KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Riemann Geodezikleri

İbrahim ERDAL

HAZİRAN 2015

Matematik Anabilim Dalında İbrahim ERDAL tarafından hazırlanan RİEMANN GEODEZİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun oldugunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan	:Prof. Dr. H. Hüseyin UĞURLU
Üye (Danışman)	:Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Üye	:Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

RİEMANN GEODEZİKLERİ

ERDAL , İbrahim
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman : Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
Haziran 2015 , 68 sayfa

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde, bazı temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilmiştir. Ayrıca geodezikler Öklid uzayında standart metriğe göre incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Riemann manifoldlarında konneksiyonun tanımı verilmiş ve bu konneksiyon kullanılarak Christoffel sembolleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu bölümde Levi-Civita konneksiyonu ve yüzeyler üzerine indirgenmiş konneksiyon tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, Riemann manifoldları üzerinde Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel taşıma ve geodezikler incelenmiştir. Ayrıca, Euler-Lagrange denklemleri ve Lagrangian kullanılarak geodezikler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Geodezik, Konneksiyon, Euler-Lagrange denklemleri, Lagrangian Riemann metriği, Riemann manifoldlar

ABSTRACT

RIEMANNIAN GEODESICS

ERDAL , İbrahim
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor : Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
June 2015 , 68 pages

The thesis consist of four chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, some fundemental definitions, concepts and theorems are given. In addition, geodesics are investigated as to standard metric on Euclid space. In the third chapter, definition of connection is given on Riemannian manifolds and this connnection used describe Christoffel symbols. In addition, this chapter Levi-Civita connection and induced connection on surfaces are defined.
Finally, in the fourth chapter , parallel transport and geodesics are investigatedas to Levi-Civita connection on Riemannian manifolds. In addition, Euler-Lagrange equations and Lagrangian are used given geodesics.

Key Words : Geodesic, Connection, Euler-Lagrange equations, Lagrangian, Riemannian metric, Riemannian manifold

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN‘ a (Kırıkkale Üniversitesi) , çalışmalarım esnasında beni daima destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET ………………………………………………………………….... i

ABSTRACT …………………………………………………………... ii

TEŞEKKÜR ……………………………………………………….... iii

SİMGELER DİZİNİ ………………………………………………… vi

1.GİRİŞ……………………………………………………………... 1

1.1. Kaynak Özetleri ……………………………………………….. 1

1.2. Çalışmanın Amacı ……………………………………………… 2

2. TEMEL KAVRAMLAR ………………………………………….. 3

2.1. Bir Yüzey Üzerinde Vektör Alanlarının Diferensiyellenmesi ………… 19

3. RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE LEVİ-CİVİTA KONNEKSİYONU ....……………............ 24

3.1. Vektör Alanları Boyunca Vektör Alanının Diferensiyellenmesi …....... 24

3.1.1. Konneksiyonun Tanımı , Konneksiyonun Christoffel Sembolleri 25

3.1.2. Keyfi Bir Konneksiyon İçin Christoffel Sembollerinin Dönüşümü 26

3.1.3. Standart Düz Afin Konneksiyon 27

3.1.4. Konneksiyonun Varlığının Küresel Yönleri 31

3.2. Yüzeyler Üzerine İndirgenmiş Konneksiyon 33

3.2.1. E^3 deki Yüzey Üzerine İndirgenmiş Konneksiyonun Hesaplanması 34

3.3. Levi-Civita Konneksiyonu 36

3.3.1 Simetrik Konneksiyon 36

3.3.2. Levi-Civita Konneksiyonu , Teorem ve Açık Formülü 37

3.3.3. E^3 deki Yüzeyler Üzerine İndirgenmiş Levi-Civita Konneksiyon 41

4. PARALEL TAŞIMA VE GEODEZİKLER 44

4.1. Paralel Taşıma 44

4.1.1. Paralel Taşıma Lineer Dönüşümdür 45

4.1.2. Levi-Civita Konneksiyonuna Göre Paralel Taşıma 46

4.2. Geodezikler 47

4.2.1. Riemann Manifoldu Üzerinde Geodezikler 47

4.2.2. Parametrik Olarak Verilmemiş Geodezikler 48

4.2.3. E^3 deki Yüzeyler Üzerinde Geodezikler 50

4.3. Riemann Manifoldları Üzerinde Serbest Taneciğin Lagrangianları ve Geodezikler ……………………………………... 52
4.3.1. Euler-Lagrange Denklemi ve Lagrangian ………...................... 52
4.3.2. Serbest Taneciğin Lagrangianı …….. 53
4.3.3. Euler-Lagrange Denklemleri ve Geodeziklerin Denklemleri ….. 54
4.3.4. Lagrangianları Kullanarak Geodezikler ve Christoffel Sembollerinin Hesaplanmasının Örnekleri 57
4.3.5. Salınım İlkesi ve Euler-Lagrange Denklemleri ………................ 59
4.4. Geodezik ve En Kısa Uzaklık 60
4.4.1. Küre ve Lobachevsky Düzlemi İçin Tekrar Geodezikler 62
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 66
KAYNAKLAR 67
ÖZGEÇMİŞ 68

SİMGELER DİZİNİ

$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
Γ_{ik}^{m}	Christoffel sembolleri
∇	Konneksiyon
$\tilde{\nabla}$	E^3 deki standart düz konneksiyon
∇^M	M üzerine indirgenmiş konneksiyon
D	M yüzeyi üzerindeki kovaryant türev
$\tilde{D}$	E^3 deki kovaryant türev
L	Lagrangian fonksiyoneli
$\tilde{L}$	Uzaklık fonksiyoneli
S	M yüzeyi üzerindeki şekil operatörü

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride geodezik kavramı birçok kez incelenmiştir. Bunun en ünlüsü Gauss' undur. Gauss' tan önce Euler, Lagrange ve Monge bazı eğrisel yüzeyleri incelemişlerdi. Fakat, Gauss daha genel olarak incelemiş ve diferensiyel geometrinin birinci büyük devresi böylece doğmuştur. İkinci devre 1854 yılında Riemann geometrisi ile olmuştur.
Öklid geometrisinde yüzey üzerinde alınan iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı veren eğri geodezik olarak tanımlanmıştı. Bu çalışmamızda, Riemann manifoldları üzerinde Riemann geodezikleri tanıtılmaya çalışılmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

H. H. Hacısalihoğlu' nun "Diferensiyel Geometri" adlı kitabından Öklid uzayındaki Frenet formülleri ele alınmıştır [1]. J. M. Lee' nin "Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature" ve H. H. Hacısalihoğlu' nun "Yüksek Diferensiyel Geometriye giriş" adlı kitaplarından kovaryant türev ve konneksiyon kavramları ele alınmıştır [2,3]. Arif Sabuncuoğlu' nun "Diferensiyel Geometri" adlı kitabından şekil operatörü ve kovaryant türev konusu araştırılmıştır [4]. H. H. Hacısalihoğlu ve N. Ekmekçi' nin "Tensör Geometri" adlı kitabından Christoffel sembolleri incelenmiştir [5]. Arif Sabuncuoğlu ve H. H. Hacısalihoğlu' nun "Diferensiyel Geometri" adlı kitabından Öklid uzayındaki geodezikler konusu ele alınmıştır [6]. Holopainen I, Sahlsten T' nin "Riemannian Geometry" adlı kitabından afin konneksiyon ve paralel taşıma konuları incelenmiştir [7]. Isaac, Chaved' in "Riemannian Geometry : A Modern Introduction" ve Barret O'Neill' ın "Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity" adlı kitaplarından Riemann manifoldu ve Riemann metriği incelenmiştir [8,9]. H. M. Khudaverdian' ın "Riemannian Geometry" adlı kitabından konnesiyon, Euler-Lagrange denklemkleri ve Lagrangian konuları incelenmiştir [10].

1.2. Çalışmanın Amacı

Öklid uzayında standart metrik kullanılarak elde edilen geodeziklerin, Riemann manifoldları üzerinde Riemann metriği kullanılarak elde edilen geodezikler arasında nasıl farklılıklar olduğu ve bu geodeziklerin nasıl bulunabileceğini göstermek amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 : $\alpha : I \longrightarrow E^3$

$$s \longrightarrow \alpha(s)=(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

birim hızlı bir eğri olsun. $\forall\ s \in I$ için

$$\begin{aligned} &T = \alpha^{'}(s) \\ &N = \frac{1}{\kappa}T' \\ &B = T \times N \quad , \quad \kappa = \|T^{'}\| \end{aligned}$$

olmak üzere T ye α eğrisinin birim teğet vektör alanı, N ye α eğrisinin asal normal vektör alanı, B ye α eğrisinin binormal vektör alanı, κ ya α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir.
Ayrıca $B^{'} = -\tau N$ olduğundan τ ya α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması veya torsiyonu denir.
$\forall s \in I$ için $\{\ T(s), N(s), B(s)\ \}$ $T_{\alpha(s)}E^3$ uzayının ortanormal bazıdır.

Buna göre T, N, B vektör alanlarına α eğrisinin Frenet vektör alanları denir.

Tanım 2.2 : (Serret-Frenet formülleri)

$$\begin{aligned} &T' = \kappa N \\ &N' = -\kappa T + \tau B \\ &B' = -\tau N \end{aligned}$$

olmak üzere T', N', B' ni T, N, B cinsinden yazabiliriz ve bu formüllerede Serret-Frenet formülleri denir.

Tanım 2.3 : (Kovaryant Türev) $\chi(E^3)$ de kovaryant türev operatörü D olmak üzere

$D : \chi(E^3) \times \chi(E^3) \longrightarrow \chi(E^3)$

$$(V,W) \quad \longrightarrow \; D(V,W) = D_V W : E^3 \longrightarrow TE^3$$

$$p \longrightarrow (D_V W)(p) = D_{V_p} W$$

$= (V_p[w_1], V_p[w_2], V_p[w_3]) \mid_p \in T_P E^3$
$= \sum_{i=1}^{3} V_p[w_i] \dfrac{\partial}{\partial x_i} \mid_p$

$W = (w_1, w_2, w_3)$, $w_i : E^3 \longrightarrow R$ diferensiyellenebilir ve $V = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere
$V_p[w_i] = \sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} \mid_p v_j \mid_p$
yazılabilir.
Ayrıca $\alpha : I \longrightarrow E^3$ $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = V_p$ olmak üzere

$$D_{V_p} W = \frac{d}{dt}(W \circ \alpha)(t) \mid_{t=0}$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.4 :(Şekil Operatörü) M bir yüzey ve N de M yüzeyinin birim normal vektör alanı olsun.
$S : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$
$\quad X \longrightarrow S(X) = D_X N$
fonksiyonuna M yüzeyinin şekil operatörü,
$S_p : T_p M \longrightarrow T_p M$
$\quad X_p \longrightarrow S_p(X_p) = D_{X_p} N$
fonksiyonuna da M yüzeyinin p noktasındaki şekil operatörü denir.
Buna göre,
$N = (n_1, n_2, n_3)$ olmak üzere
$D_{X_p} N = (X_p[n_1], X_p[n_2], X_p[n_3])$
ve $X_p[n_i] = \sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial n_i}{\partial x_j} \mid_p v_j \mid_p$ $\quad X_p = (v_1, v_2, v_3) \mid_p$
yazılır.
Şimdi S dönüşümünün lineer olduğunu gösterelim. $a, b \in R$ ve $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$S(\ aX+bY\ )=D_{aX+bY}N=aD_XN+bD_YN$$
$$=aS(X)+bS(Y)$$

$\chi(M)=Sp\ \{F_u,F_v\}$ olduğundan;

F_u, u parametre eğrisinin hız vektörü, F_v, v parametre eğrisinin hız vektörü, ve $N=\dfrac{F_u\times F_v}{\|F_u\times F_v\|}$ olmak üzere

$\alpha\,(0)=p$ ve $\alpha'(0)=V_p$ ise $\forall W\in\chi(M)$ için

$$D_{V_p}W=\frac{dW}{dt}\ |_{t=0}$$

olur. O halde

$$S(F_u)=D_{F_u}N=\frac{\partial N}{\partial u}$$
$$S(F_v)=D_{F_v}N=\frac{\partial N}{\partial v}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 2.5 : (Geodezik Eğri) M bir yüzey, α M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. α'' ivme vektör alanı her $\alpha\,(t)$ noktasında M yüzeyine dik ise α eğisin M yüzeyi üzerinde geodezik eğri veya kısaca geodezik denir.

Teorem 2.1 : $\alpha:I\longrightarrow M$

$$t\longrightarrow\alpha\,(t)$$

bir geodeziktir $\Longleftrightarrow$ $\forall t\in M$ için $\alpha''(t)\in(T_{\alpha(t)}M)^{\perp}$

İspat : α , M üzerinde bir geodezik olsun. $\alpha'\in\chi(M)$ ve $\alpha''\in\chi(M)^{\perp}$
($\alpha''\parallel Z\circ\alpha$) olduğundan
$\langle\alpha',\alpha''\rangle=0$ dır.

Sonuç 2.1 : Bir geodeziğin hızı sabittir.

İspat : α geodezik olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', \alpha' \rangle' &= \langle \alpha'', \alpha' \rangle + \langle \alpha', \alpha'' \rangle \\
&= 2 \langle \alpha', \alpha'' \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \dfrac{d}{dt} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 0 \qquad \langle \alpha', \alpha' \rangle = \|\alpha'\|^2 = sabit$

$\Longrightarrow \|\alpha'\| = sabit$

$\Longrightarrow \alpha$ nın hızı sabittir.

Sonuç 2.2 : α , M yüzeyi üzerinde geodezik olsun. α nın asal normali N olmak üzere

$$N = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\alpha''}{\kappa} \in \chi(M)^{\perp} \ \ , \ \ \|N\| = 1 \qquad \text{ve}$$

yüzeyin birim normal vektör alanı Z olmak üzere ($Z = N$ veya $Z = -N$) ;

$Z = -N$ alalım. $T = \alpha'$ ise

$$\begin{aligned}
S(T) = S(\alpha') = D_{\alpha'} Z &= Z' \\
&= -N' \\
&= -(-\kappa T + \tau B) \\
&= \kappa T - \tau B
\end{aligned}$$

bulunur.

$\Longrightarrow$ α, M nin bir geodeziği ise $S(T) = \kappa T - \tau B$ dir.

Örnek 2.1 : E^3 te bir düzlemin geodeziğini bulalım.

Çözüm : E^3 te bir düzlem M ve M nin birim normal vektör alanı Z olsun. Z sabittir. α M düzlemi üzerinde bir geodezik olsun.

$\alpha : I \longrightarrow M$

$\quad t \longrightarrow \alpha(t)$

α geodezik olduğundan $\alpha'' \parallel Z$ dir. (Z sabit olduğundan)

$\alpha'' = \lambda Z$ yazılabilir. $\lambda \in R$, $\alpha' \in \chi(M)$ ve $Z \in \chi(M)^{\perp}$ dir.

$\Longrightarrow$ $\langle \alpha', Z \rangle = 0$ dır. Her iki tarafın t yayına göre türevi alınırsa

$\langle \alpha', Z \rangle' = \langle \alpha'', Z \rangle + \langle \alpha', Z' \rangle = 0 \qquad (Z' = 0)$

$\Longrightarrow \quad \langle \alpha'', Z \rangle = 0$

$\Longrightarrow \quad \langle \lambda Z, Z \rangle = 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda \langle Z, Z \rangle = 0 \qquad (\langle Z, Z \rangle = 1)$

$\Longrightarrow \quad \lambda = 0$

$\Longrightarrow \quad \alpha'' = 0$

$\forall t \in I$ için $\alpha''(t) = 0$

$\alpha'(t) = v \qquad v \in R^3$ sabit

$\alpha(t) = p + vt \qquad p \in E^3$ sabit

$\alpha : I \longrightarrow M$

$\quad t \longrightarrow \alpha(t) = p + vt$

α M düzlemi üzerinde p noktasından geçen ve doğrultmanı v olan doğrudur.

Tersine α , M düzlemi üzerinde bir doğru olsun.

$\alpha : I \longrightarrow M$

$\quad t \longrightarrow \alpha(t) = p + vt$

$\alpha'(t) = v$, $\alpha''(t) = 0 \in (T_{\alpha(t)}M)^{\perp}$

$\Longrightarrow$ $\alpha'' \in \chi(M)^{\perp}$ dir.

$\Longrightarrow$ α doğrusu M düzlemi üzerinde bir geodeziktir.

Örnek 2.2 : Bir kürenin geodeziklerini bulalım.

Çözüm : M , E^3 te orjin merkezli r yarıçaplı küre olsun.

$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \quad | \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \; \}$

α , M üzerinde bir geodezik ve α birim hızlı olsun.

$\alpha' = T \; , \; S = \frac{1}{r} I_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$

$S(T) = \frac{1}{r} I(T) = \frac{1}{r} T$ .... (2.1)

$S(T) = \kappa T - \tau B$ ....(2.2) (α geodezik olduğundan)

(2.1) ve (2.2) den $\kappa = \frac{1}{r}$ ve $\tau = 0$ bulunur. ($\kappa = sabit$ ve $\tau = 0$ ise eğri çemberdir)

$\Longrightarrow$ α , M yüzeyi üzerinde r yarıçaplı çemberdir.

M küresi de α da r yarıçaplıdır.

$\Longrightarrow$ α , M küresi üzerindeki büyük çemberlerdir.

$\Longrightarrow$ Kürenin geodezikleri büyük çemberlerdir.

Tersine küre üzerinde bir büyük çember alıp bunun bir geodezik olduğunu gösterelim.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$

$t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

M küresi üzerinde bir büyük çemberdir.

$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ ve $\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 0^2} = 1$

$\|\alpha''(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 0^2} = 1$

$Z = \frac{T'}{\kappa} = \frac{\alpha''}{\kappa}$

$\kappa = \|T'\| = \|\alpha''(t)\| = 1$

$Z = \frac{\alpha''}{1} = \alpha''$

$\Longrightarrow \quad Z \parallel \alpha''$

Bundan dolayı α bir geodeziktir.

Örnek 2.3 : Silindirin geodeziklerini bulalım.

Çözüm : M , E^3 te $x^2+y^2=r^2$ denklemiyle verilen silindir olsun.

M üzerinde bir α eğrisi

$\alpha : I \longrightarrow M$

$\quad t \longrightarrow \alpha(t) = (r\cos\theta(t), r\sin\theta(t), h(t)) \qquad (\ \theta(t)\ \text{1. dereceden}\ )$

$h : I \longrightarrow R$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon

$\quad t \longrightarrow h(t)$

M nin normali $\dfrac{(2x,2y,0)}{\sqrt{4x^2+4y^2+0^2}} = \dfrac{(2x,2y,0)}{2r} = \dfrac{1}{r}(x,y,0) \perp z$ ekseni

Silindirin normali z eksenine diktir.

$\alpha'(t) = (-r\sin\theta(t)\theta'(t), r\cos\theta(t)\theta'(t), h'(t))$

$\alpha''(t) = (-r\cos\theta(t)(\theta'(t))^2, -r\sin\theta(t)(\theta'(t))^2, h''(t))$

$\alpha''(t) \parallel Z$ olduğundan $h''(t)=0 \quad \Longrightarrow \quad h'(t)=a\in R$

$\Longrightarrow \quad h(t) = a\,t+b \qquad b\in R$ sabit

Geodeziğin hızı sabit olduğundan $\|\alpha'(t)\|$ sabittir.

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2\theta(t)(\theta'(t))^2 + r^2\cos^2\theta(t)(\theta'(t))^2 + (h'(t))^2}$$
$$= \sqrt{r^2(\theta'(t))^2 + a^2}$$

$\Longrightarrow \quad \theta'(t) = sabit \qquad \theta'(t)=c \qquad \theta(t) = c\,t+d \qquad c,d\in R$

$\Longrightarrow \quad \alpha(t) = (r\cos(c\,t+d), r\sin(c\,t+d), a\,t+b)$

α eğrisi M silindiri üzerinde bir geodeziktir.

Eğer ;

$c \neq 0$ ve $a = 0$ ise α eğrisi çember,

$c = 0$ ve $a \neq 0$ ise α eğrisi doğru,

$c \neq 0$ ve $a \neq 0$ ise α eğrisi helistir.

Örnek 2.4 : M , E^3 te $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ denklemiyle verilen bir küre olsun. M nin $A = (1, 0, 0)$ ve $B = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ noktalarından geçen geodeziği bulup bu geodeziğin A ve B noktaları arasındaki uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm : Kürenin geodezikleri büyük çemberlerdir.

Bu çember küre ile A, B ve orjinden geçen düzlemin arakesitidir.

Düzlemin denklemi ;

$$\det(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad x.0 - \frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z = 0$$

$$\Longrightarrow \quad -y + z = 0$$

$\alpha : M \cap (\ -y + z = 0\ )$

$\alpha : \{\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ ,\quad -y + z = 0\ \}$

$y = z\ ,\ x^2 + y^2 + y^2 = 1$

$\Longrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$

$\Longrightarrow x = \cos t \quad \sqrt{2} y = \sin t$

$\Longrightarrow \alpha(t) = (\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t)$ istenen geodeziktir.

l : Geodezik boyunca A ve B noktaları arasındaki yay uzunluğu olsun.

$\alpha(t_0) = (\cos t_0, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t_0, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t_0) = (1, 0, 0) \quad \Longrightarrow \quad t_0 = 0$

$\alpha(t_1) = (\cos t_1, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t_1, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t_1) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2}$

$\alpha'(t) = (-\sin t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t} = 1$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt$$
$$= t \,|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\ br$$

Örnek 2.5 : M , E^3 te $x^2 + y^2 = 4$ denklemiyle verilen silindir olsun. M nin $A = (2,0,0)$ ve $B = (0,2,0)$ noktalarından geçen geodeziği bulup, geodezik boyunca A ve B noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm : Silindirin ekseni z eksenidir. (doğrultusu $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$ vektörüdür)

$\overrightarrow{AB} = (-2,2,0)$

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_3} \right\rangle = (-2).0 + 2.0 + 0.1$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{e_3}$

$\Longrightarrow$ Aradığımız geodezik A ve B noktalarından geçen çemberdir.

$$\left.\begin{array}{r} A = (2,0,0) \\ B = (0,2,0) \end{array}\right\} \quad \text{çember } z = 0 \text{ düzlemi üzerindedir.}$$

$\Longrightarrow$ $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$

$\alpha(t)$ istenen geodeziktir.

$\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}$$
$$= 2$$

l : Geodezik boyunca A ve B noktaları arasındaki yay uzunluğu olsun.

$\alpha(t_0) = (2\cos t_0, 2\sin t_0, 0) = (2,0,0) \quad \Longrightarrow \quad t_0 = 0$

$\alpha(t_1) = (2\cos t_1, 2\sin t_1, 0) = (0,2,0) \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{2}$

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = 2t \mid_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \pi \ br$$

Tanım 2.6 : (Bir Manifold üzerinde C^k-sınıfından eğri) M bir diferensiyellenebilir manifold ve

$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$

de C^k-sınıfından bir fonksiyon olsun.

($I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere;

$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$

$\qquad t \longrightarrow \alpha(t)$

fonksiyonu C^k-sınıfından olması için $\alpha(t) = p \in M$ komşuluğundaki $\{u_1, ..., u_n\}$ reel koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan α 'nın

$$\begin{array}{ccc} I \subseteq \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & M \\ {\scriptstyle \alpha_i} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle u_i} \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

$\alpha_i : u_i \circ \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R} \qquad 1 \leq i \leq n$

koordinat fonksiyonları C^k-sınıfından olması demektir.)

$\alpha(I) \subset M$ alt cümlesi $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k-sınıfından bir eğri denir.

Tanım 2.7 : (Bir Eğrinin Tanjant vektörü) M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\alpha(I)$ 'da M üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilmiş C^k-sınıfından bir eğri olsun.

$\alpha(t) = p \in M$ olmak üzere;

$$V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longrightarrow V_p(f) = \frac{d\,(f \circ \alpha)}{d(t)} \mid_t$$

şeklinde tanımlı V_p fonksiyonuna $\alpha(I)$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki bir tanjant vektörü denir ve $\alpha(t)$ noktasındaki $\alpha(I)$ tanjant vektörlerinin cümlesini $T_{\alpha(t)}\alpha(I)$

ile gösterelim.

$T_{\alpha(t)}\alpha(I)$ cümlesi üzerinde aşağıdaki tanımlanan iç ve dış işlemler $T_{\alpha(t)}\alpha(I)$ 'de reel vektör uzayı yapısı belirtirler. Bu uzaya $\alpha(I)$ eğrisinin $p = \alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı denir.

$$\begin{aligned} + : T_{\alpha(t)}\alpha(I) \times T_{\alpha(t)}\alpha(I) &\longrightarrow T_{\alpha(t)}\alpha(I) \\ (V_p, W_p) &\longrightarrow V_p + W_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times T_{\alpha(t)}\alpha(I) &\longrightarrow T_{\alpha(t)}\alpha(I) \\ (\lambda, V_p) &\longrightarrow \lambda \cdot V_p \end{aligned}$$

$\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için $(\lambda \cdot V_p)_{(f)} = \lambda \cdot V_p\,(f)$
dir.

Teorem 2.2 : M diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki C^k- sınıfından bir eğri, $\alpha(I)$ olsun.
$V_p \in T_p\alpha(I)$ ise
$i)$ $V_p : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
lineerdir.
$ii) V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$
dir.$(\forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R}))$

Tanım 2.8 :(M Diferensiyellenebilir Manifoldunun Tanjant Vektörü) M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. Bir
$V_p : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
fonksiyonu, M üzerinde en az bir eğrinin p noktasındaki tanjant vektörü ise V_p 'ye M 'nin bir p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. M üzerindeki tanjant vektörlerinin cümlesi T_pM ile gösterilir.

T_pM üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan iç ve dış işlemler sayesinde T_pM bir reel vektör uzayı olur.

$$
\begin{aligned}
+ : T_pM \times T_pM &\longrightarrow T_pM \\
(V_p, W_p) &\longrightarrow V_p + W_p
\end{aligned}
$$

$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $(V_p, W_p)(f) = V_p(f) + W_p(f)$
dir.

$$
\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{R} \times T_pM &\longrightarrow T_pM \\
(\lambda, V_p) &\longrightarrow \lambda \cdot V_p
\end{aligned}
$$

$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $(\lambda \cdot V_p)_{(f)} = \lambda \cdot V_p\,(f)$
dir.

Tanım 2.9 : (Tanjant Uzay) M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı T_pM olsun. T_pM vektör uzayına M 'nin p noktasındaki tanjant uzayı denir.

Tanım 2.10 : M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki G Riemann metriği simetrik, pozitif tanımlı ve diferensiyellenebilir olan 2-kovaryant vektör alan ($G \in \daleth_2(M)$) ile tanımlanır.

$$
\begin{aligned}
G \in \daleth_2(M) \Longrightarrow \; G : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
(X, Y) &\longrightarrow G(X, Y) : M \longrightarrow \mathbb{R} \\
& \qquad\qquad\qquad p \longrightarrow G(X, Y)\mid_p
\end{aligned}
$$

dir. Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ile verilen G Riemann metriği (M, G) de Riemann Manifoldu olarak adlandırılır.

Tanım 2.11 : M bir n-Riemann manifold olsun. O zaman M üzerindeki metrik tensör ifadesi
$G = g_{ik} dx_i \otimes dx_k$
şeklinde gösterilir. Burada; $g_{ik} = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle$ olup matrix değerli düzgün fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.12 : $A, B \in T_pM$ olmak üzere; $A = A_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $B = B_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ $\quad (i = 1, ..., n$ $; k = 1, ..., n)$

$$\langle A, B \rangle_G \mid_p = G(A, B) \mid_p = A_i g_{ik} B_k$$
$$= (A_1, ..., A_n) \begin{pmatrix} g_{11} & . & . & . & g_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ g_{n1} & . & . & . & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ . \\ . \\ . \\ B_n \end{pmatrix}$$

dir. Burada;

i) $G(A, B) = G(B, A)$

ii) $A \neq 0$ için $G(A, A) > 0$

iii) $G(A, B) \mid_{p\,=\,x}$ diferensiyellenebilir fonksiyon

şeklindedir.

Burada görüldüğü gibi G Riemann metriği $G = g_{ik} dx_i \otimes dx_k$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.6 : $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\mathbb{R}^n$ de doğal koordinat sistemi olmak üzere G metriği;

$G = (dx_1)^2 + ... + (dx_n)^2$

şeklindedir.

$G = \|g_{ik}\| = diag\,[1, 1..., 1]$

dir. Skalar çarpım ile tanımlanan n-boyutlu öklid uzayının temel örneği;

$G(X, Y) = \langle X, Y \rangle = g_{ik} X_i X_k = X_1 Y_1 + ... + X_n Y_n$

şeklindedir.

$\Longrightarrow G(X, Y) = \langle X, Y \rangle = g_{ik} X_i X_k$

olur. Bu durumda $\{e_i\}$ temel baz olmak üzere;

$G(e_i, e_k) = g_{ik} e_i e_k = \delta_{ik}$

dır.

$\mathbb{R}^2$ 'de kutupsal koordinatlarda $y > 0$ $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ bölgesindeki metrik için

$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$; $dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$

dır. Yeni koordinatlar da Riemann metriği $G = dx^2 + dy^2$ aşağıdaki görünüme sahip olacaktır.

$$\begin{aligned} G &= dx^2 + dy^2 \\ &= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow G = dr^2 + r^2 d\theta^2$

Örnek 2.7 : (Silindir Yüzeyi) $\mathbb{R}^3$ 'de $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x‹2\pi\}$ bölgesindeki Riemann metriği

$G = a^2 dx^2 + dy^2$

dir. a; $x^2 + y^2 = a^2$ silindirin yarıçapıdır. Bunu görelim.

$\mathbb{R}^3$ öklid uzayında gömülü $x^2 + y^2 = a^2$ silindiri için;

$$\begin{aligned} x &= a\cos u \\ y &= a\sin u \qquad\qquad 0 \leq u‹2\pi \ , \ -\infty‹v‹\infty \\ z &= v \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} dx &= -a\sin u du \\ dy &= a\cos u du \\ dz &= dv \end{aligned}$$

dir.Yeni koordinatlar da $G = dx^2 + dy^2 + dz^2$ Riemann metriğinin görünümü;

$$\begin{aligned} G &= (-a\sin u du)^2 + (a\cos u du)^2 + dv^2 \\ &= a^2\sin^2 u du^2 + a^2\cos^2 u du^2 + dv^2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow G = a^2 du^2 + dv^2$

olarak bulunur. Alışılmış formül için $x \longrightarrow u$, $y \longrightarrow v$ alalim. Bu durumda;

$G = a^2 dx^2 + dy^2$

olur.

Örnek 2.8 : (Küre) $-\pi \leq x \leq \pi$; $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ bölgesindeki G Riemann metriği;

$G = a^2 dy^2 + a^2\cos^2 y dx^2$

şeklinde olup $a : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin yarıçapıdır.

Bunu görelim;

$-\pi \leq u \leq \pi$; $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere;

$$x = a\cos u\cos v$$

$$y = a\sin u\cos v$$

$$z = a\sin v$$

dir.

$$dx = -a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv$$

$$dy = a\cos u\cos v du - a\sin u\sin v dv$$

$$dz = a\cos v dv$$

olur.

$G = dx^2 + dy^2 + dz^2$

olmak üzere;

$$G = (-a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv)^2 + (a\cos u\cos v du - a\sin u\sin v dv)^2 + (a\cos v dv)^2$$

$$= a^2\sin^2 u\cos^2 v du^2 + a^2\cos^2 u\sin^2 v dv^2 + 2a^2\sin u\cos v\cos u\sin v du dv + a^2\cos^2 u\cos^2 v du^2 + a^2\sin^2 u\sin^2 v dv^2 - 2a^2\sin u\cos v\cos u\sin v du dv + a^2\cos^2 v dv^2$$

$$= a^2\cos^2 v du^2 \left(\sin^2 u + \cos^2 u\right) + a^2\sin^2 v dv^2 \left(\sin^2 u + \cos^2 u\right) + a^2\cos^2 v dv^2$$

$$= a^2\cos^2 v du^2 + a^2\sin^2 v dv^2 + a^2\cos^2 v dv^2$$

$$= a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2 \left(\sin^2 v + \cos^2 v\right)$$

$$= a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$$

$G = a^2\cos^2 v du^2 + a^2 dv^2$

olur. $u \longrightarrow x$; $v \longrightarrow y$ yazarsak

$G = a^2 dy^2 + a^2\cos^2 y dx^2$

bulunur.

Örnek 2.10 : $\mathbb{R}^3$ 'de $G = dx^2 + dy^2 + dz^2$ şeklindedir. Burada;
$G = \|g_{ik}\| = [1, 1, 1]$ dir.

$V = (2, 1, -1), \qquad W = (0, -3, -2) \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$G(V, W) = (dx^2 + dy^2 + dz^2)(V, W)$
şeklindedir.
$V = 2\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial y} - 1\frac{\partial}{\partial z}$; $W = 0\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial z}$
dir.
$G(V, W) = (dx^2 + dy^2 + dz^2)(V, W)$

$= dx^2(V, W) + dy^2(V, W) + dz^2(V, W)$

$$dx^2(V, W) = dx \otimes dx \left(2\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial y} - 1\frac{\partial}{\partial z}, 0\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\begin{aligned} &= dx\left(2\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial y} - 1\frac{\partial}{\partial z}\right) dx\left(0\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= 2dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot 0dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$dy^2(V, W) = dy \otimes dy \left(2\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial y} - 1\frac{\partial}{\partial z}, 0\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\begin{aligned} &= dy\left(2\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial y} - 1\frac{\partial}{\partial z}\right) dy\left(0\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= 1dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (-3)dy\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$dz^2(V, W) = dz \otimes dz \left(2\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial y} - 1\frac{\partial}{\partial z}, 0\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= dz\left(2\frac{\partial}{\partial x} + 1\frac{\partial}{\partial y} - 1\frac{\partial}{\partial z}\right) dz\left(0\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial y} - 2\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(-2)dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

dir.

$\Longrightarrow G(V,W) = 0 - 3 + 2 = -1$

olur.

$G(X,Y) = g_{ik}X_iX_k = X_1Y_1 + ... + X_nY_n$

dir.

$$
\begin{aligned}
G(X,Y) &= g_{ik}V_iW_k\\
&= V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3\\
&= 2\cdot 0 + 1\cdot(-3) + (-1)\cdot(-2)\\
&= -1
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

2.1. Bir Yüzey Üzerinde Vektör Alanlarının Diferensiyellenmesi

V bir iç çarpım uzayı ve U , V nin bir altuzayı olsun.

$U^\perp = \{x\in V \quad | \quad \langle x,y\rangle = 0\ ,\ y\in U\}\subset V$ U nun V ye göre dik tümleyenidir.

$U\oplus U^\perp = V \qquad U\cap U^\perp = \{0\}$

$\forall\alpha\in V$ için $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ olacak şekilde bir tek $\alpha_1\in U, \alpha_2\in U^\perp$ vardır.

$$
\begin{aligned}
\pi' : V &\longrightarrow U\\
\alpha = \alpha_1+\alpha_2 &\longrightarrow \alpha_1
\end{aligned}
$$
V nin U üzerine dik izdüşümü

$$
\begin{aligned}
\pi'' : V &\longrightarrow U^\perp\\
\alpha = \alpha_1+\alpha_2 &\longrightarrow \alpha_2
\end{aligned}
$$
V nin $U^\perp$ üzerine dik izdüşümü

π' ve π'' izdüşüm fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonlar lineerdir.

M , E^3 te bir yüzey olsun.

$\chi(E^3) = \chi(M) + \chi(M)^\perp$

$\forall p\in M$ için $T_pE^3 = T_pM + (T_pM)^\perp$ dir.

$\forall X_p \in T_pE^3$ için $X_p = X_p' + X_p''$ olacak şekilde $X_p' \in T_pM$ ve $X_p'' \in (T_pM)^{\perp}$ vardır.

$$\begin{aligned} \pi' : T_pE^3 &\longrightarrow T_pM \\ X_p = X_p' + X_p'' &\longrightarrow \pi'(X_p) = X_p' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi'' : T_pE^3 &\longrightarrow (T_pM)^{\perp} \\ X_p = X_p' + X_p'' &\longrightarrow \pi''(X_p) = X_p'' \end{aligned}$$

izdüşüm fonksiyonları lineerdir.

$Y \in \chi(M)$ ve α , M yüzeyi üzerinde bir eğri olsun.
Y yi α ya kısıtlayalım.

$\dfrac{dY}{dt}$ vektör alanını ele alalım. $Y \in \chi(M)$ için $\dfrac{dY}{dt} \in \chi(E^3)$ tür.
$Y \in \chi(M)$ iken $\pi'(\dfrac{dY}{dt}) \in \chi(M)$ dir.

Bu $\pi'(\dfrac{dY}{dt})$ vektör alanına Y vektör alanının M yüzeyi üzerinde α eğrisi boyunca kovaryant türevi denir ve $\dfrac{DY}{dt}$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} : \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ Y &\longrightarrow \frac{D}{dt}(Y) = \frac{DY}{dt} = \pi'(\frac{dY}{dt}) \end{aligned}$$

Tanım 2.13 : M , E^3 te bir yüzey, α M yüzeyi üzerinde bir eğri ve $Y \in \chi(M)$ olsun.
$\forall\, t \in I$ için $\dfrac{DY}{dt} = 0$ ise Y teğet vektör alanına α eğrisi boyunca sabit (veya paralel) vektör alanı denir.
Y , M üzerindeki her eğri boyunca sabit ise Y ye M yüzeyi üzerindeki paralel vektör alanı denir.

Örnek 2.10 : M orjin merkezli yarıçapı 1 olan küre olsun.
$M = S^2 = \{(x,y,z) \in E^3 \ \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \}$

$$\alpha : I \longrightarrow S^2$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$Y = \alpha'$ alalım. $Y \in \chi(M)$ dir.
$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$
$$\frac{dY}{dt} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$
$$= -\alpha(t) \in \chi(M)^{\perp}$$

$$\underbrace{\frac{dY}{dt}}_{\in \chi(E^3)} = \underbrace{0}_{\in \chi(M)} + \underbrace{\frac{dY}{dt}}_{\in \chi(M)^{\perp}}$$ olarak yazılabilir.

Buradan

$$\frac{DY}{dt} = \pi'(\frac{dY}{dt}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{DY}{dt} = 0$$

$\Longrightarrow Y = \alpha'$ teğet vektör alanı M yüzeyi üzerinde α eğrisi boyunca sabit (paralel) dir.

Tanım 2.14 : (Gauss Eşitliği) M , E^3 te bir yüzey olsun. M üzerindeki kovaryant türevi D ile E^3 üzerindeki kovaryant türevi de $\widetilde{D}$ ile gösterelim ve Z de bu yüzey üzerindeki birim normal vektör alanı olsun.

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \quad \longrightarrow \ D(X,Y) = D_X Y$$
$$\widetilde{D} : \chi(E^3) \times \chi(E^3) \longrightarrow \chi(E^3)$$
$$(X,Y) \quad \longrightarrow \ \widetilde{D}(X,Y) = \widetilde{D}_X Y$$

$\widetilde{D}_X Y \in \chi(E^3) = \chi(M) \oplus \chi(M)^{\perp}$
olmak üzere
$D_X Y = \widetilde{D}_X Y + \langle S(X), Y \rangle Z$

eşitliğine Gauss eşitliği denir.

Sonuç 2.3 : α , M yüzeyi üzeride bir geodezik olsun. Bu durumda $N=-Z$ ve $S(T)=\kappa T-\tau B$ olup

Gauss eşitliğinde $X=Y=T$ alırsak

$$D_T T=\widetilde{D}_T T+\left\langle \underbrace{S(T)}_{\kappa T-\tau B},T\right\rangle Z$$

$$\begin{aligned}
D_T T &= \widetilde{D}_T T+\langle \kappa T-\tau B,T\rangle Z \\
&= \widetilde{D}_T T+(\kappa\underbrace{\langle T,T\rangle}_{=1}-\tau\underbrace{\langle B,T\rangle}_{=0})Z \qquad (\ N=-Z\ ) \\
&= \widetilde{D}_T T+\kappa Z \\
&= \underbrace{\widetilde{D}_T T}_{=\alpha''}-\underbrace{\kappa N}_{=\alpha''} \qquad N=\frac{T'}{\kappa}=\frac{\alpha''}{\kappa} \qquad \alpha''=\kappa N \\
&= \alpha''-\alpha'' \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ D_T T=0$

α , M yüzeyi üzerinde bir geodezik ise $D_T T=0$ dır.

Tersi de doğrudur.

$D_T T=0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_T T=-\langle S(T),T\rangle Z \quad &\Longrightarrow \quad \alpha''=-\langle S(T),T\rangle Z \qquad \langle S(T),T\rangle\in R \\
&\Longrightarrow \quad \alpha''\parallel Z \\
&\Longrightarrow \quad \alpha \text{ bir geodeziktir.}
\end{aligned}$$

Örnek 2.11 : M , E^3 te $\varphi(u,v)=(\cos v\cos u,\cos v\sin u,\sin v)$ parametrizasyonuyla verilen bir yüzey ($x^2+y^2+z^2=1$ küresi) M üzerindeki kovaryant türev D, E^3 teki kovaryant türevi $\widetilde{D}$ ile gösterelim.

α , M üstündeki $\varphi(u,0)$ eğrisi olmak üzere α nın teğet vektör alanı T olsun. $X=T$ ve $Y=\varphi_u+\varphi_v$ olmak üzere $D_X Y$ nedir ?

Çözüm : $D_X Y=\widetilde{D}_X Y+\langle S(X),Y\rangle Z$

$$\begin{aligned}\alpha: \ I \quad &\longrightarrow \ M \\ u \ &\longrightarrow \alpha(u) = \varphi(u,0) = (\cos u, \sin u, 0)\end{aligned}$$

$X = T = \alpha' = (-\sin u, \cos u, 0)$

$\varphi_u = (-\cos v \sin u, \cos v \cos u, 0)$

$\varphi_v = (-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v)$

$$\varphi_u \times \varphi_v = \begin{bmatrix} . & . & . \\ -\cos v \sin u & \cos v \cos u & 0 \\ -\sin v \cos u & -\sin v \sin u & \cos v \end{bmatrix}$$

$$= (\cos^2 v \cos u, \cos^2 v \sin u, \cos v \sin v)$$

$S = \dfrac{1}{r} I_2$ ve $r = 1$ olduğundan $S = I_2$ dir.

$S(X) = I_2(X) = X$

$\qquad = (-\sin u, \cos u, 0)$

$$Y = \varphi_u + \varphi_v = (-\cos v \sin u - \sin v \cos u, \cos v \cos u - \sin v \sin u, \cos v)$$

$$= (-\sin(u+v), \cos(u+v), \cos v) \mid_{v=0}$$

$$\widetilde{D}_T Y = \frac{\partial Y}{\partial u} = (-\cos(u+v), -\sin(u+v), 0)$$

$$Z = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \mid_{v=0}$$

$$D_X Y = \widetilde{D}_X Y + \langle S(X), Y \rangle Z$$

$$\begin{aligned} D_X Y &= (-\cos(u+v), -\sin(u+v), 0) \\ &\quad + \langle (-\sin u, \cos u, 0), (-\sin(u+v), \cos(u+v), \cos v) \rangle Z \mid_{v=0} \\ &= (-\cos(u+v), -\sin(u+v), 0) \\ &\quad + (\sin u \sin(u+v) + \cos u \cos(u+v)) Z \mid_{v=0} \\ &= (-\cos(u+v), -\sin(u+v), 0) + \cos v (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) \mid_{v=0} \\ &= (-\cos(u+v) + \cos^2 v \cos u, -\sin(u+v) + \cos^2 v \sin u, 0) \mid_{v=0} \\ &= (-\cos u + \cos u, -\sin u + \sin u, 0) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

3. RİEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ LEVİ-CİVİTA KONNEKSİYONU

3.1. Vektör alanları boyunca vektör alanının diferensiyellenmesi

Bir M manifoldu üzerinde vektör alanları nasıl diferensiyellenebilir ?
M manifoldu üzerinde fonksiyonların diferensiyellenebilmesini yeniden adlandırırsak

$X = X^i(x)e_i(x) = X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ M üzerinde bir vektör alanı olsun.
f , M üzerinde keyfi bir düzgün fonksiyon ve $X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere , $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ vektör alanı boyunca f fonksiyonunun türevi
$\partial_X f = \nabla_X f = X^i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ye eşittir.
$X = X^i e_i$ vektör alanını $x^i(t) = x_0^i + tX^i$ eğrisi bölünemeyecek kadar küçük x_0 noktasında tanımlanır.
Bu tanımın geometrik anlamı ; eğer X , $t = 0$ da $x_0^i = x^i(t)$ noktasında $x^i(t)$ eğrisinin hız vektörü ise , $x_0^i = x^i(0)$ noktasında $\nabla_X f$ türevinin değeri , $t = 0$ da $f(x^i(t))$ fonksiyonunun t ye göre türevine eşittir.Yani
$X^i(t)\ |_{x_0^i\ =\ x^i(0)} = \dfrac{dx^i\,(t)}{dt}\ |_{t\ =\ 0}$ ve $\nabla_X f\ |_{x_0^i\ =\ x^i(0)} = \dfrac{d}{dt} f(x^i(t))\ |_{t\ =\ 0}$
yazılabilir.

Sonuç 3.1 : Diferensiyel Manifoldlar ve geometride vektör alanları boyunca fonksiyonların türevini aldığımız operatörü $\partial_X f$ ile göstermiştik.

Sonuç 3.2 : Bu tez de biz vektör alanları boyunca , vektör alanlarının ve fonksiyonların türevini alan operatörlerin her ikisinide aynı gösterim olan $\nabla_X f$ ile gösterecegiz.

$C^\infty(M)$ uzayı üzerinde ∇_X operatörü takip edeceğimiz şartları karşılar.

1) $\nabla_X(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla_X f + \mu \nabla_X g \quad \lambda, \mu \in R$ (reel sayılar üzerinde lineer)
2) $\nabla_{hX+gY} f = h \nabla_X f + g \nabla_Y f$ (fonksiyonlar uzayı üzerinde lineer)
3) $\nabla_X(\lambda f g) = f \nabla_X(\lambda g) + g \nabla_X(\lambda f)$ (Leibnitz kuralı)

3.1.1. Konneksiyonun Tanımı , Konneksiyonun Christoffel Sembolleri

M üzerindeki afin konneksiyon her X vektör alanı için lineer dönüşüm olan ∇ operatörüdür. (fakat $C(M)$ de lineer dönüşüm olmak zorunda değilidir. Yani dönüşüm sayılar üzerinde lineerken, fonksiyonlar üzerinde lineer olmak zorunda değildir.)

Vektör alanlarının $\chi(M)$ uzayı üzerinde ∇_X , takip edeceğimiz kuralları sağlar.

1) $\nabla_X(\lambda Y + \mu Z) = \lambda \nabla_X Y + \mu \nabla_X Z \qquad \forall \lambda, \mu \in R$ için
2) M üzerindeki keyfi f, g diferensiyellenebilir fonksiyonlar için

$\nabla_{(fX+gY)} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$ ($C(M)$-lineerlik)

3) Keyfi f fonksiyonu için

$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f \nabla_X Y$ (Leibnitz kuralı)

$\nabla_X f = \partial_X f$ vektör alan boyunca f fonksiyonunun alışılmış türevidir.
$\nabla_X Y$ operatörü X vektör alanı boyunca Y vektör alanının kovaryant türevi olarak adlandırılır.
M manifoldu üzerinde ($i = 1, 2, 3, ..., n$) için $\{x^i\}$ yerel koordinatlarını veren açık formülü yazalım.
$X = X^i e_i = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $\quad Y = Y^i e_i = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ olmak üzere $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ baz vektör alanlarını biz bazen ∂_i bazen de e_i ile göstereceğiz.
Gördüğümüz özellikleri kullanarak

$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y^k \partial_k = X^i (\nabla_i \left(Y^k \partial_k\right)) \qquad \nabla_{\partial_i} = \nabla_i \quad (\nabla_{fX} Z = f \nabla_X Z)$
$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f \nabla_X Y$ ye göre Leibnitz kuralından
$\nabla_i \left(Y^k \partial_k\right) = (\nabla_i Y^k)\partial_k + Y^k \nabla_i \partial_k$ dır.

∂_i bazları üzerinden $\nabla_i \partial_k$ vektör alanını dağıtalım.

$\nabla_i \partial_k = \Gamma^m_{ik} \partial_m$ olarak alalım ve

$\nabla_i \left(Y^k \partial_k \right) = \dfrac{\partial Y^k (x)}{\partial x^i} \partial_k + Y^k \Gamma^m_{ik} \partial_m$ dir. Buradan

$$\nabla_X Y = X^i \frac{\partial Y^k (x)}{\partial x^i} \partial_k + X^i Y^k \Gamma^m_{ik} \partial_m$$

$$(\nabla_X Y)^m = X^i (\frac{\partial Y^m (x)}{\partial x^i} + Y^k \Gamma^m_{ik}) \qquad \text{bileşenleridir.}$$

$\{\Gamma^m_{ik}\}$ katsayıları $\{x^i\}$ koordinatlarındaki Christoffel sembolleri olarak adlandırılır. Bu katsayılar kovaryant türevi konneksiyon olarak tanımlar.

Biz vektör alanlarının kovaryant türevi üzerindeki formüllerde gördük ki konneksiyonu , yerel koordinatlar içerisinde Christoffel sembolleri ile tanımlamak zorunda kaldık.

3.1.2. Keyfi bir konneksiyon için Christoffel sembollerinin dönüşümü

∇ , M manifoldu üzerinde bir konneksiyon olsun. $\{\Gamma^i_{km}\}$, $\{x^i\}$ yerel koordinatları içerisinde bu konneksiyonun Christoffel sembolleri olsun.

$\nabla_i \partial_k = \Gamma^m_{ik} \partial_m$ ve $\nabla_i \left(Y^k \partial_k \right) = \dfrac{\partial Y^k (x)}{\partial x^i} \partial_k + Y^k \Gamma^m_{ik} \partial_m$ ye göre

$\nabla_X Y = X^m \dfrac{\partial Y^i (x)}{\partial x^m} \dfrac{\partial}{\partial x^i} + X^m \Gamma^i_{mk} Y^k \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ve özellikle $\nabla_{\partial_m} \partial_k = \Gamma^i_{mk} \partial_i$ olarak elde ederiz.

$\{x^{i'}\}$ yeni koordinatların içerisinde Christoffel sembolerini hesaplarken bu ilişkiyi kullanacağız.

$\nabla_{\partial_{m'}} \partial_{k'} = \Gamma^{i'}_{m'k'} \partial_{i'}$

$\partial_{m'} = \dfrac{\partial}{\partial x^{m'}} = \dfrac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} \dfrac{\partial}{\partial x^m} = \dfrac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} \partial_m$ dir.Bundan dolayı $C(M)$ de lineerlik ve Leibnitz kuralı nedeniyle ,

$$\Gamma^{i'}_{m'k'} \partial_{i'} = \nabla_{\partial_{m'}} \partial_{k'} = \nabla_{\partial m'} (\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \partial_k)$$

$$= (\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}) \nabla_{\partial_{m'}} \partial_k + \frac{\partial}{\partial x^{m'}} (\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}) \partial_k$$

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}})\nabla_{\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\partial_m}\partial_k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\partial_k \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\nabla_{\partial m}\partial_k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\partial_k \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\Gamma^i_{mk}\partial_i + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\partial_k \\
&= \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\Gamma^i_{mk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\partial_{i'} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\partial_{i'}
\end{aligned}
$$

Bu formülün ilk ve son terimlerini karşılaştırırsak bu dönüşüm kuralını elde ederiz.

$\{\Gamma^i_{km}\}$, $\{x^i\}$ yerel koordinatlarının ∇ konneksiyonunun Christoffel sembolleri ; $\{\Gamma^{i'}_{k'm'}\}$, $\{x^{i'}\}$ yeni yerel koordinatlarının ∇ konneksiyonunun Christoffel sembolleri olmak üzere

$$\Gamma^{i'}_{m'k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Gamma^i_{mk} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \tag{3.1}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.3 : Christoffel sembolleri tensör dönüşümü değildir. Eğer ikinci terim sıfıra eşitse yani koordinat dönüşümleri $\binom{1}{2}$ tipindeki tensörler için aynı şekilde dönüşüm kuralları olan yukarıdaki dönüşüm kurallarıyla lineerdir.

Genel durumda bu doğru değilidir. Christoffel sembolleri keyfi lineer olmayan koordinat dönüşümleri altında tensör olarak dönüşüm değildir.

(Yukarıdaki formülün ikinci teriminden görülür)

3.1.3. Standart Düz Afin Konneksiyon

Konneksiyonun özelliklerini takip ederek; $\nabla_{\partial_i}\partial_k = \Gamma^m_{ik}\partial_m$ vektör alanın her noktadaki bazlarında konneksiyonu tanımlamak için yeterlidir.

Yani bu konneksiyonun Christoffel sembollerini tanımlamak için yeterlidir.

Örnek 3.1 : $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ kartezyen koordinatları ile E^n n-boyutlu Öklid uzayını düşünelim.

Konneksiyonun tanımından tüm Christoffel sembolleri sıfıra eşittir.

Çözüm : $\nabla_{e_i} e_k = \Gamma^m_{ik} \partial_m = 0 \implies \Gamma^m_{ik} = 0$ (3.2)

bulunur.

Christoffel sembolleri verilen kartezyen koordinatlarda sıfıra eşitse keyfi kartezyen koordinatlarda da sıfıra eşit mi ?

Bu konneksiyonun Christoffel sembolleri, keyfi koordinat sistemleri de sıfıra eşit mi ?

Bu soruların cevabı için $\{x^i\}$ koordinatları içerisinde

$$\nabla_X Y = X^m \frac{\partial Y^i}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.3}$$

den (3.2) ilişkisine dikkat etmeliyiz.

$x^{i'} = x^{i'} \{x^1, x^2, ..., x^n\}$ keyfi yeni koordinatlarını düşünelim. Keyfi R vektör alanı için dönüşüm kuralını hatırlayalım.

$R = R^m \frac{\partial}{\partial x^m} = R^m \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^{m'}}$ yani $R^{m'} = \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} R^m$ ve $R^m = \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} R^{m'}$

şeklinde alınırsa

(3.3) den biz

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y = X^m \frac{\partial Y^i}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^i} &= X^m \frac{\partial}{\partial x^m} (Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^m \frac{\partial x^{m'}}{\partial x^m} \frac{\partial}{\partial x^{m'}} (\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} Y^{i'}) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^{m'} \frac{\partial}{\partial x^{m'}} (\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} Y^{i'}) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^{m'} \frac{\partial}{\partial x^{m'}} (Y^{i'}) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i} + X^{m'} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} (Y^{i'}) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^{m'} \frac{\partial Y^{i'}}{\partial x^{m'}} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} + \underbrace{X^{m'} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} (Y^{i'}) \frac{\partial}{\partial x^i}}_{ek\ terim}
\end{aligned}$$

Eski ve yeni koordinatlar arsındaki ilişki lineerdir $\Longleftrightarrow$ ek terim keyfi X, Y vektör alanları için sıfıra eşittir.

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} = 0 \text{ yani } x^i = b^i + a^k_i x^k \tag{3.4}$$

Önerme 3.1 : Verilen konneksiyonun tüm Christoffel sembolleri , verilen $\{x^i\}$

koordinat sistemi içerisinde sıfıra eşit olsun. O zaman bu konneksiyonun tüm Christoffel sembolleri $\{x^{i'}\}$ keyfi koordinat sisteminde sıfıra eşittir. Öyleki eski ve

yeni koordinatlar arasındaki ilişki lineerdir.

Yani $x^i = b^i + a_i^k x^k$ dır. Eğer yeni koordinat sistemindeki dönüşüm lineer değilse yani $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{m'} \partial x^{i'}} \neq 0$ ise o zaman genellikle bu konneksiyonun Christoffel sembolleri $\{x^{i'}\}$ yeni koordinat sistemleri içerisinde sıfıra eşit değildir.

Sonuç 3.4 : Afin koordinat sisteminde bu konneksiyona göre tüm Christoffel sembolleri sıfırdır. Yani $x^i = b^i + a_i^k x^k$ koordinatları için ∇ konneksiyonuna göre tüm $\Gamma_{ik}^m = 0$ dır.

Tanım 3.1 : Eğer bu konneksiyonun tüm Christoffel semboleri verilen koordinat sisteminde sıfıra eşit olacak şekilde koordinat sistemi varsa, biz bu konneksiyonu ∇ düz konneksiyon olarak adlandıracağız.

Özellikle (3.2) konneksiyonu keyfi kartezyen koordinatlar içerisinde Christoffel sembolleri sıfırdı.

Sonuç 3.5 : Konneksiyonda , eğer verilen kartezyen koordinatlar içerisinde Christoffel sembolleri sıfıra eşitse , keyfi kartezyen koordinatlar içerisinde de sıfıra eşittir.

Bundan dolayı takip edeceğimiz tanım doğrudur.

Tanım 3.2 : Christoffel sembolleri kartezyen koordinatlar içerisinde sıfırlanırken E^n üzerindeki konneksiyonu standart düz konneksiyon olarak adlandıracağız.

Sonuç 3.6 : Öklid uzayındaki standart düz konneksiyonu , kartezyen koordinatlar genel olarak tanımlandığından bu yana , tek bir şekilde tanımlanır.

Diğer taraftan keyfi manifold üzerinde , Christoffel sembollerini yerel koordinatlar içerisinde sıfırlayan şart tarafından yerel düz konneksiyon tanımlanır ve sadece keyfi yerel koordinatlar seçilerek düz konneksiyon tanımlanır.

Bu genel bir şekilde düz konneksiyonu tanımlamak anlamına gelmez.

Biz Christoffel sembolleri için dönüşüm yasasını öğrendikten sonra bu konuyu ele alacağız.

Sonuç 3.7 : Düz konneksiyonun simetrik konneksiyondur.

Örnek 3.2 : E^2 de ki (3.2) bağıntısını düşünelim. O düz konneksiyondur. Kutupsal koordinatlarda bu konneksiyonun Christoffel sembollerini hesaplayalım.

Çözüm : $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \end{cases}$

Kısmi türevlerin, jakobi matris dönüşümünü yazalım.

$$\begin{pmatrix} x_r & y_r \\ x_\varphi & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} r_x & \varphi_x \\ r_y & \varphi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$\Gamma^{i'}_{m'k'} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\dfrac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\Gamma^i_{mk} + \dfrac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$ göre ve Christoffel sembolleri

(x, y) kartezyen koordinatlar içerisinde sıfıra eşit olduğundan , biz

$\Gamma^{i'}_{m'k'} = \dfrac{\partial^2 x^r}{\partial x^{m'}\partial x^{k'}}\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^r}$ elde ederiz.

Burada $(x^1, x^2) = (x, y)$, $(x^{1'}, x^{2'}) = (r, \varphi)$ dir.
Şimdi (3.4) ü kullanarak

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{r\varphi} = \Gamma^r_{\varphi r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y} &= -\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\varphi}\frac{\partial r}{\partial y} = -r\cos\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi\sin\varphi$$
$$= -r$$

$$\Gamma^{\varphi}_{rr} = \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \sin\varphi\frac{1}{r}\sin\varphi + \cos\varphi\frac{1}{r}\cos\varphi$$
$$= \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -r\cos\varphi(\frac{-1}{r}\sin\varphi) + (-r\sin\varphi)(\frac{1}{r}\cos\varphi)$$
$$= 0$$

Bundan dolayı kutupsal koordinatlardaki (3.3) kovaryant türevi

$$\begin{aligned}
\nabla_r\partial r &= \Gamma^{r}_{rr}\partial r + \Gamma^{\varphi}_{rr}\partial\varphi = 0\\
\nabla_\varphi\partial r &= \Gamma^{r}_{r\varphi}\partial r + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\partial\varphi = \frac{1}{r}\partial\varphi\\
\nabla_r\partial\varphi &= \Gamma^{r}_{r\varphi}\partial r + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\partial\varphi = \frac{1}{r}\partial\varphi\\
\nabla_\varphi\partial\varphi &= \Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\partial r + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\partial\varphi = -r\partial r
\end{aligned}$$

görünümünü takip ederek elde edeceğiz.

Sonuç 3.8 : Daha sonra geodeziklerde çalıştığımızda Christoffel sembollerini çok hızlı hesaplamak için bir metod öğreneceğiz.

3.1.4. Konneksiyonun varlığının küresel yönleri

Biz özel aksiyomlara uyarak vektör alanları üzerinde operatör olarak konneksiyonu tanımladık. Sonra verilen koordinatlarda konneksiyonu Christoffel sembolleri yardımıyla tanımladık. Diğer taraftan, biz manifoldlar üzerindeki genel koordinatlarda global bir şekilde tanımlanmadığını biliyoruz.
(Öklid uzayında kartezyen koordinatlarda global bir şekilde tanımlanmadığında

bu bizim için bir sorun değildir.)

Yerel koordinatlar kullanarak konneksiyonu global bir şekilde nasıl tanımlarız ?

Global bir şekilde en az bir konneksiyon var mı ?

Global birşekilde tanımlanan düz konneksiyon var mı ?

Eğer biz farklı koordinatlardan gidersek,

$$\Gamma^{i'}_{m'k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma^i_{mk} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{m'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}$$

formülünden Christoffel sembolleri için yeni bir dönüşüm tanımlayacağız.

$\{(x^i_\alpha, U_\alpha)\}$, M manifoldu üzerinde atlas olsun. Eğer ∇ konneksiyonu M manifoldu üzerinde tanımlanırsa her bir (x^i_α) (yerel koordinat) haritasında tanımlanan Christoffel sembolleri ${}_\alpha\Gamma^i_{km}$ ile göstereceğiz. Eğer $(x^i_\alpha), (x^{i'}_\beta)$ verilen bir nokta civarında yerel koordinatları farklı ise (3.1) e göre

$${}_{(\beta)}\Gamma^{i'}_{k'm'} = \frac{\partial x^k_{(\alpha)}}{\partial x^{k'}_{(\beta)}} \frac{\partial x^m_{(\alpha)}}{\partial x^{m'}_{(\beta)}} \frac{\partial x^{i'}_{(\beta)}}{\partial x^i_{(\alpha)}}{}_{(\beta)} \Gamma^{(\alpha)i}_{mk} + \frac{\partial^2 x^k_{(\alpha)}}{\partial x^{m'}_{(\beta)} \partial x^{k'}_{(\beta)}} \frac{\partial x^{i'}_{(\beta)}}{\partial x^k_{(\alpha)}}$$

elde edilir.

Tanım 3.3 : $\{(x^i_\alpha, U_\alpha)\}$, M manifoldu üzerinde bir atlas olsun.
$\{\Gamma^i_{km}\}$ Christoffel sembollerinin cümlesi , eğer bu atlastan $(x^i_\alpha), (x^{i'}_\beta)$ her iki yerel koordinatı için

$${}_{(\beta)}\Gamma^{i}_{km} = \frac{\partial x^k_{(\alpha)}}{\partial x^{k'}_{(\beta)}} \frac{\partial x^m_{(\alpha)}}{\partial x^{m'}_{(\beta)}} \frac{\partial x^{i'}_{(\beta)}}{\partial x^i_{(\alpha)}}{}_{(\beta)} \Gamma^{(\alpha)i}_{mk} + \frac{\partial^2 x^k_{(\alpha)}}{\partial x^{m'}_{(\beta)} \partial x^{k'}_{(\beta)}} \frac{\partial x^{i'}_{(\beta)}}{\partial x^k_{(\alpha)}}$$

dönüşüm kuralına uyuluyorsa, bu atlas M manifoldu üzerinde konneksiyonu global bir şekilde tanımladığını söyleriz.

Birimin parçalanışını kullanarak , açık bir şekilde inşa edilen global konneksiyonun varlığını ispat ederiz.

$\{(x^i_\alpha, U_\alpha)\}$, ($\alpha = 1, 2, 3, ..., n$) M manifoldu üzerinde sonlu atlas olsun ve $\{\rho_\alpha\}$ bu atlasta düzeltilmiş birimin parçası olsun. U_α tanım kümesinde tanımlanan yerel konneksiyon ${}^{(\alpha)}\Gamma^i_{km}$ ile gösterilsin öyle ki bu koordinatlar içerisinde onun bileşenleri sıfıra eşittir. $\{x^i_\alpha\}$ koordinatları içerisinde bu yerel konneksiyonun Christoffel seembollerini ${}^{(\alpha)}_{(\beta)}\Gamma^i_{km}$ ile gösterelim.
(${}^{(\alpha)}_{(\beta)}\Gamma^i_{km} = 0$ dır.) Şimdi

$$\Gamma^i_{km}(x) = \sum_\alpha \rho_\alpha(x)\ {}^{(\alpha)}_{(\beta)}\Gamma^i_{km}(x) = \sum_\alpha \rho_\alpha(x) \frac{\partial x^i_{(\beta)}}{\partial x^{i'}_{(\alpha)}} \frac{\partial^2 x^{i'}_{(\alpha)}(x)}{\partial x^m_{(\beta)} \partial x^k_{(\beta)}}$$

formülü tarafından konneksiyon global bir şekilde tanımlandı.
Genellikle bu konneksiyon düz konneksiyon değildir.

3.2. Yüzeyler Üzerine İndirgenmiş Konneksiyon

M , Öklid uzayına gömülü bir manifold (uzay) olsun. E^n üzerindeki standart düz konneksiyon , takip edeceğimiz yol içerisinde yüzey üzerindeki konneksiyona indirgenecek.
X, Y M yüzeyindeki teğet vektör alanları ve $\widetilde{\nabla}$ E^n deki standart düz konneksiyon olsun. Genellikle
$Z = \widetilde{\nabla}_X Y$ M manifolduna teğet değildir.
İki vektör alanı üzerinde onların ayrışımını düşünelim.

$$Z = Z_{teğet} + Z_{dik} \qquad \widetilde{\nabla}_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)_{teğet} + (\widetilde{\nabla}_X Y)_{dik}$$

Burada Z_{dik} M yüzeyine dik vektör bileşenidir ve $Z_{teğet}$ yüzeye teğet vektör bileşenidir.

$\nabla^M_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)_{teğet}$ formülü takip edilerek M yüzeyi üzerinde ∇^M indirgenmiş konneksiyonu tanımlanır:

$$\nabla^M : \nabla^M_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)_{teğet}$$

Sonuç 3.9 : E^n üzerindeki keyfi bir konneksiyon için bu yapı gerekebilir.

3.2.1. E^3 deki yüzey üzerine indirgenmiş konneksiyonun hesaplanması

$r = r(u, v)$ E^3 te bir yüzey olsun. $\widetilde{\nabla}$ E^3 te düz konneksiyon olsun.

$$\nabla^M : \nabla^M_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)_{teğet} = \widetilde{\nabla}_X Y - n \left\langle \widetilde{\nabla}_X Y, n \right\rangle$$

Burada n , M nin dik vektör alanıdır.

Özel olarak düşünelim.

Örnek 3.3 : Küre üzerine indirgenmiş konneksiyon

E^3 de R yarıçaplı küreyi düşünelim.

$$r(\theta,\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{pmatrix} \right.$$

$$r_\theta = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \qquad r_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$r_\theta = \dfrac{\partial r(\theta,\varphi)}{\partial\theta}$, $r_\varphi = \dfrac{\partial r(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$ baz teğet vektörler ve n birim normal vektör olmak üzere küre üzerindeki ∇ indirgenmiş konneksiyonunu hesaplayalım :

İlk olarak $\nabla_{\partial\theta}\partial\theta$ yı hesaplayalım.

$$\nabla_{\partial\theta}\partial\theta = (\frac{\partial r_\theta}{\partial\theta})_{teğet} = (r_{\theta\theta})_{teğet}$$

Diğer taraftan

$$r_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi \\ -R\cos\theta \end{pmatrix} = -Rn$$ normal vektörle orantılıdır. Yani

$(r_{\theta\theta})_{te\breve{g}et} = 0$ dır.

Buradan

$\nabla_{\partial\theta}\partial\theta = (r_{\theta\theta})_{te\breve{g}et} = 0 \implies \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0$

olarak elde ederiz.

Şimdi $\nabla_{\partial\theta}\partial\varphi$ ve $\nabla_{\partial\varphi}\partial\theta$ yı hesaplayalım.

$$\nabla_{\partial\theta}\partial\varphi = \nabla_{\partial\varphi}\partial\theta = (\frac{\partial r_\varphi}{\partial\theta})_{te\breve{g}et} = (\frac{\partial r_\theta}{\partial\varphi})_{te\breve{g}et} = (r_{\varphi\theta})_{te\breve{g}et} = \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{te\breve{g}et}$$

$(r_{\varphi\theta})_{te\breve{g}et}$ vektörünün n ye dik olduğunu görebiliriz.

$$\begin{aligned} \langle (r_{\varphi\theta})_{te\breve{g}et}, n\rangle &= -R\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi + R\cos\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bundan dolayı ;

$$\nabla_{\partial\theta}\partial\varphi = \nabla_{\partial\varphi}\partial\theta = (r_{\varphi\theta})_{te\breve{g}et} = r_{\varphi\theta} = \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \cot\theta r_\varphi$$

Buradan

$\nabla_{\partial\theta}\partial\varphi = \nabla_{\partial\varphi}\partial\theta = \cot\theta\partial\varphi = \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}\partial\theta + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\partial\varphi$

$\implies \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0$ ve $\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta$

bulunur.

Son olarak $\nabla_{\partial\varphi}\partial\varphi$ yi hesaplayalım.

$$\nabla_{\partial\varphi}\partial\varphi = (r_{\varphi\varphi})_{te\breve{g}et} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{te\breve{g}et}$$

Teğet vektörlerin küre üzerine izdüşümünü alalım.

$\nabla_{\partial\varphi}\partial\varphi = (r_{\varphi\varphi})_{teğet} = r_{\varphi\varphi} - n\,\langle r_{\varphi\varphi}, n\rangle$

$$= \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} (-R\sin^2\theta\cos^2\varphi - R\sin^2\theta\sin^2\varphi)$$
$$= \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \left(-R\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\right)$$
$$= -\sin\theta\cos\varphi \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= -\sin\theta\cos\varphi r_\theta$$

Yani $\nabla_{\partial\varphi}\partial\varphi = -\sin\theta\cos\varphi r_\theta = \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\partial\theta + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\partial\varphi$

$\Longrightarrow\ \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\varphi$ ve $\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0$

olarak bulunur.

3.3. Levi-Civita Konneksiyonu

3.3.1. Simetrik Konneksiyon

Tanım 3.4 : Eğer Γ^i_{km} Christoffel sembolleri alt indislere göre simetrikse yani $\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$ ise bu durumda konneksiyona simetriktir denir.

Yukarıda gösterilen indirgenmiş konneksiyon ve standart düz konneksiyon simetrik konneksiyonlardır.

Simetrik konneksiyonun sabit tanımı :

∇ konneksiyonu , eğer keyfi X, Y vektör alanları için

$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ ise simetriktir.

Eğer biz ∂_k, ∂_m baz alanlarını bu tanıma uygularsak ve $[\partial_k, \partial_m] = 0$ değişme özelliğini kullanırsak

$\nabla_{\partial_k}\partial_m - \nabla_{\partial_m}\partial_k = \Gamma^i_{km}\partial_i - \Gamma^i_{mk}\partial_i = 0$

bulunur ve buradan

$\Gamma^i_{km}\partial_i - \Gamma^i_{mk}\partial_i = 0$

$\Longrightarrow \Gamma^i_{km}\partial_i = \Gamma^i_{mk}\partial_i$

$\Longrightarrow \Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$

şartını elde ederiz.

3.3.2. Levi-Civita Konneksiyonu, Teorem ve Açık formülü

(M, G) bir Riemann manifoldu olsun.

Tanım 3.5 : (Teorem) ∇ simetrik konneksiyonu , eğer metrik ile uyumlu ise yani keyfi X, Y, Z vektör alanları için

$$\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

skaler çarpımı koruyorsa Levi-Civita konneksiyonu olarak adlandırılır.

Riemann manifoldları üzerinde Levi-Civita konneksiyonu tek olarak vardır. Levi-Civita konneksiyonunun yerel koordinatlar içerisindeki Christoffel sembolleri

$$\Gamma^i_{mk} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}\right) \tag{3.6}$$

formülü ile verilir.

Burada $G = g_{ik}dx^i dx^k$ yerel koordinatlardaki Riemann metriğidir ve $\left\|g^{ik}\right\|$ da $\|g_{ik}\|$ matrisinin invers matrisidir.

İspat : Bu konneksiyonun varlığını kabul edelim ve Γ^i_{km} de bu konneksiyonun Christoffel sembolleri olsun.

$\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

formülü için

$X = \partial_m$, $Y = \partial_i$, $Z = \partial_k$ vektör alanlarını düşünelim.

$\partial_m g_{ik} = \langle \Gamma^r_{mi}\partial_r, \partial_k\rangle + \langle \partial_i, \Gamma^r_{mk}\partial_r\rangle$

$\quad = \Gamma^r_{mi}g_{rk} + \Gamma^r_{mk}g_{ir}$

ve keyfi m, i, k indisleri için

$\Gamma_{mik} = \Gamma^r_{mi}g_{rk}$

olarak gösterirsek

$\partial_m g_{ik} = \Gamma_{mik} + \Gamma_{mki}$

olarak elde ederiz yani

$\Gamma^i_{km} = \Gamma^i_{mk}$ olduğundan $\Gamma_{mik} = \Gamma_{imk}$ simetrikliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\Gamma_{mik} = \partial_m g_{ik} - \Gamma_{mki} &= \partial_m g_{ik} - \Gamma_{kmi} \\
&= \partial_m g_{ik} - (\partial_k g_{mi} - \Gamma_{kim}) \\
&= \partial_m g_{ik} - \partial_k g_{mi} + \Gamma_{kim} \\
&= \partial_m g_{ik} - \partial_k g_{mi} + \Gamma_{ikm} \\
&= \partial_m g_{ik} - \partial_k g_{mi} + (\partial_i g_{km} - \Gamma_{imk}) \\
&= \partial_m g_{ik} - \partial_k g_{mi} + \partial_i g_{km} - \Gamma_{imk} \\
&= \partial_m g_{ik} + \partial_i g_{km} - \partial_k g_{mi} - \Gamma_{mik}
\end{aligned}$$

Bundan dolayı

$\Gamma_{mik} = \dfrac{1}{2}\left(\partial_m g_{ik} + \partial_i g_{mk} - \partial_k g_{mi}\right)$

$$\Longrightarrow \Gamma^i_{mk} = \frac{1}{2}g^{kr}(\partial_m g_{ir} + \partial_i g_{mr} - \partial_r g_{mi}) \tag{3.7}$$

Eğer bu konneksiyon varsa

$\Gamma^i_{mk} = \dfrac{1}{2}g^{ij}\left(\dfrac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} - \dfrac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}\right)$ formülü ile verildiğini gördük. Diğer taraftan

$\partial_m g_{ik} = \langle \Gamma^r_{mi}\partial_r, \partial_k\rangle + \langle \partial_i, \Gamma^r_{mk}\partial_r\rangle$

$\quad = \Gamma^r_{mi}g_{rk} + \Gamma^r_{mk}g_{ir}$

şartlarına uyarak (3.6) formülünü gördük.

$\nabla_{\partial_i}\partial_k = \Gamma^m_{ik}\partial_m$ den dolayı biz konneksiyonun varlığını ve tekliğini ispat ettik.

Örneklerle düşünelim :

$G = adu^2 + bdv^2$ metriği ile 2-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ,

Örnek 3.4 : $G = a(u,v)\,du^2 + b(u,v)\,dv^2$ Riemann metriği ile 2-boyutlu manifoldu düşünelim.

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u,v) & 0 \\ 0 & b(u,v) \end{pmatrix}$$

Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembollerini hesaplayalım:
(3.7) yi kullanarak gösterelim.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{111} &= \frac{1}{2}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} \\
&= \frac{1}{2}a_u, \\
\Gamma_{211} = \Gamma_{121} &= \frac{1}{2}(\partial_1 g_{21} + \partial_2 g_{11} - \partial_1 g_{12}) = \frac{1}{2}a_v, \\
\Gamma_{221} &= \frac{1}{2}(\partial_2 g_{21} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = -\frac{1}{2}b_u, \\
\Gamma_{112} &= \frac{1}{2}(\partial_1 g_{12} + \partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) = -\frac{1}{2}a_v, \\
\Gamma_{122} &= \frac{1}{2}(\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = \frac{1}{2}b_u, \\
\Gamma_{222} &= \frac{1}{2}(\partial_2 g_{22} + \partial_2 g_{22} - \partial_2 g_{22}) = \frac{1}{2}b_v\ .
\end{aligned}$$

$\Gamma^i_{km} = g^{ir}\Gamma_{kmr}$ hesaplamamız için $G = adu^2 + bdv^2$ metriğinden

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(u,v)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b(u,v)} \end{pmatrix}$$

ifadesine dikkat etmeliyiz.
Bundan dolayı,

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= g^{11}\Gamma_{111} + \underbrace{g^{12}}_{=0}\Gamma_{112} = \frac{a_u}{2a}, \\
\Gamma^2_{11} &= g^{22}\Gamma_{112} = -\frac{a_v}{2b}, \\
\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} &= g^{11}\Gamma_{211} = \frac{a_v}{2a}, \\
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= g^{22}\Gamma_{212} = \frac{b_u}{2b},
\end{aligned}$$

$\Gamma^1_{22} = g^{11}\Gamma_{221} = -\dfrac{b_u}{2a}$

ve

$\Gamma^2_{22} = g^{22}\Gamma_{222} = \dfrac{b_v}{2b}$

bulunur.

Örnek 3.5 : Tekrar kürenin örneğini düşünlim

Küre üzerinde Levi-Civita konneksiyonunu hesaplayalım.

Küre üzerindeki birinci kuadratik form (Riemann metriği)

$G = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ dir.

Burada biz ;

$a(\theta,\varphi) = R^2$, $b(\theta,\varphi) = R^2\sin^2\theta$, ($u = \theta$, $v = \varphi$) alarak önceki örnekteki hesaplamaları kullanalım. Böylece

$a_\theta = a_\varphi = b_\varphi = 0$

olduğunu belirleriz. Bundan dolayı sadece Γ nın aşikar olmayan bileşenlerini bulacağız.

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{-b_\theta}{2a} = \frac{-\sin 2\theta}{2} \qquad \left(\Gamma_{\varphi\varphi\theta} = \frac{-R^2\sin 2\theta}{2} \right)$$
$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{b_\theta}{2b} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \left(\Gamma_{\theta\varphi\varphi} = \frac{R^2\sin 2\theta}{2} \right)$$

Diğer tüm bileşenler sıfıra eşittir. Yani

$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \Gamma^\theta_{\theta\varphi} = \Gamma^\theta_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\theta} = \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$

olur.

Sonuç 3.10 : Küre üzerindeki Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembolleri indirgenmiş konneksiyonun Christoffel sembolleri ile alt bölümdeki yüzey üzerine indirgenmiş konneksiyonda hesaplandığında çakıştığını göreceğiz.

3.3.3. E^3 deki yüzeyler üzerine indirgenmiş Levi-Civita konneksiyon

Standart düz konneksiyonun Christoffel sembolleri kartezyen koordinatlar içerisinde sıfırlanır. Diğer taraftan Öklid uzayı üzerindeki standart Riemann metriği $G = g_{ik}dx^i dx^k$ görünümündedir. g_{ik} matrisi sabit girdilidir. Bundan dolayı, Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembolleri

$$\Gamma^i_{mk} = \frac{1}{2}g^{ij}(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j})$$

formülünden Levi-Civita ya göre ayrıca sıfırlanır.
Öklid uzayındaki standart düz konneksiyon , Öklid uzayı üzerindeki standart metriğin Levi-Civita konneksiyonudur.
Biz şimdi Öklid uzayı içerisindeki yüzeyler üzerinde Levi-Civita konneksiyonunun standart düz konneksiyon tarafından yüzeyler üzerine indirgenmiş konneksiyon ile çakıştığını göstereceğiz:

$M : r = r(u,v)$ E^3 de bir yüzey, G M yüzeyi üzerine indirgenmiş Riemann metriği ve ∇ da bu metriğin Levi-Civita konneksiyonu olsun.
Biz ∇^M indirgenmiş konneksiyonunun M yüzeyine teğet keyfi X, Y vektör alanları için
$\nabla^M_X Y$, $\widetilde{\nabla}_X Y$ vektör alanının tanjant uzay üzerine izdüşümüne eşit olacak şekilde tanımlandığını biliyoruz.
$\nabla^M_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)_{teğet}$
dir.
Burada $\widetilde{\nabla}$, E^3 deki standart düz konneksiyondur. (kartezyen koordinatlarda Christoffel sembolleri sıfırlanıyor)
Biz tanjant uzay üzerinde yüzeyin noktasına bağlanan A vektörünün izdüşümünü $A_{teğet}$ olarak gösterecegiz ve $A_{teğet} = A - n\langle A, n\rangle$ dir. (n yüzeyin birim vektör alanı)

Teorem 3.1 : E^3 içindeki $r = r(u,v)$ yüzeyi üzerine indirgenmiş konneksiyon E^3 Öklid uzayı üzerindeki standart metrik tarafından indirgenmiş Riemann metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile çakışmaktadır.

İspat : ∇^M, $r = r(u,v)$ denklemleri tarafından verilen E^3 içindeki M yüzeyi üzerindeki indirgenmiş konneksiyon olsun.

r_u, r_v baz vektörleri üzerinden bu konneksiyonu düşünerek simetrik konneksiyon olduğunu gösterecegiz. Gerçekten

$$\nabla^M_{\partial_u}\partial_v = (r_{uv})_{teğet} = (r_{vu})_{teğet} = \nabla^M_{\partial_v}\partial_u \implies \Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} \text{ , } \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu}$$

Buradan ∇^M simetriktir.

Bu konneksiyonun M yüzeyi üzerinde skaler çarpımı koruduğunu ispatlayalım.

X, Y, Z keyfi tanjant vektörleri için

$$\partial_X \langle Y, Z\rangle_{E^3} = \left\langle \widetilde{\nabla}_X Y \text{ , } Z \right\rangle_{E^3} + \left\langle Y \text{ , } \widetilde{\nabla}_X Z \right\rangle_{E^3}$$

E^3 üzerindeki standart düz konneksiyon, E^3 deki standart metriği korur.(kartezyen koordinatlar içerisinde aşikardır)

Şimdi M yüzeyi üzerinde yukarıdaki denklemin izdüşümü , eğer A yüzeye bağlanan keyfi bir vektör ve $A_{teğet}$ te yüzeye tanjant uzay üzerindeki izdüşümü ise her B teğet vektörü için

$\langle A, B\rangle_{E^3}$ skaler çarpımı , $A - A_{teğet}$ vektörü yüzeye dik olduğundan

$\langle A_{teğet}, B\rangle_{E^3} = \langle A_{teğet}, B\rangle_M$ skaler çarpımına eşittir.

Bundan dolayı biz ;

$$\begin{aligned}\partial_X \langle Y, Z\rangle_M &= \left\langle \widetilde{\nabla}_X Y \text{ , } Z \right\rangle_{E^3} + \left\langle Y \text{ , } \widetilde{\nabla}_X Z \right\rangle_{E^3} \\ &= \left\langle \nabla^M_X Y, Z \right\rangle_M + \left\langle Y, \nabla^M_X Z \right\rangle_M\end{aligned}$$

sonucunu çıkarırız.

İndirgenmiş konneksiyonun, indirgenmiş metriği koruyan simetrik konneksiyon olduğunu gördük. Bundan dolayı Levi-Civita teoremi nedeniyle o tektir ve

$$\Gamma^i_{mk} = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} \right)$$

formülü ile ifade edilir.

Sonuç 3.11 : Daha genel ifadelerin ispatı ve yeni formülü daha kolay olur.

Sonuç 3.12 : M , (E, G) Riemann manifoldu içerisinde alt manifold olsun. Daha sonra bu altmanifold üzerine indirgenmiş metriğin Levi-Civita konneksiyonu ile G metriğinin Levi-Civita konneksiyonu tarafından manifold üzerine indirgenmiş konneksiyon çakışır.

4. PARALEL TAŞIMA VE GEODEZİKLER

4.1. Paralel Taşıma

Tanım 4.1 : M , ∇ afin konneksiyonu ile donanılmış bir manifold olsun.
$C : x(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında $x^i = x^i(t)$ koordinatlarına sahip M manifoldu üzerinde bir eğri;
$X = X\,(t_0)$, C eğrisinin $x^i(t_0)$ koordinatları ile x_0 başlangıç noktasına bağlı keyfi teğet vektör olsun. Yani $X\,(t_0) \in T_{x_0}^M$, $x^i(t_0)$ koordinatları ile x_0 noktasında M manifolduna teğet bir vektördür. (X vektörü C eğrisine teğet olmasa da olur , şart değil)
$X(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında , eğer
1) $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında keyfi t için $X = X\,(t)$ vektörü ($X\,(t)\,|_{t\,=\,0} = X\,(t_0)$) C eğrisinin $x(t)$ noktasına bağlı bir vektör ise yani ; $X\,(t)$, C eğrisinin $x(t)$ noktasında M manifolduna teğet bir vektör ise
2) C eğrisi boyunca $X(t)$ nin kovaryant türevi

$$\frac{\nabla X}{dt} = \nabla_v^X = 0 \tag{4.1}$$

bu duruda $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında $C : x^i = x^i(t)$ eğrisi boyunca $X\,(t_0) \in T_{x_0}^M$ vektörünün paralel taşımasıdır diyecegiz.
Bileşenler ; eğer $X^m\,(t)$, $X(t)$ vektör alanının bileşenleri , $v^m(t)$, C eğrisinin v hız vektörünün bileşenleridir.
$X(t) = X^m\,(t)\,\dfrac{\partial}{\partial x^m}\,|_{x(t)} \qquad v = \dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{\partial}{\partial x^m}\,|_{x(t)}$

$\dfrac{\nabla X}{dt} = \nabla_v X = 0$ koşulundan

$$\frac{dX^i(t)}{dt} + v^k(t)\Gamma_{km}^i(x^i(t))X^m\,(t) = 0 \tag{4.2}$$

yazabiliriz.

Sonuç 4.1 : Biz bazen $X(t)$ nin , eğer $X(t)$, C eğrisi boyunca X vektörünün paralel taşıması ise C eğrisi boyunca kovaryant olarak sabit olduğunu söyleyebiliriz.

Eğer biz standart düz konneksiyon ile Öklid uzayını düşünürsek karetezyen koordinatlar içerisinde Christoffel sembolleri sıfırlanır ve paralel taşıma $\dfrac{\nabla X}{dt} = \nabla_v X = 0$, $X(t)$ sabit vektör olmasından başka birşey değildir.

$$
\begin{aligned}
\frac{\nabla X}{dt} = \nabla_v X = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dX^i(t)}{dt} + v^k(t)\underbrace{\Gamma^i_{km}}_{=0}(x^i(t))X^m(t) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dX^i(t)}{dt} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad X(t) \ \text{ sabit vektör.}
\end{aligned}
$$

4.1.1. Paralel taşıma lineer dönüşümdür

∇ konneksiyonu ile M manifoldu üzerinde x_0, x_1 iki farklı noktayı düşünelim. C bu noktaları birleştiren $x(t)$ eğrisi olsun.

(4.1) deki $X(t)$ paralel taşıması , x_0 noktasındaki tanjant vektörlerin ve x_1 noktasındaki tanjant vektörlerin arasındaki dönüşüm olarak tanımlanır. Bu dönüşüm C eğrisi üzerine bağlıdır. Aynı noktalarda birleşen farklı eğriler boyunca paralel taşıma genellikle farklıdır. (Eğer Öklid uzyında değilsek)

Diğer bir deyişle , paralel taşıma bu noktaları birleştiren eğrinin parametrizasyonuna bağlı olmayan tanjant uzayların bir lineer dönüşümüdür.

Önerme 4.1 : $X(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında $x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$ noktalarını birleştiren $C : x = x(t)$ eğrisi boyunca $X(t_0) \in T^M_{x_0}$ vektörünün paralel taşıması olsun. Daha sonra

$$\tau_C : T_{x_0}M \ni X(t_0) \longrightarrow X(t_1) \in T_{x_1}M \tag{4.3}$$

dönüşümü C eğrisinin parametrisazyonlarına bağlı olmayan $T_{x_0}M$ vektör uzayından $T_{x_1}M$ vektör uzayına lineer dönüşümdür.

Gerçek şu ki (4.3) dönüşümü, üstelik (4.2) deki diferensiyel denklemi takip ederek parametrizasyona bağlı değildir.

Aslında $t = t(\tau)$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ $t(\tau_0) = t_0$ $t(\tau_1) = t_1$ C eğrisinin başka paremetrizasyonu olsun.

$\dfrac{dX^i(t)}{dt} + v^k(t)\Gamma^i_{km}(x^i(t))X^m(t) = 0$ denklemi ile $\dfrac{dt}{d\tau}$ yi çarparsak ve $v'(\tau) = t_\tau v(t)$ hızını kullanırsak

$$\frac{dX^i(t(\tau))}{d\tau} + v'^k(t(\tau))\Gamma^i_{km}(x^i(t(\tau)))X^m(t(\tau)) = 0$$

diferensiyel denklemini elde ederiz.
Aynı başlangıç koşulları ile $X(t(\tau))$ fonksiyonları bu denklemin çözümleridir.

4.1.2. Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel taşıma

Biz çoğunlukla Riemann manifoldları üzerinde paralel taşımayı düşüneceğiz. Eğer (M, G) Riemann manifoldu ise biz çoğunlukla G Riemann metriğinin Levi-Civita konneksiyonu olan ∇ konneksiyonuna göre paralel taşımayı düşüneceğiz.

Önerme 4.2 : Vektörün uzunluğu Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel taşıma boyunca korunur.

İspat : Paralel taşımanın (4.1) deki tanımından ve Levi-Civita konneksiyonunun $\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ tanımını takip ederek ispatlayalım:
$X(t)$ paralel taşıması ise $\nabla_v X(t) = 0$,
Levi-Civita konneksiyonu $\partial_X \langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle X(t), X(t)\rangle &= \partial_v \langle X(t), X(t)\rangle \\
&= \langle \nabla_v X(t), X(t)\rangle + \langle X(t), \nabla_v X(t)\rangle \\
&= 2\left\langle \underbrace{\nabla_v X(t)}_{=0}, X(t)\right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\langle X(t), X(t)\rangle = sabit$

$\Longrightarrow \quad \|X(t)\|^2 = sabit$

Bundan dolayı $\|X(t)\|$ sabittir.

Örnek 4.1 : Skaler çarpımın paralel taşıma boyunca korunur.

4.2. Geodezikler

4.2.1. Riemann manifoldu üzerinde geodezikler

M , ∇ konneksiyonu ile donanılmış bir manifold olsun.

Tanım 4.2 : $C : x^i = x^i(t)$ parametrelenmiş eğrisi eğer $v(t) : v^i(t) = \dfrac{dx^i(t)}{dt}$ hız vektörü bu eğri boyunca kovaryant olarak sabit ise yani hız vektörü eğri boyunca paralel kalıyorsa bu eğriyi geodezik olarak adlandıracağız.

$$\nabla_v v = \frac{dv}{dt} = \frac{dv^i(t)}{dt} + v^k(t)\Gamma^i_{km}(x^i(t))v^m(t) = 0$$

ve

$$\frac{d^2x^i(t)}{dt^2} + \frac{dx^k(t)}{dt}\Gamma^i_{km}(x^i(t))\frac{dx^m(t)}{dt} = 0$$

dır.

Bunlar ikinci dereceden lineer diferensiyel denklemlerdir.

Bu denklemlerin çözümü vardır ve çözümün $x^i(t_0) = x^i_0$, $\dot{x}^i(t_0) = \dot{x}^i_0$ keyfi başlangıç verilerine göre tek olduğu ispatlanabilir.

Diğer bir deyişle; $C : x(t)$ eğrisi eğer eğri boyunca hız vektörünün paralel taşıması eğrinin her bir noktasında hız vektörü ise $C : x(t)$ eğrisi geodeziktir.

Riemann manifoldları üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ile tanımlanan geodezikleri Riemann manifoldları üzerindeki geodezikler olarak adlandıracağız.

Biz çoğunlukla Riemann manifoldaları üzerindeki geodezikleri düşüneceğiz.

Riemann manifoldu üzerindeki geodeziklerin her bir noktasındaki hız vektörleri

Levi-Civita konneksiyonu ile bir paralel taşımadır. Bundan dolayı önermenin

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), X(t)\rangle = 2\langle \nabla_v X(t), X(t)\rangle = 0$$

şartı nedeniyle hız vektörlerinin uzunluğu sabit kalır.

Sonuç 4.2 : Eğer $C : x(t)$ Riemann manifoldu üzerinde geodezik ise hız vektörünün uzunluğu geodezik boyunca korunur.

İspat : Konneksiyon , Levi-Civita konneksiyonu olduğundan ve o tanjant vektörlerin skaler çarpımını koruduğundan , v hız vektörünün uzunluğu geodezik boyunca korunur.

4.2.2. Parametrik olarak verilmemiş geodezikler

Biz parametrelenmiş bir eğri , geodeziktir öyleki hız vektörü eğri boyunca kovaryantca sabit olarak tanımladık.
Eğer biz eğrinin parametrizasyonunu değiştirirsek ne yapacağız ?
Başka bir soru : Bir tanjant vektör eğri boyunca, bu eğriye tanjant kalan paralel taşıma olarak ele alınsın." Bu eğri (uygun bir parametrizasyonla) bir geodezik olur " ifadesi doğru mu ?

Tanım 4.3 : Eğer uygun parametrizasyon altında geodezikler için

$$\nabla_v v = \frac{dv}{dt} = \frac{dv^i(t)}{dt} + v^k(t)\Gamma^i_{km}(x^i(t))v^m(t) = 0$$

denklemini sağlayan eğriye parametresiz olarak verilen geodezik eğri adı verilir.
C parametresiz geodezik olsun. Takip edeceğimiz önerme geçerlidir.

Önerme 4.3 : C (parametresiz) eğrisi geodeziktir $\Longleftrightarrow$ eğri üzerindeki sıfırdan farklı tanjant vektör paralel taşıma boyunca eğriye teğet kalır.

İspat : A eğrinin $p \in C$ noktasında teğet vektör olsun. Paralel taşıma eğrinin parametrizasyonuna bağlı değildir. $x^i = x^i(t)$ uygun parametrizasyonunu seçelim öyleki $x^i(t)$ geodezikler için

$$\nabla_v v = \frac{dv^i(t)}{dt} + v^k(t)\Gamma^i_{km}(x^i(t))v^m(t) = 0$$

denklemini gösterelim. Yani $v(t)$ hız vektörü eğri boyunca kovaryantca sabittir. $\nabla_v v = 0$ dır. Eğer (c skaler katsayı olmak üzere) $A(t_0) = cv(t_0)$ p noktasında verilirse , $A(t) = v(t)$ lineerliği nedeniyle A vektörünün paralel taşımasıdır. $A(t)$ vektörü hız vektörüne orantılı olduğundan dolayı eğriye teğettir.

Biz her bir teğet vektörün paralel taşıma boyunca eğriye teğet kaldığını ispatladık.

Şimdi tersini ispat edelim:

$A(t)$ sıfır olmayan bir vektörün paralel taşıması ve hız vektörü ile orantılı olsun. Eğer $A(t) = c(t)v(t)$ parametrizasyonunu veren $t = t(\tau)$ yeni parametrizasyonunu seçelim.

Buradan $\dfrac{dt(\tau)}{d\tau} = c(t)$ dir.

Hız vektörünün yeni parametrizasyonu

$$\begin{aligned} v'(\tau) = \frac{dt(\tau)}{d\tau} v(t(\tau)) &= c(t)v(t) \\ &= A(t(\tau)) \end{aligned}$$

dir. Biz hız vektörünün kovaryantca sabit kalan parametrizasyonunun elde ettik. Böylece biz parametrelenmiş geodeziği bulduk. Bundan dolayı C eğrisi bir geodeziktir.

Sonuç 4.3 : Eğer $x^i = x^i(t)$ keyfi parametrizasyon içerisinde geodezik ve $s = s(t)$ doğal parametre ise (eğrinin uzunluğunda tanımlanan) $x^i(t(s))$ parametrelenmiş geodezik olduğunu görürüz.

4.2.3. E^3 deki yüzeyler üzerinde geodezikler

$M : r = (u, u')$ E^3 te bir yüzey olsun. G_M indirgenmiş Riemann metriği ve ∇, M yüzeyi üzeinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. G metriğinin Levi-Civita konneksiyonunu M yüzeyi üzerinde düşünelim.

C keyfi bir geodezik ve $v(t) = \dfrac{dr(t)}{dt}$ hız vektörü olsun. Geodeziğin tanımına göre $\nabla_v v = 0$ dır. Diğer taraftan Levi-Civita konneksiyonunun E^3 deki standart düz konneksiyon tarafından yüzey üzerine indirgenmiş konneksiyon ile çakıştığını biliyoruz. Bundan dolayı

$\nabla_v v = 0 = \nabla_v^M v = (\widetilde{\nabla}_v v)_{teğet}$

dir.

Kartezyen koordinatlarda

$$\widetilde{\nabla}_v v = \partial_v v = \frac{d}{dt} v(u(t), u'(t)) = \frac{d^2 r(t)}{dt^2} = a$$

Bundan dolayı $\nabla_v v = \nabla_v^M v = (\widetilde{\nabla}_v v)_{teğet} = 0$ olduğundan ivmenin teğet bileşeni sıfıra eşittir.

Tersine eğer $r\,(t) = (u\,(t)\,, u'(t))$ eğrisi için $a(t)$ ivme vektörü ise $\nabla_v v = 0$ nedeniyle yüzeye diktir.

Önerme 4.4 : M yüzeyi üzerindeki $r = (u\,(t)\,, v(t))$ eğrisinin ivme vektörü M yüzeyine diktir gerek ve yeter şart bu eğri geodeziktir.

Diğer deyişle Newton'un 2. yasası nedeniyle parçacık yüzey üzerindeki geodezik boyunca hareket etmesi için gerek ve yeter şart kuvvet yüzeye diktir.

Küre ve silindirin geodeziklerini hesaplamak için bu önermeyi kullanmak daha kolaydır.

Örnek 4.2 : Silindirin geodeziği

$$r(h(t), \varphi(t)) \ , \quad \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$ silindiri üzerinde bir geodezik olsun.

Buradan

$$v = \frac{dr}{dt} = \begin{pmatrix} -a\dot{\varphi}\sin\varphi \\ a\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{h} \end{pmatrix}$$

ve ivmesi

$$a = \frac{dv}{dt} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a\ddot{\varphi}\sin\varphi \\ a\ddot{\varphi}\cos\varphi \\ \ddot{h} \end{pmatrix}}_{teğet\ ivme} + \underbrace{\begin{pmatrix} -a\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ -a\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{dik\ ivme}$$

olarak bulunur.

Teğetsel ivme sıfıra eşit olduğundan dolayı $\frac{d^2h}{dt^2} = 0$ ve $h(t) = h_0 + c\ t$ elde edilir.

Dik ivme sabit hız ile çember üzerinde dönmenin merkezcil ivmesidir. (OXY düzlemi üzerine izdüşümü)

Geodezik bir helistir.

Örnek 4.3 : Kürenin geodeziği

$r = r(\theta(t), \varphi(t))$ a yarıçaplı küre üzerindeki geodezik olsun.

$$r(\theta, \varphi) = \begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta \end{cases}$$

$v(t)$ hız vektörü ve $r(t)$ vektörlerinin vektörel çarpımını düşünelim.

$M = r(t) \times v(t)$ olsun.

$a(t)$ ivme vektörü , kürenin yüzeyine diktir önermesi nedeniyle $r(t)$ ile orantılıdır.

Bu $M(t)$ nin sabit vektör olduğunu gerektirir.

$$\frac{d}{dt}M(t) = \frac{d}{dt}r(t) \times v(t) = (v(t) \times v(t)) + (r(t) \times a(t)) = 0$$

Biz $M(t) = M_0$ alalım. $r(t)$, $M = r(t) \times v(t)$ ye diktir.
$r(t)$ nin $M_0 = r(t) \times v(t)$ vektörüne dik düzleme ve küreye ait olduğunu gördük. Küre ile bu düzlemin arakesiti büyük çemberlerdir.
Eğer $r(t)$ geodezikse bundan dolayı (parametresiz eğrilerdeki gibi) onun büyük çemberlere ait olduğunu ispatladık.
Tersi aşikardır. Eğer parçacık sabit hız ile büyük çember boyunca hareket ederse açık bir şekilde ivme vektörü yüzeye diktir.

Sonuç 4.4 : $M = r(t) \times v(t)$ vektörü dönme momentidir.Bu dönme momenti izotropik uzay içerisinde hareket integralidir.

4.3. Riemann Manifoldları Üzerinde Serbest Taneciğin Lagrangianları ve Geodezikler

4.3.1. Euler-Lagrange Denklemi ve Lagrangian

M manifoldu üzerindeki hız vektörleri ve noktalar üzerindeki $L = L(x, \dot{x})$ fonksiyonu M manifoldu üzerinde Lagrangiandır.

$$\begin{aligned} L : M \times TM &\longrightarrow R \\ (x, \dot{x}) &\longrightarrow L(x, \dot{x}) \end{aligned}$$

L birinci kısmi türevleri sürekli reel değerli fonksiyondur ve Lagrangian olarak adlandırılır.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \tag{4.4}$$

ikinci dereceden diferensiyel denklemini takip ederek $L = L(x, \dot{x})$ Lagrangianını belirleyelim.
Detaylı olarak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^m \partial \dot{x}^i}\dot{x}^m + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^m \partial \dot{x}^i}\ddot{x}^m = \frac{\partial L}{\partial x^i} \tag{4.5}$$

Bu denklemler L Lagrangianının Euler-Lagrange denklemleri olarak adlandırılır.

4.3.2. Serbest Taneciğin Lagrangianı

$G = g_{ik}dx^i dx^k$ olmak üzere (M, G) Riemann manifoldu olsun.
$L = L(x, \dot{x})$ Lagrangianı , eğer

$$L = \frac{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}{2} \tag{4.6}$$

ise M Riemann manifoldu üzerindeki serbest taneciğin Lagrangianıdır denir.

Örnek 4.4 : Öklid uzayındaki serbest tanecik
E^3 deki standart $G = dx^2 + dy^2 + dz^2$ metriğini düşünelim.

$$L = \frac{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}{2} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2}$$

dir.

Dikkat edilirse bu Lagrangiandır ve bu aşırı miktardaki serbest taneciğin dinamiğinde tanımlanır.

Örnek 4.5 : Küre üzerindeki serbest tanecik
R yarıçaplı küre üzerindeki metrik $G = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$ dir.
Serbest taneciğin Lagrangianı için sırasıyla

$$L = \frac{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}{2} = \frac{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2}{2} \tag{4.7}$$

olarak bulunur.

4.3.3. Euler-Lagrange Denklemleri ve Geodeziklerin Deklemleri

Teorem 4.1 : Serbest taneciğin Lagrangianının Euler Lagrange denklemleri , geodezikler için ikinci dereceden diferensiyel denklemlere denktir.
Bu teorem Christoffel sembollerinin hesaplanmasını çok kolay hale getirir.
Bu teoremi doğrudan hesaplamalarla ispatlayalım:

$L = \dfrac{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}{2}$ Lagrangianı için $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}) = \dfrac{\partial L}{\partial x^i}$ Euler Lagrange denklemini hesaplayalım.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial(\frac{g_{mk}\dot{x}^m \dot{x}^k}{2})}{\partial \dot{x}^i}) = \frac{d}{dt}(g_{ik}\dot{x}^k)$$
$$= g_{ik}\ddot{x}^k + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m \dot{x}^k$$

ve

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial(\frac{g_{mk}\dot{x}^m \dot{x}^k}{2})}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}\dot{x}^m \dot{x}^k$$

Bundan dolayı

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}) = g_{ik}\ddot{x}^k + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m \dot{x}^k = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}\dot{x}^m \dot{x}^k$$

$$\Longrightarrow \quad g_{ik}\ddot{x}^k + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m \dot{x}^k = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i}\dot{x}^m \dot{x}^k$$

elde ederiz. Dikkat edilirse

$$\partial_m g_{ik}\dot{x}^m \dot{x}^k = \frac{1}{2}(\partial_m g_{ik}\dot{x}^m \dot{x}^k + \partial_k g_{im}\dot{x}^m \dot{x}^k) \quad \text{dır.}$$

Bundan dolayı;

$$g_{ik}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\partial_m g_{ik} + \partial_k g_{im} - \partial_i g_{mk}\right)\dot{x}^m \dot{x}^k = 0$$

denklemini elde ederiz.

g^{ik} invers matrisi ile çarparsak biz;

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}\right)\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0 \tag{4.8}$$

elde ederiz.

Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembollerini burda ayırt edersek ve bu denklemi;

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\frac{dx^m}{dt}\Gamma^i_{mk}\frac{dx^k}{dt}=0$$

gibi elde ederiz. Bu

$$\nabla_v v=\frac{\nabla v}{dt}=\frac{dv^i}{dt}+v^k\Gamma^i_{km}v^m=0$$

dan başka birşey değildir.

Bu teoremin uygulamaları: Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembollerini hesaplar.

(4.6)' deki Lagrangian için (4.5)' daki Euler-Lagrangian denklemlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)&=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\left(\frac{g_{mk}\dot{x}^m\dot{x}^k}{2}\right)}{\partial \dot{x}^i}\right)\\&=\frac{d}{dt}\left(g_{ik}\dot{x}^k\right)\\&=g_{ik}\ddot{x}^k+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^k\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x^i}&=\frac{\partial\left(\frac{g_{mk}\dot{x}^m\dot{x}^k}{2}\right)}{\partial x^i}\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^m}\dot{x}^m\dot{x}^k\end{aligned}$$

dır. Bundan dolayı;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i}}\right) = g_{ik}\ddot{x}^{k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{m}}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}$$
$$= \frac{\partial L}{\partial x^{i}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{m}}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}$$

dir.
$g_{ik}\ddot{x}^{k} + \partial_m g_{ik}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k} = \frac{1}{2}\partial_i g_{mk}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}$
olur. Dikkat edilirse;

$$\partial_m g_{ik}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k} = \frac{1}{2}\left(\partial_m g_{ik}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k} + \partial_k g_{im}\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}\right)$$

dır. Burada;

$$g_{ik}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\partial_m g_{ik} + \partial_k g_{im} - \partial_i g_{mk}\right)\dot{x}^{m}\dot{x}^{k}$$

denklemini veririz. g^{ik} ters matrisi ile çarparsak;

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j}\right)\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

olur.

Biz Levi-Civita konneksiyonunun Christoffel sembollerini burada görerek , denklemi yeniden yazarsak;

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{dx^m}{dt}\Gamma^i_{mk}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{4.9}$$

olur.
Bu teoremin uygulamaları: Levi-Civita konneksiyounun Christoffel sembollerini hesaplar.

4.3.4. Lagrangianları Kullanarak Geodezikler ve Christoffel Sembollerinin Hesaplanmasının Örnekleri

2 örnek düşünelim:

Bulduğumuz geodezikleri ve Lagrangianları kullanarak Lobachevsky düzlemi ve E^3 'deki küre üzerindeki Levi-Civita konneksiyonunu hesaplayalım.

Örnek 4.6 : E^3 'deki R yarıçaplı küre;

Küre üzerindeki serbest parçacığın Lagrangianını (4.7)' de verdik.

$$L = \frac{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2\theta\varphi^2}{2}$$

Geodeziklerle tanımlanan Euler-Lagrange denklemleri:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\theta}\right) - R^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right) = 0 \Longrightarrow \ddot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Christoffel sembolleri içindeki geodezik denklemleri ile Euler-Lagrange denklemleri karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + 2\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 = 0 \\ &\ddot{\varphi} + \Gamma^{\varphi}_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + 2\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\dot{\theta}\dot{\varphi} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 = 0 \end{aligned}$$

Biz,

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0\ ;\ \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta \tag{4.11}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0\ ;\ \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta \tag{4.12}$$

elde ederiz.

Daha önce alt bölümde küre üzerindeki önceki hesaplamalar ile karşılaştırırsak, küre üzerindeki büyük çemberlerin geodezik olduğunu ispatladık.;

Bu gerçeğin bir başka daha basit ispatını düşünelim.

Geodezikleri bulmak için (4.10) daki ikinci dereceden diferensiyel denklemleri çözmek zorundayız.

$\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0 + t$ büyük çemberlerinin;

$$\theta(t)\,|_{t=0} = \theta_0\ ,\ \dot{\theta}(t)\,|_{t=0} = 1\ ;\ \varphi(t)\,|_{t=0} = \varphi_0\ ,\ \dot{\varphi}(t)\,|_{t=0} = 0 \tag{4.13}$$

başlangıç koşulları ile (4.4) 'daki ikinci dereceden diferensiyel denklemlerin çözümü olduğu görülür.

Örnek 4.7 : Lobachevsky düzlemi;

$$G = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

metriği ile Lobachevsky düzlemi üzerindeki serbest parçacığın Lagrangianı;

$$L = \frac{1}{2}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^2}$$

dir.

Euler-Lagrange denklemleri;

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{y^2}\right) = \frac{\ddot{x}}{y^2} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y^3}$$

yani;

$$\ddot{x} - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{y^2}\right) = \frac{\ddot{y}}{y^2} - \frac{2\dot{y}^2}{y^3}$$

yani;

$$\ddot{y} + \frac{\dot{x}^2}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} = 0$$

$$\ddot{x}^i - \dot{x}^k \Gamma^i_{km} \dot{x}^m = 0\ ; (i = 1, 2\ ,\ x = x^1\ ,\ y = x^2)$$

geodezik denklemleri ile bu denklemleri karşılaştırırsak;

$$\Gamma^x_{xx} = 0\ ,\ \Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} = -\frac{1}{y}\ ,\ \Gamma^x_{yy} = 0\ ,\ \Gamma^y_{xx} = \frac{1}{y}\ ,\ \Gamma^y_{xy} = \Gamma^y_{yx} = 0\ ,\ \Gamma^y_{yy} = -\frac{1}{y}$$

dir.

Küredeki gibi benzer yolla Lobacevsky düzlemi üzerindeki geodezikleri bulabiliriz. İlk olarak dik ışınların geodezik olduğunu görebiliriz. Daha sonra mutlak bir merkez ile inversiyonu kullanarak mutlak bir merkezi geodezik olarak çemberlerin yayını görebiliriz.

4.3.5. Salınım İlkesi ve Euler Lagrange Denklemleri

Burada çok kısa bir şekilde Euler Lagrange denklemlerini, salınım ilkesinde nasıl bir yol takip edeceğimizi açıklayacağız.

M bir manifold(Riemann olması gerekmiyor) ve

$$L = L\left(x^i, \dot{x}^i\right)$$

de bu manifold üzerindeki Lagrangian olsun.

$t = t_1$ zamanında x_1 noktasında başlayan ve $t = t_2$ zamanında x_2 noktasında biten eğrilerin uzayını; $M^{x_2,t_2}_{x_1,t_1}$ ile gösterelim.

$$M^{x_2,t_2}_{x_1,t_1} = \{C : x(t) \ ,\ t_1 \le t \le t_2 \ ,\ x(t_1) = x_1 \ ,\ x(t_2) = x_2\}$$

$M^{x_2,t_2}_{x_1,t_1}$ uzayı üzerindeki S fonksiyonelini takip ederek düşünelim.

$\forall x(t) \in M^{x_2,t_2}_{x_1,t_1}$ eğrisi için;

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x^i(t), \dot{x}^i(t)\right) dt$$

dir.

Bu fonksiyonel, eylem (hareket) fonksiyoneli olarak adlandırılır.

Teorem 4.2 : S fonksiyoneli $x_0(t) \in M^{x_2,t_2}_{x_1,t_1}$ yolu üzerinde en küçük dereceye ulaşşın.Yani;

$$\forall x(t) \in M^{x_2,t_2}_{x_1,t_1} \ ;\ S[x_0(t)] \le S[x(t)]$$

$x_0(t)$ yolu L Lagrangianının Euler-Lagrange denklemlerinin çözümüdür. Eğer;

$x(t) = x_0(t)$ ise

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

dir.

Sonuç 4.5 : Bazen $x(t)$ yolu, eylem fonksiyonelinin eksteremumu (aşıt) olarak adlandırılır.
Biz geodeziklerin en kısa eğriler anlamda olduğunu göstermek için kullanacağız.

4.4. Geodezik ve En Kısa Uzaklık

Siz birçok geodeziğin en kısa eğri anlamda olduğunu biliyorsunuz. Bu önermeye tam bir anlam vereceğiz ve salınım ilkesini kullanarak bunu ispatlayacağız.

Teorem 4.3 : x_1 ve x_2 M (Riemann manifoldu) üzerinde iki nokta olsun. Bu noktaları birleştiren en kısa eğri geodeziğin yayıdır.
C , M manifoldu üzerinde geodezik ve $x_1 \in C$ olsun. x_1 noktasına yakın olan ve $x_2 \epsilon C$ keyfi noktası için x_1, x_2 noktalarını birleştiren geodeziğin yayı, bu iki nokta arasındaki en kısa eğridir.
Bu teorem geodezik için iki farklı yaklaşımdır, hız vektörlerinin paralel ötelemesi ve en kısa uzaklık arasında bir köprü yapar.

İspatın Taslağı : Aşağıdaki iki Lagrangianı düşünün. Serbest taneciğin Lagrangianı;

$$L = \frac{g_{ik}(x)\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k}{2}$$

ve uzaklık Lagrangianı;

$$\widetilde{L}\left(x,\dot{x}\right) = \sqrt{g_{ik}\left(x\right)\dot{x}^{i}\dot{x}^{k}}$$
$$= \sqrt{2L}$$

dir.

Eğer $C : x^{i}\left(t\right)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ M üzerinde bir eğri ise C eğrisinin uzunluğu;

$$\int_{t_1}^{t_2} \widetilde{L}\left(x^{i}\left(t\right),\dot{x}^{i}\left(t\right)\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik}\left(x\left(t\right)\right)\dot{x}^{i}\left(t\right)\dot{x}^{k}\left(t\right)}dt$$

dir.

Teoremin ispatı aşağıdaki gözlemi takip eder.

$$\int_{t_1}^{t_2} \widetilde{L}\left(x^{i}\left(t\right),\dot{x}^{i}\left(t\right)\right) dt$$

uzunluk fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemlerinin gözlemi;

$$S\left[x\left(t\right)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x^{i}\left(t\right),\dot{x}^{i}\left(t\right)\right) dt$$

eylem fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemine denktir.

Bu çakışma eylem fonksiyonelleri ve uzunluk fonksiyonellerinin ekstremumu anlamına gelmektedir.

Gerçekten de en kısa eğrilerin eylem fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemlerini gösteren bu gözlem ve salınım ilkesinden takip ederiz.

Eylem fonksiyoneli için Euler-Lagrange denklemlerinde önce geodezikleri tanımlamayı gösterdik. Bundan dolayı en kısa eğriler geodeziklerdir.

Doğrudan hesaplamalarla bu gözlemi kontrol edelim.

$$\widetilde{L} = \sqrt{g_{ik}\left(x\right)\dot{x}^{i}\dot{x}^{k}}$$
$$= \sqrt{2L}$$

Lagrangian için Euler-Lagrange denklemlerini hesaplayalım.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{x}^{i}}\right)-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x^{i}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ik}(x)\dot{x}^{i}\dot{x}^{k}}}g_{ik}\dot{x}^{k}\right)-\frac{1}{2\sqrt{g_{ik}(x)\dot{x}^{i}\dot{x}^{k}}}\frac{\partial g_{km}\dot{x}^{k}\dot{x}^{m}}{\partial x^{i}}$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\widetilde{L}}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i}}\right)-\frac{1}{\widetilde{L}}\frac{\partial L}{\partial x^{i}}$$
$$=0$$

Dikkat edilirse;

$$\int_{t_1}^{t_2}\widetilde{L}\left(x^{i}(t),\dot{x}^{i}(t)\right)dt$$

uzunluk fonksiyoneli hesaplamalarını kolaylaştırmak için sabit(değişmez) yeni paremetrizasyonlu halidir.

$s(t)$ doğal paremetrisini veya $x^i(t)$ eğrisi üzerinde doğal paremetreyle orantılı olan bir paremetre seçelim. Biz $\widetilde{L} = sabit$ elde ederiz ve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{x}^{i}}\right)-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial x^{i}}=\frac{1}{\widetilde{L}}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{i}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^{i}}\right)$$
$$=0$$

bulunur.

Biz çakışan uzunluk ve eylem Lagrangianları için Euler-Lagrange denklemlerini gösterdik.

Öklid uzayındaki doğrular iki nokta arasındaki en kısa uzaklıktır. Başka bir ifade ile onların hız vektörleri sabittir.

Biz şimdi farkına vardık ki genellleştirilmiş Riemann manifoldları içinde geodeziklerin rolü üstelik iki katıdır. Onlar hız vektörleri kovaryant olarak sabit bölgelerce en kısadır.

4.4.1. Küre ve Lobachevsky Düzlemi İçin Tekrar Geodezikler

Geodeziklerin en kısa olması bize geodezikleri hesaplamak için başka bir araç verir. Gerçekten geodezikler bölgesel olarak en kısa eğrilerdir.

R yarıçaplı E^3 'deki küreyi tekrar düşünelim.

$$G = R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

indirgenmiş Riemann metriği, θ, φ koordinatları küre üzerinde keyfi A ve B noktalarını düşünelim. (θ_0, φ_0) ; A noktasının koordinatları, (θ_1, φ_1) ; B noktasının koordinatları olsun. C_{AB}, bu noktaları birleştiren eğri olsun.

$$C_{AB} : \theta(t), \varphi(t) \;\; ; \; \theta(t_0) = \theta_0 \; , \; \theta(t_1) = \theta_1 \; ; \; \varphi(t_0) = \varphi_0 \; , \; \varphi(t_1) = \varphi_1$$

olsun.

$$L_{C_{AB}} = \int R\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2\theta(t)\,\varphi_t^2}dt$$

dir.

Kabul edelim ki A ve B aynı anlamda olsun. Yani eğer; (θ_0, φ_0) ; A noktasının koordinatları ve (θ_1, φ_1) ; B noktasının koordinatları ise $\varphi_0 = \varphi_1$ dir.

Şimdi o bir meridyen yayı olduğu kolayca görülebilir. Bu $\varphi = \varphi_0$ eğrisi bir geodeziktir.

Gerçekten, $\theta(t_0) = \theta(t_1) = \theta_0$, $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = \varphi_0$, A ve B noktalarını birleştiren $\theta(t), \varphi(t)$ keyfi eğrisini düşünelim. A, B noktalarını birleştiren meridyen uzunluğu eğrinin uzunluğunu karşılaştıralım.

$$\int_{t_0}^{t_1} R\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2\theta(t)\,\varphi_t^2}dt \geq R\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\theta_t^2}dt = R\int_{t_0}^{t_1}\theta_t dt = R(\theta_1 - \theta_0)$$

Böylece A ve B noktalarını birleştiren büyük çemberlerin en kısa olduğunu gördük. Küre üzerindeki büyük çemberler geodeziklerdir. Küre üzerindeki geodezikler merkezden geçen düzlem ile kürenin kesişimi olan çemberlerdir.

Lobachevsky Düzlemi Üzerindeki Geodezikler

Lobachevsky düzlemindeki Riemann metriği;

$$G = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

dir.

$\varphi : x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ eğrisinin uzunluğu;

$$L = \int \sqrt{\tfrac{x_t^2 + y_t^2}{y^2(t)}} dt$$

ye eşittir.

$[1, \varepsilon]$ dikey aralığın uzunluğu özellikle $\varepsilon \to 0$ ise sonsuza yaklaşır.

$$\begin{aligned} L &= \int \sqrt{\frac{x_t^2 + y_t^2}{y^2(t)}} dt \\ &= \int_{\varepsilon}^{1} \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt \\ &= \log \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$y = 0$ doğrusunun(çizgisinin) her noktasındaki uzaklık sonsuza eşit olduğu gördük. Lobachevsky düzlemi üzerinde $A = (x_0, y_0)\ ,\ B = (x_1, y_1)$ noktalarını düşünelim. Dikey çizgilerin Lobachevsky düzleminin geodezikleri olduğunu kolayca gördük. Böylece A ve B noktaları $x = x_0$ ışını üzerinde olsun. C_{AB} bu noktaları birleştiren $x = x_0$ ışınının yayı olsun.

$C_{AB} : x = x_0\ ,\ y = y_0 + t$

C_{AB} eğrisinin uzunluğu;

$x(t)\ |_{t=0} = x_0\ , y(t)\ |_{t=0} = y_0\ ,\ x(t)\ |_{t=t_1} = x_0\ ,\ y(t)\ |_{t=t_1} = y_1$

bu noktaları birleştiren $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ keyfi eğrisinin uzunluğundan küçük veya eşittir.

$$\int_0^{t_1} \sqrt{\frac{x_t^2 + y_t^2}{y^2(t)}} dt \geq \int_0^{t_1} \sqrt{\frac{y_t^2}{y^2(t)}} dt = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dt}{t} = \log \frac{y_1}{y_0}$$

C_{AB} ' nin uzunluğudur.

Bundan dolayı C_{AB} en kısadır. Biz dikey ışınların geodezikler olduğunu gösterdik.

Şimdi $x_0 \neq x_1$ durumunu düşünelim. Aynı dikey ışınlar üzerinde olmayan A, B noktalarını birleştiren geodezikleri bulalım.

Merkezi mutlak üzerinde olan iki noktadan geçen yarım çemberi düşünelim. Biz onun geodezik olduğunu göstereceğiz.

$(a, 0)$ çemberin merkezinin koordinatları olsun. (r, φ) kutupsal koordinatları düşünelim.

$$x = a + r\cos\varphi \ ; \ y = r\sin\varphi$$

Bu kutupsal koordinatlarda yarım çemberlerin r-koordinatları sabittir.Bu koordinatlarda Lobachevsky metriğini bulalım.

$$dx = -r\sin\varphi d\varphi + \cos\varphi dr$$

$$dy = r\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi dr$$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \\ &= \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{r^2\sin^2\varphi} \\ &= \frac{d\varphi^2}{\sin^2\varphi} + \frac{dr^2}{r^2\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

dir.

A, B noktalarını birleştiren keyfi eğrinin uzunluğu çemberin yayının uzunluğundan büyük ya da eşittir.

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{\varphi_t^2}{\sin^2\varphi} + \frac{r_t^2}{r^2\sin^2\varphi}} dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{\varphi_t^2}{\sin^2\varphi}} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\varphi_t}{\sin\varphi} dt \\ &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \\ &= \log\tan\frac{\varphi}{2} \Big|_{\varphi_0}^{\varphi_1} \\ &= \log\frac{\tan\frac{\varphi_1}{2}}{\tan\frac{\varphi_0}{2}} \end{aligned}$$

dir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Öklid uzayında kovaryant türev ve şekil operatörü tanıtıldı ve bu uzayda standart metrik kullanılarak geodezikler bulundu. Daha sonra Riemann metriği açıklandı. Riemann manifoldları üzerinde konneksiyon tanımlanarak bu konneksiyon yardımıyla Christoffel sembolleri bulundu. Levi-Civita konneksiyonu ve bir yüzey üzerine indirgenmiş konneksiyon tanımlanarak bunlar yardımıyla geodezikler bulundu. Ayrıca Levi-Civita konneksiyonu kullanılarak paralel taşıma anlatıldı. Son olarak Euler-Lagrange denklemleri ve Lagrangian kullanılarak geodeziklerin hesaplanması anlatıldı. Yukarıda söylenenlerin hepsi örneklendirilerek somut hale getirilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Hacısalihoğlu H. H** , Diferensiyel Geometri 1.Cilt , Nobel Basımevi , Ankara , 2000.

[2] **J. M. Lee ,** Riemannian Manifolds An Introduction to Curvature,Springer-Verlag , New York , 1997.

[3] **Hacısalihoğlu, H. H.,** Yüksek Differensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını, 1980.

[4] **Sabuncuoğlu, A.**, Diferensiyel Geometri , Nobel Basımevi , Ankara , 2004.

[5] **Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N.,**Tensör Geometri, Hacısalihoğlu Yayınları, 2003.

[6] **Hacısalihoğlu, H. H. , Sabuncuoğlu,A.**, Differensiyel Geometri, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul, 1983.

[7] **Holopainen I., Sahlsten T.,** Riemannian Geometry , April 5, 2013.

[8] **Isaac, Chavel**., Riemannian Geometry: A Modern Introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[9] **O'Neil, B.** , Semi-Riemannian Geometry with Applications to General Relativity. Academic Press, New York, 1983.

[10] **Khudaverdian, H. M.** , Riemannian Geometry, Manchester, 20-th May, 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: İbrahim ERDAL

Doğum Yeri: Kırıkkale

Doğum Tarihi: 07/11/1991

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise: Kırıkkale Süleyman Demirel Anadolu Lisesi, Haziran 2009

Lisans: Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, Haziran 2013

Yüksek Lisans: Haziran 2015

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları: