KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜREKLİ KESİRLERDE ÇATALLANMA

FİKRİ KAPLAN

ŞUBAT 2014

Sevgili Ailem'e

ÖZET

SÜREKLİ KESİRLERDE ÇATALLANMA

KAPLAN, Fikri
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Şubat 2014

Bu çalışmada sürekli kesirlerin özellikleri incelenerek sürekli kesirlerin çatallanması incelenmiştir.

Birinci bölümde sonlu sürekli kesirlerin Fibonacci sayıları ve altın oran ile ilişkisi incelendi.

İkinci bölümde sürekli kesirler tanıtılmıştır. Her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayı gösterdiği ve daha sonra her rasyonel sayının sonlu bir sürekli kesir olarak ifade edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca sürekli kesirlerin determinantları, Kuadratik irrasyonel sayılar ile sürekli kesirlerin ilişkisi üzerinde çalışılmış ve örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde sürekli kesirlerin çatallanması incelenmiştir. Sürekli kesir Çatallanmalarının bir Fibonacci ağaç yapısı olarak gösterilebildiği ifade edilmiş ve yüksek dereceli polinomların Sürekli kesirler yardımıyla tamsayı dizileri şeklinde yazılabileceği gösterilmiştir.

Son bölümde bu üç bölümden çıkan sonuçlar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Euclid algoritması, Sürekli kesirler, Sürekli Kesirlerin Yakınsamaları, Sonsuz sürekli kesirler, Sürekli kesirlerin çatallanması

ABSTRACT

BIFURCATION OF CONTINUED FRACTIONS

KAPLAN, Fikri
Kırıkkale Üniversity
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor:Assist.Prof.Dr İlker AKKUŞ
February 2014

In this study, some properties of continuous fraction are analysed and bifurcation of continued fractions are investigated.

In the first section relationship between continued fraction and golden mean are explain.

In the second section with help of Euclid Algorithm, the way of how rational numbers can be written as finite continuous fractions are examined. From this approach, it is shown that every rational number can be defined as finite continuous fraction. Infinite continued fractions and periodic continuous fractions are analysed. Here, it is tried to show that any irrational number can be written as infinite continuous fractions and infinite continuous fractions are also irrational numbers. At the same time, how approach be for irrational numbers is also examined.

In the third section bifurcation continued fractions is analysed.

In the fourt section the findings are summed up and the result are shown.

Keywords: Euclid algorithm, Continued Fractions,The convergents of continued fractions, Infinite continued fractions, Bifurcation of continued fractions

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, bilimsel araştırma imkânlarını sonuna kadar bizlerin hizmetine veren, tez yöneticisi hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ'a, büyük fedakârlıklarla bana destek olan arkadaşım Tuğçe AYDOĞAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ÇİZELGELER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
1.1. Kesirlerin Tarihçesi 1
1.2. Sürekli Kesirler 4
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR 7
2.1. Sonlu Sürekli Kesirler 7
2.2. Sürekli Kesirlerin Yakınsaklıkları 11
2.2. Sürekli Kesirlerin Yakınsaklıkları 11
2.3. Sürekli Kesirler ve $ax + by = c$ Tipindeki Lineer Diophantine Denklemleri 18
2.4. Sürekli Kesirler ve Kongrüanslar 21
2.5. Sürekli Kesirler ve Determinantlar 24
2.6. Sürekli Kesirler ve Kuadratik İrrasyonel Sayılar 27
2.6.1. Kuadratik İrrasyonelleri Genişletmek İçin Üç Adım Yöntemini Kullanma 31
2.6.2. Tekrarlayan Bir Sürekli Kesri Kuadratik İrrasyonele Dönüştürme 31
3. SÜREKLİ KESİRLERDE ÇATALLANMA 33
3.1. Periyodu 1 Olan Çatallı Sürekli Kesirler 38
3.2. İleri Genelleştirme 42
3.3. Çatallanan Sürekli Kesir Teorisinin Formal Gelişimi 45
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 67
KAYNAKLAR

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$:	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$:	Kompleks sayılar kümesi
∞ :	Sonsuz
[ ] :	Sürekli kesir
C_n :	Sonsuz sürekli kesrin n. inci yakınsaklığı
a | b :	a böler b
| |:	Mutlak değer
$\in$:	Elemanıdır

ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE

Sayfa

2.1. $ax + by = c$ Tipindeki Lineer Diophantine Denklemlerinin Sürekli Kesirler Yardımıyla Bulunması 19
2.2. Kongrüansların Sürekli Kesirler Yardımıyla Bulunması..... 22
2.3. Sürekli Kesirler Yardımı ile Kuadratik İrrasyonel Sayıların Yakınsaklığının Bulunması..... 30
3.1. (α, β) Reel Sayı İkilisinin Sürekli Kesir Çatallanması ……..…..…… 37

1.GİRİŞ

1.1. Kesirlerin Tarihçesi

Kesirler tarihsel olarak insanların doğadaki gözlemleriyle başlamıştır. Günlerin, ayların, mevsimlerin bölümleri ve doğadaki şekilleri bunlara örnek olarak verilebilir. Zaman içerisinde toplumlar çoğaldıkça mal ve eşyaları ölçme ihtiyacı artmış ve böylece kesirlerin kullanımı da yaygınlaşmıştır. [1]

Bir bütünün parçalarını temsil eden sayılara *rasyonel sayı* ya da *kesir* adı verilir. Kesirler, iki tam sayının (a ve b gibi) bölümü olarak yazılır. [1]

Mısırlılar kesirler üzerinde çalışan ilk gruplardan biridir. Kesirleri, birim kesirlerin yani pay kısmı 1 olan kesirlerin toplamı şeklinde ilk kez Mısırlılar yazmıştır. Örneğin $\frac{3}{4}$ kesri hiyeroglifde $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ şeklinde yazılır. Ancak bu metotla $\frac{2}{7}$ gibi kesirleri birim kesirlerin toplamı olarak yazamadılar ve bu yüzden bu gibi kesirler için tablolar hazırladılar. Yani 3 ekmeği 5 kişi arasında eşit olarak paylaştırmak için hepsine ayrı ayrı $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$ şeklinde parçalar verdiler. Mısırlılar piramitlerin planlarında ve inşaatlarında geometrik şekillerin alanlarını ve hacimlerini hesapladılar ve mallar ile arazilerin detaylı hesaplarını tuttular. [1]

Kesirler içeren matematiksel denklemleri çözmek için Öklid (300 M.Ö.) in algoritması kullanılmıştır. Örneğin iki sayının en büyük ortak paydası Öklid algoritması uygulanarak bulunmuştur. Kesirler Yunan astronomisinde, mimaride ve müzik teorisinde müzik aralığını açıklamak ve enstrümanların yay uzunluğunun harmonik sürecinde kullanılmıştır. [1]

M.S.550 yıllarında Aryabhata isimli Hindistanlı matematikçi lineer denklemleri çözmek için sürekli kesirleri kullanmış ve güneş ve ay tutulmasını tahmin etmeyle ilgilenmiş ve bununla ilgili astronomik kuralları açıklamıştır. [1]

İtalya'nın Bologna şehrinden Rafael Bombelli ve Pietro Cataldi adlı iki matematikçi de 13 ün ve 18 in karekökünde olduğu gibi tekrar eden sürekli kesirleri çalıştılar. Ancak iyi matematikçiler olmalarına rağmen tekrar eden sürekli kesirlerin özelliklerini çalışmadılar. 1585 te Johann Kepler'in öğrencisi olan Ladisme, ondalık bir tabanda ölçüm sistemlerini birleştirmek için ondalıklı kesirleri kullanmıştır. [1]

Christian Huygens (1629), dişli oranlarının yaklaşımları için verdiği pratik bir uygulamada sürekli kesirleri kullanan ilk kişidir. Kendinden önceki matematikçiler gibi gezegenlerin hareketleriyle ilgilenmiş ve bunun için gerekli dişli mekanik bir planetaryum inşa etmek için çalışmıştır. Ayrıca Hollandalı gökbilimci, fizikçi ve matematikçidir. 17. yüzyılın sonlarına doğru, günü dairesel olarak daha fazla zamana bölen saatler icat etmiştir. [1]

1757 de Oxford'da bir geometri profesörü olan John Wallis sürekli kesirlerle ilgili çalışmaları ilerletmiştir. Arithemetica Infinitorium isimli bir kitap yazarak burada kendisinin geliştirdiği $\frac{\pi}{4}$ özdeşliğini vermiştir. Bu kitapta sürekli kesirlerin genelleştirilmesiyle ilgili adımlardan bahsetmiştir. Hatta Opera Mathematica isimli bir kitap daha yazmıştır. Bu kitabında da yakınsaklıklar ve yakınsaklıkların bazı özelliklerini ele almıştır. Kendisinden önce birçok kişi çalışmış olmasına rağmen, ilk kez "sürekli kesir" terimini kullanan da Wallis'tir. Ayrıca sonsuz ifadesini göstermek için ∞ sembolünü ilk kullanan da o dur. [1]

Daha sonra 1737 yılında Leonard Euler tarafından yazılan De Fractionlous Continious isimli kitapta modern kesir teorisi verilmiş ve her rasyonel sayının sonlu bir basit kesirle ifade edilebileceği gösterilmiştir. Euler aynı zamanda Pi sembolünü bugünkü kullandığımız haliyle kabul etmiştir. Joseph Louis Lagrange ise kuadratik bir irrasyonel sayının reel kökünün periyodik bir sürekli kesir olduğunu ispat etmiştir. Sur la resolution des equations numeriques Lagrange isimli anılarında (1767) sürekli kesirlerin kullanımları açıklanmıştır. [1]

19. yüzyıl "Sürekli kesirlerin altın çağı" olarak adlandırılır. Bu yıllarda artık sürekli kesirler, yakınsaklıkları ve kompleks sayıları da içine almıştır. Sanayi devrimiyle birlikte pratik uygulamalar bakımından hassas aletler için sürekli kesirler

kullanılmıştır ve 20. yüzyılda da artık sürekli kesirler, ileri fizik ve astronomi problemlerinin çözümü için bilgisayar algoritmalarında kullanılmıştır.

Sanki atomu en küçük parçalarına ayırıyormuş gibi, deney ve gözlem yoluyla kesirler çalışılmaya devam edilmektedir. [2]

1.2. Sürekli Kesirler

Sürekli kesirler pek çok konuda sağladığı kolaylıklar matematikçileri etkilemiştir;

1. Sürekli kesir yakınsamalarından faydalanılarak küçük hata payına sahip ölçekleme modelleri oluşturulabilir.

2. Diğer metodlara göre karşılaştırma bakımından daha hızlı kullanışlılardır.

3. İstenen özelliklere göre daha çok hesaplama yapılabilir.

4. Bütün reel sayılar sürekli kesirler tarafından tam olarak ifade edilebilir.

Sürekli kesirleri, sonlu sürekli kesirler ve sonsuz sürekli kesirler olarak iki ana başlık altında inceleyebiliriz;

Sonlu sürekli kesirleri $\frac{11}{8}$ gibi bileşik kesirlerin bir genelleştirilmesi gibi düşünebiliriz. Örneğin

$$\frac{11}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Bu yazım biçimi her $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı için geçerlidir, yani $a_1 \in \mathbb{Z}$ ve $a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

olarak yazılabilir. Gösterim kolaylığı açısından genellikle $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_n]$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca belirtelim ki irrasyonel sayılarıda sürekli kesirler şeklinde ifade etmek mümkündür.

Örneğin $\sqrt{3}$ rasyonel sayısını göz önüne alacak olursak

$$\sqrt{3} = 1 + .7320508\dots = 1 + \frac{1}{1 + .3660254\dots} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + .7320508\dots}}}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu tür sürekli kesirleri sonsuz sürekli kesir olarak isimlendirmek yerinde olacaktır. Genel olarak her *x* gerçel sayısının $x = [a_1; a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots]$ şeklinde bir açılımı vardır. Örneğin

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 12, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \cdots]$$

ve

$$e = [2;\ 1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,1,1,14,1,1,16,\cdots]$$

Bir sayının sürekli kesir açılımının en önemli özelliği, baştan itibaren alınan sayılardan oluşturulan kesrin, bilinen sayıya son derece iyi yaklaşmasıdır ki biz bunu yakınsama olarak adlandıracağız. Diğer bir deyişle $[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_n]$ sürekli kesirinin bir $k \leq n$ pozitif tamsayısı için k-ıncı yakınsaması $C_k = [a_1; a_2, a_3, \cdots, a_k]$ olarak gösterilir. Örneğin [1; 2, 3, 4] sürekli kesri için

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$C_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{10}{7}$$

$$C_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

olur. Başka bir örnek olarak da

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 12, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \cdots]$$

sayısını ele alırsak ilk iki sayıdan oluşan yakınsama

$$C_2 = [3; 7] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

olup bu sayı π sayısına iyi bir yaklaşık değerdir. Diğer bir yaklaşık değer için 292 den önce gelen sayıları alarak oluşturacağımız yakınsama olan

$$C_4 = [3,7,15,1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}1415392\cdots$$

sayısını elde ederiz ki buda $\pi = 3{,}141592653\cdots$ sayısına oldukça yakın bir değerdir.

Bu safhada sürekli kesirlerin matematik tarihindeki yerinden bahsetmek konunun daha anlaşılır hale gelmesi açısından faydalı olacaktır. Kutsal oran (bu terim rönesanstan gelmektedir) ve kendine benzerlik özelliklerine sahip bir dikdörtgenin oluşturulması çabaları

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

altın oranın sürekli kesir açılımının geometrideki kopyasından başka bir şey değildi. Sürekli kesirlerin çıkış noktasını tam olarak bilmek oldukça güçtür. Bu güçlük, sürekli kesirlerle matematikte son 2000 yılda karşılaşılması fakat 1600 ların başlarından 1700 lerin sonlarına kadar geçen sürede bu kavramın tam olarak anlaşılamamasından kaynaklanmaktadır. Buna karşın sürekli kesirlerin kökeni geleneksel olarak Euclid algoritmasının yaratıldığı zamanla çakıştırılır. Euclid algoritması iki sayının en büyük ortak bölenini (ebob) bulmak için kullanılır. Bu algoritmayı ustaca kullanarak p ve q nun ebobunu bulmak yerine (p/q) rasyonel sayısının sürekli kesir açılımını bulabiliriz.

Euclid ve ondan öncekilerin bu algoritmayı sürekli kesir oluşturmada kullanıp kullanmadıkları tartışmalıdır. Fakat Öklid algoritmasının sürekli kesirlerle olan yakın ilişkisinden dolayı Euclid algoritmasının keşfinin sürekli kesirlerin gelişimine fayda sağladığı yaygın bir inanıştır.

Hintli matematikçi Aryabhata (M.S 550) sürekli kesirleri doğrusal belirsiz denklemleri çözmek için kullanmıştır. Yunan ve Arap matematik eserlerinde de sürekli kesirlerin örnekleri ile karşılaşılmıştır. Fakat bu örnekler özel örneklerle kısıtlıydı.

Sürekli kesirler, Wallis'in (1616-1703) çalışmaları esnasında son derece ilgi çekici bir hale gelmiştir. Wallis,

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \cdots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 9 \cdots}$$

özdeşliğini geliştirdi. Wallis'in bu ilk adımı atması sürekli kesirler teorisini genelleştirmede ve göz kamaştırıcı bir konu olmasında büyük rol oynadı.[2]

2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

2.1. Sonlu Sürekli Kesirler

Tanım 2.1.1. $a_1 \in \mathbb{Z}$ ve $a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

şeklinde yazılabilen ifadeye *basit sürekli kesir* denir. $a_1 \in \mathbb{Z}$ ve $a_2, a_3 \cdots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ tam sayılarına sürekli kesrin kısmi bölümleri adı verilir. Sürekli kesirler kısa olması açısından

$$[a_1; a_2, a_3, \cdots a_n]$$

veya

$$a_1 + \frac{1}{a_2 +}\frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{+a_n}$$

şeklinde gösterilirler. Sonlu sürekli kesirler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$[a_1] = a_1$$

$$[a_1; a_2] = a_1 + \frac{1}{a_2}$$

$$[a_1; a_2, a_3] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

$$[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_n] = [a_1; a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}] + \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 2)$$

Euclid algoritması yardımıyla kesirli ifadeler sonlu sürekli kesir olarak yazılabilir. Şimdi $\frac{384}{157}$ kesrini sürekli kesir olarak ifade edelim. Euclid algoritması kullanarak

$$384 = 157.2 + 70$$

$$157 = 70.2 + 17$$

$$70 = 17.4 + 2$$

$$17 = 2.8 + 1$$

$$2 = 1.2 + 0$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{384}{157} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{2}}}}$$

veya

$$\frac{384}{157} = [\,2; 2, 4, 8, 2]$$

şeklinde yazılır. Burada negatif bir rasyonel sayı için de örnek vermek faydalı olabilir:

$$-\frac{9}{40} = -1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}$$

$$-\frac{9}{40} = [-1; 1,3,2,4]$$

şeklinde gösterilir. [2]

Teorem 2.1.1. Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı belirtir. [2]

İspat İspatı tümevarım metoduyla yapacağız. Buna göre

$n = 1$ için $[a_1] = a_1 = \frac{a_1}{1}$ ifadesi doğrudur.

Şimdi $n = k$ için ifadenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani $a_1 \in \mathbb{Z}$ ve $a_2, a_3 \cdots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, ilk terim a_1 dışında tüm terimleri pozitif olan $[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_k]$ sürekli kesri bir rasyonel sayı belirtsin.

O halde $n = k + 1$ için $a_1 \in \mathbb{Z}$ ve $a_2, a_3 \cdots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_k, a_{k+1}]$ ifadesinin bir sürekli kesir olduğunu göstereceğiz.

$n = k$ için kabulümüzden $[a_1; a_2, a_3, \cdots, a_k, a_{k+1}] = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q $(q \neq 0)$ tamsayıları vardır. Bu durumda

$$[a_1; a_2, a_3, , a_k, a_{k+1}] = a_1 + \frac{1}{[a_2; a_3, \cdots, a_k, a_{k+1}]}$$

$$= a_1 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{a_1 . p + q}{p}$$

rasyonel sayısı elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.2. Her rasyonel sayı bir tek sonlu basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir. [2]

İspat Euclid algoritması kullanılarak $q > 0$, $a, b \in \mathbb{Z}, x = \frac{p}{q}$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} p &= a_1 q + r_1 && , && 0 < r_1 < q \\ q &= a_2 r_1 + r_2 && , && 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_3 r_2 + r_3 && , && 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots && && \vdots \\ r_{n-3} &= a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} && , && 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} &= a_n r_{n-1} + 0 && , && r_{n-2} = 0 \end{aligned}$$

tamsayıları vardır. Böylece $x = \frac{p}{q}$ olmak üzere

$$x = a_1 + \frac{r_1}{q}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

sonlu sürekli kesri elde edilir. Şimdi $\frac{p}{q}$ ifadesini temsil eden başka bir

$$b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}}$$

sürekli kesrinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}}$$

olur. $\frac{p}{q}$ dan küçük en büyük tamsayı a_1 dir ve b_1 de $\frac{p}{q}$ dan küçük en büyük tamsayıdır, dolayısıyla $a_1 = \mathrm{b}_1$ olur. O halde $\frac{p}{q} - a_1 = \frac{p}{q} - b_1$dir. $\frac{p}{q} - a_1 = \frac{p_1}{q_1}$ alalım $\frac{p}{q}$ dan küçük en büyük tamsayı a_1 olduğundan $\frac{p_1}{q_1} < 1$ dir. Buna göre

$$\frac{p}{q} - a_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{a_n}}} = \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\vdots + \frac{1}{b_n}}}$$

elde edilir. 1 den küçük pozitif bir tamsayının çarpımsal tersi 1 den büyüktür; bu nedenle $\frac{q_1}{p_1} > 1$ dir. Sıfırdan farklı iki sayı birbirine eşit ise bunların çarpımsal tersleri de birbirine eşittir. Böylece

$$\frac{q_1}{p_1} = a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}} = b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_n}}$$

yazılabilir. Tekrar $\frac{q_1}{p_1}$ den küçük en büyük tamsayı a_2 dir ve b_2 de $\frac{q_1}{p_1}$ den küçük en büyük tamsayıdır, dolayısıyla $a_2 = b_2$ olur. Benzer şekilde $a_3 = b_3$ bulunur. Bu nedenle

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} \text{ ve } b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_n}}}$$

sürekli kesirleri, *a ve b* lerin eşitliğinden dolayı, iddia edildiği gibi aynı $\frac{p}{q}$ sayısını temsil ederler.

2.2. Sürekli Kesirlerin Yakınsaklıkları

Tanım 2.2.1. n terimden oluşan bir sürekli kesrin terimlerini $k < n$ olacak şekilde bir k. terimine kadar alırsak bu ifadeye sürekli kesrin bir yakınsaklığı denir. Bir $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı için

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

olduğunu kabul edelim. Böylece

$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$, burada $p_1 = a_1$, $q_1 = 1$ dir.

$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2}$, burada $p_2 = a_1 a_2 + 1$, $q_2 = a_2$ dir.

$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_2 a_3 + 1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + 1} = \frac{p_3}{q_3}$ burada

$p_3 = a_3 p_2 + p_1$ ve $q_3 = a_3 q_2 + 1$ dir.

Bu şekilde devam edilerek

$c_k = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$

şeklinde bir genelleştirme yapılır. [2]

Teorem 2.2.1. $p_0 = 1, p_{-1} = 0, q_{-1} = 1, q_0 = 0$ başlangıç koşullarıyla birlikte

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \text{ ve } q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

olmak üzere

$$c_k = \frac{p_k}{q_k}$$

olur. [2]

İspat İlk olarak teoremde başlangıç şartı olarak verilen

$$p_0 = 1, p_{-1} = 0, q_{-1} = 1, q_0 = 0$$

durumlarının gerçekten sağlandığını gösterelim.

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}$$

olduğunu yukarıdaki genelleştirmeden biliyoruz. Şimdi genelleştirmeden,

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}$$

elde edilir. Bu c_1 terimlerini birbirine eşitlersek

$$\frac{a_1}{1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}$$

buradan da

$$p_0 = 1, p_{-1} = 0, q_{-1} = 1, q_0 = 0$$

bulunur. Şimdi aynı işlemi

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2} \text{ ve } c_2 = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}$$

terimleri için uygularsak başlangıç şartlarının gerçekten de doğru olduğunu görürüz. Teoremin ispatını tamamlayabilmek için tüvemarım metodu kullanalım. $k = 3$ için

$$c_3 = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_2 a_3 + 1}$$

doğrudur.

$k = n$ için doğru kabul edelim. Yani

$$c_n = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

olsun.

Şimdi $k = n + 1$ için doğruluğunu inceleyelim

$$c_{n+1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \cdots \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}}}}}$$

$$c_{n+1} = \left[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$$

$$c_{n+1} = \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$c_{n+1} = \frac{(a_n a_{n+1} + 1)p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n a_{n+1} + 1)q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} a_n p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-1}}{a_{n+1} a_n q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-1}}$$

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

olur. Bu da ispatımızı tamamlar.

Örnek 2.2.1 $\frac{187}{57} = [\,3; 3, 1, 1, 3, 2\,]$ sürekli kesrinde $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için c_k yakınsaklıklarını bulalım. İlk olarak Euclid algoritmasını uygulayarak $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ terimlerini bulalım. Buna göre

$$\begin{aligned} 187 &= 57.3 + 16 \\ 57 &= 16.3 + 9 \\ 16 &= 9.1 + 7 \\ 9 &= 7.1 + 2 \\ 7 &= 2.3 + 1 \\ 2 &= 1.2 + 0 \end{aligned}$$

olur.

Buradan $\frac{187}{57} = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}}$

$$c_1 = 3$$

$$c_2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$c_3 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{13}{4}$$

$$c_4 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{23}{7}$$

$$c_5 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} = \frac{82}{25}$$

$$c_6 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}} = \frac{187}{57}$$

Şimdi aynı yakınsaklıkları teoremi uygulayarak bulalım:

$$c_k = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{p_k}{q_k}$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 p_0 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{3.1 + 0}{3.0 + 1} = 3$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{3.3+1}{3.1+0} = \frac{10}{3}$$

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{1.10+3}{1.3+1} = \frac{13}{4}$$

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{1.13+10}{1.4+3} = \frac{23}{7}$$

$$c_5 = \frac{p_5}{q_5} = \frac{3.23+13}{3.7+4} = \frac{82}{25}$$

$$c_6 = \frac{p_6}{q_6} = \frac{2.82+23}{2.25+7} = \frac{187}{57}$$

Teorem 2.2.2. $p_0 = 1, p_{-1} = 0, q_{-1} = 1\,, q_0 = 0$ için

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \text{ ve } q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

olmak üzere

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k$$

dir. [2]

İspat Teoremin ispatı için yine tümevarım metodunu kullanacağız.

$k = 1$ için

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = a_1.0 - 1.1 = (-1)^1.$$

$k = n$ için doğru kabul edelim. Yani

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$$

olsun. Şimdi $k = n+1$ için doğruluğunu inceleyelim.

$$\begin{aligned} p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} &= (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) \\ &= a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - a_{n+1} q_n p_n - q_{n-1} p_n \\ &= (-1)(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) \\ &= (-1)(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

olur. Bu da ispatımızı tamamlar.

Sonuç 2.2.1. Teorem 2.2.1. de tanımlanan p_k ve q_k tamsayıları aralarında asaldır. [2]

İspat Bu iki sayının aralarında asal olabilmesi için $d = (p_k, q_k) = 1$ olmalıdır. Teorem 2.2.2. den

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^k$$

olduğunu biliyoruz.

$d = (p_k, q_k)$ ise $d \mid p_k$ve $d \mid q_k$ olmalıdır. Böylece $d \mid p_k q_{k-1}$ ve $d \mid p_{k-1} q_k$ yazılabilir. Buna göre

$$d \mid p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k$$

elde edilir.

Buradan da $d \mid (-1)^k$ bulunur. Bu ise $d = 1$ olması demektir. Yani p_k ve q_k aralarında asaldır.

Teorem 2.2.3. Seçilen bir rasyonel sayının her yakınsaklığı, kendisine bir önceki yakınsaklıktan daha yakındır. [1]

Açıklama: Teoremi daha iyi anlayabilmek için

$$\frac{180}{79} = [2; 3,1,1,2,4] \text{ ve } \frac{187}{57} = [3; 3,1,1,3,2]$$

iki sürekli kesrin yakınsamalarına bakalım.

$c_{1_1} = 2 = 2$ $\quad$ $c_{2_1} = 3 = 3$

$c_{1_2} = \frac{7}{3} = 2{,}3333$ $\quad$ $c_{2_2} \frac{10}{3} = 3{,}3333$

$c_{1_3} = \frac{9}{4} = 2{,}25$ $\quad$ $c_{2_3} = \frac{13}{4} = 3{,}25$

$c_{1_4} = \frac{16}{7} = 2{,}2857$ $\quad$ $c_{2_4} = \frac{23}{7} = 3{,}2857$

$c_{1_5} = \frac{41}{18} = 2{,}2777$ $\quad$ $c_{2_5} = \frac{82}{25} = 3{,}28$

$c_{1_6} = \frac{180}{79} = 2{,}2784$ $\quad$ $c_{2_6} = \frac{187}{57} = 3{,}2807$

Tablolardan görüldüğü üzere yakınsaklıklar bir büyük bir küçük olacak şekilde ilerliyor ve son yakınsaklık normal olarak bizim kendi rasyonel sayımıza eşit oluyor.

İspat: Şimdi biz bu söylediklerimizi genelleştirmeye çalışalım:

$$c_k - c_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$$

$$c_{k+1} - c_k = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1}}{q_{k+1} q_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k+1}}$$

q lar pozitif tamsayı olduğundan $q_k q_{k-1}$ve $q_k q_{k+1}$ ler tamamen pozitif olacaktır.

Eğer k çift ise $(-1)^k = +1\,, (-1)^{k+1} = -1$ ve k tek ise $(-1)^k = -1\,, (-1)^{k+1} = +1$ olur.

Her iki durumda da $c_k - c_{k-1}$ ve $c_{k+1} - c_k$ farklı işaretlere sahiptir. Ayrıca herbir q bir öncekinden daha büyüktür. Böylece

$$\frac{1}{q_{k+1}q_k} < \frac{1}{q_k q_{k-1}}$$

$$\frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k+1}} < \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}$$

elde edilir. Yani herbir yakınsaklık bizim gerçek rasyonel sayımıza bir öncekinden daha yakındır.

Teorem 2.2.4. Tek yakınsaklıkların $(C_1, C_3, \cdots)$ formu bir artan sayı dizisidir ve hepsi $\frac{p}{q}$ dan küçüktür. (Eğer yakınsaklıkların sayısı olan k tek ise en son sayı $\frac{p}{q}$ ya eşittir). Çift yakınsaklıkların formu ise azalan bir sayı dizisi olup bunların hepsi $\frac{p}{q}$ dan büyüktür. (Eğer yakınsaklıkların sayısı olan k çift ise en son sayı $\frac{p}{q}$ ya eşittir). Bu durumu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_5}{q_5} < \cdots < \frac{p}{q} < \cdots < \frac{p_6}{q_6} < \frac{p_4}{q_4} < \frac{p_2}{q_2}$$

En sonuncusu hariç olmak üzere bütün yakınsaklıkların $\frac{p}{q}$ dan farklı olma durumunu inceleyelim. Aslında bu durum doğal olarak şu sorudan kaynaklanmaktadır: $\frac{p}{q}$ dan farklı kaç tane yakınsaklık vardır? Şimdi bu soruya cevap vermeye çalışalım. O halde bu soruyu aşağıdaki gibi yeniden ifade edelim. Verilen bir $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı ile onun $i.$ yakınsaklığı arasındaki fark ne kadardır? İlk olarak $i.$ terim ile sürekli kesrin geri kalan kısmı arasındaki ilişkiyi ele alalım. Böylece

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{a_{i+1} + \cfrac{1}{a_{i+2} + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_n}}}}}}}}$$

olduğundan

$$a_{i+1} + \cfrac{1}{a_{i+2} + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_n}}}$$

ifadesi bir başlangıç sürekli kesridir ve bu nedenle bir rasyonel sayı belirtir. Bu rasyonel sayıyı p_{i+1} ile gösterelim. Şimdi biz orjinal sürekli kesrimizi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{a_{i+1} + \cfrac{1}{p_{i+1}}}}}}}$$

Bu sürekli kesri göz önüne alarak $i+1$-inci yakınsaklığın $\frac{p}{q}$ olduğunu düşünelim, yani $\frac{p}{q} = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ olsun. $\frac{p}{q}$ ve $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ arasındaki farkın büyüklüğü ile ilgileniyoruz, yani $\frac{p}{q} - \frac{p_i}{q_i}$ yi bulmaya çalışıyoruz. Buna göre

$$\frac{p}{q} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i+1}p_i + p_{i-1}}{q_{i+1}q_i + q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i}$$

$$= \frac{p_{i+1}p_iq_i + p_{i-1}q_i - p_{i+1}p_iq_i - p_iq_{i-1}}{q_i(p_{i+1}p_i + q_{i-1})}$$

$$= \frac{p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1}}{q_i(p_{i+1}q_i + q_{i-1})}$$

elde edilir. Ayrıca $p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = \pm 1$ olup böylece

$$\frac{p}{q} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{\pm 1}{q_i(p_{i+1}p_i + q_{i-1})}$$

bulunur. Şimdi a_{i+1} pozitif tamsayı olduğundan $p_{i+1} > a_{i+1}$ olur ve p_{i+1} sayısı da bu a_{i+1} sayısına sürekli kesrin geri kalan kısmını ekleyerek elde edilir. Paydadaki sayı küçüldükçe daha büyük bir kesir elde edeceğimizden

$$\frac{p}{q} - \frac{p_i}{q_i} < \frac{1}{q_i(a_{i+1}\,q_i + q_{i-1})}$$

bulunur. Ayrıca $a_{i+1}\,q_i + q_{i-1} = q_{i+1}$ olduğundan

$$\frac{p}{q} - \frac{p_i}{q_i} < \frac{1}{q_iq_{i+1}}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\frac{p}{q} - \frac{p_i}{q_i}$ farkının daima $\frac{-1}{q_iq_{i+1}}$ ile $\frac{1}{q_iq_{i+1}}$ arasında bulunacağını ifade eder. [2]

2.3. Sürekli Kesirler ve $ax + by = c$ Tipindeki Lineer Diophantine Denklemleri

a, b ve c tamsayı olmak üzere çözümleri tamsayı olan $ax + by = c$ tipindeki bir denkleme *lineer diophantine denklemleri* veya *belirsiz denklem* denir. Denklemde x ve y yerine yazıldığında denklemi sağlayan tamsayılara denklemin çözümü adı verilir.

Pay kısmı daha büyük olmak üzere $\frac{a}{b}$ veya $\frac{b}{a}$ şeklindeki çözümleri bulmak istiyoruz. Genelliği bozmadan $\frac{a}{b}$ alabiliriz $(a > b)$. Şimdi bu kesri bir sürekli kesre genişletelim. Bu durumda sürekli kesir içinde n terim varsa

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$$

olur.

Buna göre

$$aq_{n-1} - bp_{n-1} = (-1)^n$$

elde edilir. Eğer n çift ise bu denklemin çözümleri

$$a(q_{n-1}) - b(p_{n-1}) = (-1)^n \;\; ve\; p_{n-1}\; ve\; q_{n-1}$$

olur. Eğer n tek ise denklemin her iki tarafı (-1) ile çarpılır. Ancak $ax + by = 1$ denkleminin çözümlerini değil $ax + by = c$ denkleminin çözümlerini bulmak istediğimizi belirtelim. O halde bu denklemin çözümlerini elde etmek için $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$ denkleminin her iki tarafı c ile çarpılarak

$$a(cq_{n-1}) - b(cp_{n-1}) = c$$

elde edilir. Böylece $ax + by = c$ denkleminin çözümleri $x = cq_{n-1},\;\; y = -cp_{n-1}$ olarak bulunur. [2]

Örnek 2.3.1. Aşağıda verilen denklemin tamsayı çözümlerini bulalım:

$83x + 118y = 3$

$$\frac{118}{83} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}$$

Çizelge 2.1 ax + by = c Tipindeki Lineer Diophantine Denklemlerinin Sürekli Kesirler Yardımıyla Bulunması

n	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_n			1	2	2	1	2	4
p_n	0	1	1	3	7	10	27	118
q_n	1	0	1	2	5	7	19	83

Şimdi $n = 6$ için $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$
formülü kullanılarak

$$p_6 q_5 - q_6 p_5 = (-1)^6$$
$$118(19) - 27(83) = (-1)^6$$
$$83(-27) + 118(19) = 1$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafını 3 ile çarparak

$$3.83(-27) + 3.118(19) = 3.1$$
$$83(-81) + 57(118) = 3$$

elde edilir. Buna göre $83x + 118y = 3$ denkleminin çözümlerinin $x = -81$ ve $y = 57$ olduğu görülür.

Peki bu tipteki denklemlerin çözümleri daima bulunabilir mi? Aşağıdaki özelliklerle birlikte a, b, c, m ve r tamsayılarını kullanarak bu sorunun çözümünü araştıralım:

1. a ve b nin her ikisi de bir $k \neq 1$ tamsayısı ile bölünebilir. O halde $a = ku$, $b = kv$ olacak şekilde u ve v tamsayıları vardır.

2. k sayısı c nin bir böleni değildir.

3. $am + bn = c$.

(1) deki ifadeler $am + bn = c$ denkleminde yerine yazılarak

$$(ku)m + (kv)n = c$$
$$k(um + vn) = c$$

bulunur.

Bu ise k nın c nin bir böleni olduğu anlamıda gelir ve bu ikinci özellikle çelişir. Böylece yukarıdaki üç özellikle birlikte verilen tamsayılar bulunamaz.

Üstelik $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $am + bn = c$ tipindeki bütün denklemler bir tamsayı çözümüne sahip değildir. Böyle bir denklem için $2m + 4n = 3$ örnek olarak verilebilir.

$2m + 4n = 3$ denkleminin tamsayı çözümleri nasıl bulunabilir? Eğer m ve n yi yerine yazarak denklemi sağlayan tamsayı çözümleri bulunursa bu durumda $3, 2$ ile bölünebilirdir. Ancak bu mümkün olmadığından bu denklemin tamsayı çözümleri yoktur.

$am + bn = c$ denklemini sağlayan tamsayı çiftlerini bulmak istediğimizi kabul edelim. Ayrıca bu çözümler tek midir? Bu sorunun cevabı için $83x + 118y = 3$ denkleminin çözümü için uygulanan yöntem kullanılabilir:

$$83x + 118y = 3 \text{ ve } 83(-81) + 118(57) = 3.$$

Bu eşitliklerin sağ tarafları eşit olduğundan sol tarafları da eşittir:

$$\begin{aligned} 83x + 118y &= 83(-81) + 118(57) \\ 83x - 83(-81) &= 118(57) - 118y \\ 83(x + 81) &= 118(57 - y). \end{aligned}$$

Şimdi $83(x + 81)$ ve $118(57 - y)$ ifadeleri eşittir; böylece aynı çarpana sahip olmak zorundadırlar. $\frac{118}{83}$ bir yakınsaklık ve bütün yakınsaklıklar da en son terime yakınsadıklarından 118 ve 83 ortak bir çarpana sahip değildir. Bu nedenle $(57 - y)$ nin bir çarpanı 83 ve $(x + 81)$ in bir çarpanı da 118 olmalıdır. O halde

$$x + 81 = 118t \quad ve \quad 57 - y = 83t \quad \text{(bir } t \in \mathbb{Z} \text{ için)}$$

$$x = -81 + 118t \quad ve \quad y = 57 - 83t$$

eşitlikleri yazabilabilir.

Eğer x ve y ler $83x + 118y = 3$ için bir çözüm ise bu denklemi sağlayan diğer tamsayı çiftleri x ve y de t yerine herhangi bir tamsayı alarak elde edilebilir. Örneğin $t = 2$ alınırsa $83x + 118y = 3$ denklemini sağlayan bir diğer çözümün $x = 155$ ve $y = -109$ olduğu görülür.

2.4. Sürekli Kesirler ve Kongrüanslar

$a \equiv b\,(\mathrm{mod}m)$ ifadesi "a sayısı mod m ye göre b ye denktir" diye okunur ve "a ve b nin bir m sayısına bölündüğünde aynı kalana sahip" olduğu anlamına gelir. m sayısına da modül adı verilir. Örneğin $5 \equiv 17(\mathrm{mod}3)$ ifadesi doğrudur, ancak $21 \equiv 33(\mathrm{mod}10)$ ifadesi doğru değildir.

Şimdi $ax \equiv b\,(\mathrm{mod}m)$ şeklindeki bilinmeyen içeren kongrüansları ele alalım x i yerine koyduğumuzda ifadeyi sağlayan sayılara bu kongrüansın çözümleri denir. Örneğin $7x \equiv 9(\mathrm{mod}5)$ kongrüansının bir çözümü 27 sayısıdır. Ayrıca bu çözüme mod un herhangi bir tam katını ilave ettiğimizde diğer çözümleri de elde edebiliriz. Yukarıda denklemde 27 bir çözüm olduğundan 37 de bir çözüm olur.

$\frac{a}{m}$ nin sürekli kesir ifadesinigözönüne alarak $ax \equiv b(\mathrm{mod}m)$ nin çözümlerini bulalım. En son yakınsaklık $\frac{a}{m}$ dir. Eğer n tane yakınsaklık varsa

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$$

formülünde $p_n = a$ ve $q_n = m$ yazarak

$$aq_{n-1} - mp_{n-1} = (-1)^n$$

$$q_{n-1} = \frac{mp_{n-1} + (-1)^n}{a}$$

$$ax = aq_{n-1} = a\left(\frac{mp_{n-1} + (-1)^n}{a}\right) = mp_{n-1} + (-1)^n$$

elde edilir. Şimdi $mp_{n-1} + (-1)^n$ ve 1 sayılarını m ile bölelim.

	p_{n-1}		0
$m)$	$mp_{n-1} + (-1)^n$	$m)$	1
	mp_{n-1}		0
	$(-1)^n$		1

Kalanlar $(-1)^n$ ve 1 olur. Eğer n çift ise $(-1)^n = 1$ olup $ax \equiv 1(mod\ m)$ için q_{n-1} bir çözümdür. Eğer n tek ise $-q_{n-1}$ i gözönüne alalım. x yerine $-q_{n-1}$ yazılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$ax = a(-q_{n-1}) = a\left(-\frac{mp_{n-1}+(-1)^n}{a}\right) = m(-p_{n-1})+(-1)^n$$

$m(-p_{n-1})+(-1)^n$ sayısını m ile bölersek

$$\begin{array}{r} -p_{n-1} \\ m \overline{)\, m(-p_{n-1})+(-1)^n} \\ m(-p_{n-1}) \\ (-1)^{n+1} \end{array}$$

bulunur. Eğer n tek ise $(-1)^{n+1} = 1$ dir.

O halde yakınsaklıkların sayısı n ($\frac{a}{m}$ nin yakınsaklıkların sayısı) çift ise $ax \equiv 1(\mathrm{mod}m)$ nin bir çözümü q_{n-1} dir. Eğer n ($\frac{a}{m}$ nin yakınsaklıkların sayısı) tek ise $ax \equiv 1(\mathrm{mod}m)$ nin bir çözümü $-q_{n-1}$ dir. Ancak $ax \equiv b(\mathrm{mod}m)$ in bir çözümüne ihtiyacımız var. Bu nedenle eğer $a(q_{n-1}) \equiv 1(\mathrm{mod}m)$ ifadesi doğruysa bu kongrüansın her iki tarafı b ile çarpılarak $a(bq_{n-1}) \equiv b(\mathrm{mod}m)$ elde edilir. Bu durumda eğer n çift ise $ax \equiv b(\mathrm{mod}m)$ nin bir çözümü bq_{n-1} dir. Eğer n tek ise $ax \equiv b(\mathrm{mod}m)$ nin bir çözümü $-bq_{n-1}$ dir. Şimdi sürekli kesirleri kullanarak $ax \equiv b(\mathrm{mod}m)$ nin bir çözümünü bulabiliriz.

Örnek 2.4.1. $11x \equiv 13$ (mod7) denkleminin bir çözümünü bulunuz.

$\frac{11}{7} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$ ise $\frac{11}{7} = [\,1;\,1,1,3\,]$

Çizelge 2.2 Kongrüansların Sürekli Kesirler Yardımıyla Bulunması

n	-1	0	1	2	3	4
a_n			1	1	1	3
p_n	0	1	1	2	3	11
q_n	1	0	1	1	2	7

olur. $n = 4$ olması durumunda n çift olduğundan q_{n-1} (veya $q_3 = 2$)

$$11x \equiv 1(\mathrm{mod}7)$$

denkeminin bir çözümüdür. Böylece

$$11.2 \equiv 1(\mathrm{mod}7)$$

yazılabilir. Şimdi her iki taraf 13 ile çarpılarak

$$11(2.13) \equiv 13(\mathrm{mod}7)$$

elde edilir. Böylece 26 sayısı $11x \equiv 13(\mathrm{mod}7)$ için bir çözümdür. Genel çözüm k herhangi biri tamsayı olmak üzere $26 + 7k$ olur.

Sürekli kesir içinde bulunan terimlerin sayısı tek olduğunda çözüm negatif olacağından, bu çözüm pozitif oluncaya kadar modülün katları ilave edilir. [2]

2.5. Sürekli Kesirler ve Determinantlar

Bir sürekli kesirin n-inci yakınsaklığı kendinden önceki yakınsaklıklar bilmeden bulunabilir mi? Birçok matematikçi bunu bulabilmek için sürekli kesirler üzerinde uzun yıllar çalıştı. Bu yapılırken sürekli kesirlerle determinantlar arasında ilginç bir ilişki keşfedeceğiz.

İlk olarak n-inci yakınsaklığın payını bulma problemiyle ilgilenelim. Biz bir sürekli kesrin pay kısmını $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ şekilde yazalım ve ilk beş terimi için inceleyelim.

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$
$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1}$$
$$p_2 = a_2 p_1 + p_0$$
$$p_3 = a_3 p_2 + p_1$$
$$p_4 = a_4 p_3 + p_2$$
$$p_5 = a_5 p_4 + p_3$$

şimdi aşağıdaki şekilde bu denklemleri yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned}
p_{-1} + a_1 p_0 - p_1 &= 0\\
p_0 + a_2 p_1 - p_3 &= 0\\
p_1 + a_3 p_2 - p_3 &= 0\\
p_2 + a_4 p_3 - p_4 &= 0\\
p_3 + a_5 p_4 - p_5 &= 0
\end{aligned}$$

tanımdan dolayı

$p_{-1} = 0, p_0 = 1$ olduğunu biliyoruz. İlk eşitlik de bu ifadeleri yerine yazarsak $p_1 = a_1$ ve $-p_1 = -a_1$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
-p_1 &= -a_1\\
a_2 p_1 - p_2 &= -1\\
p_1 + a_3 p_2 - p_3 &= 0\\
p_2 + a_4 p_3 - p_4 &= 0\\
p_3 + a_5 p_4 - p_5 &= 0
\end{aligned}$$

burada p_1 ile p_5 arasında 5 lineer denklem ve 5 bilinmeyene sahibiz. Determinantları kullanarak bu denklemleri herhangi bir bilinmeyene göre çözebiliriz. Burada özellikle p_5 i seçelim.

$$p_5 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & -1 \end{vmatrix}}$$

Bu tipteki bir determinantı hatırlaması kolaydır ve ilk sütununa göre minörlerini bulmak zor değildir. Bu tipteki determinantlar continuanats veya cumulants olarak tanımlanır. Şimdi q_5 için bir determinant bulalım. Bunun için p_5 i bulurken uyguladığımız yöntemin aynısını uygulayabiliriz. [2]

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$
$$q_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$$
$$q_2 = a_2 q_1 + q_0$$
$$q_3 = a_3 q_2 + q_1$$
$$q_4 = a_4 q_3 + q_2$$
$$q_5 = a_5 q_4 + q_3$$

$$\begin{aligned} q_{-1} + a_1 q_0 - q_1 &= 0 \\ q_0 + a_2 q_1 - q_2 &= 0 \\ q_1 + a_3 q_2 - q_3 &= 0 \\ q_2 + a_4 q_3 - q_4 &= 0 \\ q_3 + a_5 q_4 - q_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
-p_1 & & & & & & & & & = & a_1 \\
a_2p_1 & - & p_2 & & & & & & & = & -1 \\
p_1 & + & a_3p_2 & - & p_3 & & & & & = & 0 \\
 & & p_2 & + & a_4p_3 & - & p_4 & & & = & 0 \\
 & & & & p_3 & + & a_5p_4 & - & p_5 & = & 0
\end{array}
$$

Örnek 2.5.1.

$$\frac{205}{74} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{5}{6}}}}$$

$$c_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{2(7-2)-(7)}{1.7-2} = \frac{3}{5}$$

2.6. Sürekli Kesirler Ve Kuadratik İrrasyonel Sayılar

Şimdi sürekli kesirler ve ikinci dereceden irrasyonel sayılar arasındaki bazı ilginç ilişkileri inceleyelim. A ve $0 \neq C$ tamsayı ve $\sqrt{B}$ irrasyonel olacak şekilde B bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\frac{A+\sqrt{B}}{C}$$

biçiminde sayılar vardır. Şimdi de ilk olarak bir sayının tam kısmını nasıl bulacağımızı düşünelim. Bu kavram, kitabın geri kalan kısmını incelerken son derece kullanışlı olacaktır. Bunu anlamak için aşağıda verilen birkaç örneği inceleyelim. [2]

Tanım 2.6.1. Bir sayının tam kısmı ya kendisine eşit ya da kendisinden küçük en büyük tamsayıdır.

1. $3\frac{1}{2}$ nin tam kısmı 3 tür.

2. $6{,}75$ in tam kısmı 6 dır.

3. $\sqrt{5}$ in tam kısmı 2 dir çünkü $\sqrt{5}$, 2 ile 3 arasındadır.

4. $\sqrt{13}-1$ in tam kısmı 2 dir.

5. $\sqrt{17}+5$ in tam kısmı 9 dur.

6. $\frac{4+\sqrt{15}}{3}$ ün tam kısmı 2 dir.

7. $-3\frac{1}{4}$ ün tam kısmı -4 tür.

8.) $\frac{2-\sqrt{7}}{4}$ ün tam kısmı -1 dir.

Eğer ilk olarak bir irrasyonel sayınının tam kısmı düşünülürse bir kuadratik irrasyonel sayının tam kısmı daha hızlı bulunabilir. Bir sayının tam kısmı olan N genellikle $[N]$ ile gösterilir, örneğin $[2.07]=2$. Ancak burada bu gösterim kullanılmayacaktır.

Daha da ilerlemeden önce $\frac{C}{D+\sqrt{E}}$ şeklindeki bir kesrin paydasını rasyonelleştirme metodunu gözden geçirmek faydalı olacaktır. Rasyonelleştirme hem payı hem de paydayı paydanın eşleniği ile çarparak yapılır. Bu çarpımın sonucu paydası irrasyonel sayı içermeyen bir kesir olacaktır.

Örnek 2.6.1. $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$ kesrinde paydayı rasyonelleştirelim.

$$\frac{2}{3-\sqrt{2}} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{9-4} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{5}$$

Sürekli kesirler ile irrasyonel sayılar arasındaki ilişkiyi çalışmak, rasyonel ve irrasyonel sayılar arasındaki ilişkileri daha iyi anlaşılmasında yardımcı olabilir. Bu bölümde sadece kuadratik irrasyonellerle ilgileneceğiz. İlk olarak üç-adım yöntemi adı verilen metot kullanılarak kuadratik irrasyonellerin sürekli kesirlere nasıl genişletileceği gösterilecektir.

Şimdi üç-adım yöntemini $\sqrt{8}$ sayısı için bir sürekli kesir geliştirerek gösterelim.

Bir B pozitif tamsayısı için $\sqrt{B}$ biçimindeki $\sqrt{8}$ gibi sayılara öz kuadratik sayılar denir.

Adım 1 : $\sqrt{8}$ sayısının tam kısmı 2 dir.

$$\sqrt{8} \;=\; 2+\sqrt{8}\;-2$$

veya

$$\sqrt{8} = \; 2+(-2+\sqrt{8})$$

yazılabilir (bu adıma sayıyı ayırma adı verilir).

Adım 2 : $-2+\sqrt{8}$ sayısı $\frac{1}{\frac{1}{-\sqrt{2}+8}}$ olarak yazılır (bu adıma çevirme adı verilir).

Adım 3 : $\frac{1}{-2+\sqrt{8}}$ in paydası rasyonelleştirilir.

$$\frac{1}{-2+\sqrt{8}} = \frac{(-2-\sqrt{8}\,)}{(-2+\sqrt{8}\,)(-2-\sqrt{8})} = \frac{(-2-\sqrt{8}\,)}{4-8} = \frac{(-2-\sqrt{8}\,)}{-4} = \frac{2+\sqrt{8}}{4}$$

Şimdi $\sqrt{8} = 2+\frac{1}{\frac{2+\sqrt{8}}{4}}$

Bu üç adım tekrarlanmaya devam edilir. Üç-adım yönteminin üç adımı aşağıdaki gibidir:

(1) *ayırma* (2) *çevirme* (3) *rasyonelleştirme*.

Şimdi de $\frac{2+\sqrt{8}}{4}$ sayısına aşağıda gösterildiği gibi üç adımı uygulayalım:

Adım 1 : $\frac{2+\sqrt{8}}{4}$ ayrılarak

$$\frac{2+\sqrt{8}}{4} = 1 + \left(\frac{2+\sqrt{8}}{4} - 1\right) = 1 + \left(\frac{2+\sqrt{8}-4}{4}\right) = 1 + \left(\frac{-2+\sqrt{8}}{4}\right)$$

elde edilir.

Adım 2 : $\frac{-2+\sqrt{8}}{4}$ çevrilerek $\frac{1}{\frac{4}{-2+\sqrt{8}}}$ elde edilir.

Adım 3 : $\frac{4}{-2+\sqrt{8}}$ kesrinin paydası rasyonelleştirelerek

$$\frac{4}{-2+\sqrt{8}} = \frac{4(-2-\sqrt{8})}{(-2-\sqrt{8})(-2+\sqrt{8})} = \frac{4(-2-\sqrt{8})}{4-8} = \frac{4(-2-\sqrt{8})}{-4} = \frac{2+\sqrt{8}}{1}$$

elde edilir.

Böylece

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2+\sqrt{8}}{1}}}$$

yazılabilir.

Üç-adım yöntemi $\frac{2+\sqrt{8}}{1}$sayısı için de aşağıda gösterildiği gibi yapılır:

Adım 1 : $\frac{2+\sqrt{8}}{1}$ sayısı ayrılır.

$$\frac{2+\sqrt{8}}{1} = 4 + \frac{2+\sqrt{8}}{1} - 4 = 4 + \frac{2+\sqrt{8}-4}{1} = 4 + \frac{-2+\sqrt{8}}{1}$$

Adım 2 : $\frac{-2+\sqrt{8}}{1}$ sayısı çevrilerek $\frac{1}{\frac{1}{-2+\sqrt{8}}}$ bulunur.

Adım 3 : $\frac{1}{-2+\sqrt{8}}$ kesrinin paydasını rasyonelleştirilerek

$$\frac{1}{-2+\sqrt{8}} = \frac{2+\sqrt{8}}{4}$$

bulunur. O halde

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{2+\sqrt{8}}{4}}}}$$

yazılabilir.

Şimdi $\frac{2+\sqrt{8}}{4}$ kesrine tekrar üç-adım yöntemini uygulamalıyız ancak bundan önceki yaptığımız işlemlere bakarsak $\frac{2+\sqrt{8}}{4}$ için hali hazırda bu işlemlerin yapıldığını

görürüz ve bu kısımdan sonra 1 ve 4 terimleri ortaya çıkacaktır. Böylece bu terimlerin tekrarlandığı görülür. Yani $\sqrt{8}$ için sürekli kesir asla sonlanmaz ve

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}$$

şeklinde bir sonsuz sürekli kesir olarak ifade edilir. Şimdi bu sürekli kesir için yakınsaklık tablosunu inceleyelim:

Çizelge 2.3 Sürekli Kesirler Yardımı ile Kuadratik İrrasyonel Sayıların Yakınsaklığının Bulunması

n		0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n			2	1	4	1	4	1	4	1
r_n	0	1	2	3	14	17	82	99	478	577
s_n	1	0	1	1	5	6	29	35	169	204

5.yakınsaklık $\frac{82}{29}$ = 2,82758+

6.yakınsaklık $\frac{99}{35}$ = 2,82857+

7.yakınsaklık $\frac{478}{169}$ = 2,82840+

8.yakınsaklık $\frac{577}{204}$ = 2,82843+

Tablodan bakarak $\sqrt{8} = 2{,}828427+.$ şeklinde ifade edilebilir.

NOT:

Bir irrasyonel sayının ondalıklı ifadesi ile bir irrasyonel sayının sürekli kesir gösterimini karşılaştırmak oldukça ilginçtir. Bir irrasyonel sayının ondalıklı ifadesinde basamakların asla tekrar etmedeğini biliyoruz. Eğer bir ondalıklı sayının basamakları tekrar ederse bu durumda o sayının bir rasyonel sayıyı temsil ettiğini de biliyoruz.

2.6.1. Kuadratik İrrasyonelleri Genişletmek İçin Üç-Adım Yöntemini Kullanma

A ve C sıfırdan farklı tamsayılar ve $\sqrt{B}$ bir irrasyonel bir sayı olmak üzere genel olarak $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ tipindeki kuadratik irrasyonelleri genişletmek için de üç adım yöntemi kullanılabilir. [2]

Örnek 2.6.1.1. $\frac{1+\sqrt{35}}{2}$ irrasyonel sayısını sürekli kesre genişletmek için üç-adım yöntemini kullanalım.

(1.*adım*) (2.*adım*)

$$\frac{1+\sqrt{35}}{2} = 3 + \left(\frac{1+\sqrt{35}}{2} - 3\right) = 3 + \frac{1+\sqrt{35}-6}{2}$$

$$= 3 + \frac{-5+\sqrt{35}}{2} = 3 + \frac{1}{\frac{2}{-5+\sqrt{35}}}$$

(3.*adım*) (1.*adım*)

$$= 3 + \frac{1}{\frac{2 \quad -5-\sqrt{35}}{-5+\sqrt{35}-5-\sqrt{35}}} = 3 + \frac{1}{\frac{2(-5-\sqrt{35})}{25-35}} = 3 + \frac{1}{\frac{5+\sqrt{35}}{5}} = 3 + \frac{1}{2+(\frac{5+\sqrt{35}}{5}-2)}$$

$$= 3 + \frac{1}{2+\left(\frac{5+\sqrt{35}-10}{5}\right)} = 3 + 3 + \frac{1}{2+\left(\frac{-5+\sqrt{35}}{5}\right)} = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{-5+\sqrt{35}}}} = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5 \quad (-5-\sqrt{35})}{-5+\sqrt{35}(-5+\sqrt{35})}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5+\sqrt{35}}{2}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5+(\frac{5+\sqrt{35}}{2}-5)}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5+(\frac{-5+\sqrt{35}}{2})}}$$

2.6.2. Tekrarlayan Bir Sürekli Kesri Kuadratik İrrasyonele Dönüştürme

Bu bölümde tekrarlayan terimlere sahip bir sürekli kesri kuadratik irrasyonele dönüştürme problemini ele alacağız. [2]

Örnek 2.6.2.1. $2 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}}}}$ sürekli kesrini $\frac{A+\sqrt{B}}{C}$ biçimine dönüştürelim.

Yukarıda verilen sürekli kesri X ile tekrarlayan kısmını da Y ile gösterelim, böylece aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$X = 2 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}}}}$ ve $Y = 5 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}}}$ ise buradan $X = 2 + \frac{1}{Y}$ olur.

Y için ikinci denklem çözülerek aşağıdakiler bulunur:

$Y = 5 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{1}{Y}}} = 5 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{3Y+1}{Y}}} = 5 + \cfrac{1}{1+\frac{Y}{3Y+1}}$

$= 5 + \cfrac{1}{\frac{4Y+1}{3Y+1}} = 5 + \frac{3Y+1}{4Y+1} = \frac{23Y+6}{4Y+1}$ buradan $4Y^2 + 22Y - 6 = 0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemi $2Y^2 + 11Y - 6 = 0$ olarak yazarız. Ayrıca bu kuadratik denklemin bir kökü Y olur. Y nin pozitif olduğunu da belirtelim. Kuadratik denklemi kullanarak Y yi aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$Y = \frac{11+\sqrt{11^2-4(2)(-3)}}{2.2} = \frac{11+\sqrt{145}}{4}$ olur.

$X = 2 + \frac{1}{Y}$ denkleminde Y yi yerine yazarak

$X = 2 + \cfrac{1}{\frac{11+\sqrt{145}}{4}} = 2 + \frac{4}{11+\sqrt{145}} = 2 + \frac{4(11-\sqrt{145})}{(11+\sqrt{145})(1-\sqrt{145})}$

$= 2 + \frac{4(11-\sqrt{145})}{-36} = 2 + \frac{11-\sqrt{145}}{-9} = \frac{-7-\sqrt{145}}{-9}$olduğundan

$X = \frac{7+\sqrt{145}}{9}$ olur, yani

$$2 + \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}}}} = \frac{7+\sqrt{145}}{9}$$

olarak yazılır.

3. SÜREKLİ KESİRLERDE ÇATALLANMA

Pozitif bir α reel sayısı gözönüne alındığında α nın sürekli kesir genişlemesi $\alpha_0 = \alpha$ olmak üzere

$$a_i = \text{int}(\alpha_i)$$
$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i} \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ile birlikte negatif olmayan bir $[a_0, a_1, \cdots a_i \ \cdots]$ dizisi ile ifade edilir. Şimdi (3.1) ifadesini genelleştirerek sürekli kesirlerin genelleştirilmesiyle alakalı bir yöntem geliştireceğiz.

$\alpha_0 = \alpha$ ve $\beta_0 = \beta$ olmak üzere

$$a_i = \text{int}(\alpha_i)$$
$$b_i = \text{int}(\beta_i)$$
$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\beta_i - b_i}$$
$$\beta_{i+1} = \frac{\alpha_i - a_i}{\beta_i - b_i} \tag{3.2}$$

Rekürans bağıntısı kullanarak elde ettiğimiz bu genelleştirme bize $\{\alpha, \beta\}$ ikilisinin tamsayı dizilerinin

$\{\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\}\}$

şeklinde bir ikilisini verir. [3]

Örnek olarak $\alpha = 2^{1/3} = 1{,}2599$ ve $\beta = 2^{2/3} = 1{,}5874$ sayıları ele alındığında (3.2) denklemi kullanılarak aşağıdaki tamsayı dizileri elde edilir. [4]

$\alpha = 2^{1/3} = 1{,}2599 \qquad a_0 = 1 \qquad \beta = 2^{2/3} = 1{,}5874 \quad b_0 = 1$

$\alpha_1 = \frac{1}{\beta_0 - b_0} = \frac{1}{0{,}5874} = 1{,}7024 \qquad a_1 = 1$

$\beta_1 = \frac{\alpha_0 - a_0}{\beta_0 - b_0} = \frac{0{,}2599}{0{,}5874} = 0{,}4424 \qquad b_1 = 0$

$\alpha_2 = \frac{1}{\beta_1 - b_1} = \frac{1}{0{,}4424} = 2{,}2603 \qquad a_2 = 2$

$\beta_2 = \frac{\alpha_1 - a_1}{\beta_1 - b_1} = \frac{0{,}7024}{0{,}4424} = 1{,}5877 \qquad b_2 = 1$

$\alpha_3 = \frac{1}{\beta_2 - b_2} = \frac{1}{0{,}5877} = 1{,}7015 \qquad a_3 = 1$

$\beta_3 = \frac{\alpha_2 - a_2}{\beta_2 - b_2} = \frac{0{,}2603}{0{,}5877} = 0{,}4429 \qquad b_3 = 0$

$\alpha_4 = \frac{1}{\beta_3 - b_3} = \frac{1}{0{,}4429} = 2{,}2578 \qquad a_4 = 2$

$\beta_4 = \frac{\alpha_3 - a_3}{\beta_3 - b_3} = \frac{0{,}7015}{0{,}4429} = 1{,}5838 \qquad b_4 = 1$

$\alpha_5 = \frac{1}{\beta_4 - b_4} = \frac{1}{0{,}5838} = 0{,}7129 \qquad a_5 = 1$

$\beta_5 = \frac{\alpha_4 - a_4}{\beta_4 - b_4} = \frac{0{,}2578}{0{,}5838} = 0{,}4415 \qquad b_5 = 0$

$\alpha_6 = \frac{1}{\beta_5 - b_5} = \frac{1}{0{,}4415} = 2{,}2650 \qquad a_6 = 2$

$\beta_6 = \frac{\alpha_5 - a_5}{\beta_5 - b_5} = \frac{0{,}7129}{0{,}4415} = 0{,}6147 \qquad b_6 = 1$

$\alpha_7 = \frac{1}{\beta_6 - b_6} = \frac{1}{0{,}6147} = 1{,}6196 \qquad a_7 = 1$

$\beta_7 = \frac{\alpha_6 - a_6}{\beta_6 - b_6} = \frac{0{,}2650}{0{,}6147} = 0{,}4311 \qquad b_7 = 0$

$\alpha_8 = \frac{1}{\beta_7 - b_7} = \frac{1}{0{,}4311} = 2{,}3196 \qquad a_8 = 2$

$\beta_8 = \frac{\alpha_7 - a_7}{\beta_7 - b_7} = \frac{0{,}6196}{0{,}4311} = 0{,}4311 \qquad b_8 = 1$

$\alpha_9 = \frac{1}{\beta_8 - b_8} = \frac{1}{0{,}4372} = 2{,}2872 \qquad a_9 = 2$

$\beta_9 = \frac{\alpha_8 - a_8}{\beta_8 - b_8} = \frac{0{,}3196}{0{,}4372} = 0{,}7310 \qquad b_9 = 0$

$\{a_i\} = \{\ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 2\ \ 1 \cdots \}$

$= \{1\ (1\ \ 2)\ \}$

$\{b_i\} = \{\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0 \cdots \}$

$= \{\ (1\ 0)\ \}$

Bu dizilerin periyodu 2 dir. Bu dizilerin basitliği aşağıda gösterdiğimiz sürekli kesirlerin klasik metotla elde edilen sürekli kesir gösterimiyle son derece tezat içindedir: [5]

$2^{1/3}$ = [1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 153, 1, 4, 534, 1, 1, 5, 1, 1, 121, 1, 2, 2, 4, 10, 3, 2, 2, 41, 1, 1, 1, 3, 7, 2, 2, 9, 4, 1, 3, 7, 6, 1, 1, 2, 2, 9, 3, 1, 1, 69, 4, 4, 5, 12, 1, 1, 5, 15, 1, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 89, 1, 22, 186, 6, 2, 3, 1, 3, 2, 1, 1, 5, 1, 3, 1, 8, 9, 1, 26, 1, 7, 1, 18, 6, 1, 372, 3, 13, 1, 1, 14, 2, 2, 2, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 9, 1, 6, 1, 38, 1, 2, 25, 1, 4, 2, 44, 1, 22, 2, 12, 11, 1, 1, 49, 2, ⋯]

$2^{2/3}$ = [1, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 1, 30, 1, 4, 1, 2, 9, 6, 4, 1, 1, 2, 7, 2, 3, 2, 1, 6, 1, 1, 1, 25, 1, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 266, 1, 3, 2, 1, 3, 60, 1, 5, 1, 8, 5, 6, 1, 4, 20, 1, 4, 1, 1, 14, 1, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 7, 3, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 4, 1, 1, 1, 3, 1, 34, 8, 2, 10, 6, 3, 1, 2, 31, 1, 1, 1, 4, 3, 44, 1, 45, 93, 12, 1, 7, 1, 1, 5, 12, 1, 1, 2, 4, 19, 1, 12, 1, 16, 1, 8, 1, 1, ⋯]

$\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ tamsayı dizileri kullanılarak α ve β sayıları tekrar elde edilebilir. (3.2) den dolayı

$\beta_{i+1} = \frac{\alpha_i - a_i}{\beta_i - b_i}$ $\qquad$ $\alpha_{i+1} = \frac{1}{\beta_i - b_i}$

$(\alpha_i - a_i) = \beta_{i+1}(\beta_i - b_i)$ $\qquad$ ve $\qquad$ $\beta_i - b_i = \frac{1}{\alpha_{i+1}}$

$(\alpha_i - a_i) = \beta_{i+1}\frac{1}{\alpha_{i+1}}$ $\qquad$ $\beta_i = b_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$

$\alpha_i = a_i + \beta_{i+1}\frac{1}{\alpha_{i+1}}$

olmak üzere

$$\alpha_i = a_i + \frac{\beta_{i+1}}{\alpha_{i+1}}$$

$$\beta_i = b_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \qquad (3.3)$$

ifadeleri elde edilir. Buradan aşağıdaki gösterimi tanımlarız.

$$\alpha_n = [a_n, b_n; a_{n+1}, b_{n+1}; a_{n+2}, b_{n+2}; \cdots]$$

ve

$$\beta_n = [b_n; a_{n+1}, b_{n+1}; a_{n+2}, b_{n+2}; a_{n+3}, \cdots]$$

Burada (3.3) denklemini kullanarak

$$[a_i, b_i; a_{i+1}, b_{i+1}; a_{i+2}, b_{i+2}; \cdots] = a_i + \frac{[b_{i+1}; a_{i+2}, b_{i+2}; a_{i+3}, b_{i+3}; \cdots]}{[a_{i+1}, b_{i+1}; a_{i+2}, b_{i+2}; a_{i+3}, b_{i+3}; \cdots]}$$

$$[a_i, b_i; a_{i+1}, b_{i+1}; a_{i+2}, b_{i+2}; \cdots] = b_i + \frac{1}{[a_{i+1}, b_{i+1}; a_{i+2}, b_{i+2}; a_{i+3}, b_{i+3}; \cdots]}$$

Buradan

$$\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{[b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \cdots]}{[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; \cdots]}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{[a_2, b_2; a_3, b_3; \cdots]}} \Bigg/ \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{[a_2, b_2; a_3, b_3; \cdots]}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{[a_4, b_4; a_5, b_5; \cdots]}}} \Bigg/ \cfrac{a_2 + \cfrac{1}{[b_4; a_5, b_5; \cdots]}}{a_3 + \cfrac{1}{[a_4, b_4; a_5, b_5; \cdots]}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{[a_4, b_4; a_5, b_5; \cdots]}}} \Bigg/ \cfrac{a_2 + \cfrac{1}{[b_4; a_5, b_5; \cdots]}}{a_3 + \cfrac{1}{[a_4, b_4; a_5, b_5; \cdots]}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{[b_4; a_5, b_5; \cdots]}}} \Bigg/ \cfrac{a_3 + \cfrac{1}{[a_4, b_4; a_5, b_5; \cdots]}}{a_1 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{[a_4, b_4; a_5, b_5; \cdots]}}} \Bigg/ \cfrac{a_2 + \cfrac{1}{[b_4; a_5, b_5; \cdots]}}{a_3 + \cfrac{1}{[a_4, b_4; a_5, b_5; \cdots]}}$$

Verilen $\{a_i\}$ ve $\{b_i\}$ tamsayı dizilerini çatallanma kuralına göre aşağıdaki gibi yazabiliriz.

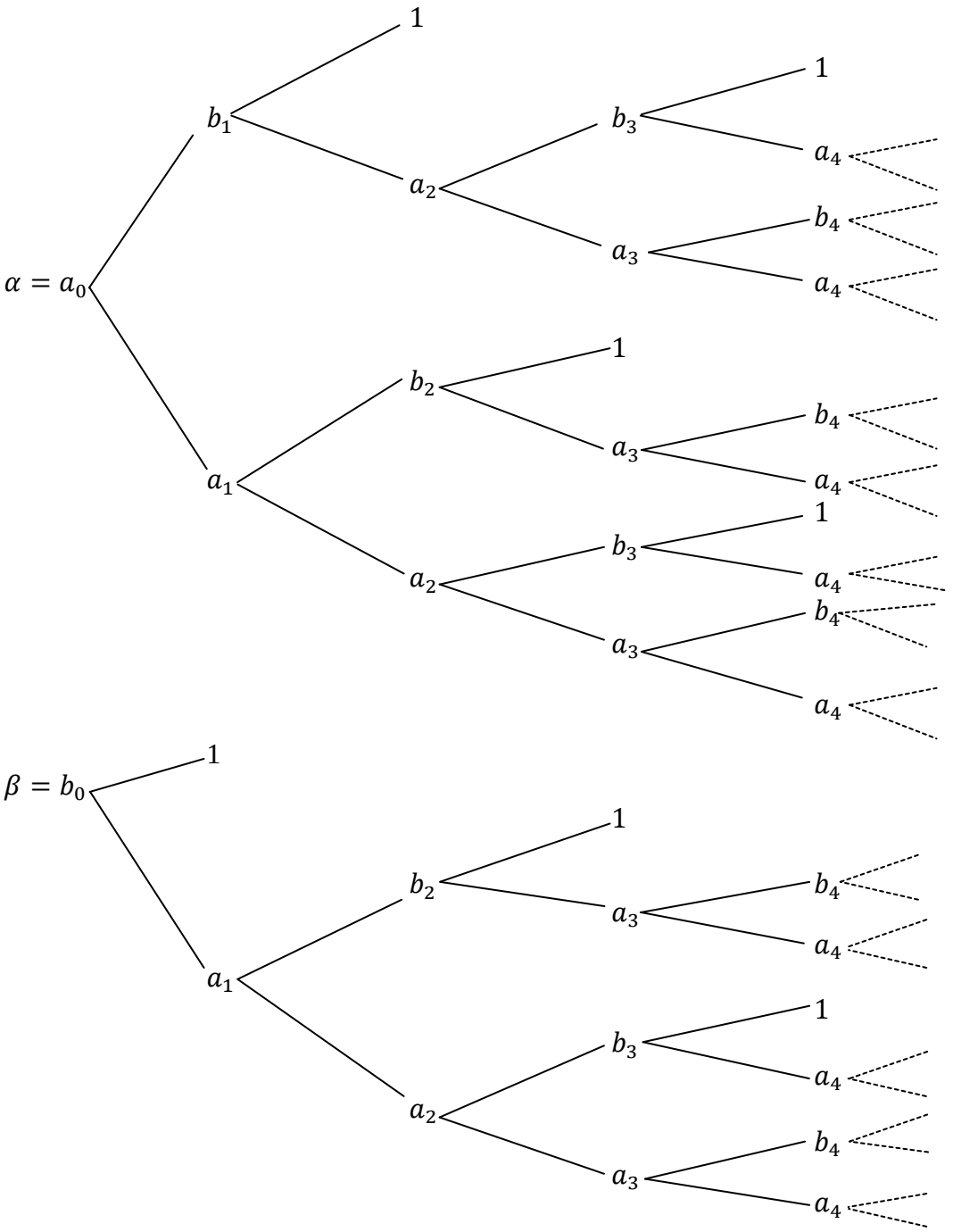
$$a_i \longrightarrow a_i \begin{cases} b_{i+1} \\ a_{i+1} \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad b_i \longrightarrow b_i \begin{cases} 1 \\ a_{i+1} \end{cases}$$

buna göre

$$p \begin{matrix} q \\ \\ r \end{matrix} \quad = \quad p + \cfrac{q}{r}$$

α sayısının ilk tamsayı kısmı $a_0$ve β sayısının da ilk tamsayı kısmı b_0 olmak üzere;

Çizelge 3.1 (α, β) Reel Sayı İkilisinin Sürekli Kesir Çatallanması



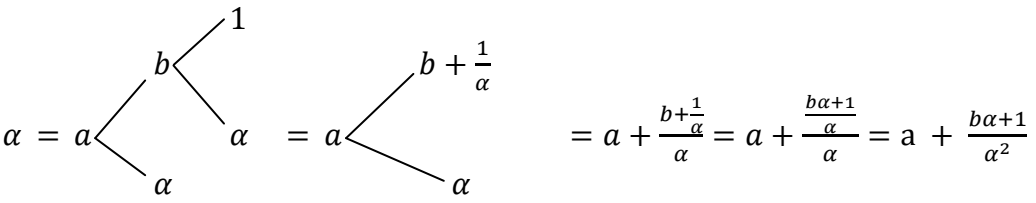
yapısı elde edilir. Bu yapının bir Fibonacci Ağaç yapısı olduğu açıktır.

3.1. Periyodu 1 Olan Çatallı Sürekli Kesirler

En basit çatallanan sürekli kesirler periyodu 1 olan sürekli kesirlerdir. $\{a_i\}$ tamsayı dizisinin tamsayı sabiti "a" sonsuza kadar tekrar eder. Ayrıca $\{b_i\}$ tamsayı dizisinin tamsayı sabiti olan "b" de sonsuza kadar tekrar eder. α ve β sabit dizilerin sayı çiftlerini ifade etsin. Burada (3.3) eşitliğini kullanarak [6]

$$\alpha = a + \frac{\beta}{\alpha}$$
$$\beta = b + \frac{1}{\alpha} \qquad (3.4)$$

elde edilir.



$\alpha = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + 1}{\alpha^2}$ olduğundan

$$\alpha^3 = a\alpha^2 + b\alpha + 1 \qquad (3.5)$$

Kübik denklemi elde edilir. Benzer yöntemle

$$\beta^3 = 2b\beta^2 - (a + b^2)\beta + ab + 1 \qquad (3.6)$$

denklemi bulunur.

Örnek olarak bu denklemleri iki farklı koşulda inceleyelim:

i) Eğer $a = b = 1$ alırsak α Tribonacci sayısıdır. Tribonacci sayısı;

$t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1$ başlangıç şartları ve $n > 0$ olmak üzere

$$t_{n+3} = t_n + t_{n-1} + t_{n+2}$$

şeklindedir. Bu bağıntı çok iyi bildiğimiz Fibonacci dizisinin bir genelleştirmesidir.

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

limiti $\alpha^3 = a\alpha^2 + b\alpha + 1$ denkleminin bir reel çözümüdür. Bu da $1{,}83928675521416\cdots$ sayısına eşittir. [7]

Bu sayı basit sürekli kesir gösterimi ile $[1, 1, 5, 4, 2, 305, 1, 8, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 1, \cdots]$ şeklinde gösterilir. Bu dizi altın oranın basit

sürekli kesir gösterimi ile uyumlu değildir. Tribonacci sayısı farkedilebilir bir düzende ilerlememektedir. Gerçekten tribonacci sayılar altın oranın bir genelleştirmesidir fakat basit sürekli kesir gösterimi bu ifadeyi sağlamaz. Çatallanan Sürekli Kesirler Tribonacci sayılarının gösteriminin altın oranın bir genelleştirmesi olduğunu göstermek için iyi bir yöntemdir. [6]

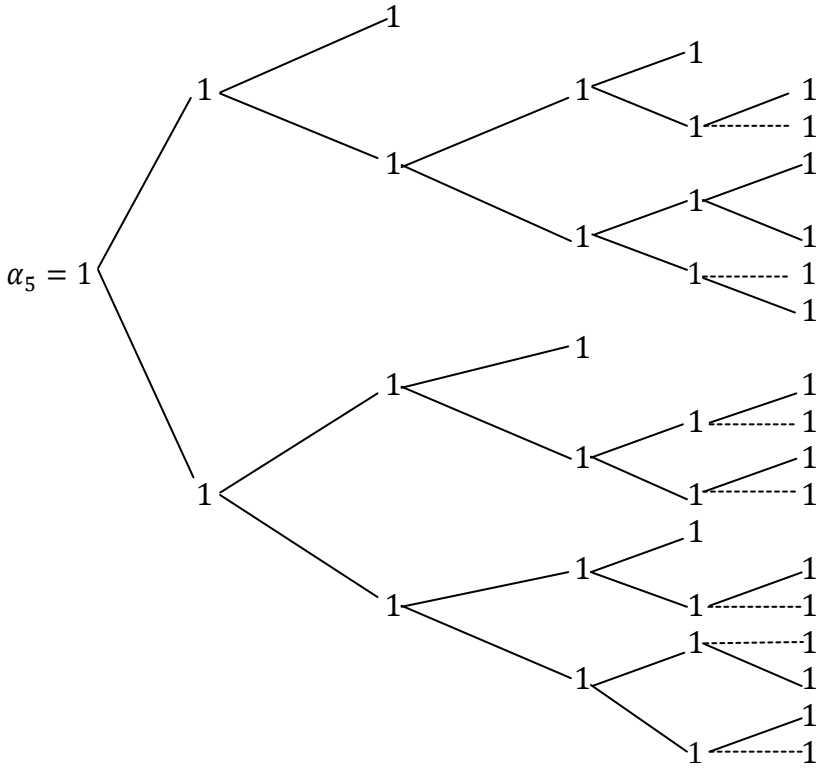
$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{[1,1;\ 1,1;\ \cdots]}}} \Bigg/ \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{[1;\ 1,1;\ \cdots]}} \Bigg/ \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{[1,1;\ 1,1;\ \cdots]}} \Bigg/ \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{[1,1;\ 1,1;\ \cdots]}} \Bigg/ \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{[1;\ 1,1;\ \cdots]}} \Bigg/ \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{[1,1;\ 1,1;\ \ldots]}}$$

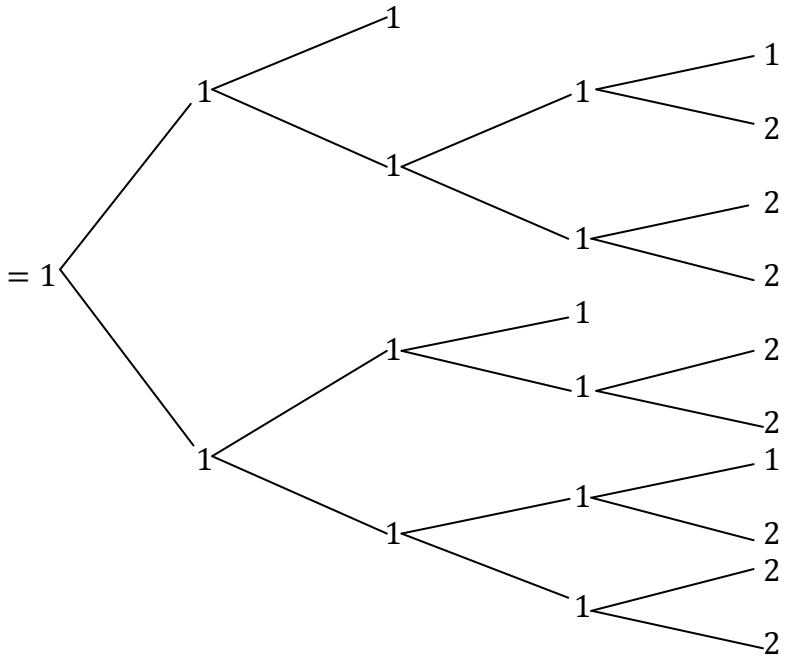
$= 1,,83928675521416\cdots$

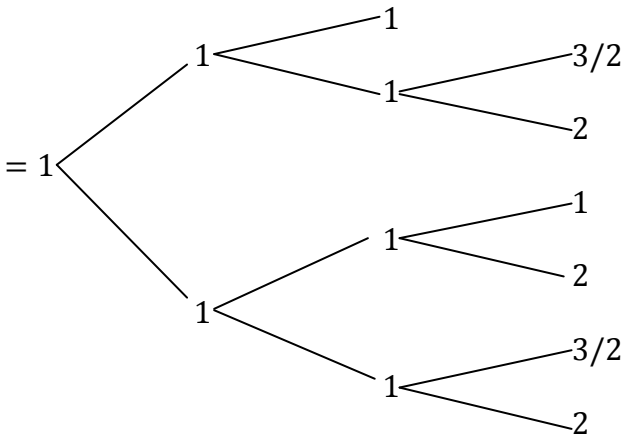
Bu ise $\alpha^3 = a\alpha^2 + b\alpha + 1$ denkleminin bir çözümüdür. Tribonacci sabitinin çatallanmış sürekli kesir gösterimi, altın oran sabitinin basit sürekli kesir açılımının bir genelleştirmesi aşağıda verilmiştir. $\tau = 1{,}6180339$

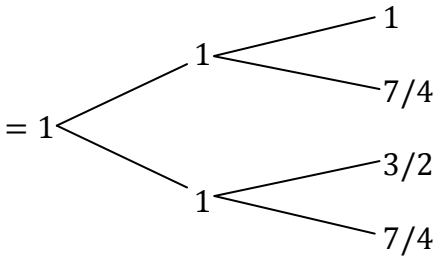
$$\tau = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

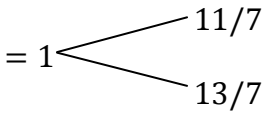
α sayısının ilk 5 yakınsaklığı aşağıdaki gibidir.











$= \ 24/13 \ = \ 1{,}846\cdots$

ii) $a = 1, b = 0$ alırsak α sayısı $x^3 - x^2 - 1$ denkleminin bir çözümü olan olan $\alpha = 1{,}4655712318\cdots$ Moore sayısına eşittir. [3]

3.2. İleri Genelleştirme

Bu genelleştirmeyi daha yüksek dereceden çatatallanan sürekli kesirler için göstermek oldukça kolaydır. m adet diziden oluşan $\{\alpha^{(1)},\ \alpha^{(2)},\cdots,\alpha^{(m)}\}$ dizisinin $\left\{\left\{a_0^{(1)},\ a_1^{(1)},\cdots,\ a_i^{(1)},\cdots\right\},\left\{a_0^{(2)},\ a_1^{(2)},\cdots,\ a_i^{(2)},\cdots\right\},\cdots,\right.$
$\left.\left\{a_0^{(k)},\ a_1^{(k)},\cdots,\ a_i^{(k)},\cdots\right\},\cdots,\left\{a_0^{(m)},\ a_1^{(m)},\cdots,\ a_i^{(m)},\cdots\right\}\right\}$ tamsayı dizilerini $k\ =\ 1,2,\ldots.m-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_i^{(k)} &= int(\alpha_i^{(k)}) \\ \alpha_{i+1}^{(1)} &= \frac{1}{\alpha_i^{(m)}-a_i^{(m)}} \\ \alpha_{i+1}^{(k+1)} &= \frac{\alpha_i^{(k)}-a_i^{(k)}}{\alpha_i^{(m)}-a_i^{(m)}} \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Rekürans bağıntısı ile elde edebiliriz. [8]

Örnek olarak $\alpha^{(1)} = 2^{1/4} =\ 1{,}1892$, $\alpha^{(2)} = 2^{1/2} = 1{,}4142$,

$\alpha^{(3)} = 2^{3/4} = 1{,}6817$ sayıları için (3.7) uygulanırsa

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{1}{\alpha_0^{(3)}-a_0^{(3)}} = \frac{1}{0{,}6817} = 1{,}4669 \qquad a_1^{(1)} = 1$$

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{\alpha_0^{(1)}-a_0^{(1)}}{\alpha_0^{(3)}-a_0^{(3)}} = \frac{0{,}1892}{0{,}6817} = 0{,}2775 \qquad a_1^{(2)} = 0$$

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{\alpha_0^{(2)}-a_0^{(2)}}{\alpha_0^{(3)}-a_0^{(3)}} = \frac{0{,}4142}{0{,}6817} = 0{,}6075 \qquad a_1^{(3)} = 0$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{\alpha_1^{(3)}-a_1^{(3)}} = \frac{1}{0{,}6075} = 1{,}6460 \qquad a_2^{(1)} = 1$$

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{\alpha_1^{(1)}-a_1^{(1)}}{\alpha_1^{(3)}-a_1^{(3)}} = \frac{0{,}4669}{0{,}6075} = 0{,}7685 \qquad a_2^{(2)} = 0$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{\alpha_1^{(2)}-a_1^{(2)}}{\alpha_1^{(3)}-a_1^{(3)}} = \frac{0{,}2775}{0{,}6075} = 0{,}4567 \qquad a_2^{(3)} = 0$$

$$\alpha_3^{(1)} = \frac{1}{\alpha_2^{(3)}-a_2^{(3)}} = \frac{1}{0{,}4567} = 2{,}1896 \qquad a_3^{(1)} = 2$$

$$\alpha_3^{(2)} = \frac{\alpha_2^{(1)}-a_2^{(1)}}{\alpha_2^{(3)}-a_2^{(3)}} = \frac{0{,}6460}{0{,}4597} = 1{,}4154 \qquad a_3^{(2)} = 1$$

$$\alpha_3^{(3)} = \frac{\alpha_2^{(2)}-a_2^{(2)}}{\alpha_2^{(3)}-a_2^{(3)}} = \frac{0{,}7685}{0{,}4597} = 1{,}6838 \qquad a_3^{(3)} = 1$$

$$\alpha_4^{(1)} = \frac{1}{\alpha_3^{(3)} - a_3^{(3)}} = \frac{1}{0{,}6838} = 1{,}4624 \qquad a_4^{(1)} = 2$$

$$\alpha_4^{(2)} = \frac{\alpha_3^{(1)} - a_3^{(1)}}{\alpha_3^{(3)} - a_3^{(3)}} = \frac{0{,}1896}{0{,}6838} = 0{,}2772 \qquad a_4^{(2)} = 0$$

$$\alpha_4^{(3)} = \frac{\alpha_3^{(2)} - a_3^{(2)}}{\alpha_3^{(3)} - a_3^{(3)}} = \frac{0{,}4154}{0{,}6838} = 0{,}6074 \qquad a_4^{(3)} = 0$$

$$\alpha_5^{(1)} = \frac{1}{\alpha_4^{(3)} - a_4^{(3)}} = \frac{1}{0{,}6074} = 1{,}6463 \qquad a_5^{(1)} = 1$$

$$\alpha_5^{(2)} = \frac{\alpha_4^{(1)} - a_4^{(1)}}{\alpha_4^{(3)} - a_4^{(3)}} = \frac{0{,}4624}{0{,}6074} = 0{,}7612 \qquad a_5^{(2)} = 0$$

$$\alpha_5^{(3)} = \frac{\alpha_4^{(2)} - a_4^{(2)}}{\alpha_4^{(3)} - a_4^{(3)}} = \frac{0{,}2772}{0{,}6074} = 0{,}4563 \qquad a_5^{(3)} = 0$$

$$\alpha_6^{(1)} = \frac{1}{\alpha_5^{(3)} - a_5^{(3)}} = \frac{1}{0{,}4563} = 2{,}1915 \qquad a_6^{(1)} = 2$$

$$\alpha_6^{(2)} = \frac{\alpha_5^{(1)} - a_5^{(1)}}{\alpha_5^{(3)} - a_5^{(3)}} = \frac{0{,}6463}{0{,}4563} = 1{,}4163 \qquad a_6^{(2)} = 1$$

$$\alpha_6^{(3)} = \frac{\alpha_5^{(2)} - a_5^{(2)}}{\alpha_5^{(3)} - a_5^{(3)}} = \frac{0{,}7612}{0{,}4563} = 1{,}6682 \qquad a_6^{(3)} = 1$$

$$\alpha_7^{(1)} = \frac{1}{\alpha_6^{(3)} - a_6^{(3)}} = \frac{1}{0{,}6682} = 1{,}4965 \qquad a_7^{(1)} = 1$$

$$\alpha_7^{(2)} = \frac{\alpha_6^{(1)} - a_6^{(1)}}{\alpha_6^{(3)} - a_6^{(3)}} = \frac{0{,}1915}{0{,}6682} = 0{,}2865 \qquad a_7^{(2)} = 0$$

$$\alpha_7^{(3)} = \frac{\alpha_6^{(2)} - a_6^{(2)}}{\alpha_6^{(3)} - a_6^{(3)}} = \frac{0{,}4163}{0{,}6682} = 0{,}6230 \qquad a_7^{(3)} = 0$$

$$\alpha_8^{(1)} = \frac{1}{\alpha_7^{(3)} - a_7^{(3)}} = \frac{1}{0{,}6230} = 1{,}6051 \qquad a_8^{(1)} = 1$$

$$\alpha_8^{(2)} = \frac{\alpha_7^{(1)} - a_7^{(1)}}{\alpha_7^{(3)} - a_7^{(3)}} = \frac{0{,}4965}{0{,}6230} = 0{,}7969 \qquad a_8^{(2)} = 0$$

$$\alpha_8^{(3)} = \frac{\alpha_7^{(2)} - a_7^{(2)}}{\alpha_7^{(3)} - a_7^{(3)}} = \frac{0{,}2865}{0{,}6230} = 0{,}4598 \qquad a_8^{(3)} = 0$$

Buradan

$$\left\{a_i^{(1)}\right\} = \{1{,}1{,}2{,}1{,}1{,}2{,}1{,}1{,}2{,}1{,}1{,}2{,}\cdots\} = \{1\ (1\ 2)\}$$

$$\left\{a_i^{(2)}\right\} = \{\,1{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0\ \ ,\cdots\} = \{\,(1\ \ 0\ 0)\,\}$$

$$\left\{a_i^{(3)}\right\} = \{\,1{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0\ \ 0{,},\cdots\} = \ \ \{\,(1\ \ 0\ 0)\,\}$$

elde edilir.

Ayrıca $\alpha^{(k)}$ sayısı m adet tamsayı dizisiyle birlikte $k = 1{,}2{,}\cdots{,}m-1$ olmak üzere

$$\alpha_i^{(k)} = a_i^{(k)} + \frac{\alpha^{k+1}}{\alpha_{i+1}^{(k)}}$$

$$\alpha_i^{(m)} = a_i^{(m)} + \frac{1}{\alpha_{i+1}^{(1)}} \qquad (3.8)$$

Rekürans bağıntısı ile elde edilir.

Şimdi birim dizileri seçerek bir $\alpha^{(k)}$ sayısını bulalım. Yani

$\{a^{(1)}\} = \{ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \cdots \}$

$\{a^{(2)}\} = \{ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \cdots \}$

$\{a^{(3)}\} = \{ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \cdots \}$

olsun. Burada

$\alpha^{(1)} = a^{(1)} + \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}}$ $\qquad$ $\alpha^{(2)} = a^{(2)} + \frac{\alpha^{(3)}}{\alpha^{(1)}}$ $\qquad$ $\alpha^{(3)} = a^{(3)} + \frac{1}{\alpha^{(1)}}$

Burada $\alpha^{(1)}$ denklemine önce $\alpha^{(2)}$ daha sonrada $\alpha^{(3)}$ denklemlerini yazarsak;

$$\alpha^{(1)} = a^{(1)} + \frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}} = a^{(1)} + \frac{a^{(2)} + \frac{\alpha^{(3)}}{\alpha^{(1)}}}{\alpha^{(1)}} = a^{(1)} + \frac{\frac{a^{(2)}\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}}{\alpha^{(1)}}}{\alpha^{(1)}} = a^{(1)} + \frac{a^{(2)}\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}}{(\alpha^{(1)})^2}$$

$$= \frac{a^{(1)}(\alpha^{(1)})^2 + a^{(2)}\alpha^{(1)} + \alpha^{(3)}}{(\alpha^{(1)})^2} = \frac{a^{(1)}(\alpha^{(1)})^2 + a^{(2)}\alpha^{(1)} + a^{(3)} + \frac{1}{\alpha^{(1)}}}{(\alpha^{(1)})^2} = \frac{a^{(1)}(\alpha^{(1)})^3 + a^{(2)}(\alpha^{(1)})^2 + a^{(3)}\alpha^{(1)} + 1}{(\alpha^{(1)})^3}$$

$$= (\alpha^{(1)})^4 = a^{(1)}(\alpha^{(1)})^3 + a^{(2)}(\alpha^{(1)})^2 + a^{(3)}\alpha^{(1)} + 1$$

$a^{(1)} = 1$ $\quad$ $a^{(2)} = 1$ $\quad$ ve $\quad$ $a^{(3)} = 1$ seçtiğimizden

$$(\alpha^{(1)})^4 = (\alpha^{(1)})^3 + (\alpha^{(1)})^2 + \alpha^{(1)} + 1$$

elde ederiz buda bize

$x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$ denkleminin bir çözümü olan Tetranacci sayısını verir.

3.3. Çatallanan Sürekli Kesir Teorisinin Formal Gelişimi

Tanım 3.3.1. Pozitif α, β reel sayılarının $\{\alpha, \beta\}$ sıralı ikilisini gözönüne alalım (3.2) denklemindeki çatallanmış sürekli kesir algoritması tarafından elde edilen $\{\alpha, \beta\}$ sıralı ikilisinin $\{\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\}\}$ tamsayı dizisi $\{\alpha, \beta\}$ nın çatallanmış sürekli kesir genişlemesi olarak adlandırılır. Bu algoritma $i = n$ durumunu tanımlamaz. Eğer $i = n$ olursa $\{\alpha, \beta\}$ ikilisinin çatallanmış sürekli kesir genişlemesi sonludur diyebiliriz. Bu da bize a_i ve b_i ler birer tamsayı α_n reel sayı olmak üzere $\{\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots, b_n\}\}$ sonlu dizisini verir. [6]

Lemma 3.3.1. Eğer $\{\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\}\}$ dizisi $\{\alpha, \beta\}$ sıralı ikilisinin çatallanmış sürekli kesir genişlemesi ise her $i \geq 1$ için $1 \leq a_i \geq b_i$ ve eğer $n \geq 1$ için $a_n = b_n$ ise buradan $b_{n+1} \neq 0$ olur. [6]

İspat $\alpha_0 = \alpha$ ve $\beta_0 = \beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_i &= int(\alpha_i) \\ b_i &= int(\beta_i) \\ \alpha_{i+1} &= \frac{1}{\beta_i - b_i} \\ \beta_{i+1} &= \frac{\alpha_i - a_i}{\beta_i - b_i}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$i \geq 1$ için $\alpha_{i+1} > 1$ (3.10)

olur burada i yerine $i - 1$ yazarsak,

her $i \geq 1$ için $a_i = \text{int}(\alpha_i) \geq 1$ (3.11)

elde ederiz.

Hatta her $i \geq 1$ için $\frac{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}} = \frac{1}{\alpha_i - a_i} > 1$ (3.12)

olduğundan $i \geq 1$ için $\alpha_i \geq \beta_i$ yazabiliriz. (3.13)

Bundan dolayı her $i \geq 1$ için

$\text{int}(\alpha_i) \geq \text{int}(\beta_i)$ yani $a_i \geq b_i$ elde edilir. (3.14)

$n \geq 1$ için eğer $a_n = b_n$ ise (3.4) denkleminden dolayı

$\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n - a_n}{\beta_n - b_n} = \frac{\alpha_n - a_n}{\beta_n - a_n} > 1$

ve (3.8) denkleminden dolayı

$\alpha_n > \beta_n$ olur.

bu ifadenin her iki tarafından a_n çıkarırsak

$(\alpha_n - a_n) > (\beta_n - b_n)$

elde ederiz ayrıca $a_n = b_n$ olduğundan

$\frac{\alpha_n - a_n}{\beta_n - b_n} > 1$ Yazılabilir. Böylece

$\beta_{n+1} > 1$ olur.

Buradan $b_{n+1} = \text{int}(\beta_{n+1})$ olduğundan $b_{n+1} \neq 0$ olduğunu söyleriz.

Lemma 3.3.2. Eğer α ve β pozitif rasyonel sayılar ise $\{\alpha, \beta\}$ sıralı ikilisinin çatallanmış sürekli kesir genişlemesi sonludur. [6]

İspat. α ve β pozitif rasyonel sayılar olduğu için her i için α_i, β_i sayılarıda rasyoneldir. Bundan dolayı

$$\alpha_i = \frac{u_i}{w_i} \text{ ve } \beta_i = \frac{v_i}{w_i} \tag{3.15}$$

olacak şekilde u_i, v_i, w_i tamsayıları bulabiliriz. Hatta $i \geq 1$, için $1 \leq \alpha_i \geq \beta_i$ olduğunu biliyoruz bundan dolayı

$1 < \frac{u_i}{w_i} > \frac{v_i}{w_i}$

yazabiliriz. Buradan

her $i \geq 1$

$$w_i < u_i > v_i \tag{3.16}$$

buradan, (3.4) denkleminden faydalanarak

$$\frac{u_{i+1}}{w_{i+1}} = \alpha_{i+1} = \frac{1}{\beta_i - b_i} = \frac{1}{\frac{v_i}{w_i} - b_i} = \frac{w_i}{v_i - b_i w_i} \tag{3.17}$$

$$\frac{v_{i+1}}{w_{i+1}} = \beta_{i+1} = \frac{\alpha_i - a_i}{\beta_i - b_i} = \frac{\frac{u_i}{w_i} - a_i}{\frac{v_i}{w_i} - b_i} = \frac{u_i - a_i w_i}{v_i - b_i w_i}$$

yazabiliriz ve

$$u_{i+1} = w_i,\ v_{i+1} = u_i - a_i w_i,\ w_{i+1} = v_i - b_i w_i \tag{3.18}$$

olacak şekilde u_{i+1}, v_{i+1} ve w_{i+1} sayıları elde edilir. Burada $u_i = w_{i+1}$ olduğunu görebiliriz. O halde buradan bütün i ler için $w_{i+1} < w_i$ olduğu açıktır. Bundan dolayı w_i doğal sayıların azalan bir dizisidir ve $w_{n+1} = 0$ olur. Ayrıca burada

$$w_{n+1} = v_n - b_n w_n \text{ ve } w_{n+1} = 0$$

olduğundan

$$v_n = b_n w_n$$

$$\beta_n = \frac{v_n}{w_n} = b_n$$

olacak şekilde b_n tamsayısı elde edilir. Bu da bize çatallanmış sürekli kesir algoritmasının sonlu olduğunu gösterir.

Tanım 3.3.2. $[\{a_0, a_1, \dots\ a_n, \alpha_{n+1}\}, \{b_0, b_1, \dots b_n, \beta_{n+1}\}]$ ile gösterilen ve

$$[\{\alpha_0\}, \{\beta_0\}] = (\alpha_0, \beta_0) \tag{3.19}$$

sonlanma koşulu ile birlikte

$$[\{a_0, a_1, \dots\ a_n, \alpha_{n+1}\}, \{b_0, b_1, \dots, b_n, \beta_{n+1}\}]$$

$$= \left[\left\{a_0, a_1, \dots\ a_{n-1}, a_n + \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right\}, \left\{b_0, b_1, \dots b_{n-1}, b_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right\}\right] \tag{3.20}$$

yineleme bağıntısıyla elde edilen a_i ve b_i negatif olmayan tamsayılar, α_{n+1} ve β_{n+1} reel sayılar olmak üzere $[\{a_0, a_1, \dots\ a_n, \alpha_{n+1}\}, \{b_0, b_1, \dots b_n, \beta_{n+1}\}]$ sıralı ikili dizisinin Fibonacci ağaç toplamı $(\alpha, \beta) = (\alpha_0, \beta_0)$ olarak tanımlanır. [6]

Lemma 3.3.3. Eğer

$$[\{a_0, a_1, \dots\ a_n, \alpha_{n+1}\}, \{b_0, b_1, \dots b_n, \beta_{n+1}\}]$$

$$= [\{a_0, a_1, \dots\ a_n, \alpha'_{n+1}\}, \{b_0, b_1, \dots, b_n, \beta'_{n+1}\}]$$

ise buradan

$$\alpha'_{n+1} = \alpha_{n+1} \text{ve } \beta'_{n+1} = \beta_{n+1}$$

dir. [6]

İspat. Bu Lemmanın ispatını tümevarım metodu ile yapalım.

İlk olarak $n = 0$ için doğruluğunu kontrol edelim

$[\{a_0, \alpha_1\}, \{b_0, \beta_1\}] = [\{a_0, \alpha'_1\}, \{b_0, \beta'_1\}]$ sıralı ikilileri

$$a_0 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} = a_0 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \tag{3.21}$$

$$b_0 + \frac{1}{\alpha_1} = b_0 + \frac{1}{\alpha'_1} \tag{3.22}$$

olarak ifade ederiz. Burada (3.22) denkleminden $\alpha'_1 = \alpha_1$ olduğu açık olarak görülür. (3.22) denklemini göz önünde bulundurarak (3.21) denkleminden de $\beta'_1 = \beta_1$ olduğu açıkça görülür.

her $n = 0, 1, \cdots, k-1$ tamsayıları için

$$[\{a_0, a_1, \cdots\ a_{k-1}, \alpha_k\}, \{b_0, b_1, \cdots b_{k-1}, \beta_k\}]$$

$= [\{a_0, a_1, \cdots\ a_{k-1}, \alpha'_k\}, \{b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}, \beta'_k\}]$

denkleminin doğru olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\alpha'_k = \alpha_k \text{ ve } \beta'_k = \beta_k$$

olduğunu görürüz. Şimdi $n = k$ için Lemmanın doğru olup olmadığını inceleyelim.

Eğer

$[\{a_0, a_1, \cdots\ a_k, \alpha_{k+1}\}, \{b_0, b_1, \cdots b_k, \beta_{k+1}\}]$

$= [\{a_0, a_1, \cdots\ a_k, \alpha'_{k+1}\}, \{b_0, b_1, \cdots, b_k, \beta'_{k+1}\}]$

ise

$$\left[\left\{a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k + \frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}}\right\}, \left\{b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}, b_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k + \frac{\beta'_{k+1}}{\alpha'_{k+1}}\right\}, \left\{b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}, b_k + \frac{1}{\alpha'_{k+1}}\right\}\right] \quad (3.23)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.18) denkleminden faydalanarak

$$a_k + \frac{\beta_{k+1}}{\alpha_{k+1}} = a_k + \frac{\beta'_{k+1}}{\alpha'_{k+1}} \quad (3.24)$$

ve

$$b_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = b_k + \frac{1}{\alpha'_{k+1}} \quad (3.25)$$

eşitliklerinin var olduğunu görebiliriz. Şimdi (3.25) denkleminden $\alpha'_{k+1} = \alpha_{k+1}$ ve buna bağlı olarak (3.24) denkleminden $\beta'_{k+1} = \beta_{k+1}$ olduğunu söyleriz.

Sonuç olarak bu Lemma $n = 0$, $n = 0, 1, \cdots, k-1$, $n = k$ değerleri için doğru olduğundan tümevarım ilkesi gereği her n için doğru olduğu ispatlanmış olur.

Tanım 3.3.3. Negatif olmayan tamsayı dizilerinin $\{\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\}\}$ sıralı ikilisinin $n - terimli$ Fibonacci ağaç toplamı

$$\alpha^{(n)}\beta^{(n)} = [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_n, \cdots\}] \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\lim_{n\to\infty}(\alpha^{(n)}, \beta^{(n)}) = (\alpha, \beta)$ ise α nın tamsayı dizilerinin sıralı ikilisine (α, β) nın Fibonacci ağaç toplamı denir. [6]

Örnek 3.3.1. $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha^2 + 1$ ve $\beta = 2 + \frac{1}{\alpha}$ denklemleri ele alınırsa $a = 1$ ve $b = 2$ olduğu açıktır. Bu değerleri $\alpha = a + \frac{\beta}{\alpha}$ ve $\beta = b + \frac{1}{\alpha}$

denkleminden faydalanarak yazarsak

$$\alpha = 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \frac{2 + \frac{1}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\alpha}} = 1 + \frac{2 + \frac{1}{1+\frac{\beta}{\alpha}}}{1 + \frac{2+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}} = 1 + \frac{2 + \frac{1}{1+\frac{2+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}}}{1 + \frac{2+\frac{1}{1+\frac{\beta}{\alpha}}}{1+\frac{2+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{\beta}{\alpha}}}} \quad \cdots$$

$(\{1,1,1,\cdots\},\{2,2,2,\cdots\})$ tamsayı dizilerinin sıralı ikilisi (α,β) sıralı ikilisinin Fibonacci ağaç gösterimidir. Bununla birlikte (α,β) ikilisinin çatallanmış sürekli kesir genişlemesini bulabilmek için $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha^2 + 1$ denkleminin köklerinden faydalanabiliriz. Buradan $\alpha = \alpha_0 = 2{,}15$ ve $\beta = \beta_0 = 2{,}47$ elde edilir. Burada

$$a_i = \text{int}(\alpha_i)$$
$$b_i = \text{int}(\beta_i)$$
$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\beta_i - b_i}$$
$$\beta_{i+1} = \frac{\alpha_i - a_i}{\beta_i - b_i}$$

denkleminden faydalanarak

$\alpha = \alpha_0 = 2{,}15 \quad a_0 = 2 \quad \beta = \beta_0 = 2{,}47 \quad b_0 = 2$

$\alpha_1 = \frac{1}{\beta_0 - b_0} = \frac{1}{0{,}47} = 2{,}1276 \qquad a_1 = 2$

$\beta_1 = \frac{\alpha_0 - a_0}{\beta_0 - b_0} = \frac{0{,}15}{0{,}47} = 0{,}3191 \qquad b_1 = 0$

$\alpha_2 = \frac{1}{\beta_1 - b_1} = \frac{1}{0{,}3191} = 3{,}1338 \qquad a_2 = 3$

$\beta_2 = \frac{\alpha_1 - a_1}{\beta_1 - b_1} = \frac{0{,}1276}{0{,}3191} = 0{,}3998 \qquad b_2 = 0$

$\alpha_3 = \frac{1}{\beta_2 - b_2} = \frac{1}{0{,}3998} = 2{,}5012 \qquad a_3 = 2$

$\beta_3 = \frac{\alpha_2 - a_2}{\beta_2 - b_2} = \frac{0{,}1318}{0{,}3998} = 0{,}3296 \qquad b_3 = 0$

(α,β) ikilisinin çatallanmış sürekli kesir genişlemesinin $(\{2,2,3,2,3,2,3,2,\cdots\},\{2,0,0,0,\cdots\})$ tamsayı dizilerinin sıralı ikilisi olduğu görülür.

Tanım 3.3.4. α ve β pozitif reel sayılar olmak üzere $(\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots\},\{b_0,b_1,b_2,\cdots,b_i,\cdots\})$ negatif olmayan tamsayı dizilerinin

sıralı ikilisi (α,β) nın öz çatallanmış sürekli kesir gösterimi olarak tanımlanır. Eğer her n için α_n ve β_n pozitif reel sayıları varsa her $n \geq 1$ için $1 < \alpha_n > \beta_n$ ve

$$(\alpha,\beta) = [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n\}] \quad (3.27)$$

olur. [6]

Tanım 3.3.5. α ve β pozitif reel sayılar olmak üzere $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ negatif olmayan tamsayı dizilerinin sıralı ikilisi (α,β)nın uygun çatallanmış sürekli kesir gösterimi olarak tanımlanır. Eğer her n için α_n ve β_n pozitif reel sayıları varsa her $n \geq 1$ için $int(\alpha_n) = a_n$, $int(\beta_n) = b_n$ ve

$$(\alpha,\beta) = [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n\}] \quad (3.28)$$

Lemma 3.3.4. $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ negatif olmayan tamsayı dizi ikilisinin (α,β) bir öz çatallanmış sürekli kesir gösterimi olması gerek ve yeter şart $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ dizisinin (α,β) nın uygun çatallanmış sürekli kesir gösterimi olmasıdır [6]

İspat (α,β) nın bir öz çatallanmış sürekli kesir gösteriminin $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ olduğunu kabul edelim. O halde her n için

$$(\alpha,\beta) = [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n\}] \quad (3.29)$$

ve $n \geq 1$ için $1 < \alpha_n > \beta_n$olacak şekilde α_n ve β_n pozitif reel sayıları vardır.

Şimdi

$$[\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha_{n+1}\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \beta_{n+1}\}]$$
$$= [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n\}] \quad (3.30)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için (3.30) denklemine ilk olarak (3.20) denklemini daha sonra Lemma 3.3.3. ü uygularsak

$$\left[\left\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n + \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right\}, \left\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right\}\right]$$
$$= [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n\}]$$
$$\alpha_n = a_n + \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \quad , \quad \beta_n = b_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \quad (3.31)$$

elde edilir. Buradan her n için

$0 < \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} < 1$ ve $0 < \frac{1}{\alpha_{n+1}} < 1$

Bulunur (3.31) denkleminden dolayı

$a_n = \text{int}(\alpha_n)$ ve $b_n = \text{int}(\beta_n)$ olur. Böylece verilen negatif olamayan tamsayı dizi çifti (α, β) nın bir uygun çatallanmış sürekli kesir gösterimidir.

Tersine verilen negatif olmayan tamsayı çifti (α, β) nın uygun çatallanmış sürekli kesir gösterimi olsun. O halde (3.29) ve (3.31) denklemlerini sağlayan α_n ve β_n sayıları vardır. Ayrıca $a_n = \text{int}(\alpha_n)$ ve $b_n = \text{int}(\beta_n)$. Buradan (3.31) denkleminden dolayı her $n \geq 1$ için $1 < \alpha_n > \beta_n$ bulunur. Dolayısıyla verilen negatif olmayan tamsayı dizisi (α, β) nın öz çatallanmış sürekli kesir gösterimidir.

Lemma 3.3.5. (α, β) nın çatallanmış sürekli kesir genişlemesi (α, β) nın yalnızca uygun bir gösterimidir. [6]

İspat (α, β) nın çatallanmış sürekli kesir genişlemesi

$\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$

$a_i = int(\alpha_i)$ $b_i = int(\beta_i)$. (3.32)

$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\beta_i - b_i}$, $\beta_{i+1} = \frac{\alpha_i - a_i}{\beta_i - b_i}$

algoritması ile α_i, β_i tarafından verilir.

$(\alpha, \beta) = [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n\}]$ (3.33)

ve $\beta_n - b_n < 1$ ve $\alpha_n - a_n < 1$ olduğundan

$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\beta_n - b_n} > 1$ $\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = \alpha_n - a_n < 1$ (3.34)

elde edilir.

Böylece her $n \geq 1$ için $1 < \alpha_n > \beta_n$ olur . Bundan dolayı (α, β) nın çatallanmış sürekli kesir genişlemesi (α, β) nın uygun bir çatallanmış sürekli kesir gösterimidir. (α, β) nın uygun bir çatallanmış sürekli kesir gösterimi $\{\{a'_0, a'_1, \cdots, a'_i, \cdots\}\{b'_0, b'_1, \cdots, b'_i, \cdots\}\}$ olsun. O halde her n sayısı için α'_n ve β'_n reel sayıları vardır. Buradan

$(\alpha, \beta) = [\{a'_0, a'_1, \cdots, a'_{n-1}, \alpha'_n\}\{b'_0, b'_1, \cdots, b'_{n-1}, \beta'_n\}]$ (3.35)

ve her $n \geq 1$ için $1 < \alpha'_n > \beta'_n$ olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca (3.26) denklemini kullanarak

$\alpha'_n = a'_n + \frac{\beta'_{n+1}}{\alpha'_{n+1}}$, $\beta'_n = b'_n + \frac{1}{\alpha'_{n+1}}$ (3.36)

ifadesini elde ederiz.

Ayrıca burada Lemma 3.3.3. den faydalanarak

$$\alpha_0' = \alpha_0 = a_0 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ \ \beta_0' = \beta_0 = b_0 + \frac{1}{\alpha_1} \tag{3.37}$$

olduğunu söyleriz. Bundan dolayı

$$a_0 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} = a_0' + \frac{\beta_1'}{\alpha_1'} \ , \ b_0 + \frac{1}{\alpha_1} = b_0' + \frac{1}{\alpha_1'} \tag{3.38}$$

olur.

Çünkü (3.38) denkleminin ikinci kısmında b_0, b_0' birer tamsayı ve $\alpha_1 > 1$, $\alpha_1' > 1$ buradan $b_0 = b_0'$ ve $\alpha_1 = \alpha_1'$ olur. Aynı şekilde a_0, a_0' tamsayılar ve $\frac{\beta_1}{\alpha_1} < 1$ ve $\frac{\beta_1'}{\alpha_1'} < 1$ olduğundan $a_0 = a_0'$ ve $\beta_1 = \beta_1'$ olduğunu söyleriz. $a_n = a_n'$ ve $b_n = b_n'$ olduğu da tümevarım metoduyla kolaylıkla gösterilebilir.

Lemma 3.3.6. Eğer $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ negatif olmayan tamsayısı dizisinin sıralı ikilisi (α, β) nın öz çatallanmış sürekli kesir gösterimi ise buradan

(i) $1 \leq a_n \geq b_n$

(ii) $n \geq 1$ için $a_n = b_n$ ise $b_{n+1} \neq 0$ olur

İspat Her n için α_n ve β_n pozitif reel sayıları vardır. buradan

$$(\alpha, \beta) = [\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n\}] \tag{3.39}$$

ve $n \geq 1$ ise $1 < \alpha_n > \beta_n$ yazabiliriz.

(i) Lemma 3.3.4. ü kullanarak,

$a_n = \text{int}(\alpha_n) \geq 1$

ve

$a_n = \text{int}(\alpha_n) \geq \text{int}(\beta_n) = b_n$

(ii) Herhangi bir $n \geq 1$ için $a_n = b_n$ ve $b_{n+1} = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$\beta_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{\alpha_{n+2}}$

ve

$\alpha_n = a_n + \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} < \frac{b_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = \beta_n$

bu hipotezimizle çelişir. Dolayısıyla $b_{n+1} \neq 0$ olur.

Lemma 3.3.7. $0 \leq m \leq n \leq \infty$ olmak üzere $A_{n+3,n} = 0$, $A_{n+2,n} = 0$, $A_{n+1,n} = 1$ başlangıç koşulları ile birlikte verilen

$A_{m,n} = a_m A_{m+1,n} + b_{m+1} A_{m+2,n} + A_{m+3,n}$

ve

$B_{m,n} = b_m A_{m+1,n} + A_{m+2,n}$

$A_{m,n}$ ve $B_{m,n}$ rekürans bağıntıları

$[\{a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}, \{b_m, b_{m+1}, \dots\dots, b_n\}] = (\frac{A_{m,n}}{A_{m+1,n}}, \frac{B_{m,n}}{A_{m+1,n}})$ denklemini sağlar.

İspat $m = n$ için Lemmanın doğruluğunu kontrol edelim.

$[\{a_n\}, \{b_n\}] = (a_n, b_n)$

$= \left(\frac{A_{n,n}}{A_{n+1,n}}, \frac{B_{n,n}}{A_{n+1,n}}\right)$

$= \left(\frac{a_m A_{m+1,n} + b_{m+1} A_{m+2,n} + A_{m+3,n}}{A_{n+1,n}}, \frac{b_m A_{m+1,n} + A_{m+2,n}}{A_{n+1,n}}\right)$

Burada rekürans bağıntısından faydalanarak bu ifadenin (a_n, b_n) ikilisine eşit olduğu görülür dolayısıyla $m = n$ için Lemma sağlanır.

Şimdi $m = n - 1$ için Lemmanın doğruluğunu kontrol edelim.

$[\{a_{n-1}, a_n\}, \{b_{n-1}, b_n\}] = \left(a_{n-1} + \frac{b_n}{a_n}, b_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right)$

$= \left(\frac{a_{n-1}a_n + b_n}{a_n}, \frac{b_{n-1}+1}{a_n}\right) = \left(\frac{a_{n-1}a_n + b_n}{a_n}, \frac{b_{n-1}+1}{a_n}\right)$.

Burada rekürans bağıntısını kullanarak

$\left(\frac{a_{n-1}A_{n,n} + b_n A_{n+1,n} + A_{n+2,n}}{A_{n,n}}, \frac{b_{n-1}A_{n,n} + A_{n+1,n}}{A_{n,n}}\right)$

yazabiliriz. Buradan

$\left(\frac{A_{n-1,n}}{A_{n,n}}, \frac{B_{n-1,n}}{A_{n,n}}\right)$ (3.40)

elde edilir, yani Lemma $m = n - 1$ içinde sağlanır.

Lemmanın her $m = n - 1, n - 2, \cdots, n - k$ sayıları için doğru olduğunu kabul edelim. Buradan

$A_{n-k,n} = a_{n-k} A_{n-k+1,n} + b_{n-k+1} A_{n-k+2,n} + A_{n-k+3,n}$ (3.41)

ve

$B_{n-k,n} = b_{n-k} A_{n-k+1,n} + A_{n-k+2,n}$ (3.42)

olmak üzere

$$[\{a_{n-k}, a_{n-k+1}, \cdots, a_n\}, \{b_{n-k}, b_{n-k+1}, \cdots, b_n\}] = \left(\frac{A_{n-k,n}}{A_{n-k+1,n}}, \frac{B_{n-k,n}}{A_{n-k+1,n}}\right) \quad (3.43)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
&[\{a_{n-k-1}, a_{n-k}, \cdots, a_n\}, \{b_{n-k-1}, b_{n-k}, \cdots, b_n\}] \\
&= \left[\left\{a_{n-k-1}, \frac{A_{n-k,n}}{A_{n-k+1,n}}\right\}, \left\{b_{n-k-1}, \frac{B_{n-k,n}}{A_{n-k+1,n}}\right\}\right] \\
&= \left[a_{n-k-1} +, \frac{\frac{B_{n-k,n}}{A_{n-k+1,n}}}{\frac{A_{n-k,n}}{A_{n-k+1,n}}}, b_{n-k-1} + \frac{1}{\frac{A_{n-k,n}}{A_{n-k+1,n}}}\right] \\
&= \left(a_{n-k-1} + \frac{B_{n-k,n}}{A_{n-k,n}}, b_{n-k-1} + \frac{A_{n-k+1,n}}{A_{n-k,n}}\right) \\
&= \left(\frac{a_{n-k-1}A_{n-k,n} + b_{n-k}\, A_{n-k+1,n} + A_{n-k+2,n}}{A_{n-k,n}}, \frac{b_{n-k-1}A_{n-k,n} + A_{n-k+1,n}}{A_{n-k,n}}\right) \\
&= \left(\frac{A_{n-k-1,n}}{A_{n-k,n}}, \frac{B_{n-k-1,n}}{A_{n-k,n}}\right) \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Burada

$$A_{n-k-1,n} = a_{n-k-1}A_{n-k,n} + b_{n-k}\, A_{n-k+1,n} + A_{n-k+2,n} \quad (3.45)$$

ve

$$B_{n-k-1,n} = b_{n-k-1}A_{n-k,n} + A_{n-k+1,n} \quad (3.46)$$

elde edilir. Sonuç olarak Lemma $m = n - k - 1$ için de sağlanmış olur. Bundan dolayı tümevarım ilkesi gereği n den küçük yada eşit tüm negatif olmayan m değerleri için Lemma sağlanmış olur.

Lemma 3.3.8. $A_{m,n} = a_n\, A_{m,n-1} + b_n\, A_{m,n-2} + A_{m,n-3}$

İspat Lemma 3.3.7. ve Lemma 3.3.7 de verilen başlangıç şartlarına göre

$n = m$ için

$$\begin{aligned}
A_{m,m} &= a_m A_{m+1,m} + b_{m+1} A_{m+2,m} + A_{m+3,m} \\
&= a_m A_{m,m-1} + b_m A_{m,m-2} + A_{,m-3} m = a_m \quad (3.47)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $n = m$ için Lemma sağlanır.

Şimdi $n = m + 1$ için kontrol edelim.

$$\begin{aligned}
A_{m,m+1} &= a_m A_{m+1,m+1} + b_{m+1} A_{m+2,m+1} + A_{m+3,m+1} \\
&= a_m\, a_{m+1} + b_{m+1} \\
&= a_{m+1} a_m + b_{m+1} \\
&= a_{m+1} A_{m,m} + b_{m+1} A_{m,m-1} + A_{m,m-2} \quad (3.48)
\end{aligned}$$

olduğundan, Lemma $n = m + 1$ için de sağlanır. Benzer şekilde $n = m + 2$ kontrol edelim

$$A_{m,m+2} = a_m A_{m+1,m+2} + b_{m+1} A_{m+2,m+2} + A_{m+3,m+2}$$
$$= a_m\ (a_{m+1} a_{m+2} + b_{m+2}) + b_{m+1} a_{m+2} + 1$$
$$= a_{m+2}(a_m a_{m+1} + b_{m+1}) + b_{m+2} a_m + 1$$
$$= a_{m+2} A_{m,m+1} + b_{m+2} A_{m,m} + A_{m,m-1} \quad (3.49)$$

Lemmanın $n = m, m+1, m+2, \cdots, m+k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$A_{m,m+k} = a_{m+k} A_{m,m+k-1} + b_{m+k} A_{m,m+k-2} + A_{m,m+k-3} \quad (3.50)$$

olsun. Lemma 3.3.7.yi kullanarak,

$$A_{m,m+k+1} = a_m A_{m+1,m+k+1} + b_{m+1} A_{m+2,m+k+1} + A_{m+3,m+k+1}$$

yazabiliriz. Buradan (3.45) eşitliğini kullanarak

$$A_{m,m+k+1} = a_m(a_{m+k+1} A_{m+1,m+k} + b_{m+k+1} A_{m+1,m+k-1} + A_{m+1,m+k-2})$$
$$+ b_{m+1}(a_{m+k+1} A_{m+2,m+k} + b_{m+k+1} A_{m+2,m+k-1} + A_{m+2,m+k-2})$$
$$+ (a_{m+k+1} A_{m+3,m+k} + b_{m+k+1} A_{m+3,m+k-1} + A_{m+3,m+k-2})$$

Burada a_{m+k+1} ve b_{m+k+1} terimleri ifadeden çekilerek parantez içlerini değiştirip

$$a_{m+k+1}(a_m A_{m+1,m+k} + b_{m+1} A_{m+2,m+k} + A_{m+3,m+k})$$
$$+ b_{m+k+1}(a_m\, A_{m+1,m+k-1} + b_{m+1} A_{m+2,m+k-1} + A_{m+3,m+k-1})$$
$$+ (a_m A_{m+1,m+k-2} + b_{m+1} A_{m+2,m+k-2} + A_{m+3,m+k-2})$$
$$= a_{m+k+1} A_{m,m+k} + b_{m+k+1} A_{m,m+k-1} + A_{m,m+k-2} \quad (3.51)$$

elde ederiz. Sonuç olarak Lemma $n = m + k + 1$ için sağlanır. Tümevarım ilkesi gereği m den büyük ya da m ye eşit tüm n değerleri için sağlanır

Lemma 3.3.9. $B_{m,n} = a_n B_{m,n-1} + b_n B_{m,n-2} + B_{m,n-3}$

İspat Lemma 7 ve 8 i kullanarak

$$B_{m,n} = b_m A_{m+1,n} + A_{m+2,n} = b_m\big(a_n A_{m+1,n-1} + b_n A_{m+1,n-2} + A_{m+1,n-3}\big)$$
$$+\big(a_n A_{m+2,n-1} + b_n A_{m+2,n-2} + A_{m+2,n-3}\big)$$
$$= a_n\big(b_m A_{m+1,n-1} + A_{m+2,n-1}\big) + b_n\big(b_m A_{m+1,n-2} + A_{m+2,n-2}\big)$$
$$+(b_m A_{m+1,n-3} + A_{m+2,n-3})$$
$$= a_n B_{m,n-1} + b_m B_{m,n-2} + B_{m,n-3} \quad (3.52)$$

Lemma 3.3.10. $A_i = A_{0,i}, B_i = B_{0,i}$ ve $C_i = A_{1,i}$ olmak üzere

$$\det \begin{vmatrix} A_n & A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_n & B_{n-1} & B_{n-2} \\ C_n & C_{n-1} & C_{n-2} \end{vmatrix} = 1$$

olur.

İspat $n > 2$, Lemma 3.3.8. ve 3.3.9. kullanılarak

$$\det \begin{vmatrix} A_n & A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_n & B_{n-1} & B_{n-2} \\ C_n & C_{n-1} & C_{n-2} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + A_{n-3} & A_{n-1} & A_{n-2} \\ a_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} + B_{n-3} & B_{n-1} & B_{n-2} \\ a_n C_{n-1} + b_n C_{n-2} + C_{n-3} & C_{n-1} & C_{n-2} \end{vmatrix}$$

yazılır. Burada matrislerde elementer satır ve sütün işlemleri kullanarak ikinci sütunu $-a_n$ ile ve üçüncü sütunu $-b_n$ ile çarparak birinci satıra eklersek

$$= \det \begin{vmatrix} A_{n-3} & A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_{n-3} & B_{n-1} & B_{n-2} \\ C_{n-3} & C_{n-1} & C_{n-2} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-2} & A_{n-3} \\ B_{n-1} & B_{n-2} & B_{n-3} \\ C_{n-1} & C_{n-2} & C_{n-3} \end{vmatrix} \quad \cdots, \cdots$$

elde edilir. Aynı elementer satır ve sütun işlemlerini tekrar yaparak

$$= \det \begin{vmatrix} A_2 & A_1 & A_0 \\ B_2 & B_1 & B_0 \\ C_2 & C_1 & C_0 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A_{0,2} & A_{0,1} & A_{0,0} \\ B_{0,2} & B_{0,1} & B_{0,0} \\ A_{1,2} & A_{1,1} & A_{1,0} \end{vmatrix}$$

$$= \det \begin{vmatrix} a_0 A_{1,2} + b_1 A_{2,2} + 1 & a_0 A_{1,1} + b_1 & a_0 \\ a_0 A_{1,2} + A_{2,2} & b_0 A_{1,1} + 1 & b_0 \\ A_{1,2} & A_{1,1} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(Lemma 3.3.7.den)}$$

$$= \det \begin{vmatrix} b_1 A_{2,2} + 1 & b_1 & 0 \\ A_{2,2} & 1 & 0 \\ A_{1,2} & A_{1,1} & 1 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_{2,2} & 1 & 0 \\ A_{1,2} & A_{1,1} & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad (3.53)$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.1. A_n, B_n, C_n bir ortak çarpana sahip değildir. Eğer bir ortak çarpana sahip olsaydı determinant değerini 1 bulamazdık.

Sonuç 3.3.2.

$$\left(\alpha^{(n)}-\alpha^{(n-1)}\right)\left(\beta^{(n-1)}-\beta^{(n-2)}\right)-\left(\alpha^{(n-1)}-\alpha^{(n-2)}\right)\left(\beta^{(n)}-\beta^{(n-1)}\right)=\frac{1}{C_{n-2}C_{n-1}C_n} \quad (3.54)$$

İspat Lemma 3.3.7. ve Lemma 3.3.9.kullanılarak

$$\det\begin{vmatrix} A_n & A_{n-1} & A_{n-2} \\ B_n & B_{n-1} & B_{n-2} \\ C_n & C_{n-1} & C_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{0,n} & A_{0,n-1} & A_{0,n-2} \\ B_{0,n} & B_{0,n-1} & B_{0,n-3} \\ A_{1,n} & A_{1,n-1} & A_{1,n-2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_0A_{1,n}+b_1A_{2,n}+A_{3,n} & a_0A_{1,n-1}+b_1A_{2,n-1}+A_{3,n-1} & a_0A_{1,n-2}+b_1A_{2,n-2}+A_{3,n-2} \\ b_1A_{1,n}+A_{2,n} & b_0A_{1,n-1}+A_{2,n-1} & b_0A_{1,n-2}+A_{2,n-2} \\ A_{1,n} & A_{1,n-1} & A_{1,n-2} \end{vmatrix}$$

Burada matrislerde elementer satır ve sütün işlemleri uygulayarak üçüncü satır elemanları $-b_0$ ile çarpılarak ikinci satıra eklenirse

$$\begin{vmatrix} a_0A_{1,n}+b_1A_{2,n}+A_{3,n} & a_0A_{1,n-1}+b_1A_{2,n-1}+A_{3,n-1} & a_0A_{1,n-2}+b_1A_{2,n-2}+A_{3,n-2} \\ A_{2,n} & A_{2,n-1} & A_{2,n-2} \\ A_{1,n} & A_{1,n-1} & A_{1,n-2} \end{vmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca üçüncü satır $-a_0$ ve ikinci satırda $-b_1$ ile çarpılarak birinci satıra eklenirse

$$\begin{vmatrix} A_{3,n} & A_{3,n-1} & A_{3,n-2} \\ A_{2,n} & A_{2,n-1} & A_{2,n-2} \\ A_{1,n} & A_{1,n-1} & A_{1,n-2} \end{vmatrix}$$

elde edilir . Burada Tanım 3.3.3. de verdiğimiz limit ifadesinden faydalanarak birinci sütunu

$C_n = A_{1,n}$ ikinci sütunu $C_{n-1} = A_{1,n-1}$ ve üçüncü sütunu $C_{n-2} = A_{1,n-2}$ ye bölerek

$$\begin{vmatrix} \frac{A_{3,n}}{A_{1,n}} & \frac{A_{3,n-1}}{A_{1,n-1}} & \frac{A_{3,n-2}}{A_{1,n-2}} \\ \frac{A_{2,n}}{A_{1,n}} & \frac{A_{2,n-1}}{A_{1,n-1}} & \frac{A_{2,n-2}}{A_{1,n-2}} \\ \frac{A_{1,n}}{A_{1,n}} & \frac{A_{1,n-1}}{A_{1,n-1}} & \frac{A_{1,n-2}}{A_{1,n-2}} \end{vmatrix} = C_n C_{n-1} C_{n-2} \begin{vmatrix} \alpha^{(n)} & \alpha^{(n-1)} & \alpha^{(n-2)} \\ \beta^{(n)} & \beta^{(n-1)} & \beta^{(n-2)} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (3.55)$$

Buradan denklemin sağ tarafının determinantı alınırsa

$$\alpha^{(n)}\left(\beta^{(n-1)} - \beta^{(n-2)}\right) + \alpha^{(n-1)}\left(\beta^{(n-2)} - \beta^{(n)}\right) + \alpha^{(n-2)}\left(\beta^{(n)} - \beta^{(n-1)}\right) = \frac{1}{C_{n-2}C_{n-1}C_n} \quad (3.56)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.3.11. Eğer her $i \geq 1$ için $1 \leq a_i \geq b_i$ ise $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ tamsayı dizisinin sıralı ikilisi α ve β reel sayılar olmak üzere (α, β) ikilisinin Fibonacci Ağaç gösterimidir. [6]

İspat. Tanım 3.3.3., Lemma 3.3.7., Lemma 3.3.8., Lemma 3.3.9. ve Lemma 3.3.1.deki notasyonlardan faydalanarak

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{(n)} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} \quad (3.57)$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{C_n} \quad (3.58)$$

olduğunu göstermek zorundayız. Burada

$$\begin{aligned} A_n &= a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + A_{n-3} \\ B_n &= a_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} + B_{n-3} \\ C_n &= a_n C_{n-1} + b_n C_{n-2} + C_{n-3} \end{aligned} \quad (3.59)$$

dir. (3.59) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{A_{n-1}} - \frac{C_n}{C_{n-1}} &= \left(a_n + b_n \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} + \frac{A_{n-3}}{A_{n-1}}\right) - a_n + b_n \frac{C_{n-2}}{C_{n-1}} + \frac{C_{n-3}}{C_{n-1}} \\ &= b_n \left(\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} - \frac{C_{n-2}}{C_{n-1}}\right) + \left(\frac{A_{n-3}}{A_{n-1}} - \frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}\right) \\ &= b_n \left(\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} - \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\right)\left(\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-2}}{C_{n-1}}\right) + \left(\frac{C_{n-1}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-1}}{A_{n-3}}\right)\left(\frac{A_{n-3}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}\right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

elde ederiz. Yine (3.59), eşitliğini kullanarak,

$$\frac{A_n}{A_{n-2}} - \frac{C_n}{C_{n-2}} = a_n \left(\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} - \frac{C_{n-1}}{C_{n-2}}\right) + \left(\frac{A_{n-3}}{A_{n-2}} - \frac{C_{n-3}}{C_{n-2}}\right) \quad (3.61)$$

elde ederiz.(61) eşitliğin de $n = n-1$ alarak (3.60) eşitliğine uygularsak,

$$\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} - \frac{C_n}{C_{n-1}} = b_n \left(\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} - \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\right)\left(\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-2}}{C_{n-1}}\right) + \left[a_{n-1}\left(\frac{C_{n-2}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-2}}{A_{n-3}}\right) + \frac{C_{n-4}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-4}}{A_{n-3}}\right]\left(\frac{A_{n-3}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}\right)$$

$$= b_n\left(\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} - \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}\right)\left(\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-2}}{C_{n-1}}\right) + a_{n-1}\left(\frac{C_{n-2}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-2}}{A_{n-3}}\right)\left(\frac{A_{n-3}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}\right)$$

$$+\left(\frac{A_{n-3}}{A_{n-4}} - \frac{C_{n-3}}{C_{n-4}}\right)\left(\frac{A_{n-4}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-4}}{C_{n-1}}\right) \tag{3.62}$$

Buradan

$$\left(\frac{A_n}{C_n} - \frac{A_{n-1}}{C_{n-1}}\right)\left(\frac{C_n}{A_{n-1}}\right) = b_n\left(\frac{A_{n-2}}{C_{n-2}} - \frac{A_{n-1}}{C_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-2}}{A_{n-1}}\right) + a_{n-1}\left(\frac{A_{n-3}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-2}}{C_{n-2}}\right)\left(\frac{C_{n-2}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}\right)$$

$$+\left(\frac{A_{n-3}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-4}}{C_{n-4}}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{A_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-4}}{C_{n-1}}\right) \tag{3.63}$$

(3.63) denkleminde A_{n-1} yerine C_n yazarak

$$\left(\frac{A_n}{C_n} - \frac{A_{n-1}}{C_{n-1}}\right) = b_n\left(\frac{A_{n-2}}{C_{n-2}} - \frac{A_{n-1}}{C_{n-1}}\right)\left(\frac{C_{n-2}}{C_n}\right) + a_{n-1}\left(\frac{A_{n-3}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-2}}{C_{n-2}}\right)\left(\frac{C_{n-2}}{C_n}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}\right)$$

$$+\left(\frac{A_{n-3}}{C_{n-3}} - \frac{A_{n-4}}{C_{n-4}}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{C_n}\right)\left(\frac{C_{n-4}}{C_{n-1}}\right) \tag{3.64}$$

elde edilir. Şimdi eğer

$b_n = 0$ ise

$$b_n\frac{C_{n-2}}{C_n} = \frac{b_nC_{n-2}}{a_nC_{n-1} + b_nC_{n-2} + C_{n-3}} = 0$$

olur.

$b_n \neq 0$ ise

$$b_n\frac{C_{n-2}}{C_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}}} + 1 + \frac{1}{b_n}\frac{C_{n-3}}{C_{n-2}}$$

$\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}} > 1$ ve $\frac{C_{n-3}}{C_{n-2}} < 1$ olduğundan

$$b_n\frac{C_{n-2}}{C_n} = \frac{1}{\frac{a_nC_{n-1}}{b_nC_{n-2}}} + 1 + \frac{1}{b_n}\frac{C_{n-3}}{C_{n-2}} < \frac{1}{2} \tag{3.65}$$

elde edilir.

$$a_{n-1}\left(\frac{C_{n-2}}{C_n}\right)\left(\frac{C_{n-3}}{C_{n-1}}\right) = \left(\frac{C_{n-3}}{C_n}\right)\left(\frac{a_{n-1}C_{n-2}}{a_{n-1}C_{n-2}+b_{n-1}C_{n-3}+C_{n-4}}\right) < \frac{C_{n-3}}{C_n} \tag{3.66}$$

Ayrıca

$$\frac{C_{n-3}}{C_n} = \frac{C_{n-3}}{a_nC_{n-1}+b_nC_{n-2}+C_{n-3}}$$

$$= \frac{C_{n-3}}{a_n(a_{n-1}C_{n-2}+b_{n-1}C_{n-3}+C_{n-4})+b_n(a_{n-2}C_{n-3}+b_{n-2}C_{n-4}+C_{n-5})+C_{n-3}}$$

$$< \frac{C_{n-3}}{a_na_{n-1}C_{n-2}+(b_na_{n-2}+b_{n-1}+1)C_{n-3}}.$$

$a_n \geq 1$, $C_{n-2} > C_{n-3}$ olduğundan dolayı burada C_{n-2} yerine C_{n-3} yazarak sağ taraf daha da büyük yapılır.

$$\frac{C_{n-3}}{C_n} < \frac{1}{a_na_{n-1} + b_na_{n-2}b_{n-1} + 1}$$

Buradan

$$\frac{C_{n-3}}{C_n} < \begin{cases} \frac{1}{4} & b_n \neq 0, b_{n-1} \neq 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{3} & b_n = 0, b_{n-1} \neq 0 \text{ veya } b_n \neq 0, b_{n-1} = 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{2} & b_n = b_{n-1} = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.67)$$

Benzer yöntem uygulanarak

$$\frac{C_{n-4}}{C_{n-1}} < \begin{cases} \frac{1}{4} & b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} \neq 0 \\ \frac{1}{3} & b_{n-1} = 0, b_{n-2} \neq 0 \text{ veya } b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} = 0 \\ \frac{1}{2} & b_{n-1} = b_{n-2} = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

elde edilir. (3.67) ve (3.68) eşitliklerini birlikte ele alırsak

$$\left(\frac{C_{n-3}}{C_n}\right)\left(\frac{C_{n-4}}{C_{n-1}}\right) < \begin{cases} \frac{1}{16} & b_n \neq 0, b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} \neq 0 \\ \frac{1}{12} & b_n \neq 0, b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} = 0 \text{ veya } b_n = 0, b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} = 0 \\ \frac{1}{9} & b_n = 0, b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} = 0 \text{ veya } b_n \neq 0, b_{n-1} = 0\ b_{n-2} \neq 0 \\ \frac{1}{6} & b_n \neq 0, b_{n-1} = 0, b_{n-2} = 0 \text{ veya } b_n = 0, b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} \neq 0 \\ \frac{1}{4} & b_n = 0, b_{n-1} = 0, b_{n-2} = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

olur.

$\Delta_n = \left|\frac{A_n}{C_n} - \frac{A_{n-1}}{C_{n-1}}\right|$ olsun. (3.70)

Böylece (3.65), (3.66), (3.67) ve (3.69) dan dolayı

$$\Delta_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta_{n-2} + \frac{1}{4}\Delta_{n-3} & b_n = 0 \\ \frac{1}{2}\Delta_{n-1} + \frac{1}{4}\Delta_{n-2} + \frac{1}{12}\Delta_{n-3} & b_n \neq 0, b_{n-1} \neq 0 \\ \frac{1}{2}\Delta_{n-1} + \frac{1}{3}\Delta_{n-2} + \frac{1}{9}\Delta_{n-3} & b_n \neq 0, b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} \neq 0 \\ \frac{1}{2}\Delta_{n-1} + \frac{1}{3}\Delta_{n-2} + \frac{1}{6}\Delta_{n-3} & b_n \neq 0, b_{n-1} \neq 0, b_{n-2} = 0 \end{cases} \quad (71)$$

elde edilir.

$$D_n = max\{\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \Delta_{n-3}\} \tag{3.72}$$

olmak üzere

$$\Delta_n < \begin{cases} D_n & b_n \neq 0, b_{n-1} = 0, b_{n-2} = 0 \\ \frac{17}{18} D_n & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.73}$$

elde edilir, yani

$$D_n = max\{\Delta_n, \Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}\} \leq D_n \tag{3.74}$$

Sonuç olarak $\{D_n\}$ pozitif sayıların artmayan bir dizisidir.

Biz şimdi

$D_{n+4} < rD_n$ olacak şekilde $r < 1$ olduğunu göstereceğiz. Buradan da $\{D_n\}$ in sıfıra yakınsadığını göreceğiz. Burada iki durumu gözönüne alacağız. (3.71) denkleminden faydalanarak

Eğer $b_n \neq 0, b_{n-1} = 0, b_{n-2} = 0$ ise

$$\Delta_{n+1} < \frac{1}{2}\Delta_n + \frac{1}{4}\Delta_{n-1} + \frac{1}{12}\Delta_{n-2}$$
$$< \frac{5}{6} D_n \qquad \text{((3.72) ve (3.73) den dolayı))} \tag{3.75}$$

$$\Delta_{n+2} < \frac{1}{2}\Delta_{n+1} + \frac{1}{3}\Delta_n + \frac{1}{9}\Delta_{n-1}$$
$$< \frac{31}{36} D_n \qquad \text{((3.72),(3.73) ve (3.75) den dolayı)} \tag{3.76}$$

$$\Delta_{n+3} < \frac{1}{2}\Delta_{n+2} + \frac{1}{3}\Delta_{n+1} + \frac{1}{6}\Delta_n$$
$$< \frac{7}{8} D_n \qquad \text{((3.73), (3.75) ve (3.76) den dolayı)} \tag{3.77}$$

Böylece,

$$D_{n+4} = max\{\Delta_{n+3}, \Delta_{n+2}, \Delta_{n+1}\} < \frac{7}{8} D_n \tag{3.78}$$

Diğer taraftan (3.73) den dolayı

$$\Delta_n < \frac{17}{18} D_n \tag{3.79}$$

$$\Delta_{n+1} < \frac{1}{2}\Delta_n + \frac{1}{3}\Delta_{n-1} + \frac{1}{6}\Delta_{n-2}$$
$$< \frac{35}{36} D_n \qquad \text{((3.72) ve (3.79) den dolayı)} \tag{3.80}$$

$$\Delta_{n+2} < \frac{1}{2}\Delta_{n+1} + \frac{1}{3}\Delta_n + \frac{1}{6}\Delta_{n-1}$$

$$< \frac{209}{216} D_n \qquad \text{((3.72), (3.79) ve (3.80) den dolayı)} \qquad (3.81)$$

Buradan

$$D_{n+3} = max\{\Delta_{n+2}, \Delta_{n+1}, \Delta_n\} < \frac{35}{36} D_n \qquad (3.82)$$

(3.74) den dolayı sonuç olarak,

$$D_{n+4} \leq D_{n+3} < \frac{35}{36} D_n. \qquad (3.83)$$

Dolayısıyla $D_{n+4} < rD_n$ ve $r = \frac{35}{36} < 1$ olduğundan $\{D_n\}$ artmayan bir dizidir. Yani $n \to \infty$ iken $\{D_n\}$ sıfıra yakınsar (3.76) den dolayı $\{\Delta_n\}$ de sıfıra yakınsar. (3.70),den dolayı $\lim_{n\to\infty} \alpha^{(n)} \equiv \lim_{n\to\infty} A_n/C_n$ elde edilir. Burada A_n yerine B_n koyarak $\lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} \equiv \lim_{n\to\infty} B_n/C_n$ ifadesi de elde edilir.

Sonuç olarak eğer $i \geq 1$ için $1 \leq a_i \geq b_i$, ise α ve β reel sayı olmak üzere $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ tamsayı dizilerinin sıralı ikilisi(α, β) nın Fibonacci Ağaç gösterimidir.

Teorem 3.3.1. (α, β) reel sayı sıralı ikilisinin çatallanmış sürekli kesir genişlemesi, (α, β) nın bir Fibonacci Ağaç gösterimidir.

İspat $(\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_i, \cdots\})$ tamsayı dizilerinin sıralı ikilisi (α, β) sıralı ikilisinin bir çatallanmış sürekli kesir genişlemesi olsun. Lemma 3.3.1. e göre her $i \geq 1$ için $1 \leq a_i \geq b_i$ olur. Buna bağlı olarak Lemma 3.3.11. den dolayı α' ve β' reel sayıları mevcuttur. Bu durumda

$\alpha^{(n)} = \frac{A_n}{C_n}$ ve $\beta^{(n)} = \frac{B_n}{C_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{(n)} = \alpha' \qquad (3.84)$$

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} = \beta' \qquad (3.85)$$

olur.

Burada $\alpha' = \alpha$ ve $\beta' = \beta$ olduğunu göstermek zorundayız. Şimdi

$$A_n^{\sim} = (\alpha_n - a_n)A_{n-1} + (\beta_n - b_n)A_{n-2} \qquad (3.86)$$

$$C_n^{\sim} = (\alpha_n - a_n)C_{n-1} + (\beta_n - b_n)C_{n-2} \qquad (3.87)$$

olmak üzere

$$\left|\alpha-\alpha^{(n)}\right|=\left|\frac{\alpha_n A_{n-1}+\beta_n A_{n-2}+A_{n-3}}{\alpha_n C_{n-1}+\beta_n C_{n-2}+C_{n-3}}-\frac{a_n A_{n-1}+b_n A_{n-2}+A_{n-3}}{a_n C_{n-1}+b_n C_{n-2}+C_{n-3}}\right|$$

$$=\left|\frac{A_n+A_n^{\sim}}{(C_n+C_n^{\sim})-\frac{A_n}{C_n}}\right| \tag{3.88}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|\alpha-\alpha^{(n)}\right|=\left|\frac{A_n^{\sim}C_n-A_nC_n^{\sim}}{C_n(C_n+C_n^{\sim})}\right|<\frac{1}{C_n^2}\left|A_n^{\sim}C_n-A_nC_n^{\sim}\right|=\frac{A_n}{C_n}\left|\frac{A_n^{\sim}}{A_n}-\frac{C_n^{\sim}}{C_n}\right|$$

$$=\frac{A_n}{C_n}\left|(\alpha_n-a_n)\left(\frac{A_{n-1}}{A_n}-\frac{C_{n-1}}{C_n}\right)+(\beta_n-b_n)\left(\frac{A_{n-2}}{A_n}-\frac{C_{n-2}}{C_n}\right)\right|$$

$$\leq\alpha^{(n)}\left(\left|\frac{\alpha^{(n-1)}}{\alpha^{(n)}}-1\right|\frac{C_{n-1}}{C_n}+\left|\frac{\alpha^{(n-2)}}{\alpha^{(n)}}-1\right|\frac{C_{n-2}}{C_n}\right) \tag{3.89}$$

Sonuç olarak, $\lim_{n\to\infty}\alpha^{(n)}=\alpha'$ olduğundan

$$|\alpha-\alpha'|=\lim_{n\to\infty}|\alpha-\alpha^{(n)}|=0 \text{ elde edilir.} \tag{3.90}$$

bundan dolayı $\alpha'=\alpha$ bulunur. Benzer şekilde $\beta'=\beta$ elde edilir.

Teorem 3.3.2. Eğer her $i\geq 1$ için $1\leq a_i\geq b_i$ ve $a_n=b_n$ iken $b_n\neq 0$ oluyorsa $(\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots\},\{b_0,b_1,b_2,\cdots,b_i,\cdots\})$ tamsayı dizilerinin sıralı ikilisi, α ve β reel sayılar olmak üzere (α,β) nın bir öz çatallanmış sürekli kesir gösterimidir ve Lemma 3.3.5. den dolayı (α,β) bir çatallanmış sürekli kesir genişlemesi olmak zorundadır. Hatta Teorem 3.3.1. den dolayı (α,β) nın Fibonacci Ağaç gösterimi olmak zorundadır.

İspat Lemma 3.3.11. den dolayı öyle α ve β reel sayıları vardır ki

$(\alpha,\beta)=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha^{(n)},\beta^{(n)}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}(\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots\},\{b_0,b_1,b_2,\cdots,b_i,\cdots\}) \tag{3.91}$$

Lemma3.3.11. in ispatından her m sayısı için

$\lim_{n\to\infty}(\{a_m,a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_n\},\{b_m,b_{m+1},b_{m+2},\cdots,b_n\})$ limitinin varolduğu açıktır.

Bu limit (α_m,β_m) ile gösterilsin. Böylece her m sayısı için burada α_m,β_m sayıları vardır .

$$(\alpha,\beta)=(\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{m-1},a_m\},\{b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{m-1},b_m\}) \tag{3.92}$$

olur. Şimdi biz $1<\alpha_m>\beta_m$ olduğunu göstermek zorundayız

$$\alpha_m=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_{m,n}}{A_{m+1,n}}\right) \tag{3.93}$$

ve

$$\beta_m = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{B_{m,n}}{B_{m+1,n}}\right) \tag{3.94}$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca

$$\left(\frac{A_{m,n}}{A_{m+1,n}}\right) > 1 \tag{3.95}$$

ve

$$\left(\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}\right) > 1 \tag{3.96}$$

olduğundan $1 < \alpha_m > \beta_m$ elde edilir (3.97)

Lemma 3.3.7. den dolayı

$$A_{m,n} = a_m A_{m+1,n} + b_{m+1}A_{m+2,n} + A_{m+3,n} \tag{3.98}$$

Burada yeteri kadar büyük n sayıları için verilen m sayısı için $A_{m+3,n} > 1$ olur.

Böylece

$$\frac{A_{m,n}}{A_{m+1,n}} = a_m + b_{m+1}\frac{A_{m+2,n}}{A_{m+1,n}} + \frac{A_{m+3,n}}{A_{m+1,n}} > 1 \tag{3.99}$$

elde edilir. Tekrar Lemma 3.3.7. kullanılarak

$$\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \frac{a_m A_{m+1,n} + b_{m+1}A_{m+2,n} + A_{m+3,n}}{b_m A_{m+1,n} + A_{m+2,n}} \tag{3.100}$$

yazılır. Eğer $a_m > b_m$ ise (3.95) dan dolayı $A_{m+1,n} > A_{m+2,n}$ olduğundan

$$\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} > 1 \tag{3.101}$$

Eğer $a_m = b_m$ ise $b_{m+1} \neq 0$ olur. Buradan da $\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} > 1$ (3.102)

elde edilir.

Sonuç 3.3.3.

(i) her $i \geq 1$ için $1 \leq a_i \geq b_i$

(ii) $a_n = b_n$ ise $b_{n+1} \neq 0$ dir.

şartları sağlanmak üzere (α, β) sıralı ikilisinin yalnızca bir tane Fibonacci ağaç gösterimi vardır.

Teorem 3.3.3. Eğer (α, β) basit periyodik çatallanmış sürekli kesir genişlemesine sahipse α, derecesi en fazla 3 olan polinomları sağlar.

İspat. Çatallanmış sürekli kesir genişlemesi $n + 1$ periyotlu olsun. Buradan

$$(\alpha,\beta)=(\{a_0,a_1,a_2,\dots,a_n,\alpha_n\},\{b_0,b_1,b_2,\dots,b_n,\beta_n\}) \tag{3.103}$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\alpha = \frac{\alpha A_n + \beta A_{n-1} + A_{n-2}}{\alpha C_n + \beta C_{n-1} + C_{n-2}} \tag{3.104}$$

$$\beta = \frac{\alpha B_n + \beta B_{n-1} + B_{n-2}}{\alpha C_n + \beta C_{n-1} + C_{n-2}} \tag{3.105}$$

yazılır. (3.104) den dolayı

$$C_n\alpha^2 + C_{n-1}\alpha\beta + (C_{n-2} - A_n)\alpha - A_{n-1}\beta - A_{n-2} = 0 \tag{3.106}$$

elde edilir. ve (3.105) den dolayı

$$C_{n-1}\beta^2 + C_n\alpha\beta - B_n\alpha + (C_{n-2} - B_{n-1})\beta - B_{n-2} = 0 \tag{3.107}$$

elde edilir. (3.106) den dolayı

$$\beta = \frac{C_n\alpha^2 + (C_{n-2} - A_n)\alpha - A_{n-2}}{A_{n-1} - C_{n-1}\alpha} \tag{3.108}$$

elde edilir. (3.108) eşitliğini (3.107) eşitliğinde yerine koyarsak

$$\begin{aligned} &C_{n-1}(C_n\alpha^2 + (C_{n-2} - A_n)\alpha - A_{n-2})^2 \\ &+(C_n\alpha + C_{n-2} - B_{n-1})(C_n\alpha^2 + (C_{n-2} - A_n)\alpha - A_{n-2})(A_{n-1} - C_{n-1}\alpha) \\ &-(B_n\alpha + B_{n-2})(A_{n-1} - C_{n-1}\alpha)^2 = 0 \end{aligned} \tag{3.109}$$

elde edilir. Burada α^4 lü terim yok olur. Bundan dolayı α derecesi en fazla 3 olan eşitlikleri sağlar.

Lemma 3.3.12.

$$\alpha_{n+1}(\alpha_n \quad \beta_n \quad 1) = (\alpha_{n+1} \quad \beta_{n+1} \quad 1)\begin{bmatrix} a_n & b_n & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

İspat. Eşitliğin sağ tarafını ele alalım matrislerde çarpma işlemi yaparak

$$= ((\alpha_{n+1}a_n + \beta_{n+1}) \quad \alpha_{n+1}b_n + 1 \quad \alpha_{n+1})$$

bulunur. Bütün satır elemanları α_{n+1} bölünerek

$$= \alpha_{n+1}\left(\left(a_n + \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right) \quad b_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \quad 1\right)$$

$$= \alpha_{n+1}((\alpha_n \quad \beta_n \quad 1))$$

elde edilir. Yani eşitliğin sağ tarafının sol tarafına eşit olduğunu görülür.

Sonuç 3.3.4. $\mu_n = (\alpha_n \quad \beta_n \quad 1)^{\mathrm{T}}, (\alpha_n,\beta_n) = (\{a_n,a_{n+1},\dots\},\{b_n,b_{n+1},\dots\})$ ve

$$R_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.110}$$

olmak üzere $\alpha_{n+1}\mu_n^T = \mu_{n+1}^T R_n$ dir.

Sonuç 3.3.5.

$\mu_0^T = \frac{\mu_1^T R_0}{\alpha_1} = \frac{\mu_2^T R_1 R_0}{\alpha_1 \alpha_2} = \cdots = \frac{\mu_n^T R_{n-1} R_{n-2} \ldots R_1 R_0}{\alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1}$

veya

$\mu_0 = \frac{R_0^T R_1^T \ldots R_{n-1}^T \mu_n^T}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$

dir.

Sonuç 3.3.6.

$$\mu_{n+1}^{\mathrm{T}} = \alpha_{n+1}\mu_n^{\mathrm{T}} R_n^{-1} = \alpha_{n+1}(\alpha_n \quad \beta_n \quad 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a_n & -b_n \end{bmatrix}$$

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Teorem 4.1. Eğer (α,β) nın çatallanmış sürekli kesir genişlemesi belli bir terimden sonra periyodik ise α, derecesi en fazla 3 olan polinomları sağlar.

İspat.

$$(\alpha,\beta)=\{a_0,a_1,\cdots,a_n,,,\cdots,a_{n+m},a_{n+m+1},\cdots\},\{b_0,b_1,\cdots,b_n,,\cdots b_{n+m},b_{n+m+1},\cdots\} \quad (3.112)$$

olsun. Buradan

$$(\alpha_{n+1},\beta_{n+1})=\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots,a_{n+m},a_{n+m+1},\cdots\},\{b_{n+1},b_{n+2},\cdots,b_{n+m},b_{n+m+1},\cdots\} \quad (3.113)$$

elde edilir. Lemma 3.3.12. den elde ettiğimiz Sonuç 3.3.5. den faydalanarak

$$\mu_0^T=\frac{\mu_{n+1}^T R_n R_{n-1} R_{n-2}\dots R_1 R_0}{\alpha_{n+1}\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_2\alpha_1}$$

$$\mu_{n+1}^T=\frac{\mu_{n+1}^T R_{n+m}R_{n+m-1}\cdots R_{n+2}R_{n+1}}{\alpha_{n+m+1}\alpha_{n+m}\alpha_{n+m-1}\cdots\alpha_{n+2}} \quad (3.114)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mu_0^T=\frac{\mu_0^T R_0^{-1}R_1^{-1}R_2^{-1}\cdots R_n^{-1}\cdots R_{n+m}R_{n+m-1}\cdots R_{n+2}R_{n+1}R_n\cdots R_{n+2}R_{n+1}R_nR_{n-1}\cdots R_1R_0}{\alpha_{n+1}\cdots\alpha_{n+m}} \quad (3.115)$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\lambda(\alpha \quad \beta \quad 1)=(\alpha \quad \beta \quad 1)\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{bmatrix} \quad (3.116)$$

olarak yazılır. Böylece

$$M_{11}\alpha+M_{21}\beta+M_{31}=\lambda\alpha$$
$$M_{12}\alpha+M_{22}\beta+M_{32}=\lambda\beta$$
$$M_{13}\alpha+M_{23}\beta+M_{33}=\lambda \quad (3.117)$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan,

$$M_{11}\alpha+M_{21}\beta+M_{31}=(M_{13}\alpha+M_{23}\beta+M_{33})\alpha \quad (3.118)$$

elde edilir. Bu da

$$\beta=\frac{M_{31}+(M_{11}-M_{33})\alpha-M_{13}\alpha^2}{M_{23}\alpha-M_{21}} \quad (3.119)$$

denklemini sağlar. Ayrıca

$$M_{12}\alpha+M_{22}\beta+M_{32}=(M_{13}\alpha+M_{23}\beta+M_{33})\beta \quad (3.120)$$

böylece

$$\frac{M_{32}+M_{12}\alpha+(M_{22}-M_{33}-M_{13}\alpha)(M_{31}+(M_{11}-M_{33})\alpha-M_{13}\alpha^2)}{M_{23}\alpha-M_{21}}-\frac{M_{23}(M_{31}+(M_{11}-M_{33})\alpha-M_{13}\alpha^2)}{(M_{23}\alpha-M_{21})^2} \quad (3.121)$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$(M_{32} + M_{12}\alpha)(M_{23}\alpha - M_{21})^2$$
$$+(M_{22} - M_{33} - M_{13}\alpha)\{(M_{31} + (M_{11} - M_{33})\alpha - M_{13}\alpha\}(M_{23}\alpha - M_{21})$$
$$-M_{23}\{(M_{31} + (M_{11} - M_{33})\alpha - M_{13}\alpha^2\} = 0 \qquad (3.122)$$

olur. α^4 teriminin katsayısı 0 olur. Bundan dolayı α derecesi en fazla 3 olan denklemleri sağlar.

Konjektür: Eğer α bir kübik irrasyonel ise öyle bir β kübik irrasyoneli vardır ki (α, β) nın çatallanmış sürekli kesir genişlemesi belli bir terimden sonra periyodikdir.

KAYNAKLAR

[1] C. D. Olds, Continued Fractions, Mathematical Association of America. 1975. © Copyright 1963 by Yale University.

[2] G.Moore, An Introduction to Continued Fractions, Arisona State Collage Flagstaff, America Copyright 1964 by The. National Council of Teachers of Mathematics.

[3] A. K. Gupta and A. K. Mittal, Bifurcating Continued Fractions, LANL arXive math.GM/0002227

[4] S. Finch. Cubic Variations of the Golden Mean, Copyright © 1999 MathSoft Inc. http://www.mathsoft.com/asolve/constant/gold/cubic.html.

[5] R. Corless, Continued Fractions and Chaos, http://www.cecm.sfu.ca/publications/organic/cnfrac/confrac.html

[6] A. K. Gupta and A. K. Mittal, Bifurcating Continued Fractions II, LANL arXive math. GM/0008060

[7] Hardy, G. H. and Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. New York: Philosopical Library, 1957

[8] An outline of this proof was given (in a personal communication) by Prof. Thomas Garrity,