosh\theta\sin\varphi d\theta + a\sinh\theta\cos\varphi d\varphi)^2$$

$$-\left(a\sinh\theta d\theta\right)^2$$

$$=a^2\cosh^2\theta\cos^2\varphi d\theta^2+a^2\sinh^2\theta\sin^2\varphi d\varphi^2-2a^2\cosh\theta\cos\varphi\sinh\theta\sin\varphi d\theta d\varphi$$

$$+a^2\cosh^2\theta\sin^2\varphi d\theta^2+a^2\sinh^2\theta\cos^2\varphi d\varphi^2+2a^2\cosh\theta\sin\varphi\sinh\theta\cos\varphi d\theta d\varphi$$

$$-a^2\sinh^2\theta d\theta^2$$

$$=a^2\cosh^2\theta d\theta^2+a^2\sinh^2\theta d\varphi^2-a^2\sinh^2\theta d\theta^2$$

$$=a^2 d\theta^2+a^2\sinh^2\theta d\varphi^2$$

$$\Longrightarrow G=a^2 d\theta^2+a^2\sinh^2\theta d\varphi^2$$

dir. Bu metrik Hiperbolik veya Lobachevsky düzlem olarak adlandırılır.
Şimdi bunu Stereografik koordinatlarda Riemann metriğini ifade edelim.

$$L: x_3^2-x_1^2-x_2^2=1;\ x_3 > 0$$

iki kanatlı hiperboliği alalım. u, v Stereografik koordinatlar olmak üzere;

$$u=\frac{x_1}{1+x_3},\ y=\frac{x_2}{1+x_3}$$

olup burada;

$$x_1=\frac{2u}{1-u^2-v^2},\ x_2=\frac{2v}{1-u^2-v^2},\ x_3=\frac{u^2+v^2+1}{1-u^2-v^2}$$

şeklindedir.

$$
\begin{aligned}
G &= \left(dx_1^2+dx_2^2-dx_3^2\right) \\
&= \left(d\left(\frac{2u}{1-u^2-v^2}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{2v}{1-u^2-v^2}\right)\right)^2-\left(d\left(\frac{u^2+v^2+1}{1-u^2-v^2}\right)\right)^2 \\
&= \left(\frac{2du}{1-u^2-v^2}+\frac{2u\left(2udu+2vdv\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}\right)^2+\left(\frac{2dv}{1-u^2-v^2}+\frac{2v\left(2udu+2vdv\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}\right)^2 \\
&\quad -\left(\frac{2udu+2vdv}{1-u^2-v^2}+\frac{\left(u^2+v^2+1\right)\left(2udu+2vdv\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2du\left(1-u^2-v^2\right)+2u\left(2udu+2vdv\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}\right)^2 \\
&\quad +\left(\frac{2dv\left(1-u^2-v^2\right)+2v\left(2udu+2vdv\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}\right)^2 \\
&\quad -\left(\frac{\left(2udu+2vdv\right)\left(1-u^2-v^2\right)+\left(u^2+v^2+1\right)\left(2udu+2vdv\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\left(1-u^2-v^2\right)^4}(4du^2\left(1-u^2-v^2\right)^2+4u^2\left(2udu+2vdv\right)^2 \\
&\quad +8udu\left(2udu+2vdv\right)\left(1-u^2-v^2\right)) \\
&\quad +\frac{1}{\left(1-u^2-v^2\right)^4}(4dv^2\left(1-u^2-v^2\right)^2+4v^2\left(2udu+2vdv\right)^2 \\
&\quad +8vdv\left(2udu+2vdv\right)\left(1-u^2-v^2\right)) \\
&\quad -\frac{1}{\left(1-u^2-v^2\right)^4}(4\left(2udu+2vdv\right)^2) \\
&= \frac{1}{\left(1-u^2-v^2\right)^4}(4\left(1-u^2-v^2\right)^2\left(du^2+dv^2\right)+4\left(2udu+2vdv\right)^2\left(u^2+v^2-1\right) \\
&\quad +4\left(2udu+2vdv\right)^2\left(1-u^2-v^2\right)) \\
&= \frac{4\left(1-u^2-v^2\right)^2\left(du^2+dv^2\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^4} \\
&= \frac{4\left(du^2+dv^2\right)}{\left(1-u^2-v^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Şimdi bunu Öklid uzayındaki Stereografik koordinatlardaki Riemann metriği ile kıyaslayalım.

$$L : x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

küresi olsun.

$$
\begin{aligned}
G &= \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \\
&= \left(d\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{2v}{1+u^2+v^2}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)\right)^2 \\
&= \left(\frac{2du}{1+u^2+v^2} - \frac{2u\,(2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{2dv}{1+u^2+v^2} - \frac{2v\,(2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2udu+2vdv}{1+u^2+v^2} - \frac{(u^2+v^2-1)\,(2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2du\,(1+u^2+v^2) - 2u\,(2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2dv\,(1+u^2+v^2) - 2v\,(2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{(2udu+2vdv)\,(1+u^2+v^2) - (u^2+v^2-1)\,(2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^4}(4du^2\left(1+u^2+v^2\right)^2 + 4u^2\,(2udu+2vdv)^2 \\
&\quad -8udu\,(2udu+2vdv)\left(1+u^2+v^2\right)) \\
&\quad + \frac{1}{(1+u^2+v^2)^4}(4dv^2\left(1+u^2+v^2\right)^2 + 4v^2\,(2udu+2vdv)^2 \\
&\quad -8vdv\,(2udu+2vdv)\left(1+u^2+v^2\right)) \\
&\quad + \frac{1}{(1+u^2+v^2)^4}(4\,(2udu+2vdv)^2) \\
&= \frac{1}{(1+u^2+v^2)^4}(4\left(1+u^2+v^2\right)^2\left(du^2+dv^2\right) + 4\,(2udu+2vdv)^2\left(u^2+v^2+1\right) \\
&\quad -4\,(2udu+2vdv)^2\left(u^2+v^2+1\right)) \\
&= \frac{4\,(1+u^2+v^2)^2\,(du^2+dv^2)}{(1+u^2+v^2)^4} \\
&= \frac{4\,(du^2+dv^2)}{(1+u^2+v^2)^2}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

4.1.4. Riemann Manifoldunun İzometrileri

(M_1, G_1) , (M_2, G_2) iki Riemann manifoldu ve sırasıyla G_1 ve G_2 Riemann metrikleri olsunlar. Eğer;

$$\begin{array}{lcl} F: M_1 \longrightarrow M_2 & & \text{diffeomorfizm olmak üzere;} \\ \quad\downarrow \qquad\quad \downarrow & & \\ \quad G_1 \qquad\;\; G_2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} F_*: TM_1 &\longrightarrow TM_2 \\ X &\longrightarrow F_*(X) \\ Y &\longrightarrow F_*(Y) \end{aligned}$$

olup

$$G_1(X,Y) = G_2(F_*(X), F_*(Y))$$

ise bu Riemann manifoldları izometriktir denir.
p_1; M_1 Manifoldu üzerinde herhangi bir nokta ve $p_2 \epsilon M_2$ için $F(p_1) = p_2$ dir. $\{x_i\}$ koordinatlarda $p_1 \epsilon M_1$ noktasının komşuluğunda ve $p_2 \epsilon M_2$ noktasının komşuluğunda $\{y_a\}$ olsun. M_1 üzerindeki G_1 Riemann metriği $\{x_i\}$ koordinatlar da;

$$G_1 = g_{(1)ik} dx_i dx_k$$

Local gösterime; G_2 Riemann metriği $\{y_a\}$ koordinatlar da

$$G_2 = g_{(2)ab} dy_a dy_b$$

Local gösterime sayiptir ve

$$g_{(1)ik} dx_i dx_k = g_{(2)ab} dy_a dy_b$$

dir. Bu izometri genel olarak;

$$F_* G_2 = G_1$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon;

$i)$ f $1:1$ dir

$ii)$ f ve f^{-1} diferensiyellenebilirdir

şartları sağlar ise f 'ye diffeomorfizm denir.

Tanım 4.3 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon olsun. Eğer;

$\forall z \in D(f)$ için $\exists V \in N_{(z)}$ öyle ki $f\mid_V$ diffeomorfizm ise f'ye Local diffeomorfizm denir.

f Local diffeomorfizmdir. $\Leftrightarrow \forall z \in D(f)$ için $\det J(f,z) \neq 0$ dır.

Her diffeomorfizm bir Local diffeomorfizmdir. Ancak $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $C^\infty-$sınıfından bir fonksiyon olsun ve $1:1$ ise f diffeomorfizmdir.

Tanım 4.4 Eğer $F : M_1 \longrightarrow M_2$ Local diffeomorfizm ise bunlara Local izomorfiktir denir. Local izometri dönüşümü Tanjant vektörlerin dış çarpımını koruyan bir dönüşümdür. Bu yüzden bir izometri birebir ve örten bir Local izomorfizmdir. (Local izometrik Riemann manifoldları diffeomorfik olmak zorunda değildir.)

Örnek 4.7 M_1 bir helicoid; M_2 ise catenoid olsun.

Helicoid'in paremetrizasyonu;

$$x(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

Catenoid'in paremetrizasyonu;

$$y(u,v) = \left(\arg\sinh u, \sqrt{1+u^2}\cos v, \sqrt{1+u^2}\sin v\right)$$

dir.

$$\begin{aligned} F &: M_1 \longrightarrow M_2 \\ x(u,v) &\longrightarrow F(x(u,v)) = y(u,v) \end{aligned}$$

olsun. Şimdi F altında M_1 ile M_2'nin izometrik olduğunu gösterelim. Riemann metriği;

$$G_1 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \mid_{x=x(u,v)}$$

dir.

$$r_u = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$r_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

$$\langle r_u, r_u \rangle = 1,\ \langle r_u, r_v \rangle = \langle r_v, r_u \rangle = 0,\ \langle r_v, r_v \rangle = 1 + u^2$$

$$\|g_{ik}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

dir. Bu durumda;

$$G_1 = du^2 + (1+u^2)\, dv^2$$

olur.

$$G_2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \mid_{y=y(u,v)}$$

dir.

$$r_u = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cos v, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \sin v \right)$$

$$r_v = \left(0, -\sin v \sqrt{1+u^2}, \cos v \sqrt{1+u^2}\right)$$

dir.

$$\langle r_u, r_u \rangle = \frac{1}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^2}\cos^2 v + \frac{u^2}{1+u^2}\sin^2 v = 1$$

$$\langle r_u, r_v \rangle = \langle r_v, r_u \rangle = -\sin v \cos v \cdot u + \sin v \cos v \cdot u = 0$$

$$\langle r_v, r_v \rangle = \sin^2 v\,(1+u^2) + \cos^2 v\,(1+u^2) = 1 + u^2$$

$$\|g_{ab}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

dır.

$$G_2 = du^2 + (1+u^2)\,dv^2$$

olur.

$\Longrightarrow F$ altında esas form korunur.

Bu durumda M_1 ve M_2 izometriktir. (Local izometriktir.)

4.1.5. Riemann Manifold İçinde Hacim Elementi

$G = g_{ik}dx_i dx_k$ metriği ile n-boyutlu Riemann manifoldu içinde Hacim elementi;

$$\sqrt{\det g_{ik}}dx_1...dx_n$$

ile tanımlanır.

Eğer D; $D = g_{ik}dx_i$ metrik ile n-boyutlu Riemann manifoldu içerisinde bir bölge ise Hacim bu bölge üzerinde hacim elementinin integraline eşittir. Yani;

$$V\,(D) = \int_D \sqrt{\det g_{ik}}dx_1...dx_n$$

dir.

Hacim elementi;

$$\sqrt{\det g_{ik}} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

şeklinde okunabilir.

$n = 1$ olması durumunda hacim uzunluktur, $n = 2$ ise bölgedir.

4.1.6. Koordinatların Değişimi Altında Hacim Elementinin Değişmezliği

Hacim elementi koordinat dönüşümü altında invaryattır. Eğer $y_1, ..., y_n$ yeni koordinatlar:

$$x_1 = x_1 (y_1, ..., y_n) \ ; \ x_2 = x_2 (y_1, ..., y_n) ... x_i = x_i (y_1, ..., y_n) \ ; \ x_i = x_i (y_p)$$
$$(i = 1, ..., n \ ; \ p = 1, ..., n)$$

ve yeni koordinatlarda metriğin $\hat{g}_{pq} (y)$ matrisi;

$$\hat{g}_{pq} (y) = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} g_{ik} (x (y)) \frac{\partial x_k}{\partial y_q}$$

şeklindedir. Sonra;

$$\sqrt{\det g_{ik} (x)} dx_1 ... dx_n = \sqrt{\det \hat{g}_{pq} (y)} dy_1 ... dy_n$$

dir. Şöyle ki;

$$\sqrt{\det \hat{g}_{pq} (y)} dy_1 ... dy_n = \sqrt{\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p} g_{ik} (x (y)) \frac{\partial x_k}{\partial y_q} \right)} dy_1 ... dy_n$$

dir.

Diğer yandan $\det (A \cdot B \cdot C) = \det A \cdot \det B \cdot \det C$ ve $\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right) = \det \left(\frac{dx_k}{dy_q} \right)$ dur (Satırlar üzerindeki kolonları değiştirirsek matrisin determinantı değişmez).

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\det \hat{g}_{pq}(y)}dy_1...dy_n &= \sqrt{\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p} g_{ik}(x(y))\frac{\partial x_k}{\partial y_q}\right)}dy_1...dy_n \\
&= \sqrt{\left(\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right)\right)^2}\sqrt{\det g_{ik}(x(y))}dy_1...dy_n \\
&= \sqrt{\det g_{ik}(x(y))}\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right)dy_1...dy_n
\end{aligned}
$$

dir. Burada;

$$
\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right)dy_1...dy_n = dx_1...dx_n
$$

olduğundan;

$$
\sqrt{\det \hat{g}_{pq}(y)}dy_1...dy_n = \sqrt{\det g_{ik}(x(y))}dx_1...dx_n
$$

dir.

Örnek 4.8 Kartezyen koordinatlar içerisindeki düzlemin hacim elementini bulalım.

$$
G = dx_1^2 + dx_2^2
$$

olup Hacim elementi;

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\det g}dx_1dx_2 &= \sqrt{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}dx_1dx_2 \\
&= dx_1dx_2
\end{aligned}
$$

dir.

Örnek 4.9 Kutupsal koordinatlarda; $x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta$ ve metrik;

$$G = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

dir. Kutupsal koordinatlarda Hacim elementi;

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g} dr d\theta &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}} dr d\theta \\ &= r dr d\theta \end{aligned}$$

dir.

Örnek 4.10 Stereografik koordinatlarda 1-yarıçaplı küre;

$$G = \frac{4\left(du^2 + dv^2\right)}{\left(1 + u^2 + v^2\right)^2}$$

metriği ile iki boyutlu düzlemi düşünelim.

$$g = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

olup

$$\det g = \frac{16}{\left(1 + u^2 + v^2\right)^4}$$

dir. Hacim elementi ise;

$$\sqrt{\det g} du dv = \frac{4}{\left(1 + u^2 + v^2\right)^2} du dv$$

dir.

u, v koordinatlarda hacim hesaplanır ama $u = r\cos\theta, \; v = r\sin\theta$ polar koordinatlarda hacim formunu düşünmek daha iyidir.

$$G = \frac{4\left(du^2 + dv^2\right)}{\left(1 + u^2 + v^2\right)^2} = \frac{4\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)}{\left(1 + r^2\right)^2}$$

ve Hacim formu;

$$\sqrt{\det g}drd\theta = \frac{4rdrd\theta}{(1+r^2)^2}$$

dir.

Örnek 4.11 Standart Riemann metriği ile Öklid uzayı içerisinde a-yarıçaplı küreyi
düşünürsek;

$$G = a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$$

dir. Hacim elementi;

$$\begin{aligned}\sqrt{\det g}dudv &= \sqrt{\det\begin{pmatrix} a^2\cos^2 v & 0 \\ 0 & a^2\end{pmatrix}}dudv \\ &= a^2\cos v dudv\end{aligned}$$

dir.

$$D: -\pi \leq u \leq \pi;\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

alırsak;

$$\begin{aligned}V &= \int_D a^2\cos v dudv \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} a^2\cos v dudv \\ &= 2\pi a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos v dv \\ &= 2\pi a^2 \sin v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4\pi a^2\end{aligned}$$

dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Riemann metriği ve Riemann manifoldu tanıtıldı. Daha sonra Öklid uzayında iki Tanjant vektörün iç çarpımı ile Öklid'den indirgenen Riemann metriği kullanarak aynı Tanjant vektörlerinin İndirgenen metriğe göre iç çarpımlarının yine aynı olduğu gösterildi. Eğrinin yay uzunluğu, Tanjant vektörlerinin uzunluğu ve aralarında açılar Riemann metriği kullanarak açıklanmaya çalışıldı. Hem iç hemde dış koordinatlara göre bakıldığında Riemann metriğinin katsayılarının değişmediği gösterildi. Pseudo-Riemann metriği tanıtıldı ve Streografik koordinatlarda Öklid metriği ile Pseudo-Riemann metriği kıyaslandı ve Riemann manifoldları arasındaki İzometri açıklandı. Son olarak da Hacim elementi açıklandı. Yukarıda söylenenlerin hepsi örneklendirilerek somut hale getirildi.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H.H., Ekmekçi, N., Tensör Geometri, Hacısalihoğlu Yayınları, 2003.

[2] Hacısalihoğlu, H.H, Diferensiyel Geometri 1.Cilt, Nobel Basımevi, Ankara, 2000.

[3] Hacısalihoğlu, H.H, Diferensiyel Geometri 2.Cilt, Hacısalioğlu Yayınları, Ankara, 2000.

[4] Gudmundsson, S., An Introduction to Riemannian Geometry, 2014.

[5] Holopainen, I., Sahlsten, S., Riemannian Geometry, April 5, 2013.

[6] Khudaverdian, H.M., Riemannian Geometry, Manchester, 20-th May, 2011.

[7] Hacısalihoğlu, H.H., Yüksek Differensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını, 1980.

[8] Lee, J.M., Remannian Manifolds An Introduction to Curvature, Springer-Verlag, New York, 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Olgun Durmaz

Doğum Yeri: İzmir

Doğum Tarihi: 14/06/1989

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: İzmir Ödemiş Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi

Lisans: Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2013

Yüksek Lisans: Haziran 2015

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: