T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇOK BOYUTLU BASKAKOV-KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN L_p DE YAKINSAMASI

MERYEM KÖKSAL

HAZİRAN 2015

ÖZET

ÇOK BOYUTLU BASKAKOV-KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN L_p DE YAKINSAMASI

KÖKSAL, Meryem
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Ali OLGUN
Haziran 2015, 82 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde konuyla ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Baskakov-Kantorovich operatörüne giriş yapılmıştır. Çok boyutlu Baskakov ve Baskakov-Kantorovich operatörlerinin yakınsaklığı Korovkin Teoremi yardımıyla gösterilmiştir ve yakınsama hızları hesaplanmıştır. Üçüncü bölümde ise K-fonksiyoneli ve ileri fark operatörü kullanılarak çok boyutlu Baskakov-Kantorovich operatörü için yakınsama hızı gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Baskakov operatörü, Baskakov-Kantorovich operatörü, Korovkin teoremi, Süreklilik modülü, K-fonksiyoneli, İleri fark operatörü

ABSTRACT

L_p APPROXİMATİON BY MULTİVARİATE BASKAKOV-KANTOROVİCH OPERATORS

KOKSAL, Meryem
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied science
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali OLGUN
June 2015, 82 pages

This thesis consists of three chapters. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and teorems are given on the subject and entry is made to Baskakov-Kantorovich operators. Continuity of multivariate Baskakov and Baskakov-Kantorovich operators is showed by Korovkin theorem and their speed of convergence are calculated. In the third chapter, speed of convergence of multivariate Baskakov-Kantorovich operators is calculated using K-functional and forward difference operator.

Key Words: Baskakov operators, Baskakov-Kantorovich operators, Korovkin theorem, Modulus of continuity, K-functional, Forward difference operator.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında benden hiçbir desteğini esirgemeyen, bilgisi ve tecrübeleriyle bu çalışmayı ortaya çıkarabilmemde büyük katkıları olan değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Ali OLGUN'a, yine bu çalışmamda emeği geçen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve bu süreçte beni yalnız bırakmayan sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

(X, d)	Metrik uzay
L_p	Üzerinde tanımlı ölçüye göre mutlak değerlerinin p-yinci kuvveti integrallenebilen ve sonlu değer alan fonksiyon uzayı
$\|f\|_p$	L_p uzayı üzerinde tanımlı norm
$K(f; t)$	K-fonksiyoneli
W_p^r	Ağırlıklı Sobolev uzayı
$\overline{\omega}(f; t)$	ω süreklilik modülünün konkav majorantı
C$[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayı
(Δ_{rh})	İleri fark operatörü
$\Delta_{tu}^r(f; .)$	r-yinci ileri fark operatörü
ω_{L_1}	L_1 süreklilik modülü

1.GİRİŞ

1.1. Kaynak Özeti

Yaklaşımlar teorisi Matematiksel Analizin temel konularından birisidir. Bugüne kadar bu konuda çalışmış birçok araştırmacının değişik çalışmaları mevcuttur. Bu teorinin temeli verilen herhangi bir fonksiyona, bu fonksiyondan daha basit olan fakat daha elemanter özelliklere sahip fonksiyonlar cinsinden yaklaşabilmektir. Bu tür yaklaşımlar $[a, b]$ şeklinde sonlu aralıkta olduğu taktirde kullanılan temel teorem Weierstrass teoremidir. Bu teoreme göre, sonlu $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinom karşılık getirilebilmektedir. Daha sonra bu teoremin daha basit ispatlanabilen ve daha kullanışlı olan halleri Bernstein tarafından verilmiştir.

İlerleyen zamanlarda Korovkin bir L_n lineer pozitif operatörler dizisinin sonlu $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaması için $e_i(x) = x^i \,:\, i = 0,1,2, ..$ test fonksiyonlarına yakınsamasının yeterli olacağını göstermiştir.

İlerleyen zamanlarda bu tür yakınsamalarda yakınsama hızı da önem kazanmıştır. Yakınsama hızı için en önemli test fonksiyonu süreklilik modülü fonksiyonu olarak verilmiş bununla beraber K-fonksiyoneli yardımıyla da yakınsama hızı belirlenmiştir.

Eğer aralık sınırsız ise bu durumda Korovkin teoremi yakınsaklık için yetersiz kalmaktadır. Buna karşılık Baskakov teoremi verilmiştir.

Bernstein 1912 yılında kendi adı ile bilinen Bernstein polinomlarını ve bu polinomlar yardımıyla Bernstein operatörlerini tanımlamıştır. Bu operatörler temel alınarak daha sonra çeşitli yazarlar ve araştırmacılar farklı operatörleri tanımlamıştır. Bu operatörlerin bir çoğu halen geliştirilerek çalışılmaya devam edilmektedir. Bu operatörlerden birisi 1957 yılında Baskakov tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmış

$$B_n f = B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k} f\left(\frac{k}{n}\right); \;\; x \in [0,\infty), n \in \mathbb{N}$$

ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

Daha sonra Ditzian ve Totik bu operatörü

$$K_n(f;x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k} n^d \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \;\; : x \in [0,\infty), n \in \mathbb{N}$$

şeklinde modifiye etmiş ve Baskakov-Kantorovich operatörü olarak isimlendirmiştir.

Biz bu tezde (2008) yılında Feilong Cao ve Chunmei Ding tarafından yapılan integrallenebilir fonksiyonlar için verilen "L_p approximation by multivariate Baskakov-Kantorovich operators" isimli makaleyi baz alacağız ve makaledeki özellikleri inceleyeceğiz.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada öncellikle Baskakov ve Kantorovich operatörleri hatırlatılacak, daha sonra d-boyutlu uzayda Baskakov-Kantorovich operatörünün tanımlanması ve yakınsaklık özellikleri incelenecektir. Amaç tezden faydalanılarak diğer operatörlerin çok değişkenli halleri için bir kaynak oluşturmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanacağımız bazı tanım, teorem ve eşitsizlikleri vereceğiz.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. D, X topolojik uzayının altuzayı olsun. Eğer $\overline{D} = X$ eşitliği mevcut ise D, X te yoğundur.

Tanım 2.2. (Norm): N bir lineer uzay olsun. $\|.\| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x teki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için;

$N1) \|x\| = 0 \;\Leftrightarrow x = 0$

$N2) \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \;\; ; \;\alpha \in \mathbb{R}$

$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N de bir Norm adı verilir. $(N, \|.\|)$ ikilisine bir Normlu Uzay denir.

Tanım 2.3. (Yarı Norm): Yukarıdaki tanımda $N1$) koşulu yerine
$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ koşulu alınırsa, $\|.\|$ ye Yarı Norm ve $(N, \|.\|)$ ikilisine de Yarı Normlu Uzay denir.

Tanım 2.4. Eğer bir $(X, \|.\|)$ normlu lineer uzayı tam ise buna bir Banach Uzayı denir.

Tanım 2.5. (Metrik Uzay): Bir X kümesi ile bir $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall\, x, y, z \in X$ için

$M1)\ \rho(x,y) \geq 0$

$M2)\ \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (üçgen eşitsizliği)

$M3)\ \rho(x,y) = \rho(y,x)$ (simetrik)

$M4)\ x = y \Rightarrow \rho(x,y) = 0$ (yani $\rho(x,x) = 0$)

$M5)\ x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) \neq 0$

özellikleri sağlanıyorsa ρ fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir Metrik denir. (X,ρ) ikilisine de Metrik Uzay denir.

Tanım 2.6. $\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon > 0$ ve $\forall m,n \geq N$ için $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde $N = N(\varepsilon)$ tam sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy Dizisi denir.

Ayrıca her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

Tanım 2.7. X teki her bir Cauchy dizisi yine X teki bir noktaya yakınsıyor ise (X,d) metrik uzayı Tamdır denir.

Tanım 2.8. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $x_1, x_2, \ldots, x_n$ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reel sayıları için

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}.\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2}$$

yada

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.1. f, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere derecesi n den büyük olmayan öyle bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır, öyle ki bu aralığın her noktasında

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |P_n(x) - f(x)| = 0$$

oluyorsa, $P_n(x)$ $f(x)$ e düzgün yakınsaktır denir.

Teorem 2.2. (Lusin Teoremi): $f \in L_p(a, b)$, $p \geq 1$ için $[a, b]$ kapalı aralığında öyle bir sürekli φ fonksiyonu bulabiliriz ki, ε yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$$

olur.

Lusin Teoreminden denilebilir ki L_p de olan bir fonksiyon L_p normunda bir P_n polinomunun limiti şeklinde gösterilebilir.

Yani $f \in L_p$ ise Lusin Teoremi gereğince sürekli bir φ fonksiyonu bulunabilir öyle ki $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$ olur.

Yine φ, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır öyle ki $[a, b]$ kapalı aralığında $\varphi(x)$ e düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |P_n(x) - \varphi(x)| = 0$$

dır [1]. Şimdi $P_n(x)$ polinomlarının L_p normunda f ye yakınsadığını gösterelim. Yukarıdaki iki teorem birleştirilirse

$$
\begin{aligned}
\|f(x)-P_n(x)\|_p &= \|f(x)-\varphi(x)+\varphi(x)-P_n(x)\|_p \\
&\leq \|f(x)-\varphi(x)\|_p + \|\varphi(x)-P_n(x)\|_p \\
&< \varepsilon + \left(\int_a^b |\varphi(x)-P_n(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon + \max_{a\leq x\leq b} \quad |P_n(x)-\varphi(x)|(b-a)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur ki bu da $P_n(x)$ polinomlarının $f(x)$ e L_p normunda yakınsadığını gösterir.

Tanım 2.9. (Hölder Eşitsizliği): $p > 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, f \in L_p, g \in L_q$ için

$$
\int_D f(x)g(x)dx \ \leq \left(\int_D |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_D |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q \qquad (2.1)
$$

dir.

Tanım 2.10. (Minkowsky Eşitsizliği): $f, g \in L_p$ için

$$
\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad (2.2)
$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.11. (Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği):

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{D_1} \left|\int_{D_2} f(y)K(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \int_{D_2} \left(\int_{D_1} |f(y)K(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\leq \int_{D_2} |f(y)| \left(\int_{D_1} |K(x,y)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

dir.

Tanım 2.12. (Lipsichtz Sınıfından Fonksiyonlar Uzayı): $f(x)$ bir I aralığında tanımlanmış fonksiyon olsun. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in I$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^{\alpha} \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ varsa f ye α-yıncı basamaktan Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir. Bir I aralığında

1) $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f fonksiyonu bu aralıkta süreklidir.

2) $\alpha > 1$ için $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f sabit fonksiyondur.

Tanım 2.13. (Sobolev Uzayı): $1 \leq p < \infty,\ k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$W_p^k(\Omega) := \left\{ f: \Omega \to \mathbb{R} \mid f \in L_1^{loc}(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \ için\ D_w^{\alpha} f \in L_p(\Omega) \right\}$$

ile tanımlanan küme $L_p(\Omega)$ uzayının bir alt uzayıdır. Bu uzaya $W_p^k(\Omega)$ Sobolev Uzayı denir.

2.2. L_1 Uzayında Olan Fonksiyonların Süreklilik Modülü Ve Özellikleri

Tanım 2.14. $f \in L_1$ olmak üzere ω ile gösterilen

$$\omega_{L_1}(f;\sigma) = \sup_{|t| \leq \sigma} \int_R |f(x+t) - f(x)| dx \tag{2.5}$$

integraline$f$ **nin L_1-süreklilik modülü** denir.

Tanım 2.15. Kompakt bir I aralığı üzerinde reel değerli sürekli bir f fonksiyonunun $r \in \mathbb{N}$ ve $t > 0$ olmak üzere r-yinci basamaktan süreklilik modülü

$$\omega_r(f;t) = \sup_{|h|\leq r} \|\Delta_h^r f\|$$

ile verilir. Burada norm maksimum norm ve Δ_h^r r-yinci ileri fark operatörüdür ve

$$\Delta_h f(x) \coloneqq f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta_h^r f(x) \coloneqq \Delta_h\left(\Delta_h^{r-1} f(x)\right) \; ; r > 1$$

şeklindedir. Ayrıca $\sigma < \sigma_1$ olduğunda

$$\omega_{L_1}(f;\sigma) < \omega_{L_1}(f;\sigma_1)$$

dır. L_1 süreklilik modülü negatif olmayan ve monoton artan bir fonksiyondur. Şimdi süreklilik modülünün bazı özelliklerini inceleyelim.

Lemma 2.1. m doğal sayı olmak üzere

$\omega_{L_1}(f;m\sigma) \leq m\omega_{L_1}(f;\sigma)$ dir.

İspat 2.1.

$$\omega_{L_1}(f;m\sigma) = \sup_{|t|\leq m\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|dx$$

ifadesinde $t = my$ alıp aşağıdaki işlemleri yaparsak,

$$\omega_{L_1}(f;m\sigma) = \sup_{|y|\leq \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+my) - f(x)|dx$$

$$= \sup_{|y|\leq \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+my) - f(x+(m-1)y) + f(x+(m-1)y)$$

$$-f(x+(m-2)y) + f(x+(m-2)y) - \cdots - f(x+y)$$

$$+f(x+y)-f(x)|dx$$

$$= \sup_{|y|\le\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{m} f(x+ky)-f(x+(k-1)y) \right| dx$$

$$\le \sup_{|y|\le\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} |f(x+ky)-f(x+(k-1)y)| dx$$

yazılabilir. Burada $x+(k-1)y=z$ denilirse ve sonra yeniden z yerine x, y yerine t alınırsa

$$\omega_{L_1}(f;m\sigma) \le \sup_{|z|\le\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} |f(z+y)-f(z)| dz$$

$$\le m \sup_{|z|\le\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |f(z+y)-f(z)| dz$$

$$= m\omega_{L_1}(f;\sigma)$$

elde edilir ki bu da istenendir.

Sonuç 2.1. $0<\lambda<1$ bir reel sayı olmak üzere

$$\omega_{L_1}(f;\lambda\sigma) \le (1+\lambda)\omega_{L_1}(f;\sigma)$$

dır.

İspat 2.2. $[\![\lambda]\!]$ ile λ sayısının tam kısmı gösterilsin. Bu durumda $\lambda<[\![\lambda]\!]$+1 dir ve $\omega_{L_1}(f;\sigma)$ fonksiyonu monoton artan olduğundan

$$\omega_{L_1}(f;\lambda\sigma) \le \omega_{L_1}(f;([\![\lambda]\!]+1)\sigma)$$

dir. $[\![\lambda]\!]$+1 tamsayı olduğundan Lemma 2.1 ve son olarak $[\![\lambda]\!]<\lambda$ olduğu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\omega_{L_1}(f;\lambda\sigma) &\le \omega_{L_1}(f;([\![\lambda]\!]+1)\sigma)\\
&\le ([\![\lambda]\!]+1)\omega_{L_1}(f;\sigma)\\
&\le (\lambda+1)\omega_{L_1}(f;\sigma)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2. $f \in L_1$ olmak üzere $\lim\limits_{\sigma\to 0}\omega_{L_1}(f;\sigma) = 0$ dır.

İspat 2.3. $f \in L_1$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists\, a \in \mathbb{R}$ reel sayısı bulunabilir öyle ki;

$$
\int_{-\infty}^{-a} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \int_{a}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}
$$

sağlanır. Ayrıca her pozitif σ sayısı için

$$
\int_{-\infty}^{-a-\sigma} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad \int_{a+\sigma}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.6}
$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$|t| \le \sigma$ yani $-\sigma \le t \le \sigma$ için,

$$
\int_{a+\sigma}^{\infty} |f(x+t)|dx = \int_{a+\sigma+t}^{\infty} |f(x)|dx < \int_{a}^{\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.7}
$$

dır. Çünkü $\sigma + t \ge 0$ ve $a + \sigma + t \ge a$ dır.

Benzer şekilde $t - \sigma \le 0$ ve $-a - \sigma + t \le -a$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{-a-\sigma} |f(x+t)|dx = \int_{-\infty}^{-a-\sigma+t} |f(x)|dx < \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.8}$$

olduğu görülür. (2.6), (2.7), (2.8) formüllerinden

$$\sup_{|t|\le\sigma}\left\{\int_{-\infty}^{-a-\sigma} |f(x+t)-f(x)|dx + \int_{a+\sigma}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|dx\right\} < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sup_{|t|\le\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|dx \le \sup_{|t|\le\sigma}\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|f(x+t)-f(x)|dx + \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. İspat için

$$\sup_{|t|\le\sigma}\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma}|f(x+t)-f(x)|dx$$

ifadesinin de ε dan küçük kaldığını göstermek yeterlidir. Bunun için Lusin Teoremini kullanalım. Lusin Teoremi gereğince $f \in L_1(a,b)$ için $\|f-\varphi\|_{L_1} < \varepsilon$ olacak şekilde sürekli bir φ fonksiyonu vardır. Dolayısıyla $[-a-2\sigma, a+2\sigma]$ aralığında sürekli bir φ fonksiyonu bulunabilir öyle ki

$$\int_{-a-2\sigma}^{a+2\sigma} |f(x)-\varphi(x)|dx < \varepsilon \tag{2.9}$$

yazılabilir.

Bu durumda

$$\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |f(x+t)-f(x)|dx \leq \int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |f(x+t)-\varphi(x+t)|dx$$
$$+\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx$$
$$+\int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |\varphi(x)-f(x)|dx \qquad (2.10)$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.8) den

$$\sup_{|t|\leq\sigma} \int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |f(x+t)-\varphi(x+t)|dx = \int_{-a-\sigma+t}^{a+\sigma+t} |f(x)-\varphi(x)|dx$$
$$< \int_{-a-2\sigma}^{a+2\sigma} |f(x)-\varphi(x)|dx < \varepsilon$$

elde ederiz. (2.9) dan ise

$$\sup_{|t|\leq\sigma} \int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |f(x+t)-f(x)|dx \leq 2\varepsilon + \sup_{|t|\leq\sigma} \int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx \qquad (2.11)$$

şeklinde yazılır. φ sürekli bir fonksiyon olduğundan $|t| < \sigma$ şartını sağlayan t ler için süreklilikten dolayı

$$|\varphi(x+t)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2(a+\sigma)}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sup_{|t|\leq\sigma} \int_{-a-\sigma}^{a+\sigma} |\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx < \varepsilon$$

elde edilir. Bu eşitsizliği (2.10) da yerine yazarsak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3. (Korovkin Teoremi): $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$, $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığında düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için,

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x) \tag{2.12}$$
$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x) \tag{2.13}$$
$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x) \tag{2.14}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada f, $[a,b]$ de sürekli, a da sağdan, b de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur.

Tanım 2.16. (Konveks Fonksiyon): Bir aralıkta sürekli olan f fonksiyonu bu aralıktan alınmış her x ve y için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) \tag{2.15}$$

eşitsizliğini sağlarsa, söz konusu fonksiyona bu aralıkta (dışbükey) konveks fonksiyon denir. Eğer

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{y}{2}\right) \tag{2.16}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye (içbükey) konkav fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.17. (Jensen Eşitsizliği): f fonksiyonu konveks olsun ve
$P_i \geq 0;\ (i = 1,2,\dots,n)$ sayıları $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda konvekslik aralığından alınmış $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler için

$$f(P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n) \geq P_1f(x_1) + P_2f(x_2) + \cdots + P_nf(x_n) \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır.

Not 2.1. Bu eşitsizlik -1 ile çarpıldığında tersine döneceğinden konkav fonksiyonlar için bu eşitsizlik tersine döner.

Not 2.2. Negatif olmayan P_i ler için $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$ koşulu verilmeden yukarıdaki eşitsizlik

$$f\left(\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}\right) \geq \frac{P_1 f(x_1) + P_2 f(x_2) + \cdots + P_n f(x_n)}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\frac{P_1}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} + \frac{P_2}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} + \cdots + \frac{P_n}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n} = 1 \quad dir.$$

2.3. K- Fonksiyoneli

Kabuledelim ki X_i, $i = 0{,}1$ iki Banach uzayı olsun. Öyleki X_1, X_0 içine gömülür ve sürekli yani $X_1 \subset X_0$ olsun. Bu durumda $f \in X_0$ için K-fonksiyoneli

$$K(f;t) \coloneqq K(f,t;X_0,X_1) \coloneqq \inf_{g \in X_1}\{\|f-g\|_{X_0} + t\|g\|_{X_1}\}, \qquad t > 0 \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır. Yarı normlu uzaylarda üçgen eşitsizliği gereğince

$$\|f+g\|_X \leq c(\|f\|_X + \|g\|_X) \tag{2.20}$$

ve $\mu > 0$ için

$$\|f+g\|_X^\mu \leq c\left(\|f\|_X^\mu + \|g\|_X^\mu\right) \tag{2.21}$$

yazılabilir.

$$D_i^r = \frac{\partial^r}{\partial x_i^r}\ , r \in \mathbb{N}\ , 1 \leq p < \infty \quad L_p(T)$$

ölçülebilir fonksiyon uzayı olmak üzere

$$W_\varphi^{r,p}(T) = \{f \in L_p(T) : \ D^k f \in L_{loc}\big(\dot{T}\big) \text{ ve } \varphi_i^r D_i^r f \in L_p(T)\big\}$$

ağırlıklı Sobolev uzayı olarak tanımlanır. Burada $|k| \leq r, k \in \mathbb{N}_0^d$ ve $\dot{T}$, T nin içini göstermektedir.

$X_0 = L_p$ ve $X_1 = W_p^r$ alınır ve yarı norm $|g|_{W_p^r} := \left\|g^{(r)}\right\|_p$ alınırsa,

$$K\big(f, t; L_p, W_p^r\big) := \inf_{g \in W_p^r}\left\{\|f - g\|_p + t\left\|g^{(r)}\right\|_p\right\} \tag{2.22}$$

olur. K- fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $t \geq 0$ için $K(f, t)$ fonksiyonu artan, sürekli, konkav ve alt toplamsaldır. Yani

$$K(f; t_1 + t_2) \leq K(f; t_1) + K(f; t_2) \tag{2.23}$$

dır.

2) X_0, X_1 birer Banach uzayı ise $K(f, t)$, $X_0 + X_1$ üzerinde bir yarı normdur.

3) X_0, X_1 yarı normlu uzaylar ise $t > 0$ sabiti için $K(f, t)$ de yarı normdur ve herhangi $f, g \in X_0 + X_1$ için

$K(f + g; t) \leq c\big(K(f, t) + K(g, t)\big)$ dir.

2.4. K-Fonksiyoneli Ve Süreklilik Modülü

K-fonksiyoneli ve ω süreklilik modülü arasında kapalı bir bağlantı vardır. $\overline{\omega}$, ω nın konkav majorantı olmak üzere

$$\omega(f;t) \leq \overline{\omega}(f;t) \leq 2\omega(f;t) \tag{2.24}$$

eşitsizliğinin varlığı gösterilmiştir [2-6].

Elemanter L_p normu için, $0 < p \leq \infty$ ve $\mu = \min(p,2)$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ ve $M = M(p)$ yeteri kadar büyük sayılar için

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2(|a|^\mu + M|b|^\mu)^{\frac{p}{\mu}} \tag{2.25}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizlik ve L_p deki norm tanımı göz önüne alınırsa aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 2.3. $1 \leq p < \infty$ ve $\mu = \min(p,2)$ olsun. $M := M(p)$ sabiti için $f, g \in L_p$ olmak üzere

$$\|f+g\|_p + \|f-g\|_p \leq 2\left(\|f\|_p^\mu + M\|g\|_p^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}} \tag{2.26}$$

olur.

Benzer şekilde $a \coloneqq f(x)$, $b \coloneqq g(x) \in L_p$ olarak alıp, her iki tarafı integrallenirse

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2\int_A (|f|^\mu + M|g|^\mu)^{\frac{p}{\mu}} dx$$

olur.

Teorem 2.4. (Korneichuk 1961):

$T \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$, $T \coloneqq T_d \coloneqq \{x \coloneqq (x_1, x_2, \dots, x_d) : 0 \leq x_i < \infty, 1 \leq i \leq d\}$ olsun. $A = [a, b]$ yada $A = T$ olmak üzere $f \in \mathrm{C(A)}$ için

$$K(f, t; C, Lip_1) = \frac{1}{2}\overline{\omega}(f; 2t) \tag{2.27}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mathrm{C(A)} \coloneqq \{f : f, A \text{ da sürekli}\}$ dir.

İspat 2.4. Keyfi $f \in C(A), g \in Lip_1$ ve $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned}\omega(f; 2t) = \omega(f - g + g; 2t) &\leq \omega(f - g; 2t) + \omega(g; 2t) \\ &\leq 2\|f - g\|_C + 2t|g|_{Lip_1} \\ &\leq 2\left\{\|f - g\|_C + t|g|_{Lip_1}\right\}\end{aligned}$$

olur. Her iki taraftan infimum alınırsa

$\omega(f; 2t) \leq 2K(f; t)$ olduğu görülür.

Ayrıca K konkav olduğundan (2.24) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\frac{1}{2}\overline{\omega}(f; 2t) \leq K(f; t)$$

yazılabilir.

Tersine eşitsizliği ispatlamak için $f \in C(A)$ ve $t > 0$ bir sabit olsun. $2t$ sabit noktası ve $\overline{\omega}$ fonksiyonu için $\ell(S)$ fonksiyonunu

$$\ell(S) \coloneqq \overline{w}(f, 2t) + M(S - 2t) \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada M bir sabittir.

$S=2t$ de $\overline{\omega}$ lineer fonksiyonunun destek fonksiyonu $\overline{\omega}(f,S)\leq \ell(S)$; $S\geq 0$ eşitsizliğini sağlayacağından

$$S:=\frac{1}{2}\sup_{S>0}[\overline{\omega}(f,S)-MS]=\frac{1}{2}[\overline{\omega}(f,2t)-2Mt] \qquad (2.29)$$

şeklinde tanımlayalım.

f ye karşılık gelen $g\in Lip_1$ fonksiyonunu bulmak için her bir $y\in A$ için

$$f_y(x):=f(y)-M|x-y|-\delta\,,\;\; x\in A \qquad (2.30)$$

şeklinde yazalım. Açıkça $f_y\in Lip_1$ ve $\left|f_y\right|_{Lip_1}\leq M$ dir.

$$g(x):=\sup_{y\in A} f_y\,(x) \qquad (2.31)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (2.31) göz önüne alındığında

$$f_y(x_1)\leq f_y(x_2)+M|x_1-x_2|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik g için düzenlenebilir. Böylece $|g|_{Lip_1}\leq M$ elde ederiz. Dolayısıyla K-fonksiyonelinin tanımı ve yukarıdaki eşitsizlikleri göz önüne alırsak (2.31) de tanımlanan g fonksiyonu için

$$g(x)-f(x)=\sup_{y}[f(y)-f(x)-M|x-y|-\delta]\geq -\delta$$

ifadeleri sağlanır. Diğer taraftan δ nın tanımından $x,y\in A$ için

$$f(y)-f(x)-M|x-y|\leq w(f;|x-y|)-M|x-y|\leq 2\delta$$

olup, buradan $g(x)-f(x)\leq\delta$ olur.Böylece $\|f-g\|_C\leq\delta$ yazılabilir. Buradan,

$$K(f,t) \leq \|f-g\|_C + t|g|_{Lip_1} \leq \delta + Mt = \frac{1}{2}\overline{w}(f,2t)$$

olur. Bu da istenilendir.

Teorem 2.5. (Johnen 1972): $A = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, T$ yada $[a,b]$ kümelerinden biri olsun. $1 \leq p < \infty;\ r = 1,2,\dots$ için sadece r ye bağlı c_1 ve $c_2 > 0$ sabitleri vardır. Öyleki tüm $f \in L_p$ için

$$c_1\omega_r(f;t)_p \leq K\left(f, t^r, L_p, W_p^r\right) \leq c_2\omega_r(f;t)_p\ , \qquad t > 0 \tag{2.32}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 2.5. Keyfi f ve $g \in W_p^r$ için süreklilik modülünün temel özelliklerinden dolayı

$$\omega_r(f+g;t)_p \leq \omega_r(f;t)_p + \omega_r(g;t)_p$$
$$\omega_r(f;t)_p \leq 2^{r-k}\omega_k(f;t)_p\ , \qquad 1 \leq p < \infty$$
$$\omega_r(f;t)_p \leq 2^{r-k}\omega_k(f;t)_p^p\ , \qquad 0 < p < 1$$
$$\omega_r(f;t)_p \leq t^r|f|W_p^r$$

eşitsizlikleri sağlandığından K- fonksiyonelinin tanımı ve (2.24) eşitsizliği gereğince

$$\omega_r(f;t)_p = \omega_r(f-g+g;t)_p$$
$$\omega_r(f;t)_p \leq \omega_r(f-g;t)_p + \omega_r(g;t)_p \tag{2.33}$$
$$\omega_r(f;t)_p \leq 2^r\|f-g\|_p + t^r\left\|g^{(r)}\right\|_p \tag{2.34}$$

eşitsizlikleri sağlanır ki bu da yukarıdaki eşitsizliğin $c_1 = 2^{-r}$ için sağlandığını gösterir. Eşitsizliğin sağ tarafını elde etmek için $t > 0$ üzerinde f fonksiyonuna bağlı bir g fonksiyonunu

$$\Delta_{he}^{r} f(x) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{i} f(x+ihe), \quad x, x+rhe \in T \text{ olmak üzere}$$

$$g(x) \coloneqq f(x) + (-1)^{r+1} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{tu}^{r}(f,x) M(u)du \tag{2.35}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $M(u) = M(0, \dots, r, u)$ şeklindedir.

g fonksiyonu A üzerinde tanımlıdır. ($A = \mathbb{R}, \mathbb{R}_{+}$yada T)

Eğer $A = [a,b]$ ise g tanımlıdır. Eğer $x \in I_1 \coloneqq \left[a, b - \frac{b-a}{4}\right]$ ve $t \leq t_0 \coloneqq \frac{b-a}{4r^2}$ ise yine tanımlıdır. $A = [a,b]$ için,

$$\begin{aligned} \|f-g\|_p(A) &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\Delta_{tu}^{r}(f;.)\|_p(A)\, M(u)du \\ &\leq w_r(f;rt)_p \leq r^r\, w_r(f;t)_p \end{aligned} \tag{2.36}$$

yazılabilir.

$g^{(r)}$ yi belirlemek için f nin A üzerinde r-yinci integrali F olsun. $g(x)$ ifadesinin sağ tarafındaki integralin lineer kombinasyonu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+j+u)M(u)du &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\, M((jt)^{-1}u)(jt)^{-1}du \\ &= (jt)^{-1}\Delta_{jt}^{r}(F,x) \quad ; \quad j = 1,2, \dots, r \end{aligned}$$

olur. Çünkü

$M((jt)^{-1}u)(jt)^{-1}$=$M(u; jt, \dots rjt)$
$M(x) := M(x; x_0, x_1, \dots, x_r) \coloneqq r[x_0, x_1, \dots, x_r](.-x)^{r-1}$

$$[x_0, x_1, \dots, x_r]f = \frac{1}{r!}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)M(t)dt \text{ olup,}$$

$$f(t) = t^r \text{ olursa } \int_{-\infty}^{\infty} M(t)dt = 1$$

olarak elde edilir.

$M(u; jt, \dots rjt)$ ifadesinin r-yinci türevi $(jt)^{-r}\Delta_{jt}^{r}(f;t)$ dir. Bu durumda

$$g^{(r)}(x) = t^{-r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+r}\binom{r}{j} j^{-r}\Delta_{jt}^{r}(f;x) \tag{2.37}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\left\|\Delta_{jt}^{r}(f)\right\| \leq w_r(f;jt) \leq j^r\, w_r(f;t) \tag{2.38}$$

olduğundan (2.34) de göz önüne aldığımızda

$$t^r\left\|g^{(r)}\right\|_p(A) \leq 2^r w_r(f;t)_p$$
$$\|f-g\|_p(A) + t^r\left\|g^{(r)}\right\|_p(A) \leq c w_r(f;t)_p$$

eşitsizliği sağlanır. K-fonksiyonelinin tanımı göz önüne alındığında teoremin sağ tarafının gerçeklendiği görülür.

$T = T(x_1, x_2, .., x_d)$ olmak üzere, T üzerindeki sürekli fonksiyonlar için $f \in C(T)$ süreklilik modülü

$$\Omega(f,u) = sup|f(x) - f(y)|;\ |x_i - y_i| \leq u_i,\ \ x, y \in T, u \in T_d$$

şeklinde tanımlanır.

$\omega(t)$, $[0, b-a]$ aralığında sürekli, azalmayan ve $\omega(0) = 0$ olan bir fonksiyon ise, o taktirde

$$\omega^*(t) = t \inf_{0 \le x \le t} \frac{\omega(x)}{x}$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir süreklilik modülüdür.
$\frac{\omega^*(t)}{t}$ artmayan bir fonksiyon olduğunda $\omega^*(t)$ azalmayan bir fonksiyondur.

Süreklilik modülünün tanımı göz önüne alınırsa,

1) $\omega(0) = 0$

2) $\omega(t)$ azalmayandır. $t_1 < t_2$, $\omega(t_1) \le \omega(t_2)$

3) $\omega(t_1 + t_2) \le \omega(t_1) + \omega(t_1)$

4) ω (t), $0 \le t \le b - a$ aralığında süreklidir.

Burada 1) ve 2) açıktır.

Eğer $|x_1 - x_2| \le t_1 + t_2$ ve $x - x_1 = t_1$, $x_1 \le x \le x_2$ ise o taktirde,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\le |f(x) - f(x_1)| + |f(x_2) - f(x)| \\ &\le \omega(x - x_1) + \omega(x_2 - x) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $x_2 - x \le t_2$ için de benzer eşitsizlik görülebilir.

4) özelliği 1) ve 3) ten $t \to 0$ için $\omega(t) \to 0$ olduğunu gösterir.

Eğer ω (t) $[0, b-a]$ aralığında azalmayan ve sürekli ise o taktirde, $\omega(0) = 0$ ve $\frac{\omega(t)}{t}$ artmayandır. Bu ifade de bir süreklilik modülüdür ve

$$\omega(t_1+t_2) = t_1\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2} + t_2\frac{\omega(t_1+t_2)}{t_1+t_2} \leq t_1\frac{\omega(t_1)}{t_1} + t_2\frac{\omega(t_2)}{t_2}$$
$$\leq \omega(t_1)+\omega(t_2) \tag{2.39}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca

$$|\omega_k(t_2)-\omega_k(t_1)| \leq 2^k\omega_1(k|t_2-t_1|) \tag{2.40}$$

eşitsizliği de sağlanır. Eğer

$$t_1 < t_2 \text{ ve } \inf_{o<x\leq t_1}\frac{\omega(x)}{x} < \inf_{o<x\leq t_2}\frac{\omega(x)}{x}$$

ise, o taktirde

$$\inf_{o<x\leq t_1}\frac{\omega(x)}{x} = \inf_{t_1\leq x\leq t_2}\frac{\omega(x)}{x}$$

dir. Böylece

$$\omega^*(t_1) = t_1\inf_{0\leq x\leq t_1}\frac{\omega(x)}{x} < \omega(t_1) < \omega(x)\inf_{t_1<x\leq t_2}\frac{t_2}{x} = \omega^*(t_2)$$

olur. Buna göre; eğer ω (t) bir süreklilik modülü ise, o taktirde

$$\frac{1}{2}\omega(t) \leq \omega^*(t) \leq \omega(t) \tag{2.41}$$

eşitsizliği sağlanır. $\omega(t)$ ve $\omega^*(t)$ süreklilik modülü $t \to 0$ için aynı dereceden yakınsaktır. Benzer eşitsizlik $f(x) \in L_p$ için de vardır. Yani

$$\frac{\omega(f;t_2)}{t_2} \leq 2\frac{\omega(f;t_1)}{t_1} \;\; ; \;\; (t_1 < t_2)$$

$$\frac{1}{2}\omega(f;t)_{L_p} \leq \omega^*(t)_{L_p} \leq \omega(f;t)_{L_p} \tag{2.42}$$

eşitsizliği sağlanır.

$f: I \to \mathbb{R}$ sınırlı ve reel değerli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ için δ argümanlı f nin süreklilik modülü

$$\omega(f;\delta) \coloneqq \sup_{\substack{x,y\in I \\ |x-y|\leq\delta}} |f(x) - f(y)| = \sup_{\substack{x,y\in I \\ |x-y|\leq\delta}} |\Delta_h f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan süreklilik modülüne f nin süreklilik modülü adı verilir. Genellikle eğer $f: I \to \mathbb{R}$ sınırlı reel değerli bir fonksiyon ve $\delta > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\omega_k(f;\delta) \coloneqq \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x,x+kh\in I}} \left|\Delta_h^k f(x)\right|$$

f nin k- yıncı süreklilik modülü olarak tanımlanır.

Lemma 2.4. I reel bir aralık $f \in C(I)$ olsun. O taktirde her bir $k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) Eğer $0 < \delta_1 \leq \delta_2 \implies \omega_k(f;\delta_1) \leq \omega_k(f;\delta_2)$ dir.

2) $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \omega_k(f;\delta) = 0$ her $f \in C(I)$ için sağlanır.

3) Her bir $\delta > 0$ için $\omega_{k+1}(f;\delta) \leq 2\omega_k(f;\delta)$

4) Eğer f türevlenebilen bir fonksiyon ve $f' \in C(I)$ ise, o taktirde

$$\omega_{k+1}(f;\delta) \leq \delta\omega_k(f';\delta) \quad \forall\delta > 0$$

için sağlanır.

5) Her bir $\delta > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\omega_k(f; n\delta) \leq n^k \omega_k(f; \delta)$

6) Her bir $\delta > 0$ ve $\lambda > 0$ için $\omega_k(f; \lambda\delta) \leq (1 + [\![\lambda]\!])^k \omega_k(f; \delta)$ sağlanır. Burada $[\![\lambda]\!]$ λ nın tam kısmını göstermektedir.

İspat 2.6. 1) ve 2) aşağıdaki tanım gereğince doğrudan görülür. 3) özelliği doğrudan

$$\Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x) \text{ ve } \omega(f; \delta) := \sup_{\substack{x,y \in I \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)|$$

ifadesinin bir sonucudur.

4) Her bir $h \in \mathbb{R}$, $|h| \leq \delta$ ve $x \in I$, öyleki $x + kh \in I$ olduğunda,

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_h^{k+1} f(x)\right| &= \left|\Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x)\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} [f(x + (m+1)h) - f(x + mh)]\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} \int_{mh}^{(m+1)h} f'(x+t)dt\right| \\
&= \left|\sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} \int_{0}^{h} f'(x + mh + t)dt\right| \\
&= \left|\int_{0}^{h} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{m+k} \binom{k}{m} f'(x + mh + t)dt\right| \\
&= \left|\int_{0}^{h} \Delta_h^k f'(x+t)dt\right| \leq \int_{0}^{h} \left|\Delta_h^k f'(x+t)dt\right|
\end{aligned}$$

$$\left|\Delta_h^{k+1} f(x)\right| \leq \left|\int_0^h \omega_k(f';\delta)dt\right| \leq \delta\omega_k(f';\delta)$$

Buradan görülmektedir ki

$$\omega_{k+1}(f;\delta) \leq \delta\omega_k(f';\delta)$$

olur. Eğer $k = 0$ yada $k = 1$ alırsak 5) doğrudan sağlanır.

Şimdi kabul edelim ki $k \geq 2$ olsun. Verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\omega_k(f;\delta) \coloneqq \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ x,x+kh\in I}} \left|\Delta_h^k f(x)\right|$$

sağlanacak şekilde $h \in \mathbb{R}$ ve $|h| \leq \delta$ vardır. Öyleki $x \in I$ ve $x + n(k+1)h \in I$ için

$\omega_k(f;n\delta) \leq \left|\Delta_{nh}^k f(x)\right| + \varepsilon$ olur.

$$\Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h^k f(x+h) - \Delta_h^k f(x)$$

ifadesi gereğince

$$\begin{aligned}
\Delta_{nh}^k f(x) &= \Delta_{nh}^{k-1} f(x+nh) - \Delta_{nh}^{k-1} f(x) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\dots\sum_{i_{k-1}=0}^{n-1} \Delta_h^{k-1}\left(\sum_{i_k=0}^{n-1} \Delta_h^k f(x + i_1h + i_2h + \dots + i_kh)\right) \\
&= \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\dots\sum_{i_k=0}^{n-1} \Delta_h^k f(x + i_1h + i_2h + \dots + i_kh)
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\omega_k(f;n\delta) \le \left|\Delta_{nh}^k f(x)\right| + \varepsilon \le \sum_{i_1=0}^{n-1}\sum_{i_2=0}^{n-1}\dots\sum_{i_k=0}^{n-1}\left|\Delta_h^k f(x+i_1h+i_2h+\cdots+i_kh)\right| + \varepsilon$$
$$\le n^k\omega_k(f;\delta)+\varepsilon$$

olarak elde edilir. 6), 1) ve 5) özelliğinin bir sonucudur.

2.5. K-Fonksiyoneli İçin Farklı Bir Karakterizasyon

$\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ olsun.

$D = \{g;\ g \in L_p(0,1), g'$mutlak sürekli, $x(1-x)g''(x) \in L_p(0,1)\}$

ve

$$Sg(x) = \big(x(1-x)g''(x), g(x)\big) \tag{2.43}$$

$$\|Sg\|_p = \|\varphi^2 g''\|_{L_p(0,1)} + \|g\|_{L_p(0,1)} \tag{2.44}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde tanımlansın. O taktirde $D \subseteq L_p(0,1)$ lineer ve yoğun kümedir.

Ayrıca $S: D \to L_p(0,1)\times L_p(0,1)$ lineer operatördür.

$$K(t^2,f) = \inf_g\Big(\|f-g\|_p + t^2\big(\|g\|_p + \|\varphi^2 g''\|_p\big)\Big) \tag{2.45}$$

ifadesini göz önüne alalım. Bu ifade ile (2.19) olarak tanımlanan K-fonksiyoneli arasında bazı farklılıklar vardır. Yukarıdaki ifade gereğince $\|g\|_p \le 2\|f\|_p$ kabul edebiliriz. Biliyoruz ki;

$K(t^2,f) = \mathrm{O}(t^{2\alpha})$ dir.

$0 < \alpha < 1$ için (2.19) daki ve (2.45) teki K-fonksiyonelleri birbirine denktir. Bunu görmek için sadece p ye bağlı K sabiti üzerinden

$$\|K_n f - f\|_p \leq K n^{-1} \|Sf\|_p \qquad ; \ (f \in D)$$
$$\|SK_n(f)\|_p \leq Kn \|f\|_p \qquad ; \ (f \in L^p)$$
$$\|SK_n(f)\|_p \leq K \|Sf\|_p \qquad ; \ f \in D$$

eşitsizliklerini gösterebilirsek, o taktirde

$0 < \alpha < 1$ için $\|K_n f - f\|_p \leq O(n^{-\propto})$ ve $K(t^2, f) = O(t^{2\alpha})$ diyebiliriz.

Burada,

$$K_n f(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(u) du ; \ 0 \leq x \leq 1 \qquad (2.46)$$

Kantorovich operatörüdür. Bu ifadeleri görebilmek için önce bir teorem verelim.

Teorem 2.6. $1 \leq p < \infty, 0 < \alpha < 1$ ve $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$ olsun. O taktirde $f \in L_p(0,1)$ olmak üzere

$$\|K_n f - f\|_p \leq K n^{-\propto} \ ; n = 1,2, \ldots \qquad (2.47)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\left\|\Delta_{h\varphi}^2 f\right\|_{L^p(h^2, 1-h^2)} \leq K n^{2\propto} ; \ \ h > 0$$

olmasıdır. Burada $K > 0$ bir sabittir.

İspat 2.7. $\|SK_n f\| \leq Kn \|f\|_p, f \in L_p$ve $\|SK_n f\|_p \leq K \|Sf\|_p$

olduğu doğrudan hesaplamalarda görülebilir. Bu yüzden

$$\|K_n f - f\|_p \leq K n^{-1} \|Sf\|_p; \;\; f \in D \tag{2.48}$$

olduğunu göstermek önemlidir. İlk olarak gösterelim ki

$$\|f'\|_p \leq K \|Sf\|_p \; ; \;\; f \in D \tag{2.49}$$

dir. Bunun için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım.

$f_1(x) = f(x)\psi(3x)$ olsun. Burada

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & ; x \leq 2 \\ 0 & ; x \geq 2 \\ 0 \leq \psi(x) \leq 1 & ; diğer\ yerlerde \end{cases}$$

dir. Kabul edebiliriz ki $|\psi'| \leq c$ ve $|\psi''| \leq c$ olacak şekilde c vardır. Şimdi

$f(x) = f(x)\, \psi(3x) + f(x)[1 - \psi(3x)]$ şeklinde yazabiliriz.

Ayrıca Ditzian $0 < k < n$ ve $f, f^r \in L_p[a,b]; 1 \leq p < \infty$ için

$$\left\|f^{(k)}\right\|_p \leq M(n,k)\left\{(b-a)^{-k}\|f\|_p + (b-a)^{n-k}\left\|f^{(n)}\right\|_p\right\} \tag{2.50}$$

ya da

$$\left\|f^{(k)}\right\|_p \leq M(k)\left\{(b-a)^{-k}\|f\|_p + (b-a)^{n-k}\left\|f^{(k+1)}\right\|_p\right\} \tag{2.51}$$

eşitsizliklerinin tümevarım yoluyla varlığını gösterdiğinden [2-6]
$\|f'\|_{L_p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)} \leq K\|Sf\|_p$ yazılabilir.

Simetrik olarak $\|f_1{}'\|_{L_p\left(0,\frac{1}{3}\right)} \leq K\|Sf\|_p$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $h \in L_q(0,1)$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)\left(\left(0,\frac{3}{4}\right)\text{kompakt desteği}\right)$ ise o taktirde kısmi integrasyon yardımıyla

$$\left|\int_0^1 f'(x)h(x)dx\right| = \left|f'(x)\int_0^x h(x)dx\right|_0^1 - \int_0^1 f''(x)\left(\int_0^x h(\tau)d\tau\right)dx\right|$$
$$= \left|\int_0^1 f_1''(x)\left(\int_0^x h(\tau)d\tau\right)dx\right|$$
$$= \left|\int_0^1 \varphi^2 f_1''(x)\left(\frac{1}{\varphi^2(x)}\int_0^x h(\tau)d\tau\right)dx\right|$$
$$\leq \|\varphi^2 f_1''\|_p \left\|\frac{1}{\varphi^2(x)}\int_0^x h(\tau)d\tau\right\|_q$$
$$\leq K\|\varphi^2 f_1''\|_p\|h\|_q$$

ifadesini elde ederiz. Buradaki son eşitsizlikte

$$\left\|\frac{1}{x}\int_0^x h(\tau)d\tau\right\|_{L_p(0,\infty)} \leq \frac{p}{p-1}\|h\|_{L_p(0,\infty)}$$

olarak verilen Hardy eşitsizliği kullanılmıştır.

$h \in L_q(0,1)$ve (supporth) $\subseteq \left(0,\frac{3}{4}\right)$ var olduğundan

$$\|f_1'\|_p \leq K\|\varphi^2 f_1''\|_p \leq K\|\varphi^2 f''\|_{L_p\left(0,\frac{1}{3}\right)} + (max|\psi''|)\|f\|_{L_p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}$$
$$+(2max|\psi'|)\|f'\|_{L_p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)} + \|\varphi^2 f''\|_{L_p\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}$$
$$\leq K\|Sf\|_p$$

olduğu görülür.

Şimdi

$$B_n(f;x) = B_nf(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)$$

Bernstein polinomlarını göz önüne alalım. Burada $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ dır.

$\|f'\|_p \leq K\|Sf\|_p$; $f \in D$ eşitsizliği ve Jensen eşitsizliğinden ([0,1] dışında $f' = 0$ konularak)

$$\|K_nf - B_nf\|_p = \left\| \sum_{k=0}^{n} \left((n+1) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(u)du \right) P_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x) \right\|_p$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left\{ (n+1) \int_{\frac{k}{n+1}-\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n+1}-\frac{k}{n}} \int_{0}^{u} f'\left(\frac{k}{n} + \vartheta\right) d\vartheta du \right\} P_{n,k}(x) \right\|_p$$

$$\leq \left\| \sum_{k=0}^{n} (n+1) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} O\left(\frac{1}{n}\right) \left| f'^{\left(\frac{k}{n}+\vartheta\right)} \right| d\vartheta P_{n,k}(x) \right\|_p$$

elde edilir. Norm tanımını göz önüne alırsak

$$\|K_nf - B_nf\|_p \leq \frac{K}{n} \left\{ \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left((n+1) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left| f'^{\left(\frac{k}{n}+\vartheta\right)} \right|^p \right) P_{n,k}(x) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

olup, (2.50) ifadesi gereğince de

$$\|K_n f - B_n f\|_p \leq \frac{K}{n}\|f'\|_p \leq \frac{K}{n}\|Sf\|_p \tag{2.52}$$

yazabiliriz. Burada

$$\int_0^1 P_{n,k}(x)dx = \frac{1}{n+1}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

eşitliği kullanılmıştır.

(2.52) eşitsizliği $f \in D$ için $\|B_n f - f\|_p \leq \frac{K}{n}\|Sf\|_p$

eşitsizliğini ispatlamak için yeterlidir. Bunun için Taylor formülünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} f(t) &= f(x) + f'(x)(t-x) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{t-x} \frac{t-x-\tau}{(x+\tau)(1-x-\tau)}(x+\tau)(1-x-\tau)g''(x+\tau)d\tau \end{aligned} \tag{2.53}$$

Taylor formülünde $\tau \in (0, t-x)$, $t, x \in (0,1)$ için

$$\left|\frac{t-x-\tau}{(x+\tau)(1-x-\tau)}\right| \leq \frac{|t-x|}{x(1-x)}$$

yazılabilir. Ayrıca $B_n(t-x;x) \equiv 0$ olduğunu göz önüne alarak (2.53) ifadesine B_n operatörünü uygularsak

$$|B_n f(x) - f(x)| = B_n(t-x;x)f'(x)$$

$$+\frac{1}{2}B_n\left(\int_0^{t-x}\frac{t-x-\tau}{(x+\tau)(1-x-\tau)}(x+\tau)\,(1-x-\tau)f''(x+\tau)d\tau\right)$$

$$|B_nf(x)-f(x)|\leq\frac{1}{2}B_n\left(\frac{|t-x|}{x(1-x)}\left|\int_0^{t-x}(x+\tau)(1-x-\tau)f''(x+\tau)\right|d\tau;x\right)$$

olur.

$p>1$ için $M(.)$ maksimal fonksiyonunu kullanırsak

$$\begin{aligned}\|B_nf-f\|_p&\leq\frac{1}{2}\left\|B_n\left(\frac{(t-.)^2}{\varphi^2}M(\varphi^2f'';.);.\right)\right\|_p\\&\leq\frac{K}{n}\|M(\varphi f'';.)\|_p\\&\leq\frac{K}{n}\|\varphi f'')\|_p\\&\leq\frac{K}{n}\|Sf\|_p\end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Burada $B_n((t-x)^2;x)=\frac{x(1-x)}{n}$ değeri kullanılmıştır.

$p=1$ için Fubini Teoremi yeterlidir. ($p_{n,-1}\equiv 0$ yazılır)

Teorem 2.7. (Fubini Teoremi): Eğer $f(x,y)$ R bölgesi üzerinde sürekli ve $a\leq x\leq b, c\leq y\leq d$ şeklinde tanımlı ise,

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

dir.

$$\|B_nf-f\|_{L_1\left(0,\frac{1}{2}\right)}\leq\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{x(1-x)}\left|\int_x^{\frac{k}{n}}u(1-u)|f''(u)|du\right|P_{n,k}(x)\right\}dx$$

$$\leq\int_0^{1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{x(1-x)}\left|\int_x^{\frac{k}{n}}u(1-u)|f''(u)|du\right|P_{n,k}(x)\right\}dx$$

$$\leq\int_0^{1}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\left(\int_x^{\frac{k}{n}}u(1-u)|f''(u)|du\right)P_{n,k}(x)\right\}dx$$

$$=\int_0^{1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{k}{n}-x}{x}\left(\int_0^{\frac{k}{n}}u(1-u)|f''(u)|du\right)P_{n,k}(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{\frac{k}{n}}u(1-u)|f''(u)|du\right)\int_0^{1}\left(P_{n-1,k-1}(x),P_{n,k}(x)\right)dx$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\int_0^{1}u(1-u)|f''(u)|du\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\leq\frac{K}{n}\|Sf\|_L$$

olarak bulunur. Benzer eşitsizlik $\left(\frac{1}{2},1\right)$ aralığında gösterilebilir. Bu da istenilendir.

2.6. Baskakov Operatörü

$x\in[0,\infty),n\in\mathbb{N},\ P_{n,k}(x):=\binom{n+k-1}{k}x^k(1+x)^{-n-k}$ olmak üzere V.A. Baskakov tarafından tanımlanan Baskakov operatörü aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} B_{n,1}(f;x) &:= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Burada,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

dır. Bu operatör $[0, \infty)$ aralığında tanımlı, sürekli ve sınırlı olan f fonksiyonu için lineer ve pozitif bir operatördür.

Baskakov operatörü Korovkin teoreminin şartlarını gerçekler. Bunları görelim:

$$B_{n,1}(1;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} = 1$$

$$\begin{aligned} B_{n,1}(t;x) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} \frac{x^k}{(1+x)^k} \\ &= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \to k+1}}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{k-1}} \\ &= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!\,k!} \frac{x^k}{(1+x)^k} \\ &= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} \\ &= \frac{x}{(1+x)} \frac{1}{(1+x)^n} (1+x)^{n+1} = x \end{aligned}$$

$$B_{n,1}(t^2;x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$\begin{aligned}
B_{n,1}(t^2;x) &= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k} \\
&+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k} \\
&= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{\substack{k=2\\ k\to k+2}}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-2)!}\frac{x^{k-2}}{(1+x)^{k-2}}+\frac{1}{n}B_n(t;x) \\
&= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n} \\
&= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n+1)!\,k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n} \\
&= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{x}{n} \\
&= \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{n+1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}(1+x)^{n+2}+\frac{x}{n} \\
&= x^2+\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n} \\
&= x^2+\frac{x(x+1)}{n}
\end{aligned}$$

Buradan kolayca görülür ki; $n \to \infty$ için

$B_n(1;x) \to 1$, $B_n(t;x) \to x$ ve $B_n(t^2;x) \to x^2$ dir.

Baskakov operatörü için süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık hızını hesaplayabiliriz.

$$B_{n,1}(f;x)-f(x)=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}-f(x)B_{n,1}(1;x)$$

$$\begin{aligned}B_{n,1}(f;x)-f(x)=&\ \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}-f(x)\frac{1}{(1+x)^n}\\&\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\\&=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|B_{n,1}(f;x)-f(x)\right|&=\left|\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right]\right|\\&\leq\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\\&\leq\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\sup_{x\in[0,\infty)}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\\&=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}w\left(f;\delta\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{\delta}\right)\\&=\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\left(1+\frac{\left|\frac{k}{n}-x\right|}{\delta}\right)w(f;\delta)\\&=w(f;\delta)\left[\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}+\frac{1}{\delta}\frac{1}{(1+x)^n}\right.\\&\left.\times\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\left|\frac{k}{n}-x\right|\right]\\&=w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\left|\frac{k}{n}-x\right|\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|B_{n,1}(f;x)-f(x)\right| \leq w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{B_{n,1}(t^2;x)-2xB_{n,1}(t;x)+x^2}\right]$$

$$= w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\left(x^2+\frac{(1+x)x}{n}-2x^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\left|B_{n,1}(f;x)-f(x)\right| \leq w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{n}}\right]$$

elde edilir.

Lemma 2.5. $B_{n,1}$1-boyutlu Baskakov operatörü için, $x \in [0,\infty)$ ve $f \in W_{\varphi}^{2,p}[0,\infty)$ olmak üzere

$$\left\|B_{n,1}f-f\right\|_p \leq \frac{const.}{n}\|\varphi^2 f''\|_p \tag{2.55}$$

eşitsizliği gerçeklenir [3-6, 9].

İspat 2.8.

$$B_{n,1}(f;x) := \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\, f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k} x^k\,(1+x)^{-n-k}\, f\left(\frac{k}{n}\right)$$

dir. Taylor açılımı gereğince,

$$f(t) = f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}\int_x^t (t-u)f''(u)du$$

yazılır [10]. Burada, $u = x - \tau$ değişken değiştirmesi yapalım.

$$u = x \implies \tau = 0$$
$$u = t \Rightarrow \tau = x - t$$
$$d\tau = -\mathrm{du}, \qquad x, t \in [0, \infty), \quad \tau \in [0, x - t)$$

Yaptığımız değişiklikleri aşağıdaki ifadede uygulayalım. Böylece

$$\begin{aligned}\int_x^t (t-u)\, f''(u)du &= -\int_0^{x-t} (t - x + \tau) f''(x-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{x-t} (x - \tau - t) f''(x-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$I = \int_0^{x-t} \frac{(x-\tau-t)(x-\tau)(1+x-\tau)}{(x-\tau)(1+x-\tau)} f''(x-\tau)\mathrm{d}\tau$$

ile gösterelim.

$$x - \tau < x + \tau \implies \frac{1}{x+\tau} < \frac{1}{x-\tau}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Buradan da

$$\frac{|x-\tau-t|}{(x-\tau)(1+x-\tau)} \leq \frac{|x-t|}{x(1+x)}$$

yazılabilir. Böylece,

$$I \leq \frac{|x-t|}{x(1+x)} \left| \int_0^{x-t} (x-\tau)(1+x-\tau) f''(x-\tau)\mathrm{d}\tau \right|$$

$$I \leq \frac{|x-t|}{x(1+x)}\left|\int_x^t u(1+u)\,f''(u)du\right|$$

olur. Taylor formülünü tekrar ele alırsak

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2}\int_x^t (t-u)f''(u)du$$

eşitliği yukarıdaki ifade göz önüne alındığında

$$f(t)\leq f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{|x-t|}{2x(1+x)}\left|\int_x^t u(1+u)\,f''(u)du\right|$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu eşitsizliğe $B_{n,1}$ operatörü uygulanırsa ,

$$\begin{aligned}
\left|B_{n,1}f-f\right| &\leq \|f'\|B_{n,1}(|t-x|;x)+B_{n,1}\left(\frac{|x-t|}{2x(1+x)}\left|\int_x^t u(1+u)\,f''(u)du\right|;x\right)\\
&\leq B_{n,1}\left(\frac{|x-t|}{2x(1+x)}\int_x^t \max_{u\in[x,t]}|u(1+u)f''(u)|\,du;x\right)\\
&\leq B_{n,1}\left(\frac{|x-t|}{2x(1+x)}\|\varphi^2 f''\|\int_x^t du\,;x\right)\\
&= B_{n,1}\left(\frac{(x-t)^2}{2x(1+x)}\|\varphi^2 f''\|;x\right)\\
&= \frac{\|\varphi^2 f''\|}{2x(1+x)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k\,(1+x)^{-n-k}(x-t)^2\\
&\leq \frac{\|\varphi^2 f''\|}{2\varphi^2(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k\,(1+x)^{-n-k}(t^2-2tx+x^2)\\
&= \frac{\|\varphi^2 f''\|}{2\varphi^2(x)}\left\{B_{n,1}(t^2;x)-2xB_{n,1}(t;x)+x^2B_{n,1}(1;x)\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|B_{n,1}f-f\right| &\leq \frac{\|\varphi^2 f''\|}{2\varphi^2(x)}\left(x^2+\frac{x(1+x)}{n}-2x^2+x^2\right)\\
&=\frac{\|\varphi^2 f''\|}{2\varphi^2(x)}\left(\frac{x(1+x)}{n}\right)\\
&=\frac{\|\varphi^2 f''\|}{2n}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\left\|B_{n,1}f-f\right\|_p \leq \frac{const.}{n}\|\varphi^2 f''\|_p \tag{2.56}
$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdakileri göz önüne alarak iki değişkenli Baskakov operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$
\begin{aligned}
B_{n,2}(f;x_1,x_2):=&\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}\\
&\times(1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2}f\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right),\quad 0\leq x_1<\infty, 0\leq x_2<\infty
\end{aligned}
$$

Burada

$$
(1+x_1+x_2)^n=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} \text{ dir.}
$$

$B_{n,2}$ operatörü de Korovkin teoremini gerçekler. Bunu görecek olursak,

$$
\begin{aligned}
B_{n,2}(1;x_1,x_2)&=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2}\\
&=(1+x_1+x_2)^{n+k_1+k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2}=1
\end{aligned}
$$

$$
B_{n,2}(t;x_1,x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2}\frac{k_1}{n}
$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_1}{n}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1!\,k_2!\,(n+k_1+k_2-1-k_1-k_2)!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{(k_1-1)!\,k_2!\,n!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\frac{x_1}{(1+x_1+x_2)}\sum_{\substack{k_1=1\\k_1\to k_1+1}}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{(k_1-1)!\,k_2!\,n!}\frac{{x_1}^{k_1-1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2-1}}$$

$$=\frac{x_1}{(1+x_1+x_2)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!\,n!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{x_1}{(1+x_1+x_2)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{x_1}{(1+x_1+x_2)^{n+1}}(1+x_1+x_2)^{n+1}=x_1$$

$$B_{n,2}(t;x_1,x_2)=x_1$$

$$B_{n,2}(s;x_1,x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}{x_1}^{k_1}\,{x_2}^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2}\frac{k_2}{n}$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_2}{n}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1!\,k_2!\,(n+k_1+k_2-1-k_1-k_2)!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1!\,(k_2-1)!\,n!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\frac{x_2}{(1+x_1+x_2)}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_2=1\\k_2\to k_2+1}}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1!\,(k_2-1)!\,n!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2-1}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2-1}}$$

$$=\frac{x_2}{(1+x_1+x_2)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!\,n!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{x_2}{(1+x_1+x_2)^{n+1}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{x_2}{(1+x_1+x_2)^{n+1}}(1+x_1+x_2)^{n+1}=x_2$$

$$B_{n,2}(s;x_1,x_2)=x_2$$

$$B_{n,2}(t^2;x_1,x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}(1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2}\frac{{k_1}^2}{n^2}$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_1(k_1-1)}{n^2}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_1}{n}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{k_1(k_1-1)}{n^2}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1!\,k_2!\,(n-1)!}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$+\frac{1}{n}B_{n,2}(t;x_1,x_2)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\frac{1}{n}\frac{{x_1}^2}{(1+x_1+x_2)^2}\sum_{\substack{k_1=2\\ k_1\to k_1+2}}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2-1)!}{(k_1-2)!\,k_2!\,n!}$$

$$\times\frac{{x_1}^{k_1-2}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2-2}}+\frac{x_1}{n}$$

İfadeyi $(n+1)$ ile çarpıp bölelim.

$$B_{n,2}(t^2;x_1,x_2)=\frac{{x_1}^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}}\frac{(n+1)}{n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{(n+k_1+k_2+1)!}{k_1!\,k_2!\,(n+1)!}$$

$$\times\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}+\frac{x_1}{n}$$

$$=\frac{{x_1}^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2+1}{k}$$

$$\times\frac{(n+1)}{n}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}+\frac{x_1}{n}$$

$$=\frac{{x_1}^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}}\frac{(n+1)}{n}(1+x_1+x_2)^{n+2}+\frac{x_1}{n}$$

$$B_{n,2}(t^2;x_1,x_2)={x_1}^2\frac{(n+1)}{n}+\frac{x_1}{n}$$

$$= {x_1}^2 + x_1 \frac{(x_1+1)}{n}$$

$$B_{n,2}(t^2; x_1, x_2) = {x_1}^2 + x_1 \frac{(x_1+1)}{n}$$

$$B_{n,2}(s^2; x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} (1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2} \frac{{k_2}^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{k_2(k_2-1)}{n^2} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} \frac{{x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$+ \frac{1}{n} \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{k_2}{n} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} \frac{{x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{k_2(k_2-1)}{n^2} \frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1!\, k_2!\, (n-1)!}$$

$$\times \frac{{x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} + \frac{1}{n} B_{n,2}(s; x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \frac{1}{n} \frac{{x_2}^2}{(1+x_1+x_2)^2} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_2=2 \\ k_2 \to k_2+2}}^{\infty} \frac{(n+k_1+k_2-1)!}{k_1!\, (k_2-2)!\, n!}$$

$$\times \frac{{x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2-2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2-2}} + \frac{x_2}{n}$$

İfadeyi $(n+1)$ ile çarpıp bölelim.

$$B_{n,2}(s^2; x_1, x_2) = \frac{{x_2}^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}} \frac{(n+1)}{n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{(n+k_1+k_2+1)!}{k_1!\, k_2!\, (n+1)!}$$

$$\times \frac{{x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} + \frac{x_2}{n}$$

$$B_{n,2}(s^2; x_1, x_2) = \frac{{x_2}^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2+1}{k}$$

$$\times \frac{(n+1)}{n} \frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} + \frac{x_2}{n}$$

$$= \frac{{x_2}^2}{(1+x_1+x_2)^{n+2}} \frac{(n+1)}{n} (1+x_1+x_2)^{n+2} + \frac{x_2}{n}$$

$$= {x_2}^2 \frac{(n+1)}{n} + \frac{x_2}{n}$$

$$= {x_2}^2 + x_2 \frac{(x_2+1)}{n}$$

$$B_{n,2}(s^2; x_1, x_2) = {x_2}^2 + x_2 \frac{(x_2+1)}{n}$$

$$B_{n,2}(t^2 + s^2; x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2}$$

$$\times (1+x_1+x_2)^{-n-k_1-k_2} \frac{{k_1}^2 + {k_2}^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} \frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} \frac{{k_1}^2}{n^2}$$

$$+ \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{n+k_1+k_2-1}{k} \frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}} \frac{{k_2}^2}{n^2}$$

$$= B_{n,2}(t^2; x_1, x_2) + B_{n,2}(s^2; x_1, x_2)$$

$$= {x_1}^2 + x_1 \frac{(x_1+1)}{n} + {x_2}^2 + x_2 \frac{(x_2+1)}{n}$$

$$= {x_1}^2 + {x_2}^2 + \frac{x_1(x_1+1) + x_2(x_2+1)}{n}$$

olarak bulunur. $n \to \infty$ için verilen operatörün Korovkin teoremini gerçeklediği kolayca görülür.

2.7. Baskakov-Kantorovich Operatörü

$x \in [0,\infty), n \in \mathbb{N},\ P_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) := \binom{n+\mathbf{k}-1}{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}}(1+\mathbf{x})^{-n-\mathbf{k}}$ olmak üzere, Ditzian ve Totik $L_p[0,\infty)$ üzerinde yakınsamayı ele almak için Baskakov operatörünü aşağıdaki gibi değiştirmiştir.

$$K_{n,1}f := K_{n,1}(f;x) := \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du$$

$$K_{n,1}(f;x) := \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du \tag{2.57}$$

Bu şekilde tanımlanan Baskakov-Kantorovich operatörü de Korovkin teoreminin şartlarını gerçekler.

$$\begin{aligned} K_{n,1}(1,x) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} du \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} n \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right] \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} n \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{n,1}(t,x) &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} n \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} u du \\ &= \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^k} n \left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \end{aligned}$$

$$K_{n,1}(t,x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\frac{1}{2n^2}(2k+1)$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{k}{n} + \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}$$

$$\times\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{1}{2n}$$

$$= B_{n,1}(t;x) + \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{1}{2n}$$

$$= x + \frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= x + \frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x)^n}(1+x)^n = x + \frac{1}{2n}$$

$$K_{n,1}(t^2;x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} u^2du$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\left(\frac{u^3}{3}\right)_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\left(\frac{k^3+3k^2+3k+1-k^3}{3n^3}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}$$

$$\times\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{k}{n^2} + \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{1}{3n^2}$$

$$= B_{n,1}(t^2;x) + \frac{1}{n}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}\frac{k}{n}$$

$$+\frac{1}{3n^2}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

$$= B_{n,1}(t^2;x) + \frac{1}{n}B_{n,1}(t;x) + \frac{1}{3n^2}B_{n,1}(1;x)$$

$$K_{n,1}(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1+x)}{n} + \frac{1}{n}x + \frac{1}{3n^2}$$

$$K_{n,1}(t^2;x) = x^2 + \frac{x(2+x)}{n} + \frac{1}{3n^2}$$

olur ki $n \to \infty$ için Korovkin teoremi gerçeklenir.

Baskakov-Kantorovich operatörünün yakınsaklık hızı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanabilir.

$$K_{n,1}(f;x) - f(x) = K_{n,1}(f;x) - f(x)K_{n,1}(1,x)$$

$$K_{n,1}(f;x) - f(x) = \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du$$

$$-f(x)\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} du$$

$$= \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (f(u)-f(x))du$$

$$\left|K_{n,1}(f;x) - f(x)\right| = \left|\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (f(u)-f(x))du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |f(u)-f(x)|du$$

$$\leq \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} max|f(u)-f(x)|du$$

$$\left|K_{n,1}(f;x)-f(x)\right| \leq \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} w\left(f;\delta\frac{|u-x|}{\delta}\right)du$$

$$\leq \frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(1+\frac{|u-x|}{\delta}\right)w(f;\delta)du$$

$$\leq w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} |u-x|\,du\right]$$

bu son ifadede Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanırsak,

$$\left|K_{n,1}(f;x)-f(x)\right| \leq w(f;\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} (u-x)^2\,du\right]^{\frac{1}{2}}\times\left[\frac{1}{(1+x)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^k}n\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} udu\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{K_{n,1}(t^2;x)-2xK_{n,1}(t;x)+x^2}\right]$$

$$= w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{x^2+\frac{x(2+x)}{n}+\frac{1}{3n^2}-2x\left(x+\frac{1}{2n}\right)+x^2}\right]$$

$$\leq w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{3n^2+3nx+1}{3n^2}}\right]$$

$$= w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{n\delta}\sqrt{nx^2+nx+\frac{1}{3}}\right]$$

olur.

$$\frac{d(nx^2+nx+\frac{1}{3})}{dx}=0$$

yapan x değerinde yukarıdaki ifade maximum değerini alır. Buna göre

$2xn+n=0$ için

$x=-\frac{1}{2}$ olur.

Bulduğumuz x değerini ifadede yerine yazarsak,

$$\left\|K_{n,1}(f;x)-f(x)\right\| \leq w(f;\delta)\left[1+\frac{1}{2n\delta}\sqrt{\frac{4-3n}{3}}\right]$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer $\delta=\sqrt{\frac{4-3n}{3}}$ seçersek istenilen elde edilir. Bu ifade Baskakov-Kantorovich operatörünün yakınsama hızını verir.

Çok boyutlu operatörü tanımlamadan önce iki boyutlu Baskakov-Kantorovich operatörünü yazalım ve bunun için nodları hesaplayalım. Çünkü işlemlerde anlaşılabilirlik açısından iki değişkenli operatör daha kullanışlı olacaktır.

$$K_{n,2}(f;x_1,x_2):=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$
$$\times n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} f(t,s)dtds$$

$K_{n,2}$ operatörü de Korovkin teoremini gerçekler. Bunu görecek olursak,

$$K_{n,2}(1;x_1,x_2) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}$$

$$\times \frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} dtds$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}$$

$$\times \frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \frac{1}{n}ds$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2\frac{1}{n^2}$$

$$K_{n,2}(1;x_1,x_2) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}(1+x_1+x_2)^n = 1$$

$$K_{n,2}(t;x_1,x_2) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2$$

$$\times \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} tdtds$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2$$

$$\times \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} t\left(\frac{k_2+1}{n}-\frac{k_2}{n}\right)dt$$

$$K_{n,2}(t;x_1,x_2) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n$$

$$\times\left(\frac{\left(\frac{k_1+1}{n}\right)^2-\left(\frac{k_1}{n}\right)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times\frac{n}{2n^2}(2k_1+1)$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{k_1}{n}$$

$$+\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$K_{n,2}(t;x_1,x_2) = B_{n,2}(t;x_1,x_2)+\frac{1}{2n}B_{n,2}(1;x_1,x_2) = x_1+\frac{1}{2n}$$

$$K_{n,2}(s;x_1,x_2) = \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2$$

$$\times\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} sdtds$$

$$= \frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2$$

$$\times\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} s\left(\frac{k_1+1}{n}-\frac{k_1}{n}\right)ds$$

$$K_{n,2}(s;x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n$$

$$\times\left(\frac{\left(\frac{k_2+1}{n}\right)^2-\left(\frac{k_2}{n}\right)^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times\frac{n}{2n^2}(2k_2+1)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{k_2}{n}$$

$$+\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=B_{n,2}(s;x_1,x_2)+\frac{1}{2n}B_{n,2}(1;x_1,x_2)$$

$$K_{n,2}(s;x_1,x_2)=x_2+\frac{1}{2n}$$

$$K_{n,2}(t^2;x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} t^2\,dtds$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times n^2\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}}\left(\frac{\left(\frac{k_1+1}{n}\right)^3-\left(\frac{k_1}{n}\right)^3}{3}\right)ds$$

$$K_{n,2}(t^2;x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times n^2\left(\frac{k_2+1}{n}-\frac{k_2}{n}\right)\left(\frac{3{k_1}^2+3k_1+1}{3n^3}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times\frac{n}{3n^3}\left(3{k_1}^2+3k_1+1\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{{k_1}^2}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{k_1}{n}$$

$$+\frac{1}{3n^2}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=B_{n,2}(t^2;x_1,x_2)+\frac{1}{n}B_{n,2}(t;x_1,x_2)+\frac{1}{3n^2}B_{n,2}(1;x_1,x_2)$$

$$={x_1}^2+\frac{{x_1}^2}{n}+\frac{x_1}{n}+\frac{x_1}{n}+\frac{1}{3n^2}$$

$$K_{n,2}(t^2;x_1,x_2)={x_1}^2+\frac{({x_1}^2+2x_1)}{n}+\frac{1}{3n^2}$$

$$K_{n,2}(s^2;x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} s^2\,dtds$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times n^2\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} s^2\left(\frac{k_1+1}{n}-\frac{k_1}{n}\right)ds$$

$$K_{n,2}(s^2;x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}$$

$$\times n\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\left(\frac{\left(\frac{k_2+1}{n}\right)^3-\left(\frac{k_2}{n}\right)^3}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times\frac{n}{3n^3}\left(3{\mathrm{k}_2}^2+3\mathrm{k}_2+1\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{{k_2}^2}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{k_2}{n}$$

$$+\frac{1}{3n^2}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=B_{n,2}(s^2;x_1,x_2)+\frac{1}{n}B_{n,2}(s;x_1,x_2)+\frac{1}{3n^2}B_{n,2}(1;x_1,x_2)$$

$$={x_2}^2+\frac{{x_2}^2}{n}+\frac{x_2}{n}+\frac{x_2}{n}+\frac{1}{3n^2}$$

$$K_{n,2}(s^2;x_1,x_2)={x_2}^2+\frac{({x_2}^2+2x_2)}{n}+\frac{1}{3n^2}$$

$$K_{n,2}(t^2+s^2;x_1,x_2)=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}$$

$$\times\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}}t^2+s^2dtds$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}}t^2dtds$$

$$+\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} s^2dtds$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}n^2\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}}\left(\frac{\left(\frac{k_1+1}{n}\right)^3-\left(\frac{k_1}{n}\right)^3}{3}\right)ds$$

$$+\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$\times n^2\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} s^2\left(\frac{k_1+1}{n}-\frac{k_1}{n}\right)ds$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n^2\int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}}\frac{1}{3n^3}$$

$$\times\left(3{k_1}^2+3k_1+1\right)ds+\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}$$

$$\times\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}n\left(\frac{\left(\frac{k_2+1}{n}\right)^3-\left(\frac{k_2}{n}\right)^3}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{1}{3n^2}$$

$$\times\left(3{k_1}^2+3k_1+1\right)+\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}$$

$$\times\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{n}{3n^3}\left(3{k_2}^2+3k_2+1\right)$$

$$=\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{{k_1}^2}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{k_1}{n}$$

$$+\frac{1}{3n^2}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$+\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{{k_2}^2}{n^2}$$

$$+\frac{1}{n}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}\frac{k_2}{n}$$

$$+\frac{1}{3n^2}\frac{1}{(1+x_1+x_2)^n}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\binom{n+k_1+k_2-1}{k}\frac{{x_1}^{k_1}{x_2}^{k_2}}{(1+x_1+x_2)^{k_1+k_2}}$$

$$=B_{n,2}(t^2;x_1,x_2)+\frac{1}{n}B_{n,2}(t;x_1,x_2)+\frac{1}{3n^2}B_{n,2}(1;x_1,x_2)+B_{n,2}(s^2;x_1,x_2)$$

$$+\frac{1}{n}B_{n,2}(s;x_1,x_2)+\frac{1}{3n^2}B_{n,2}(1;x_1,x_2)$$

$$={x_1}^2+\frac{({x_1}^2+2x_1)}{n}+\frac{1}{3n^2}+{x_2}^2+\frac{({x_2}^2+2x_2)}{n}+\frac{1}{3n^2}$$

$$K_{n,2}(t^2+s^2;x_1,x_2)={x_1}^2+{x_2}^2+\frac{({x_1}^2+{x_2}^2+2x_1+2x_2)}{n}+\frac{2}{3n^2}$$

olarak elde edilir ki $n\to\infty$ için Korovkin teoreminin şartları gerçeklenir.

Buraya kadar iki değişkenli halde de Baskakov-Kantorovich operatörünün Korovkin teoreminin koşullarını sağladığını görmüş olduk. Bundan sonra ise operatörler için yakınsama hızını belirleyeceğiz. Bunun için Ditzian Totik süreklilik modülü olarak bilinen

$$w_{\varphi}^2(f,t)_p\coloneqq\sup_{0<h\le t}\left\|f\big(.+2h\varphi(.)\big)-2f\big(.+h\varphi(.)\big)+f(.)\right\|_p,\ \ \varphi(x):=\sqrt{x(1+x)}$$

ifadesinden faydalanacağız.

Daha önceki çalışmalarda $L_p[0,\infty)$; $1\le p<\infty$ uzayında tanımlı herhangi bir fonksiyon için

$$\left\|K_{n,1}f - f\right\|_p \leq const.\left(w_\varphi^2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p + \frac{1}{n}\|f\|_p\right) \tag{2.58}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir sabit olduğu gösterilmiştir [10].

Ayrıca $0< \alpha < 1$ olduğu için

$$w_\varphi^2(f,t)_p = O(t^{2\alpha}) \iff \left\|K_{n,1}f - f\right\|_p = O(n^{-\alpha})$$

olduğu gösterilmiştir. Biz bir sonraki kısımda elde edilen bu eşitsizliklerden yararlanarak d-boyutlu uzay için genel bir teorem vereceğiz.

3. ÇOK DEĞİŞKENLİ BASKAKOV-KANTOROVİCH OPERATÖRÜ

$x \in [0,\infty), n \in \mathbb{N},\ \ T \subset \mathbb{R}^d\ (d \in N)$ olmak üzere bu kısımda kolaylık olması bakımından

$$T := T_d := \{\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_d) : 0 \le x_i < \infty, 1 \le i \le d\}$$

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_d)\ \ , \qquad \mathbf{k} := (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} := {x_1}^{k_1} {x_2}^{k_2} \dots {x_d}^{k_d}\ \ , \qquad \mathbf{k}! := k_1!\, k_2! \dots k_d!$$

$$|\mathbf{x}| := \sum_{i=1}^{d} x_i\ \ , \qquad |\mathbf{k}| := \sum_{i=1}^{d} k_i$$

$$\binom{n}{\mathbf{k}} := \frac{n!}{\mathbf{k}!\,(n-|\mathbf{k}|)!}\ , \qquad \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} := \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_d=0}^{\infty}$$

$$P_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) := \binom{n+|\mathbf{k}|-1}{\mathbf{k}} \mathbf{x}^{\mathbf{k}} (1+|\mathbf{x}|)^{-n-|\mathbf{k}|}$$

$$B_{n,d}(f,\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} P_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) f\left(\frac{\mathbf{k}}{n}\right)$$

gösterimlerini kullanacağız. Buna göre d-boyutlu uzayda Baskakov-Kantorovich operatörü

$$K_{n,d}f := K_{n,d}(f;\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} P_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \Phi_{n,\mathbf{k}}(f) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Burada $\Phi_{n,\mathbf{k}}(f) := n^d \int\limits_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int\limits_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} \dots \int\limits_{\frac{k_d}{n}}^{\frac{k_d+1}{n}} f(u_1, u_2, \dots, u_d) d\, u_1 du_2 \dots du_d$

$$:= n^d \int\limits_{\frac{\mathbf{k}}{n}}^{\frac{\mathbf{k}+1}{n}} f(u) du$$

dir.

Bu kısımda $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(T)$ deki bir fonksiyon için yakınsamayı bir teorem ile vereceğiz. Daha sonra [7] de verilen K-fonksiyonelini ve düzgün sürekliliği kullanarak bu ifadeleri yüksek boyutlu uzaylara genişleteceğiz.

$$\|f\|_p^p = \int\limits_T |f|^p \tag{3.2}$$

sonlu normu T üzerinde Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlar uzayını göstersin. $x \in T$ için ağırlık fonksiyonları

$$\varphi_i(x) := \sqrt{x_i(1 + |\mathbf{x}|)}, \quad 1 \leq i \leq d$$

olarak tanımlansın. Ayrıca

$$D_i^r = \frac{\partial^r}{\partial x_i^r}, \qquad r \in \mathbb{N}$$

$$D^{\mathbf{k}} = D_1^{k_1} D_2^{k_2} \dots D_d^{k_d}, \qquad k \in \mathbb{N}_0^d$$

diferansiyel operatörleri göstersin. $1 \leq p < \infty$ için ağırlıklı Sobolev uzayı $|k| \leq r, k \in \mathbb{N}_0^d$ ve $\dot{T}$, T nin içini göstermek üzere

$$W_\varphi^{r,p}(T) = \{f \in L_p(T) : D^k \in L_{loc}\dot{T} \text{ ve } \varphi_i^r D_i^r f \in L_p(T)\} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(T)$ üzerinde Peetre K-fonksiyonelleri, bütün $g \in W_{\varphi}^{r,p}(T)$ üzerinde infimum alınmak kaydıyla

$$K_{\varphi}^{r}(f,t^r)_p = inf\left\{\|f-g\|_p + t^r \sum_{i=1}^{d} \|\varphi_i^r D_i^r g\|_p\right\}, \qquad t>0 \tag{3.4}$$

olarak tanımlanmaktadır.

$\mathbb{R}^d$ deki herhangi bir e vektörü için, bir f fonksiyonunun e yönünde r-inci ileri farkı aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_{he}^{r} f(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i f(x+ihe), & x, x+rhe \in T \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad , & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

Yine $f \in L_p(T)$ nin düzgünlük modülü $1 \leq p < \infty$ için

$$w_{\varphi}^{r}(f,t)_p \coloneqq \sup_{0<h\leq t} \sum_{i=1}^{d} \left\|\Delta_{h\varphi_i e_i}^{r} f\right\|_p, \qquad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır [7]. Şimdi 1-boyutlu uzayda ispatlanan ve d-boyutlu uzayda da geçerli olan aşağıdaki lemmayı ispatsız verelim.

Lemma 3.1. $f \in L_p(T)$; $1 \leq p < \infty$ olmak üzere sadece p ve r ye bağlı öyle bir C sabiti vardır ki, bu C sabiti için

$$\frac{1}{C}\omega_{\varphi}^{r}(f;t)_p \leq K_{\varphi}^{r}(f;t^r)_p \leq C\omega_{\varphi}^{r}(f;t)_p \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır [2-6].

Teorem 3.1. Eğer $f \in L_p(T);\ 1 \leq p < \infty$ ise o taktirde n ve f ten bağımsız pozitif bir sabit vardır öyle ki;

$$\left\|K_{n,d}f - f\right\|_p \leq const.\left(w_\varphi^2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_p + \frac{1}{n}\|f\|_p\right) \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat 3.1.

Bu teoremin d-boyutlu uzaydaki ispatı $K_{n,d}$ nın özelliklerine bağlı olarak tümevarım ile yapılabilmektedir. Ancak biz burada ispatın daha kolay anlaşılabilmesi için iki boyutlu uzayda ispat yapacağız. Yüksek boyutlardan ispat da benzer yolla yapılabilir. İspatta temel olarak kullanacağımız eşitsizlik Lemma 3.1 de verilen eşitsizlik ile

$$\left\|K_{n,2}f - f\right\|_p \leq const.\begin{cases} \|f\|_p\,, & f \in L_p(T) \\ n^{-1}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left\|\varphi_i^2 D_i^2 f\right\|_p + \|f\|_p\right), & f \in W_\varphi^{2,p}(T) \end{cases} \tag{3.7}$$

eşitsizliğine dayanacaktır. Bu eşitsizliğin ilki $K_{n,d}$, $L_p(T)$ de pozitif ve lineer bir operatör olduğundan açıktır. İkincisi ise [3] ve [5] nolu referanslarda verilen eşitsizlik bir boyutlu hale indirgenerek yapılabilmektedir.

Şimdi

$$K_{n,2}(f,x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1)\, n \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}\left(\frac{x_2}{1+x_1}\right) n \int_{\frac{k_2}{n}}^{\frac{k_2+1}{n}} f(u_1,u_2)\,du_1\,du_2$$

ifadesini göz önüne alalım.

Bu eşitlikte $u_2 = (1+u_1)\widetilde{u_2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$du_2 = (1+u_1)d\widetilde{u_2}, \qquad u_2 = \frac{k_2}{n} \;\Rightarrow \widetilde{u_2} = \frac{k_2}{n(1+u_1)}$$

$$u_2 = \frac{k_2+1}{n} \;\Rightarrow\; \widetilde{u_2} = \frac{k_2+1}{n(1+u_1)}$$

olur. Bu ifadeler yerlerine yazılır ve işlemlerde kolaylık olması açısından $\widetilde{u_2}$ yerine u_2 kullanılırsa

$$K_{n,2}(f,x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1) n \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}\left(\frac{x_2}{1+x_1}\right) n$$
$$\times \int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} f(u_1,(1+u_1)u_2)\,(1+u_1)du_2du_1$$

elde edilir. Şimdi bir $g_{u_1}(t)$ fonksiyonunu

$$g_{u_1}(t) := f(u_1,(1+u_1)t), \qquad 0 \le t < \infty, \qquad z := \frac{x_2}{1+x_1} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlik

$$K_{n,2}(f,x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1) n \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}\left(\frac{x_2}{1+x_1}\right) n \int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} g_{u_1}(t)$$
$$\times (1+u_1)dtdu_1 + f(x_1,x_2) - f(x_1,x_2) + \sum_{k_{1=0}}^{\infty} \binom{n+k_1-1}{k_1} {x_1}^{k_1}$$
$$\times (1+x_1)^{-n-k_1} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} f\left(u_1,(1+u_1)\frac{x_2}{1+x_1}\right) du_1 - \sum_{k_{1=0}}^{\infty} \binom{n+k_1-1}{k_1}$$

$$\times\, {x_1}^{k_1}(1+x_1)^{-n-k_1}\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} f\left(u_1,(1+u_1)\frac{x_2}{1+x_1}\right)du_1$$

şekline dönüşür. Dolayısıyla

$$K_{n,2}(f,x)-f(x)=\sum_{k_1=0}^{\infty}P_{n,k_1}(x_1)n\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n+k_1,k_2}(z)n\int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}}\left[g_{u_1}(t)-g_{u_1}(z)\right]$$

$$\times(1+u_1)dtdu_1+\left(K_{n,1}(h(.),x_1)-h(x_1)\right)$$

$$:=J+L$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$h(u_1):=h(u_1,x):=f\left(u_1,(1+u_1)\frac{x_2}{1+x_1}\right),\qquad 0\leq u_1<\infty$$

olarak tanımlanmaktadır. Şimdi J ve L yi hesaplayalım. J yi hesaplamak için Jensen eşitsizliğini kullanalım.

$$\|J\|_p^p\leq\int_T\sum_{k_1=0}^{\infty}P_{n,k_1}(x_1)n\int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}}\left|\sum_{k_2=0}^{\infty}P_{n+k_1,k_2}(z)\big(n(1+u_1)\big)\right.$$

$$\left.\times\int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}}\left(g_{u_1}(t)-g_{u_1}(z)\right)dt\right|^p du_1dx$$

(3.8) den dolayı

$$\|J\|_p^p \le \int_0^\infty \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n,k_1}(x_1)(1+x_1)dx_1 n \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^\infty \Bigg| \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}(z)\big(n(1+u_1)\big)$$

$$\times \int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} \Big(g_{u_1}(t) - g_{u_1}(z)\Big)\, dt \Bigg|^p dz du_1$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n(n+k_1-1)}{(n-1)(n-2)} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^\infty \Bigg| \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}(z)\big(n(1+u_1)\big)$$

$$\times \int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} \left\{ g_{u_1}\left(\frac{k_2}{n+k_1}\right) - g_{u_1}(z) + \int_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{t} g'_{u_1}(s)ds \right\} \Bigg|^p dt dz du_1$$

yazılabilir.

$$\int_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{t} g'_{u_1}(s)ds = g_{u_1}(t) - g_{u_1}\left(\frac{k_2}{n+k_1}\right)$$

olduğundan,

$$\|J\|_p^p \le \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n(n+k_1-1)}{(n-1)(n-2)} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^\infty \Bigg| \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}(z)\left(g_{u_1}\left(\frac{k_2}{n+k_1}\right) - g_{u_1}(z) \right)$$

$$+ \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}(z)\big(n(1+u_1)\big) \int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} \int_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{t} g'_{u_1}(s)ds\, dt \Bigg|^p dz du_1$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca (2.21) gereğince

$$\|a+b\|_p^p \le 2^{p-1}(\|a\|_p^p + \|b\|_p^p)$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\|J\|_p^p \le 2^{p-1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n(n+k_1-1)}{(n-1)(n-2)} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \left\{ \left\| B_{n+k_1,1}\left(g_{u_1},.\right) - g_{u_1}(.) \right\|_p^p \right.$$

$$\left. + \int_0^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}(z)\big(n(1+u_1)\big) \int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} \left(\int_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{t} \left|g'_{u_1}(s)\right| ds \right)^p dtdz \right\} du_1$$

$$:= J_1 + J_2$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi V. Totik tarafından ispatlanmış olan

$$\left\|B_{n,1}f - f\right\|_p \le \frac{const.}{n} \|\varphi^2 f''\|_p, \quad f \in W_{\varphi}^{2,p}[0,\infty)$$

eşitsizliğini göz önüne alalım [5].

$$\begin{aligned} &\left\|B_{n+k_1,1}\left(g_{u_1}(.),.\right) - g_{u_1}(.) + g_{u_1}(.) - g_{u_1}(.)\right\|_p^p \\ &\qquad \le \left\|B_{n+k_1,1}\left(g_{u_1}(.),.\right) - g_{u_1}(.)\right\|_p^p + 2\left\|g_{u_1}(.)\right\|_p^p \\ &\qquad \le \frac{const.}{(n+k_1)^p}\left(\|\varphi^2 f''\|_p^p + \left\|g_{u_1}(.)\right\|_p^p\right) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$\frac{n}{n-2} > 1$ olduğundan eşitsizliği büyütmek için $\frac{n}{n-2}$ yerine 1 alabiliriz. Böylece

$$J_1 \le const. \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n+k_1-1}{(n-1)(n+k_1)^p} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \left(\left\|\varphi^2 g''_{u_1}\right\|_p^p + \left\|g_{u_1}\right\|_p^p\right) du_1$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$\varphi^2(t)g''_{u_1}(t) = t_i(1+t)(1+u_1)^2 D_2^2 f(u_1,(1+u_1)t) = (\varphi_2^2 D_2^2 f)(u_1,(1+u_1)t)$$

olduğundan,

$$J_1 \leq const. \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n+k_1-1}{(n-1)(n+k_1)^p} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^{\infty} (|(\varphi_2^2 D_2^2 f)(u_1,(1+u_1)t)|^p$$

$$+|f(u_1,(1+u_1)t|^p)dtdu_1$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadede $u_2 = (1+u_1)t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\frac{1}{1+u_1}du_2 = dt$$

olup, bu ifade yerine yazılırsa

$$J_1 = const. \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n+k_1-1}{(n-1)(n+k_1)^p} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \frac{1}{1+u_1} \int_0^{\infty} (|\varphi_2^2(u_1,u_2) D_2^2 f(u_1,u_2)|^p$$

$$+|f(u_1,u_2)|^p)du_2du_1$$

elde edilir. Ayrıca

$0 \leq u_1 < \infty$ olduğundan $\dfrac{1}{1+u_1} < 1$ dir.

Dolayısıyla J_1 i $\frac{1}{1+u_1}$ ifadesinin yerine 1 alarak daha büyütebiliriz. Böylece

$$J_1 \leq \frac{const.}{n^p} \sum_{k_1=0}^{\infty} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^{\infty} (|\varphi_2^2(u_1,u_2)D_2^2 f(u_1,u_2)|^p + |f(u_1,u_2)|^p)\, du_2 du_1$$

$$J_1 \leq \frac{const.}{n^p} \left(\|\varphi_2^2 D_2^2 f\|_p^p + \|f\|_p^p\right)$$

yazılabilir. Şimdi J_2 yi hesaplayalım.

$$J_2 \leq const. \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n+k_1-1}{n-1} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}(z)(n(1+u_1))$$

$$\times \int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} dt \left(\int_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} \left|g'_{u_1}(s)\right| \right)^p dz du_1$$

yazabiliriz. Burada,

$$\int_{\frac{k_2}{n(1+u_1)}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} dt$$

integralini aldığımız zaman $\frac{1}{n(1+u_1)}$ elde ederiz. Böylece

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n+k_1,k_2}(z)(n(1+u_1)) \frac{1}{n(1+u_1)} = B_{n,1}(1;x) = 1$$

olduğundan ifadedeki değerine 1 yazılırsa

$$J_2 \leq const. \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n+k_1-1}{n-1} \int\limits_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{\frac{k_2+1}{n(1+u_1)}} \left|g'_{u_1}(s)\right|^p dsdzdu_1$$

elde ederiz. Yine

$$\frac{n+k_1}{n-1} \geq \frac{n+k_1-1}{n-1}$$

olduğundan ve

$$\frac{k_1}{n} \leq u_1 \leq \frac{k_1+1}{n}, \qquad k_1 \leq nu_1 \leq k_1+1$$

$$n+k_1 \leq n+nu_1 \leq n+k_1+1 \ , \quad \frac{1}{n+k_1} \geq \frac{1}{n(1+u_1)} \geq \frac{1}{n+k_1+1}$$

$$\frac{k_2+1}{n+k_1} \geq \frac{k_2+1}{n(1+u_1)}$$

eşitsizlikleri sağlandığından

$$J_2 \leq \frac{const.}{n^p} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{n+k_1}{n-1} \int\limits_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{\frac{k_2+1}{n+k_1}} \left|g'_{u_1}(s)\right|^p dsdzdu_1$$

yazabiliriz.

$$\int\limits_{\frac{k_2}{n+k_1}}^{\frac{k_2+1}{n+k_1}} ds = \frac{1}{n+k_1}$$

değerini yerine yazarsak,

$$J_2 \leq \frac{const.}{n^p} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{n-1} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^{\infty} \left|g'_{u_1}(s)\right|^p ds du_1$$

elde ederiz.

[3] nolu referansta ispatlanmış olan

$$\|g'\|_p \leq const. \left(\|g\|_p + \|\varphi^2 g''\|_p\right), g \in W_{\varphi}^{2,p}[0,\infty) \tag{3.9}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Burada

$$\int_0^{\infty} |g'| = \|g'\|_p$$

olduğunu hatırlayalım. Bu durumda

$$J_2 \leq \frac{const.}{n^p} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{n-1} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \left(\left\|g_{u_1}\right\|_p^p + \left\|\varphi^2 g''_{u_1}\right\|_p^p \right) du_1$$

$$\leq \frac{const.}{n^p} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{n-1} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \frac{1}{1+u_1} \int_0^{\infty} \left(|\varphi_2^2(u_1,u_2) D_2^2 f(u_1,u_2)|^p\right.$$

$$\left. + |f(u_1,u_2)|^p\right) du_2 du_1$$

yazılabilir.

$\frac{1}{n-1} < 1$ olduğundan $\frac{1}{n-1}$ yerine
$\frac{1}{1+u_1} < 1$ olduğundan da $\frac{1}{1+u_1}$ yerine 1 alarak eşitsizliği büyütelim.

$$J_2 \leq \frac{const.}{n^p} \sum_{k_1=0}^{\infty} \int_{\frac{k_1}{n}}^{\frac{k_1+1}{n}} \int_0^{\infty} (|\varphi_2^2(u_1,u_2) D_2^2 f(u_1,u_2)|^p + |f(u_1,u_2)|^p)\, du_2 du_1$$

$$= \frac{const.}{n^p} \left(\|f\|_p^p + \|\varphi_2^2 D_2^2 f\|_p^p \right)$$

olur. Böylece

$$\|J\|_p \leq \frac{const.}{n} \left(\|f\|_p + \|\varphi_2^2 D_2^2 f\|_p \right)$$

elde edilir. L için ise (2.55) eşitsizliğini göz önüne alırsak

$$\|L\|_p \leq \frac{const.}{n} \|\varphi^2 h''\|_p$$

olur. Şimdi

$$\varphi_{12}(x) = \varphi_{21}(x) := \sqrt{x_1 x_2}, \qquad D_{12}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \qquad D_{21}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$|\varphi^2(u) h''(u)| = \left| u(1+u) \left(D_1^2 f + \frac{x_2}{1+x_1} D_{12}^2 f + \frac{x_2}{1+x_1} D_{21}^2 f \frac{x_2^2}{(1+x_1)^2} D_{22}^2 f \right) \right.$$
$$\left. \times \left(u, (1+u) \frac{x_2}{1+x_1} \right) \right|$$
$$= \left| \left(\frac{1+x_1}{1+x_1+x_2} \varphi_1^2 D_1^2 f + \varphi_{12}^2 D_{12}^2 f + \varphi_{21}^2 D_{21}^2 f \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{u}{1+u} . \frac{x_2}{1+x_1+x_2} \varphi_2^2 D_2^2 f \right) \left(u, (1+u) \frac{x^*}{1+x_1} \right) \right|$$

olur.

$$\varphi(u) = \sqrt{u(1+u)}, \qquad g_{k_1}(u) = f\left(\frac{k_1}{n}, \left(1+\frac{k_1}{n}\right)u\right)$$

$$z = (z_1, z_2, \dots z_{d-1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_3}, \dots, \frac{x_d}{1+x_d}\right)$$

$$= \frac{x^*}{1+x_1} = \frac{(x_2, x_3, \dots, x_d)}{1+x_1}$$

$$h(u) = h(u,x) = f\left(u, (1+u)\frac{x^*}{1+x_1}\right)$$

olarak alırsak,

$$\|\varphi^2 h''\|_\infty = \max_{0\le u<\infty}\left|u(1+u)\left(D_1^2 f + \sum_{i=2}^{d}\frac{x_i}{1+x_1}D_{1i}^2 f + \sum_{i=2}^{d}\frac{x_i}{1+x_1}D_{i1}^2 f + \sum_{i=2}^{d}\sum_{j=2}^{d}\frac{x_i x_j}{(1+x_1)^2}D_{ij}^2 f\left(u, (1+u)\frac{x^*}{1+x_1}\right)\right)\right|$$

yazılabilir. Bu ifade için $f\left(u, (1+u)\frac{x^*}{1+x_1}\right)$ ifadesinde birinci bileşen u olup yerine x_1 alınırsa

$\varphi_i(u) = \sqrt{x_i(1+|x|)}$ den $\varphi_1^2 = x_1(1+|x|)$ için

$$\frac{1+x_1}{1+|x|}.\varphi_1^2 = \frac{1+x_1}{1+|x|}.x_1(1+|x|) = x_1(1+x_1) = u(1+u)$$

olur. Dolayısıyla

$$\varphi_{ij} = \sqrt{x_i x_j} \implies \varphi_{ij}^2 = x_i x_j, \qquad \varphi_{1j}^2 = x_1 x_j, \qquad \varphi_{i1}^2 = x_i x_1$$

olup,

$$x_1(1+x_1)\frac{x_i}{1+x_1} = x_1 x_i = \varphi_{1i}^2 \ , \ x_1(1+x_1)\frac{x_i}{1+x_1} = x_1 x_i = \varphi_{1i}^2 (i = j \text{ için})$$

$i, j \geq 2$ için bileşenler

$$\frac{(1+u)x_i}{1+x_1} \Rightarrow \frac{(1+u)^2 {x_i}^2}{(1+x_1)^2}$$

olduğundan, $i = j$ olduğunda $2 \leq i \leq d$ için i-yinci bileşenin karesi

$${x_i}^2 \to \frac{(1+u)^2 {x_i}^2}{(1+x_1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{{x_i}^2(1+x_1)^2}{(1+u)^2} = {x_i}^2$$

olur. Bu ifade $\frac{u(1+u){x_i}^2}{(1+x_1)^2}$ için yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{u(1+u)}{(1+x_1)^2} . \frac{{x_i}^2(1+x_1)^2}{(1+u)^2} = \frac{u}{1+u}{x_i}^2 &= \frac{u}{1+u}\frac{x_i}{(1+|x|)} x_i(1+|x|) \\ &= \frac{u}{1+u}\frac{x_i}{(1+|x|)}\varphi_i^2 \end{aligned}$$

olur. $i \neq j$ için ise

$$x_i \to \frac{x_i(1+x_1)}{(1+u)} \quad , \quad x_j \to \frac{x_j(1+x_1)}{(1+u)}$$

$$\begin{aligned} u(1+u)\frac{x_i x_j}{(1+x_1)^2} &= \frac{u(1+u)}{(1+x_1)^2} . \frac{(1+x_1)x_i}{(1+u)} . \frac{(1+x_1)x_j}{(1+u)} \\ &= \frac{u}{1+u} x_i x_j = \frac{u}{1+u}\varphi_{ij}^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Hatırlayalım ki $\varphi_{12}(x)$,$\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ ten daha büyük değildir. Ve

$$|D_{12}^2 f(x)| \leq sup(|D_1^2 f(x)|, |D_2^2 f(x)|)$$

olduğu gösterilmiştir [8]. Buradan,

$$\|\varphi^2 h''\|_p \leq const. \sum_{i=1}^{2} \left\| \varphi_i^2 D_i^2 f \right\|_p$$

olduğunu elde ederiz. Bundan dolayı ise

$$\|L\|_p \leq \frac{const.}{n} \sum_{i=1}^{2} \left\| \varphi_i^2 D_i^2 f \right\|_p$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifadeler yerlerine yazılırsa teoremde verilen eşitsizlik elde edilir. Bu da göstermek istediğimizdir. Yani teoremde verilen eşitsizlik d-boyutlu uzayda tanımlı Baskakov-Kantorovich operatörü için bir yakınsama hızıdır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yaklaşımlar teorisinde çeşitli operatörlerin yaklaşım hızları süreklilik modülleri ve K-fonksiyonelleri yardımıyla verilmektedir. Süreklilik modülü ve K-fonksiyoneli arasında da tezde verdiğimiz eşitsizlikler geçerlidir. 1-boyutlu uzaylarda bu tür yakınsama hızları bir çok çalışmada incelenmiştir. Özellikle Ditzian ve Totik tarafından yapılmış çeşitli çalışmalar vardır. Çok boyutlu uzaylarda benzer sonuçlar aktarılabilmektedir. Biz de bu tezde çok bilinen Baskakov-Kantorovich operatörü için d-boyutlu uzayda benzer sonuçları inceledik. Dolayısıyla diğer operatörler için benzer çalışmalara bir kaynak oluşturmaya çalıştık.

KAYNAKLAR

[1] Acar, Tuncer. Durrmeyer Tipli Operatörlerin Özellikleri. (2011)

[2] Z. Ditzian, On global inverse theorems for Szasz and Baskakov operators, Canad. J. Math. 2 (1979) 255-263.

[3] Z. Ditzian, V. Totik, Moduli of Smoothness, Springer-Verlag, Berlin. (1987)

[4] V. Totik, Uniform approximation by Baskakov and Meyer-Köing and Zeller operators, Period. Math. Hungar. 14 (1984) 209-228.

[5] V. Totik, An interpolation theorem and its applications to positive operators, Pacific J. Math. 111 (1984) 447-481.

[6] V. Totik, Uniform approximation by exponential-type operators, J. Math. Anal. Appl. 132 (1988) 238-246.

[7] F.L. Cao, C.M. Ding, Z.B. Xu, On multivariate Baskakov operator, J. Math. Anal. Appl. 307 (2005) 274-291

[8] W. Chen, Z. Ditzian, Mixed and directional derivatives, Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990) 178-185.

[9] Bayraktar, M. Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitabevi (2006)

[10] Feilong Cao, Chunmei Ding. L_p approximation by multivariate Baskakov-Kantorovich Operators (2008)