T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN BAZI ÖZEL ALTMANİFOLDLARI

RECAİ ATUÇURAN

HAZİRAN – 2008

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürünün onayı.

18/06/2008

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN
Enstitü Müdür V.

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM
Danışman

Tez Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN ____________________

Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM ____________________

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK ____________________

ÖZET

BİR RİEMANN MANİFOLDUNUN BAZI ÖZEL ALTMANİFOLDLARI

ATUÇURAN, RECAİ

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

Haziran 2008, 120 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde diferensiyellenebilir manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun M altmanifoldunda bir Z $\overline{M}$ -vektör alanı ile ilişkili Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal altmanifoldlar gibi, altmanifoldların bazı özel türleri sunulmuştur.

Ayrıca, M ve M' nün $\overline{M}$ Riemann manifoldunun hiperyüzeyleri olduğunu varsayarak, eğer F I. ve II. temel formları koruyan M den M' ye bir diffeomorfizm ise o zaman F nin hiperyüzeylerin Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal özelliklerini koruduğu gösterilmiştir.

Son bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Riemann manifoldu, Z-umbilik, total Z- geodezik ve Z-minimal altmanifoldlar.

ABSTRACT

ON SPECIAL SUBMANIFOLDS OF A RIEMANNIAN MANIFOLD

ATUÇURAN, RECAİ

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Advisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM

June 2008, 120 pages

This thesis consist of four chapters. The first chapter is reserved for introduction.

The basic concepts about differentiable manifolds are given in the second chapter.

In the third chapter, some special type of submanifolds such as Z-umbilical, totally Z-geodesic and Z-minimal submanifolds associated with an $\bar{M}$ -vector field Z on a submanifold M of a Riemannian manifold $\bar{M}$ are presented.

In addition, supposing M and M' are hypersurfaces of a Riemannian manifold $\bar{M}$ it is shown that if F is a diffeomorphism from M onto M' and preserves the first and second fundamental forms then F preserves the Z-umbilical, totally Z-geodesic and Z-minimal properties of the hypersurface.

The final chapter is reserved for discussion and conclusion.

Key words: Riemannian manifold, Z-umbilical, totally Z-geodesic and Z-minimal submanifolds.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma ile ilgili her çeşit bilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILDIRIMA'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmam esnasında yakın ilgi ve yardımını gördüğüm Sayın Doç. Dr. Hasan ERBAY'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET 1

ABSTRACT .... İİ

TEŞEKKÜR .... İİİ

İÇİNDEKİLER .... İV

1. GİRİŞ 1

1.1. Kaynak Özetleri 1

1.2. Çalışmanın Amacı 1

2. MATERYAL VE YÖNTEM 4

2.1. Topolojik Kavramlar 4

2.2. IR^n **de Diferensiyellenebilme** 9

2.3. Diferensiyellenebilir Manifoldlar 13

2.4. Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar 27

2.5 Bir Manifold Üzerinde Türev 31

2.6. Türev Dönüşümü 35

2.7. Tensörler 43

2.8. Riemann Manifoldu 46

2.9. Altmanifoldlar 47

3. ARAŞTIRMA BULGULARI 65

3.1. Giriş 65

3.2. Başlangıç 65

3.3. Z-Umbilik Altmanifold 85

3.4. Total Z-Geodezik Altmanifold 87

3.5. Z-Minimal Altmanifold 91

3.6. Konneksiyonu Koruyan Dönüşüm 100

4. TARTIŞMA VE SONUÇ 113

KAYNAKLAR 120

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Differentiable manifolds [1], Lineer Cebir [4] ve topolojik kavramlar için Topoloji [3] adlı kitaplardan faydalanılmıştır. Differentiable manifolds [1] adlı kitapta diferensiyellenebilir manifoldlar ele alınmıştır. Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type [5] adlı kitabın, altmanifoldlar bölümünden total umbilik, total jeodezik, minimal altmanifoldlar kavramlarına yer verilmiştir. On special submanifolds of a Riemannian manifold [6] isimli makaleden de yararlanılarak umbilik, total jeodezik, minimal altmanifoldların daha özel halleri olan Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal altmanifoldlar kavramlarına ulaşılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

$\bar{M}$ Riemann manifoldunun M altmanifoldu üzerinde, M nin normal ve teğet uzayları gözönüne alınarak, genelleştirilmiş Gauss denklemi, şekil operatörü, ikinci temel tensör, asli eğrilikler, asli eğrilik vektör alanları, eğrilik çizgisi, geodezik eğrilikler, normal eğrilik, ortalama eğrilik, umbilik altmanifold, total geodezik altmanifold, minimal altmanifold gibi kavramlar tanımlanabiliyor. Örneğin M nin bir hiperyüzey olması halinde şekil operatörü, $N \in \chi^{\perp}(M)$ olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $A(X) = \nabla_X N$ şeklinde verilebilmektedir. Bu şekilde tanımlanan

A lineer dönüşümünün bazı özellikleri yardımıyla M nin geometrisinin ne olduğunu anlayabiliyoruz. Bunlardan birini şöyle söyleyebiliriz: Eğer M nin bir p noktasında ξ normal vektör alanı olmak üzere $A_\xi = \lambda I$ olacak şekilde M de λ reel fonksiyonu varsa o zaman M , ξ ye göre *umbiliktir* denir.

Altmanifoldlar için şöyle bir soru sorulabilir. M nin geometrisi oluşturulurken normal vektör alanları yerine herhangi bir vektör alınıp M için bazı geometrik sonuçlar elde edilebilir mi?

Bu sorunun cevabı Agashe, N. S. and Chafle, M. R., tarafından yazılmış olan On special submanifolds of a Riemannian Manifold isimli çalışmada verilmiştir. Bu makalede $\bar{M}$ nin bir M altmanifoldunda tanımlı Z vektör alanı alınmış ve literatürde bilinen altmanifold geometrisinin bir benzeri olarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, eğer M de herbir X tanjant vektör alanı için,

$$\tan \overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X = \lambda X$$

ise M altmanifoldu *Z-umbilik* olarak isimlendirilmiştir.

Riemann manifoldunun altmanifoldu üzerinde tanımlı ama Riemann manifoldu üzerinde aldığımız bir C^∞ $Z-$vektör alanına göre bu verilen kavramlar bu şekilde yeniden tanımlanacaktır. Buradan da Riemann manifoldunun, genelleştirme yapılarak elde edilmiş olan olan *Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal altmanifoldları* elde edilecektir.

Genelleştirme yapılarak elde edilen bu özel altmanifoldların ve ilgili kavramların hangi altmanifold ve kavramların genelleştirilmişleri oldukları tartışılarak, sonuçlar elde edilecektir.

Bundan başka M ve M', $\bar{M}$ Riemann manifoldunun hiperyüzeyleri olmak üzere, F I. ve II. temel formları koruyan M den M' ye bir diffeomorfizm ise F nin, hiperyüzeylerin Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal özelliklerini koruduğu gösterilecektir.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Diferensiyel geometrinin en temel kavramı olan diferensiyellenebilir manifoldlar bir yandan topolojik uzaylar iken diğer yandan da diferensiyellenebilir bir yapıya sahiptir. Bu nedenle bu çalışmada temel kavramlar olarak topolojik kavramlar, Öklid uzayları arasında diferensiyellenebilme ve diferensiyellenebilir manifold kavramı verilecektir. Ayrıca çalışmanın konusu itibariyle altmanifold kavramı da hatırlatılacaktır.

2.1. Topolojik Kavramlar

$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ olmak üzere $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. f nin tanım kümesi Dom $f \subseteq A$ ve değer kümesi range $f \subseteq B$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.1: $f : A \to B$ bir fonksiyon olmak üzere eğer, Dom $f = A$ ise f *' ye global fonksiyon* denir[1].

Dom $f = U$ olmak üzere $U \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir V cümlesi verilsin.

$$f|_V : U \cap V \to B$$
$$x \to f|_V(x) = f(x)$$

Şeklinde tanımlı $f|_V$ fonksiyonuna f ' nin V cümlesine *kısıtlanmışı* denir.

Tanım 2.1.2: $A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$ iki cümle olsun.

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) | a_i \in A_i, i = 1,2\}$$

cümlesine A_1 *ve* A_2 cümlelerinin kartezyen çarpımı denir.

$$P_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$$
$$a = (a_1, a_2) \rightarrow P_i(a) = a_i, i = 1,2$$

fonksiyonuna *i. izdüşüm fonksiyonu* denir[(1)].

Tanım 2.1.3: $A \neq \varnothing$ bir cümle olmak üzere,

$$id : A \rightarrow A$$
$$x \rightarrow id(x) = x$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme A cümlesi üzerinde *özdeşlik dönüşümü* denir[(4)].

Tanım 2.1.4: $S \neq \varnothing$ cümlesinin alt cümlelerinin bir ailesi τ olsun. Eğer,

$i)\ \varnothing \in \tau,\ S \in \tau$

$ii)$ τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine τ ya aittir; yani,

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \tau \ \text{için} \ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau,$$

$iii)$ τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine τ ya aittir; yani,

$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau \ \text{için} \ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \tau$$

aksiyomları sağlanıyorsa τ ailesine S üzerinde bir *topoloji,* (S, τ) ikilisine de *topolojik uzay* denir. τ nun elemanlarına S' nin *açık alt cümleleri* denir[(3)].

Tanım 2.1.5: $S \neq \varnothing$ bir cümle ve β, S 'nin bir alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

$$i)\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = S,\ \forall B_i \in \beta$$

$ii)\ \forall B_1, B_2 \in \beta,\ B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ iken $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$

özellikleri sağlanırsa β'ya S üzerinde bir topoloji için bir *baz*, β'nın elemanlarına da *temel açık cümleler* denir(3).

β bazındaki temel açık cümlelerin birleşimi olarak yazılabilen S'nin boş cümleden farklı elemanlarına, S'de β bazından elde edilen topolojiye göre *açık cümleler* denir(3).

Tanım 2.1.6: (S,τ) bir topolojik uzay ve $s \in S$ olsun. $s \in A$ ve $A \in \tau$ olacak şekilde bir A cümlesi varsa A'ya s'nin bir *açık komşuluğu* denir(3).

Çalışmanın bundan sonraki kısmında aksi belirtilmedikçe komşuluk denildiğinde açık komşuluk kasdedilecektir. Ayrıca s'nin komşuluk ailesi $N(s)$ ile gösterilirse,

$$N(s) = \{A \in \tau \mid s \in A\}$$

dir.

$\beta(s) \subset N(s)$ ailesi verilsin.Eğer $\forall V \in N(s)$ için $U \subset V$ olacak şekilde $\exists U \in \beta(s)$ varsa bu $\beta(s)$ ailesine $s \in S$ noktasında bir baz veya $s \in S$ noktasında *komşuluklar tabanı* denir(3).

Tanım 2.1.7: $S\ ve\ T$ herhangi iki topolojik uzay ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall V \in N(f(s))$ için $f(U) \subset V$ olacak şekilde $\exists U \in N(s)$ varsa f'ye $s \in S$ noktasında *süreklidir* denir(3).

Tanım 2.1.8: S *ve* T herhangi iki topolojik uzay ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. $\forall U \subset \text{Dom } f$ açık iken $f(U) \subset T$ açık ise f 'ye *açık fonksiyon* denir[3].

Tanım 2.1.9 : S *ve* T herhangi iki topolojik uzay ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. f; $1:1$, örten, sürekli ve açık ise f 'ye bir *homeomorfizm* denir[3].

Tanım 2.1.10 : (Kapalı Cümle) (S,τ) topolojik uzay olsun. $S - U \in \tau$ olacak şekilde bir $U \subset S$ cümlesine τ *kapalıdır* denir.

Kapalı cümlelerin ailesi τ^c ile gösterilecektir.[3].

Tanım 2.1.11 : (Kapanış, İç, Sınır) (S,τ) topolojik uzay ve $A \subset S$ olsun. A nın *içi* $\overset{0}{A}$ ile gösterilir ve,

$$\overset{0}{A} = \bigcup \left\{ U \middle| U \subset A, U \in \tau \right\}$$

olarak tanımlanır. A 'nın *kapanışı* $\overline{A}$ ile gösterilir ve,

$$\overline{A} = \bigcap \left\{ U \middle| A \subset U, U \in \tau^c \right\}$$

olarak tanımlanır. A 'nın *sınırı* ∂A ile gösterilir ve,

$$\partial A = \overline{A} - \overset{o}{A}$$

olarak tanımlanır[3].

Tanım 2.1.12: (Alt Uzay Topolojisi) (S,τ) topolojik uzay ve $A \subset S$ olsun.

$\tau_1 = \left\{ A \cap U \middle| U \in \tau \right\} \subset P(A)$ olmak üzere τ_1, A üzerinde bir topolojidir.

(A,τ_1) topolojik uzayına (S,τ) topolojik uzayının bir alt uzayı denir [3].

Tanım 2.1.13: (Ayırma Aksiyomları)

(S,τ) topolojik uzay olsun.

T_1 *Ayırma Aksiyomu* **:**

$p \neq q$ olacak şekildeki $\forall p,q \in S$ için $\exists U \in N(p), \exists V \in N(q) \ni p \notin V, q \notin U$

şartı sağlanıyorsa, (S,τ) topolojik uzayı, T_1 *Ayırma aksiyomunu* sağlar denir[3].

T_2 *Ayırma Aksiyomu* **:**

$p \neq q$ olacak şekildeki $\forall p,q \in S$ için $\exists U \in N(p), \exists V \in N(q) \ni U \cap V = \varnothing$

sartı sağlanıyorsa, (S,τ) topolojik uzayı, T_2 Ayırma aksiyomunu sağlar denir[3].

T_2 'yi sağlayan bir uzaya *Hausdorff Uzayı da denir*[3].

Tanım 2.1.14: (S,τ) topolojik uzay ve $\varphi \subset \tau$ olsun.

$\bigcup_{U \in \varphi} U = S$ ise φ 'ye S'nin bir *açık örtüsü* denir. S'nin $\varphi_1 \subset \varphi$ olacak şekilde φ_1 açık örtüsü varsa φ_1 'e, φ 'nin *alt örtüsü* denir[3].

Tanım 2.1.15 : (S,τ) topolojik uzay olsun. S'nin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (S,τ)'ya *kompakt topolojik uzay* denir[3].

Tanım 2.1.16: (Lokal Kompakt Uzay) (S,τ) topolojik uzay olsun. S 'nin her noktasının kapanışı kompakt olan bir komşuluğu varsa, S'ye *lokal kompakt uzay* denir[3].

Tanım 2.1.17: (S,τ) topolojik uzay olsun. S ayrık açık cümlelerin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa S 'ye *bağlantılıdır* veya *irtibatlıdır* denir(3).

Tanım 2.1.18: (S,τ) topolojik uzay olsun.

S 'nin her noktasının sayılabilir komşulukları varsa (S,τ) topolojik uzayına *sayılabilirliliğin birinci aksiyomunu* sağlar denir.

S sayılabilir bir baza sahipse, (S,τ) topolojik uzayına *sayılabilirliliğin ikinci aksiyomunu* sağlar denir(3).

2.2. IR^n de Diferensiyellenebilme

Tanım 2.2.1 : $U \subset IR^n$ bir açık altcümle $p \in U$, $f : IR^n \to IR$ bir fonksiyon ve $u_1, u_2, \ldots, u_n$ IR^n nin koordinat fonksiyonları olsun. $1 \le i \le n$ olmak üzere, her bir i için

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(p_1,\cdots,p_i+t,\cdots,p_n)-f(p_1,\cdots,p_n)}{t}$$

limiti mevcut ise bu limite f nin $p=(p_1,\cdots,p_n)$ noktasında i . kısmi türevi denir ve $\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p$ ile gösterilir.

f nin $1 \le i \le n$ olmak üzere 1. mertebeden $\left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_p$ kısmi türevleri var ve bu türev fonksiyonları sürekli ise, f fonksiyonuna $p \in U$ noktasında 1. mertebeden diferensiyellenebilirdir denir.

f bir $p \in U$ noktasında her mertebeden diferensiyellenebilir ise, f ye $C^{\infty}-$*fonksiyon* denir[1].

f, U nun her bir noktasında C^{∞} fonksiyon ise f ye U da C^{∞} fonksiyon denir.

$U \subset IR^n$ açık altcümlesi üzerinde reel değerli bütün diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^{\infty}(U)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.2: $f : E^n \to IR$ diferensiyellenebilir ve $\vec{v_P} \in T_P E^n$ olsun. Bu durumda $\vec{v_P} = \vec{PQ}$ olmak üzere;

$$\vec{v_P}[f] = \frac{d}{dt}\Big(f\big(P_1 + t(Q_1 - P_1), \cdots, P_n + t(Q_n - P_n)\big)\Big)\Big|_{t=0}$$

reel sayısına f nin $\vec{v_P}$ yönünde *türevi* denir[2].

Teorem 2.2.1: $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in IR^n$, $P \in E^n$ ve

$f : E^n \to IR$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\vec{v_P}[f] = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_P$$

dir.

Sonuç 2.2.1: $x_1, \cdots, x_n$ fonksiyonları, E^n nin koordinat fonksiyonları olmak üzere, her $j = 1, \cdots, n$ için

$$\vec{v}_P\left[x_j\right] = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right|_P$$
$$= \sum_{i=1}^{n} v_i\, \delta_{ji}\Big|_P$$
$$= v_j$$

dir [2].

Tanım 2.2.3: $U \subset IR^n$ açık bir altcümle olmak üzere

$$f : U \to IR^m$$
$$p \to f(p) = (f_1(p), f_2(p), \cdots, f_m(p))$$
$$= (f_1, f_2, \cdots, f_m)(p)$$

bir fonksiyon,

$$u_i : IR^m \to IR,\ 1 \le i \le m$$
$$(q_1, q_2, \cdots, q_m) \to q_i$$

koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$(u_i \circ f) = f_i : IR^n \to IR$$

dir. f_i fonksiyonlarına f *nin bileşenleri* denir.

Burada $1 \le i \le m$ için $\forall f_i$, $p \in U = \text{Dom} f$ de diferensiyellenebilir ise f ye p de *diferensiyellenebilirdir* denir.

f, U daki herbir p noktasında diferensiyellenebilir ise f ye U da *diferensiyellenebilirdir* denir.

Buna göre, $f \in C^\infty$ dur gerek ve yeter koşul $1 \le i \le m$ olmak üzere $f_i \in C^\infty(U)$ olmasıdır [1]

Tanım 2.2.4: $m \times n$ -tipinden reel matrislerin cümlesi $M(m \times n, R)$ ile gösterilsin.

$f: R^n \to R^m$ bir C^∞ fonksiyon olmak üzere,

$$J_f : R^n \to M(m \times n, R)$$
$$p \to J_f(p) = J(f,p) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right]_{m\times n}$$

ile tanımlanan $J(f,p)$ matrisine $p \in R^n$ noktasında f fonksiyonunun *Jakobiyen matrisi* denir(1).

Tanım 2.2.5: $f: IR^n \to IR^n$ bir fonksiyon olsun.

Eğer,

$i)$ f, $1:1$,
$ii)$ f diferensiyellenebilir,
$iii)$ f^{-1} de diferensiyellenebilir,

ise f fonksiyonuna bir *diffeomorfizm* adı verilir (1).

Teorem 2.2.2: (İnvers Fonksiyon Teoremi) $f: R^n \to R^n$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve bir $p \in Domf$ için

$$\det\left(J(f,p)\right) \neq 0$$

ise $\exists V \in N(p)$ vardır öyle ki $f|_V$ bir diffeomorfizmdir(1).

Tanım 2.2.6: $f: R^n \to R^n$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

Eğer,

$\forall p \in \text{Dom}\, f$ için $\exists V \in N(p)$ için $f|_V$ diffeomorfizm ise f 'ye *lokal diffeomorfizm* denir(1).

2.3. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.3.1: $M \neq \varnothing$ bir cümle olsun.

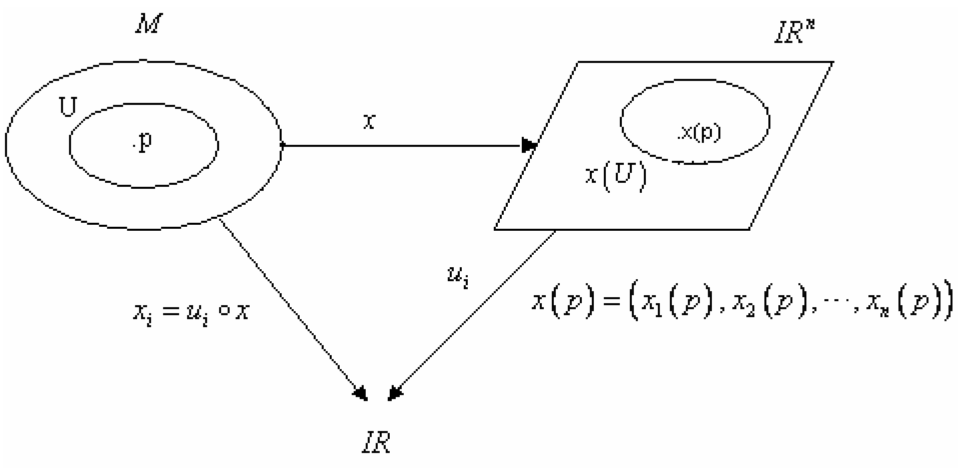
$x : M \to R^n$ bir fonksiyon ve $\text{Dom}\, x = U \subset M$ olmak üzere, x fonksiyonu için

H_1) x, $1:1$ dir,

H_2) range $x \subset R^n$ açıktır,

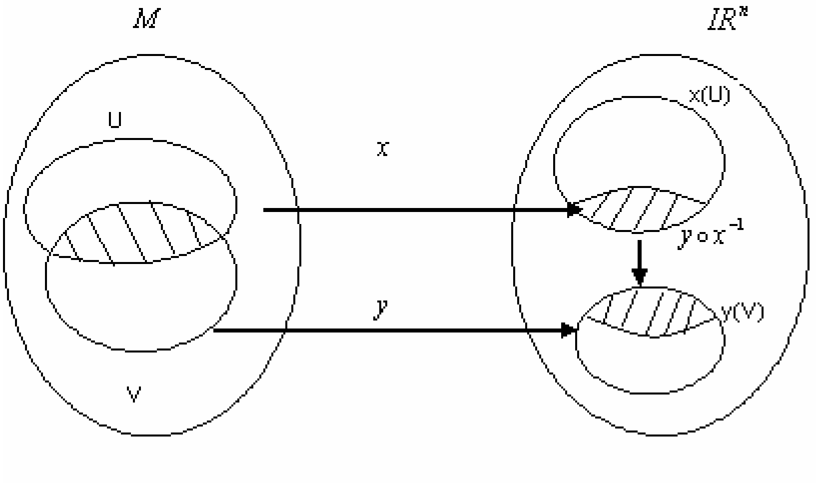
önermeleri doğru ise x e M de *n-boyutlu bir harita* denir ve (U, x) ile gösterilir[(1)].

Tanım 2.3.2 : M bir cümle ve (U, x), M nin n-boyutlu bir haritası olsun. u_i, R^n nin i.koordinat fonksiyonu olmak üzere $x_i = u_i \circ x$ fonksiyonuna M nin (U, x) haritasına göre *i. koordinat fonksiyonu* denir $(1 \leq i \leq n)$.



Şekil 2.3.1

Tanım 2.3.3: $M \neq \varnothing$ bir cümle, (U,x) *ve* (V,y) *M de* $U \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde iki harita olsun.



Şekil 2.3.2

Eğer $y \circ x^{-1} : IR^n \to IR^n$ fonksiyonu bir C^k-diffeomorfizm ise M de (U,x) ve (V,y) haritaları C^k-*uyumludur* veya C^k-*bağdaşabilirdir* denir[(1)].

Tanım 2.3.4 : $M \neq \varnothing$ bir cümle ve $A = \{(U_i, x_i) | i \in I\}$, M ' nin haritalarının bir koleksiyonu olsun. Eğer,

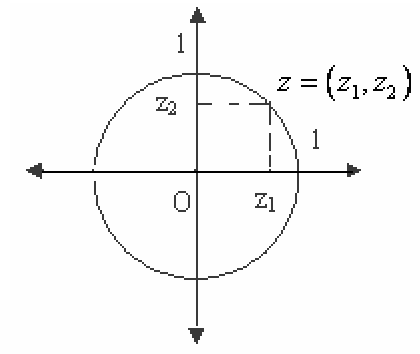
A_1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$

A_2) $\forall i, j \in I$ için $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ olacak şekildeki $\forall (U_i, x_i)$, $(U_j, x_j) \in A$ haritaları C^k-uyumlu ise *A ya M nin bir* C^k-*atlası* denir[(1)].

Eğer A_2 koşulu $k \in IN$ için sağlanıyorsa *A ya M nin bir* $C^\infty-$*atlası* denir

Örnek 2.3.1:

$$S^1 = \left\{ z = (z_1, z_2) \in IR^2 \,\middle|\, \underbrace{|z| = 1}_{\sqrt{z_1^2 + z_2^2} = 1} \right\}$$

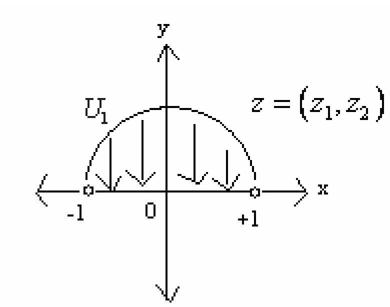


Şekil 2.3.3

$U_1 = \left\{ z = (z_1, z_2) \in S^1 \,\middle|\, z_2 > 0 \right\}$ için,

$x_1 : U_1 \to IR$

$z = (z_1, z_2) \to x_1(z) = z_1$



Şekil 2.3.4

$H_1)$ $x_1, 1:1$ dir.

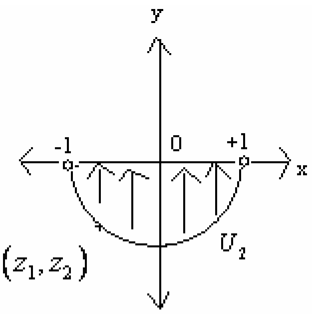
$H_2)$ $x_1(U_1) = (-1,1) \subset IR$ açık

$\Rightarrow (U_1, x_1)$, S^1 in bir haritasıdır.

$U_2 = \{z = (z_1, z_2) \in S^1 | z_2 < 0\}$ için,

$x_2 : U_2 \to IR$

$z = (z_1, z_2) \to x_2(z) = z_1$



Şekil 2.3.5

$H_1)$ x_2, $1:1$ dir.

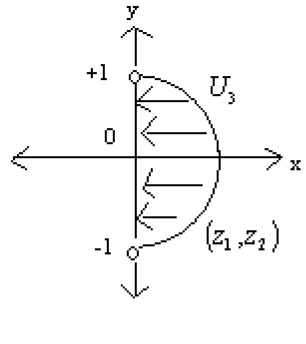
$H_2)$ $x_2(U_2) = (-1,1) \subset IR$ açıktır.

$\Rightarrow (U_2, x_2)$, S^1 in bir haritasıdır.

$U_3 = \{z = (z_1, z_2) \in S^1 | z_1 > 0\}$ için,

$x_3 : U_3 \to IR$

$z = (z_1, z_2) \to x_3(z) = z_2$



Şekil 2.3.6

$H_1)$ x_3, 1:1 dir.

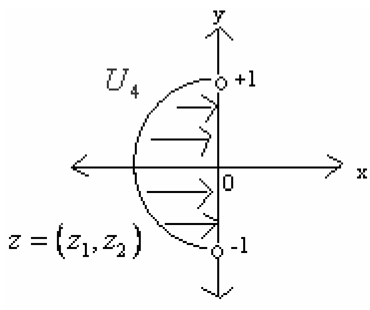
$H_2)$ $x_3(U_3) = (-1,1) \subset IR$ açıktır.

$\Rightarrow (U_3, x_3)$, S^1 in bir haritasıdır.

$U_4 = \{z = (z_1, z_2) \in S^1 \,|\, z_1 < 0\}$ için,

$x_4 : U_4 \to IR$

$z = (z_1, z_2) \to x_4(z) = z_2$



Şekil 2.3.7

$H_1)$ $x_4, 1:1$ dir.

$H_2)$ $x_4(U_4) = (-1,1) \subset IR$ açıktır.

$\Rightarrow (U_4, x_4)$, S^1 in bir haritasıdır.

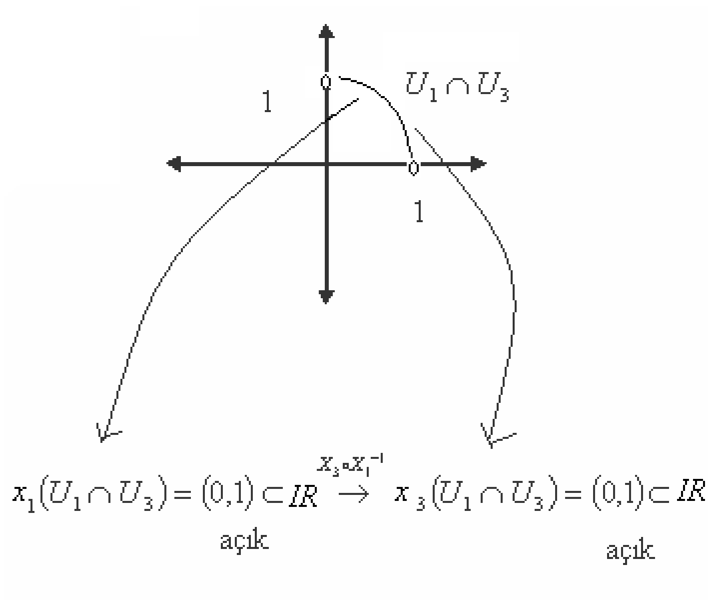
$A = \{(U_1,x_1),(U_2,x_2),(U_3,x_3),(U_4,x_4)\}$, S^1 in bir C^∞ atlasıdır.

Gerçekten,

$A_1)$ $\bigcup_{i=1}^{4} \cup_i = S^1$ dir.

$A_2)$ $\left.\begin{matrix} U_1 \cap U_2 = \varnothing \\ U_3 \cap U_4 = \varnothing \end{matrix}\right\}$ ve $\left.\begin{matrix} U_1 \cap U_3 \neq \varnothing \ , U_1 \cap U_4 \neq \varnothing \\ U_2 \cap U_3 \neq \varnothing \ , \ U_2 \cap U_4 \neq \varnothing \end{matrix}\right\}$ olduğundan bu bilgilerle ilgili haritalar uyumlu olmalıdır.

$U_1 \cap U_3 \neq \varnothing$ ve $U_1 \cap U_3 = \{(z_1,z_2) \in S^1 \mid z_2 > 0, z_1 > 0\}$ dir.



Şekil 2.3.8

$$t \to \left(x_3 \circ x_1^{-1}\right)(t) = x_3\left(x_1^{-1}(t)\right) = x_3\left(t, \sqrt{1-t^2}\right) = \sqrt{1-t^2}$$

$$\begin{aligned} x_3 \circ x_1^{-1} : (0,1) &\to (0,1) \\ t &\to \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

$$\left(x_3 \circ x_1^{-1}\right)'(t) = \left(\sqrt{1-t^2}\right)' = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

süreksiz olduğu yerler $t = -1 \notin (0,1)$ *ve* $t = +1 \notin (0,1)$ olduğundan $x_3 \circ x_1^{-1}$ fonksiyonunun $(0,1)$ de türevi var ve süreklidir.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} x_3 \circ x_1^{-1} : (0,1) &\to (0,1) \\ t &\to \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

diferensiyellenebilirdir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \left(x_3 \circ x_1^{-1}\right)^{-1} = x_1 \circ x_3^{-1} : (0,1) &\to (0,1) \\ t &\to \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

fonksiyonu da diferensiyellenebilirdir.

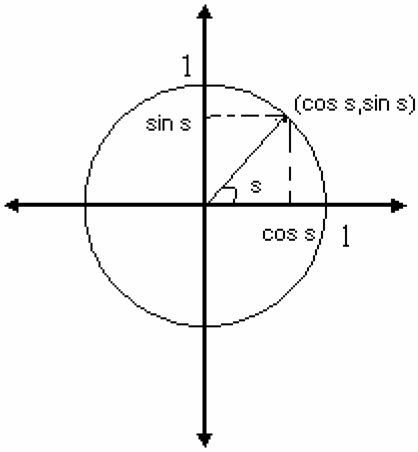
Böylece $x_1 \circ x_3^{-1}$ fonksiyonu bir diffeomorfizm olup (U_1, x_1), (U_3, x_3) haritaları uyumludur.

Benzer şekilde

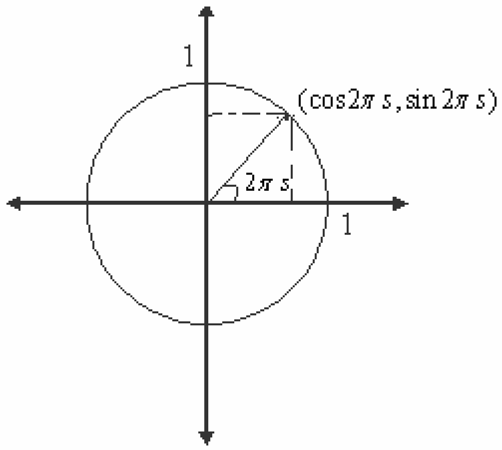
$$\left.\begin{array}{lll} (U_1, x_1) & \text{ile} & (U_4, x_4) \\ (U_2, x_2) & \text{ile} & (U_3, x_3) \\ (U_2, x_2) & \text{ile} & (U_4, x_4) \end{array}\right\} \text{haritaları da uyumludur.}$$

$A = \{(U_1, x_1), (U_2, x_2), (U_3, x_3), (U_4, x_4)\}$, S^1 in bir $C^\infty -$atlasıdır.

Örnek 2.3.2:



Şekil 2.3.9



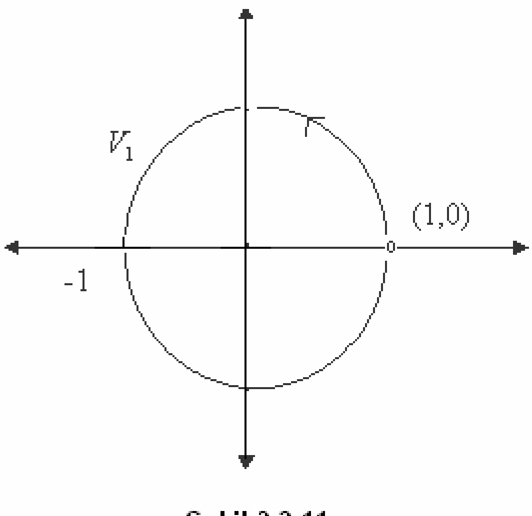
Şekil 2.3.10

$S^1 = \{(\cos 2\pi\, s, \sin 2\pi\, s) \mid s \in IR\}$

$V_1 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \mid 0 < s < 1\} \subset S^1$ için,

$$y_1 : V_1 \to IR$$

$(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \to s \in (0,1)$



Şekil 2.3.11

$H_1)$ $y_1, 1:1$ dir.

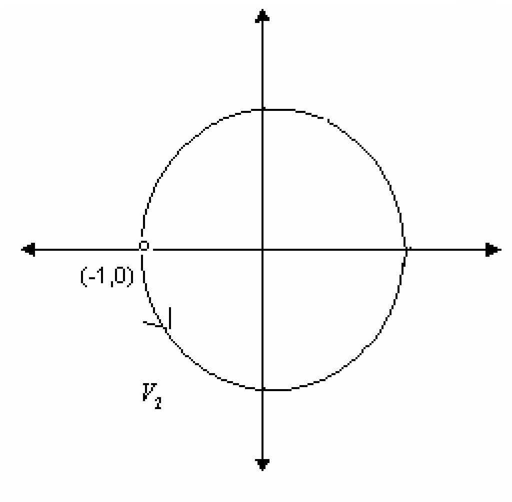
$H_2)$ $y_1(V_1) = (0,1) \subset IR$ de açıktır,

dolayısıyla (V_1, y_1), S^1 in bir haritasıdır.

$$V_2 = \left\{ (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \middle| -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} \right\} \subset S^1 \text{ için,}$$

$$y_2 : V_2 \to IR$$

$$(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \to s \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$



Şekil 2.3.12

$H_1)$ $y_2, 1:1$ dir.

$H_2)$ $y_2(V_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \subset IR$ de açıktır,

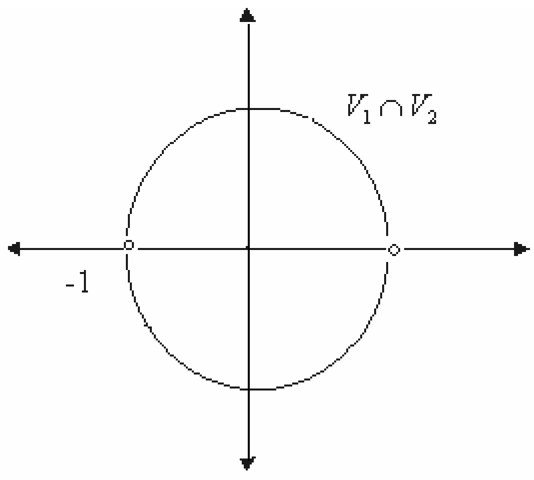
dolayısıyla (V_2, y_2), S^1 in bir başka haritasıdır.

$A_2 = \{(V_1, y_1), (V_2, y_2)\}$, S^1 in bir C^∞ haritasıdır.

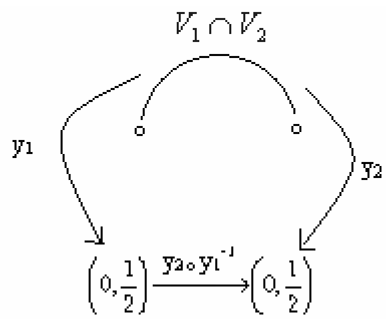
Gerçekten,

A_1) $V_1 \cup V_2 = S^1$ dir.

A_2) $V_1 \cap V_2 = S^1 - \{(-1,0),(1,0)\} \neq \emptyset$



Şekil 2.3.13

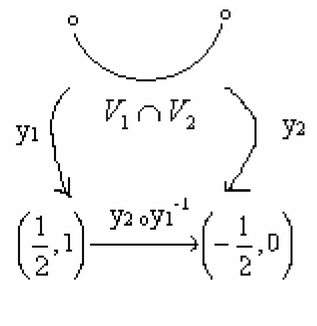


Şekil 2.3.14

$$s \to y_2\left(y_1^{-1}(s)\right) = y_2\left(\cos 2\pi\, s, \sin 2\pi\, s\right) = s$$

$y_2 \circ y_1^{-1} : \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \to \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ özdeşlik dönüşümüdür. Dolayısıyla diffeomorfizmdir.

$\qquad s \to s$



Şekil 2.3.15

$$s \to y_2\left(y_1^{-1}(s)\right) = y_2\left(\cos 2\pi\, s, \sin 2\pi\, s\right) = s - 1$$

$y_2 \circ y_1^{-1} : \left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \to \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ dönüşümü de diffeomorfizmdir.

$\qquad s \to s - 1$

$(V_1, y_1), (V_2, y_2)$ haritaları uyumludur. O halde ,

$\qquad A_2 = \left\{(V_1, y_1), (V_2, y_2)\right\}$, S^1 in bir başka C^∞ atlasıdır.

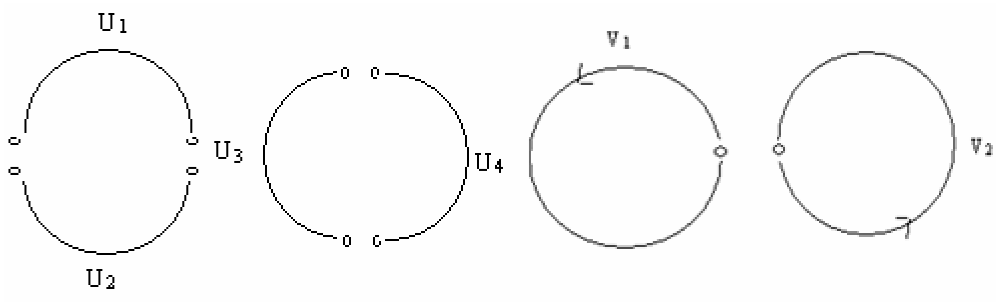
Tanım 2.3.5: $M \neq \emptyset$ bir cümle ve A_1 ve A_2 M de iki $C^k -$atlas olsun. Eğer $A_1 \cup A_2$ de M de bir $C^k -$atlas ise bu iki atlasa birbirine *denk atlaslar* denir(1).

Örnek 2.3.3:

$S^1 = \left\{ z = (z_1, z_2) \in R^2 \,\middle|\, z_1^2 + z_2^2 = 1 \right\} = \left\{ (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \,\middle|\, s \in R \right\}$ olmak üzere örnek 2.3.1 ve örnek 2.3.2 de A_1 ve A_2, S^1 in birer $C^\infty -$atlasları oldukları gösterilmişti.

Şimdi de A_1 ve A_2 C^∞ – atlaslarının denk atlaslar olduklarını gösterelim. Yani $A_1 \cup A_2$ nin S^1 in bir C^∞ – atlası olduğu gösterilecektir.

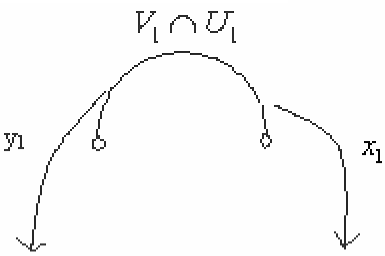
$A_1 \cup A_2 = \{(U_1, x_1), (U_2, x_2), (U_3, x_3), (U_4, x_4), (V_1, y_1), (V_2, y_2)\}$ ve



Şekil 2.3.16

$V_i \cap U_j \neq \text{Ø}$ i = 1,2 , j = 1,2,3,4 olmak üzere,

$V_1 \cap U_1 \neq \text{Ø}$ için (V_1, y_1) ve (U_1, x_1) haritalarının uyumlu olduklarını gösterelim.



Şekil 2.3.17

$$y_1(V_1 \cap U_1) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{x_1 \circ y_1^{-1}} x_1(V_1 \cap U_1) = (-1, 1)$$

$$s \to x_1\left(y_1^{-1}(s)\right) = x_1(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) = \cos 2\pi s$$

olup $\left(x_1 \circ y_1^{-1}\right)(s) = \cos 2\pi s$ dir.

$x_1 \circ y_1^{-1}$ bir trigonometrik fonksiyon olduğundan süreklidir.

Ayrıca

$$\frac{d\left(x_1 \circ y_1^{-1}\right)}{ds} = \frac{d\left(\cos 2\pi s\right)}{ds} = -2\pi . \sin 2\pi s$$

süreklidir.

Böylece $x_1 \circ y_1^{-1}$ bir diffeomorfizmdir. $\left(U_1, x_1\right)$, $\left(V_1, y_1\right)$ haritaları uyumludur.

Benzer şekilde $\left(V_i, y_i\right), \left(U_j, x_j\right)$, $1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 4$ haritaları da uyumludur.

O halde $A_1 \cup A_2$ de S^1 in bir $C^\infty -$atlasıdır. Bu durum A_1 ve A_2 atlaslarının denk olması anlamına gelir.

Bir M cümlesi üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir atlasların cümlesi $\bar{A}$ olsun. Buna göre,

$\overline{A} = \left\{ A \middle| \, A, M \text{ için bir diferensiyellenebilir atlas} \right\}$ yazılabilir.

Teorem 2.3.1: $\overline{A}$ üzerinde,

$$\beta = \left\{ \left(A_1, A_2\right) \middle| \, A_1 \cup A_2 \in \overline{A} \right\}$$

şeklinde tanımlı β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

i.) $\forall A \in \overline{A}$ için $A \cup A = A \in \overline{A}$ olduğundan $(A, A) \in \beta$ olup, β *yansıma* özelliğine sahiptir.

ii.) $\forall (A_1, A_2) \in \beta$ için,

$A_1 \cup A_2 \in \overline{A} \Rightarrow A_2 \cup A_1 \in \overline{A} \Rightarrow (A_2, A_1) \in \beta$ olup, β nın simetri özelliği vardır.

iii.) $(A_1, A_2) \in \beta$ ve $(A_2, A_3) \in \beta$ olsun.

$(A_1, A_2) \in \beta \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \overline{A}$ dir.

$(A_2, A_3) \in \beta \Rightarrow A_2 \cup A_3 \in \overline{A}$ dir.

A_1 için (U_i, x_i), A_2 için (V_j, y_j), A_3 için (W_k, z_k) alındığında, β bağıntısının tanımından, $y_j \circ x_i^{-1}$ ve $z_k \circ y_j^{-1}$ birer diffeomorfizm olduğu bilinmektedir. Bu iki fonksiyonun bileşkesi olan,

$$(z_k \circ y_j^{-1}) \circ (y_j \circ x_i^{-1}) = z_k \circ x_i^{-1}$$

fonksiyonu bir diffeomorfizm olup, β bağıntısı geçişme özelliğine sahiptir.

$\overline{A}$ üzerinde yukarıdaki gibi tanımlanan β bağıntısı, $\overline{A}$ cümlesini denklik sınıflarına ayırır.

Bu bağıntıya göre her bir denklik sınıfına M üzerinde bir *diferensiyellenebilir yapı* denir.

Bu yapı ile birlikte M ye *n-boyuttan bir diferensiyellenebilir* C^k *manifold* denir.

Eğer $\forall k \in IN$ için M, C^k manifold ise M ye C^∞ *manifold* denir.

2.4. Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

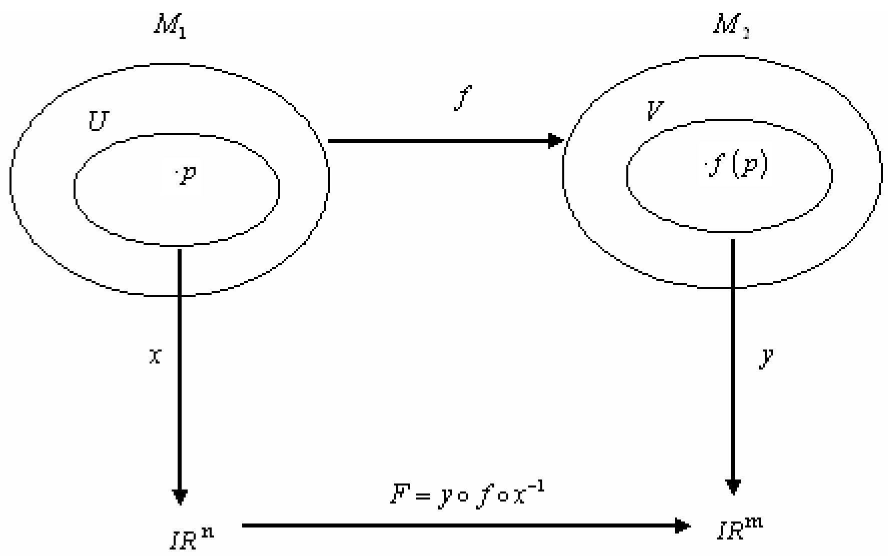
Tanım 2.4.1: M_1 n-boyutlu, M_2 m-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$$f : M_1 \to M_2$$

bir fonksiyon olsun. (U,x) *ve* (V,y) sırasıyla M_1 ve M_2 de birer harita olmak üzere,

$F = y \circ f \circ x^{-1}$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun verilen haritalara göre *koordinat temsilcisi* denir.

Eğer F, $x(p) \in IR^n$ de diferensiyellenebilir ise f'ye $p \in U \subset M_1$ de diferensiyellenebilirdir denir. [1]



Şekil 2.4.1

Teorem 2.4.1: M_1 ve M_2 sırasıyla n- boyutlu ve m-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere,

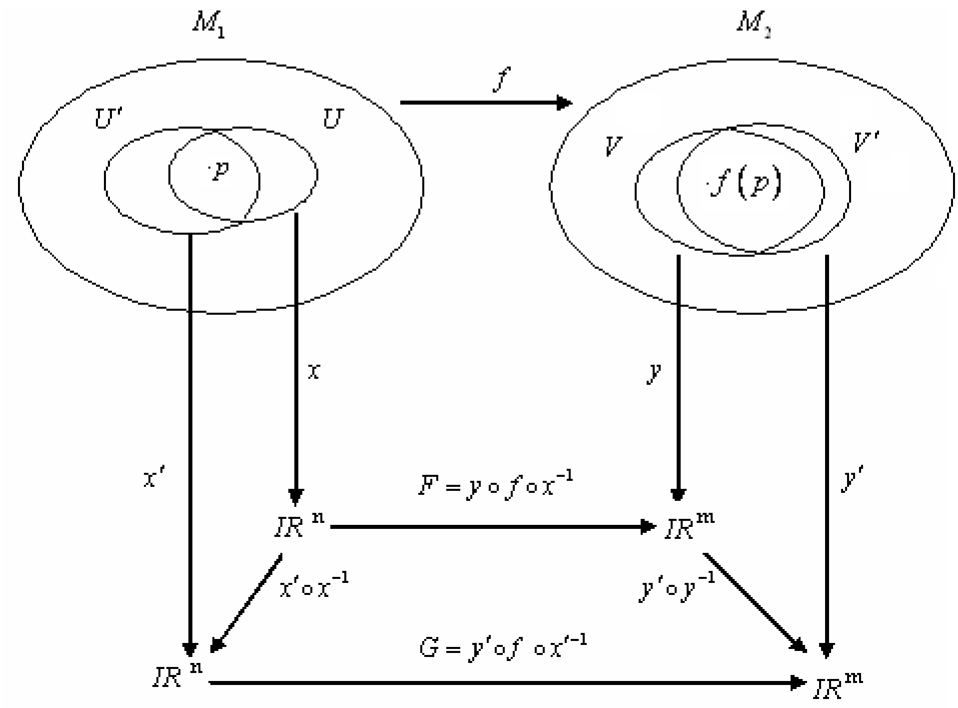
$f : M_1 \to M_2$ bir fonksiyon ve $p \in \text{Dom } f$ olsun.

f 'nin p 'deki diferensiyellenebilirliği seçilen haritalardan bağımsızdır[1].

İspat : $(U,x),(U',x'), M_1$ de p yi içeren haritalar ve (V,y), (V',y'), M_2 de $f(p)$ yi içeren haritalar olsun.

$F = y \circ f \circ x^{-1}$ ve $G = y' \circ f \circ x'^{-1}$ olmak üzere,

F, $x(p)$ de diferensiyellenebilir ise G, $x'(p)$ de diferensiyellenebilirdir. G nin $x(U \cap U')$ kısıtlanmasıyla $G = (y' \circ y^{-1}) \circ F \circ (x' \circ x^{-1})$ elde edilir. (U,x) ve (U',x'), M_1 de haritalar ve $U \cap U' \neq \emptyset$ olduğundan uyumludurlar.



Şekil 2.4.2

O halde $x' \circ x^{-1}$ diffeomorfizmdir. Benzer şekilde $y' \circ y^{-1}$ de diffeomorfizmdir. $x' \circ x^{-1}$, $y' \circ y^{-1}$ ve F, diferensiyellenebilir olduğundan,

$$G = \left(y' \circ y^{-1}\right) \circ F \circ \left(x' \circ x^{-1}\right)$$

de diferensiyellenebilirdir.

O halde, f 'nin p 'deki diferensiyellenebilirliliği seçilen haritalardan bağımsızdır.

Tanım 2.4.2 : M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f : M_1 \to M_2$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

Eğer f, $1:1$ ve f^{-1} de diferensiyellenebilir ise f *ye bir diffeomorfizm* adı verilir.

Eğer f bir global diffeomorfizm ($\text{Dom}\, f = M_1,$ $\text{range}\, f = M_2$) ise M_1 ve M_2 ye *diffeomorfiktirler* denir[(1)].

Örnek 2.4.1:

$M_1 = M_2 = IR$ olsun.

$$\begin{aligned} x : M_1 &\to IR \\ s &\to s \end{aligned}$$

$A_1 = \left\{\left(IR, id\right)\right\}$ bir atlastır. Bu atlasın oluşturduğu diferensiyellenebilir manifold M_1 olsun.

$$\begin{aligned} y = M_2 &\to IR \\ s &\to s^3 \end{aligned}$$

$A_2 = \left\{\left(IR, y\right)\right\}$ bir atlastır. Bu atlasın da oluşturduğu diferensiyellenebilir manifold M_2 olsun.

A_1 ile A_2 denk değildir. Denk olması için $A_1 \cup A_2$ bir atlas olmalıdır. Fakat

$$x \circ y^{-1} : y(IR) = IR \to x(IR) = IR$$
$$s \to \sqrt[3]{s}$$

dönüşümü $s = 0$ noktasında diferensiyellenebilir değildir. $x \circ y^{-1}$ diffeomorfizm değildir. (IR, x) ve (IR, y) haritaları uyumlu olmadığından $A_1 \cup A_2$, IR için bir atlas değildir.

Şimdi de M_1 ve M_2 nin diffeomorfik olduğunu göstereceğiz.

$$f : M_1 \to M_2$$
$$s \to \sqrt[3]{s}$$

$$F(s) = \left(y \circ f \circ x^{-1}\right)(s) = (y \circ f)\left(x^{-1}(s)\right) = (y \circ f)(s) = y\left(\sqrt[3]{s}\right) = s$$

olduğundan $F = id$ olup F, IR de diferensiyellenebilirdir. O halde f, M_1 de diferensiyellenebilirdir. $F, 1:1$ olduğundan $f, 1:1$ dir.

$$G = id \circ f^{-1} \circ y^{-1} = f^{-1} \circ y^{-1}$$

olmak üzere,

$$G(s) = \left(f^{-1} \circ y^{-1}\right)(s) = f^{-1}\left(\sqrt[3]{s}\right) = s$$

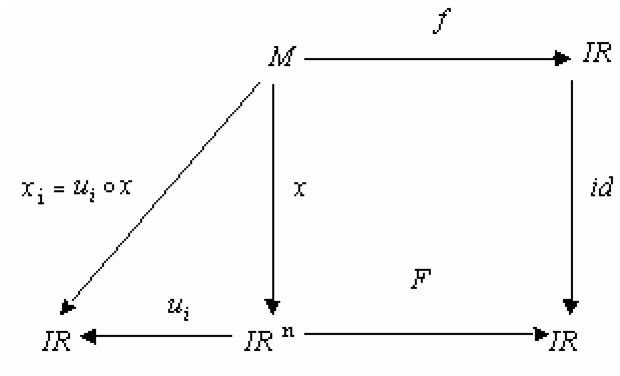
eşitliğinden $G = id$ olup G, IR de diferensiyellenebilirdir. Buna göre, f^{-1}, M_2 de diferensiyellenebilirdir. G, $1:1$ olduğundan f^{-1}, $1:1$ dir.

Sonuç olarak $f : M_1 \to M_2$ bir diffeomorfizmdir. f, global olduğundan M_1 ve M_2 diffeomorfiktirler.

2.5 Bir Manifold Üzerinde Türev

M bir diferensiyellenebilir manifold, A M nin bir C^{∞} atlası olmak üzere, $(U,x) \in A$ olsun. $f : M \to IR$ diferensiyellenebilir fonksiyonu için Dom $f = V$ ve $U \cap V \neq \varnothing$ üzerinde $f = F \circ x$ olacak şekildeki bir F fonksiyonu (yani f nin koordinat temsilcisi) için F diferensiyellenebilir ise f de diferensiyellenebilir olduğu tanım 2.4.1 den bilinmektedir.

u_i, IR^n nin i.koordinat fonksiyonu olmak üzere,



Şekil 2.5.1

F diferensiyellenebilir ise

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} : x(U \cap V) \subset IR^n \to IR$$

fonksiyonları mevcuttur.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial u_i} \circ x : U \cap V \subset M \to IR$$

şeklinde tanımlı olup $\dfrac{\partial F}{\partial u_i}$ 'ler $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ lerin koordinat temsilcisidir.

Her bir $i,\ 1 \le i \le n$ için $\dfrac{\partial F}{\partial u_i}$ diferensiyellenebilir olduğundan $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de diferensiyellenebilirdir. O halde f de diferensiyellenebilirdir.

Tanım 2.5.1: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F}{\partial u_i} \circ x$ fonksiyonuna f fonksiyonunun i.*kısmi türevi* denir[1].

Teorem 2.5.1: M bir diferensiyellenebilir manifold, $f : M \to IR$, $g : M \to IR$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $a, b \in R$ olsun. Bu durumda

$$i)\ \frac{\partial}{\partial x_i}(af + bg) = a\frac{\partial f}{\partial x_i} + b\frac{\partial g}{\partial x_i}$$
$$ii)\ \frac{\partial}{\partial x_i}(f.g) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.g + f.\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

dir[1].

M , $n-$ boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. M üzerinde tanım cümleleri p yi içeren M den IR ye diferensiyellenebilir bütün fonksiyonlarının cümlesi $\Im(p)$ olsun.

$$\Im(p) = \left\{ f \,\middle|\, f : M \xrightarrow{difbilir} IR,\ p \in Domf \right\}$$

şeklinde tanımlı cümle, üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir reel vektör uzayı oluşturur.

$$\begin{aligned} + : \Im(p) \times \Im(p) &\to \Im(p) \\ (f, g) &\to f + g : M \xrightarrow{difbilir} IR \\ &\qquad p \to (f+g)(p) = f(p) + g(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : IR \times \Im(p) &\to \Im(p) \\ (\lambda, f) &\to \lambda.f : M \xrightarrow{difbilir} IR \\ & \qquad p \to (\lambda.f)(p) = \lambda f(p) \end{aligned}$$

üstelik,

$$\begin{aligned} \bullet : \Im(p) \times \Im(p) &\to \Im(p) \\ (f, g) &\to f \bullet g : M \xrightarrow{difbilir} IR \\ & \qquad p \to (f \bullet g)(p) = f(p) \bullet g(p) \end{aligned}$$

iç işlemiyle birlikte $\Im(p)$ bir reel cebirdir.

Tanım 2.5.2: $\Im(p)$ de tanımlı bir $IR-$lineer fonksiyona $\Im(p)$ de bir *lineer operatör* denir[(1)].

$$\begin{aligned} L : \Im(p) &\xrightarrow{liner} IR \\ f &\to L(f) \end{aligned}$$

$\forall a, b \in IR,\ \forall f, g \in \Im(p)$ için $L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$

Tanım 2.5.3: $\Lambda : \Im(p) \to R$ bir lineer operatör ve

$$\forall f, g \in \Im(p) \text{ için } \Lambda(f.g) = \Lambda(f).g + f.\Lambda(g)$$

ise Λ ye $\Im(p)$'nin bir *türevi* denir[(1)].

Teorem 2.5.2 : M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun.

$$T_p M = \{\Lambda \mid \Lambda, \Im(p)'nin \text{ türevi}\}$$

cümlesini göz önüne alalım. Bu cümle, aşağıda tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte bir reel vektör uzayıdır[(1)].

$$+ : T_pM \times T_pM \to T_pM$$

$$(\Lambda,\Omega) \to \Lambda + \Omega : \Im(p) \to IR$$

$$f \to (\Lambda+\Omega)(f) = \Lambda(f) + \Omega(f)$$

$$\cdot : IR \times T_pM \to T_pM$$

$$(\lambda,\Lambda) \to \lambda.\Lambda : \Im(p) \to IR$$

$$f \to (\lambda.\Lambda)(f) = \lambda.\Lambda(f)$$

***Tanım 2.5.4*:** T_pM vektör uzayına M nin p noktasındaki *tanjant uzayı* denir. T_pM nin elemanlarına da p noktasındaki *tanjant vektörleri* denir(1).

Örnek 2.5.1: $\vec{v}$, IR^3 ' de bir z noktasında bir vektör olsun.

$$\vec{v} : \Im(z) \to IR$$

$$f \to \vec{v}(f) = \sum_{i=1}^{3} v_i . \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|_z$$

şeklinde tanımlanan $\vec{v}$, $\Im(z)$ de türevdir. Gerçekten,

i.) $\vec{v}, IR-$lineerdir,

$\forall a,b \in IR, \forall f,g \in \Im(z)$ için,

$$\begin{aligned}
\vec{v}(af+bg) &= \sum_{i=1}^{3} v_i . \left.\frac{\partial(af_i+bg_i)}{\partial x_i}\right|_z \\
&= \sum_{i=1}^{3} v_i . \left[\left.\frac{a\partial(f_i)+b\partial(g_i)}{\partial x_i}\right|_z \right] \\
&= a\sum_{i=1}^{3} v_i \left.\frac{\partial(f_i)}{\partial x_i}\right|_z + b\sum_{i=1}^{3} v_i \left.\frac{\partial(g_i)}{\partial x_i}\right|_z \\
&= a\vec{v}(f) + a\vec{v}(g)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{v}(af+bg) = a\vec{v}(f) + a\vec{v}(g)$ dir.

ii.) $\vec{v}$, Leibniz şartını sağlar,

$\forall f, g \in \Im(z)$ için,

$$\begin{aligned}
\vec{v}(fg) &= \sum_{i=1}^{3} v_i . \left.\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}\right|_z \\
&= \sum_{i=1}^{3} v_i \left[\left.\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}.g + f.\frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right)\right|_z \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} v_i . \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|_z \right). g\big|_z + f\big|_z . \left(\sum_{i=1}^{3} v_i . \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right|_z \right) \\
&= \vec{v}(f).g + f.\vec{v}(g)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{v}(fg) = \vec{v}(f).g + f.\vec{v}(g)$ dir.

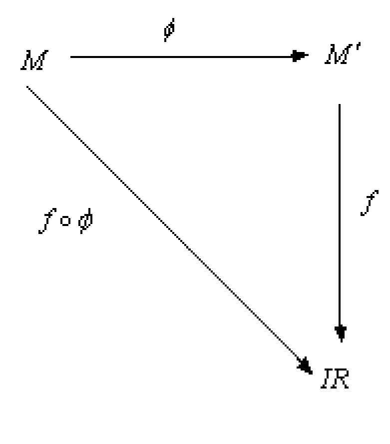
Teorem 2.5.3: M, $n-$boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold, (U, x) M nin bir haritası ve $p \in U$ olmak üzere $(U, x) \in A$ ise

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$$

cümlesi T_pM nin bir bazıdır. Bu baza T_pM nin (U, x) haritasına göre *standart bazı* denir [1].

2.6. Türev Dönüşümü

M ve M' diferensiyellenebilir manifoldlar, $\phi : M \to M'$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $p \in \text{Dom}\,\phi$ ve $\phi(p) = p'$ olmak üzere,



Şekil 2.6.1

$f \in \Im(p') \Rightarrow f \circ \phi \in \Im(p)$ olduğu açıktır.

$\Lambda \in T_p M$ için,

$$\begin{aligned} \Lambda : \Im(p) &\to IR \\ f \circ \phi &\to \Lambda(f \circ \phi) \end{aligned}$$

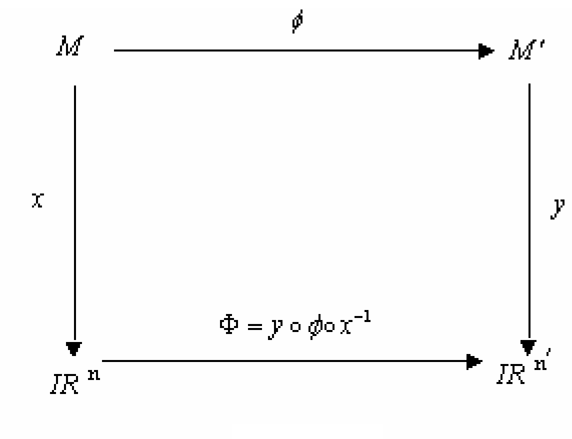
şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir ve Leibniz şartını sağlar. O halde $\Lambda, \Im(p)$ de bir türevdir.

$$\begin{aligned} \phi_{*_p} : T_p M &\to T_{p'} M' \\ \Lambda &\to \phi_{*_p}(\Lambda) : \Im(p') \to IR \\ & \qquad f \to \left(\phi_{*_p}(\Lambda)\right)(f) = \Lambda(f \circ \phi) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm de lineerdir ve Leibniz şartını sağlar [(1)].

***Tanım 2.6.1*:** Bu ϕ_{*_p} dönüşümüne, $T_p M$ üzerinde *ϕ nin p deki türev dönüşümü* denir[(1)].

ϕ_{*_p} lineer olduğundan buna bir matris karşılık gelir. Şimdi bu matrisi yani Jakobiyen matrisi bulacağız.



Şekil 2.6.2

x ve y sırasıyla $p \in M$ ve $\phi(p) = p'$ noktalarında birer harita olmak üzere

$$\phi_{*_p} : T_p M \to T_{p'} M'$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \to \phi_{*_p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^{n'} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \left(y_j \circ \phi\right) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_{\phi(p)}$$

ϕ_{*_p} ye karşılık gelen matris yani Jakobiyen matris $J(\phi, p)$ ile gösterilirse,

$$J(\phi, p) = \left[\left.\frac{\partial\left(y_j \circ \phi\right)}{\partial x_i}\right|_p\right]_{n' \times n} \in IR_n^{n'}$$

dir.

Teorem 2.6.1: M, M' ve M'' diferensiyellenebilir manifoldlar,

$\phi : M \to M'$ ve $\psi : M' \to M''$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\left(\psi\circ\phi\right)_{*_p}=\psi_{*_{\phi(p)}}\circ\phi_{*_p}$$

dir[1].

Tanım 2.6.2: M ve M' diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\phi:M\rightarrow M'$ diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. $p\in M$ olmak üzere ϕ_{*_p} lineer dönüşümünün rankı ϕ nin p deki rankı olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.6.3: $\bigcup\limits_{p\in M}T_pM=TM$

şeklinde oluşturulan cümle M nin *tanjant demeti* olarak adlandırılır[1].

Tanım 2.6.4: M ile M' diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\phi:M\rightarrow M'$ diferensiyellenebilir olsun. range ϕ üzerinde $\phi\circ\psi=id$ olacak şekilde bir $\psi:M'\rightarrow M$ diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa ψ *ye* ϕ *nin kesiti* denir. [1].

Tanım 2.6.5: $\pi:TM\rightarrow M$ $\pi\left(V_p\right)=p$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm ve bu dönüşümün bir kesiti X olsun. Öyleki

$\forall f\in C^{\infty}\left(M,IR\right)$ ve $DomX\cap Domf=U\neq\varnothing$ olmak üzere

$$Xf:U\subset M\rightarrow IR$$
$$\text{p}\rightarrow\left(Xf\right)\left(p\right)=X_pf$$

fonksiyonu her f için diferensiyellenebilir ise X kesitine $U\subset M$ üzerinde bir *vektör alanı* denir[1].

Tanım 2.6.5 den de anlaşıldığı gibi $U \subset M$ cümlesi üzerinde tanımlı X vektör alanı $X : M \to TM$ her bir $p \in U$ noktasında T_pM de X_p vektörünü karşılık getirir. $U \subset M$ açık altcümlesi üzerinde tanımlı vektör alanlarının kümesi $\chi(U)$ ile gösterilecektir. $\chi(U)$, $C^\infty(U, IR)$ üzerinde bir modül olup bir lokal bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \middle| 1 \leq i \leq n \right\}$ dir. Buradan da anlaşıldığı gibi $\frac{\partial}{\partial x^i}$ kısmi türev operatörleri M de bir vektör alanıdır. Bu vektör alanlarına *koordinat vektör alanları* denir.

Tanım 2.6.6: M diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde reel değerli C^1-sınıfından bir fonksiyon f olsun. O zaman, f nin bir $P \in M$ noktasındaki *tam diferensiyeli* diye,

$\forall X_P \in T_PM$ için,

$$\left(df|_P\right)(X_P) = X_P f = X_P[f]$$

şeklinde tanımlı $df|_P$ fonksiyonuna denir(2).

Tanım 2.6.6 dan

$dx_i|_p\left(X_p\right) = X_p\left[x_i\right]$ dir. $X_p = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ ise $dx_i|_p\left(X_p\right) = \xi^i$ olduğu açıktır.

Özel olarak $dx_i|_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ dir.

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM bir vektör uzayı olduğundan cebirsel dualinden bahsedebiliriz.

Tanım 2.6.7: T_pM nin cebirsel duali T_p^*M ile gösterilsin. T_p^*M ye M nin $p \in M$ noktasındaki *kotanjant uzayı* denir. T_p^*M nin her bir elemanına $p \in M$ noktasında, *kotanjant vektör* adı verilir(2).

$\left(U, x = \left(x^i\right)\right)$, M de bir harita olmak üzere $p \in U$ ise T_p^*M in bir bazı $\left\{ dx^i\big|_p \; 1 \le i \le n \right\}$ cümlesidir. Bu baz $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \; 1 \le i \le n \right\}$ bazının dualidir.

Tanım 2.6.8: M diferensiyellenebilir manifoldunun $p \in M$ noktasındaki kotanjant uzayı T_p^*M olsun. Buna göre bir

$$w : M \to \bigcup_{p \in M} T_p^*M$$

fonksiyonu için

$$\pi \circ w : M \xrightarrow{\text{özdeşlik}} M$$

olacak şekilde bir

$$\pi : \bigcup_{p \in M} T_p^*M \to M$$

fonksiyonu mevcut ise w ye M üstünde bir $1-form$ denir.

M üstünde 1-formların cümlesini χ^*M ile gösterilecektir.

χ^*M , $C^\infty\left(U, IR\right)$ halkası üzerinde bir modül ve bu modülün bir lokal bazı $\left\{ dx^i\big|_p \; 1 \le i \le n \right\}$ cümlesidir (2).

$w \in \chi^*M$, $X \in \chi M$ ve $p \in M$ için

$$\big(w(X)\big)(p) = \big(w(p)\big)\big(X_p\big)$$

eşitliği yazılabilir.

$w(X) \in C(M, IR)$ dir

Teorem 2.6.2: $w \in \chi^* M$ verilsin. Bu durumda $w = \sum_{i=1}^{n} w\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i$ dir[2].

Tanım 2.6.9: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \to V$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $[,]$ dönüşümüne, V üzerinde bir *Lie operatörü* denir. V vektör uzayınada bir *Lie cebiri* denir.

i) 2-lineer
ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)
iii) $\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = 0, \ \forall X, Y, Z \in V$

dir[2].

Tanım 2.6.10: M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} [,] : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to [,](X, Y) = [X, Y] \end{aligned}$$

$\forall f \in C^{\infty}(M, IR)$ için,

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir Lie operatörü olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall f, g \in C^{\infty}(M, IR)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$i.)\ [X,Y](fg) = f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$

$ii.)\ [fX,gY] = fg[X,Y] + f\left(X[g]\right)Y - g\left(Y[f]\right)X$

$iii.)\ [X,X] = 0$

dır[(2)].

Tanım 2.6.11: M bir C^{∞}-manifold olsun.

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için,

$i)\ \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,\ \ \forall X,Y,Z \in \chi(M),\ \forall f,g \in C^{\infty}(M,IR)$

$ii)\ \nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y,\ \ \forall X,Y \in \chi(M), \forall f \in C^{\infty}(M,IR)$

$iii.)\ \nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üstünde bir *afin konneksiyon* ve ∇_X e de X e göre *kovaryant türev operatörü* denir[(2)].

∇ nın lokal ifadesini verelim. X ve Y vektör alanlarının bir $\left(U, x = \left(x^i\right)\right)$ haritasına göre lokal ifadeleri

$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \\ &= \nabla_{X^1 \frac{\partial}{\partial x^1}} Y + \nabla_{X^2 \frac{\partial}{\partial x^2}} Y + \ldots + \nabla_{X^n \frac{\partial}{\partial x^n}} Y \\ &= X^1 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} Y + X^2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} Y + \ldots + X^n \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} Y \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + Y^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + Y^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X^i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X^i \left(\frac{\partial Y^1}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^1} + Y^1 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial Y^n}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^n} + Y^n \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X^i \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$$

eşitliği ile verilebilir. Bu eşitlik ∇ nın $\left(U, x = \left(x^i\right)\right)$ haritasına göre lokal ifadesidir.

$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$, eşitliğindeki Γ_{ij}^k fonksiyonlarına ∇ nın *bileşen fonksiyonları* denir.

2.7. Tensörler

Tanım 2.7.1: Reel sayılar cismi üzerinde r-tane vektör uzayı $V_1, V_2, \cdots, V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \to IR$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$ için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in IR$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f\left(v_1, \cdots, v_{i-1}, au_i + bv_i, v_{i+1}, \cdots, v_r\right) &= af\left(v_1, \cdots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \cdots, v_r\right) \\ &+ bf\left(v_1, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_r\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ise , f ye *r-lineer fonksiyon* denir [(2)].

Tanım 2.7.2: $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ den IR ye tanımlı bütün r-lineer fonksiyonların cümlesini, $L\left(V_1, V_2, \cdots, V_r; IR\right)$ ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalerle çarpma işlemleri, sırasıyla $\forall\left(u_1, u_2, \cdots, u_r\right) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ için,

$$\left(f_1 + f_2\right)\left(u_1, u_2, \cdots, u_r\right) = f_1\left(u_1, u_2, \cdots, u_r\right) + f_2\left(u_1, u_2, \cdots, u_r\right)$$

ve $\lambda \in IR$ için,

$$\left(\lambda f\right)\left(u_1, u_2, \cdots, u_r\right) = \lambda f\left(u_1, u_2, \cdots, u_r\right)$$

şeklinde tanımlanırsa, bu iki işleme göre $L\left(V_1, V_2, \cdots, V_r; IR\right)$, IR üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, \cdots, V_r^*$ dual vektör uzaylarının *tensörel çarpımı* denir ve

$$L\left(V_1, V_2, \cdots, V_r; IR\right) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$$

şeklinde gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına *r. dereceden bir tensör* denir. Eğer

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_r = V$$

ise, $V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın herbir elemanına da *r. mertebeden bir kovaryant tensör* denir. Kovaryant tensörlerin uzayı $T^r\left(V\right)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir[(2)].

Tanım 2.7.3: Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine V^* alınırsa $\left(V^*\right)^*$ uzayı V ye izomorf olduğundan V^* üzerinde s-lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya *kontravaryant tensör uzayı* denir. $T^s\left(V^*\right)$ veya $\otimes^s\left(V\right)$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanlarına *s. mertebeden kontravaryant tensörler* denir(2).

Tanım 2.7.4: IR sayılar cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V ve V nin duali V^* olsun.

$$L\left(V^r, V^{*s}; IR\right) = \left\{ f \middle| f : V^r \times V^{*s} \xrightarrow{(r+s)-lineer} IR \right\}$$

cümlesi, tanım 2.7.2. verilen toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzaya *r. mertebeden kovaryant ve s. mertebeden kontravaryant tensör uzayı* denir ve

$$T^r\left(V\right) \otimes T^s\left(V^*\right) = \otimes^r V^* \otimes \otimes^s\left(V\right)$$

veya $T_s^r\left(V\right)$ ile gösterilir (2).

Tanım 2.7.5: M bir $C^\infty-$manifold olsun.

$$T : \underbrace{\chi\left(M\right) \times \cdots \times \chi\left(M\right)}_{\text{r}-\text{tane}} \times \underbrace{\chi^*\left(M\right) \times \cdots \times \chi^*\left(M\right)}_{\text{s-tane}} \rightarrow C^\infty(M, IR)$$

$$T\left(X_1, \cdots, X_r, W_1, \cdots, W_s\right)\left(p\right) = T_p\left(X_1\big|_p, \cdots, X_r\big|_p, W_1\big|_p, \cdots, W_S\big|_p\right)$$

şeklinde tanımlı T dönüşümü her bir $p \in M$ noktasına T_pM de $\left(r,s\right)-$tipinde bir tensör karşılık getiriyorsa buna *M de bir tensör alanı* denir.

2.8. Riemann Manifoldu

Tanım 2.8.1: V bir vektör uzayı ve G, V üzerinde $(0,2)-$tipinde bir tensör olsun. Eğer,

$i)$ G simetriktir: $G(u,v)=G(v,u)\ \ \forall u,v\in V$,

$ii)$ G bilineerdir: $G(au_1+bu_2,v)=aG(u_1,v)+bG(u_2,v)\ \ \forall a,b\in IR, \forall v\in V$,

$$G(u,av_1+bv_2)=aG(u,v_1)+bG(u,v_2)\ \ \forall a,b\in IR, \forall u\in V$$

$iii)$ Pozitif tanımlılık: $\forall u\in V$ için $\mathrm{G}(u,u)\geq 0, G(u,u)=0 \Leftrightarrow u=0$

koşulları sağlanıyorsa G ye V üzerinde bir *İç Çarpım* veya bir *metrik tensör* denir. (G,V) ye de bir *İç Çarpım Uzayı* denir[(2)].

Tanım 2.8.2: M bir C^∞-manifold olsun. M üzerinde vektör alanları uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M,IR)$ olmak üzere

$$<,>: \chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^\infty(M,IR)$$

dönüşümü M nin her bir p noktasına T_pM de bir iç çarpım karşılık getirirse $(M,<,>)$ ikilisine bir *Riemann manifoldu* denir. $(M,<,>)$ ikilisinin yerine bazan kısaca M de yazılır. Ancak M Riemann manifoldu denildiğinde M de tanımlı $<,>$ *metrik tensörün* varlığı anlaşılacaktır[(2)].

Tanım 2.8.3: M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde afin konneksiyon ∇ olmak üzere,

$\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$i)\ [X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X,$
$ii)\ XG(Y,Z)=G(\nabla_X Y,Z)+G(Y,\nabla_X Z),$

özelliklerini sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde bir *Riemann konneksiyonu* denir(2).

2.9. Altmanifoldlar

Tanım 2.9.1: M ve $\bar{M}$ birer C^∞ manifoldlar ve $f:M\to\bar{M}$ bir C^∞ fonksiyon olsun. $\forall p\in M$ için rank $f=$ boy M ise f ye bir *immersiyon* denir (2).

Örnek 2.9.1: IR de $s\to\left(\dfrac{1-s^2}{1+s^2},\dfrac{2s}{1+s^2}\right)$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu bir immersiyondur.

Çünkü, $J_f^s=\begin{bmatrix}\dfrac{-4s}{(1+s^2)^2} & \dfrac{2(1-s^2)}{(1+s^2)^2}\end{bmatrix}$ ve $\forall s\in IR$ için rank $f=1$ dir.

f fonksiyonu bir injectiondur ve değer kümesi bir delik dairedir.

Örnek 2.9.2: IR de $s\to(s^2,s^3)$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu bir immersiyon değildir.

Çünkü, $J_f^s=\begin{bmatrix}2s & 3s^2\end{bmatrix}$ olup $s=0$ için $J_f^s=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$ dır.

$s=0$ için rank $f=0$ dır. f fonksiyonu bir immersiyon değildir.

Tanım 2.9.2: Eğer f immersiyonu birebir ise $f(M)\subset\bar{M}$ ye $\bar{M}$ nin bir *immersed altmanifoldu* denir.

Tanım 2.9.3: $f : M \to \bar{M}$ birebir immersiyon olsun. $\tilde{M} = f\left(M\right)$ olmak üzere $\tilde{M}$ nın altuzay topolojisine göre f bir homeomorfizm ise f ye bir *imbedding* ve $\tilde{M}$ ya M nin $\bar{M}$ içine bir *imbeddingi* veya $\bar{M}$ de bir *imbedded altmanifold* denir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında, altmanifold denildiğinde immersed altmanifold kasdedilecektir.

Örnek 2.9.3: $S\left(3, IR\right)$, $M\left(3\times 3, IR\right)$ nin bir altmanifoldu mudur?

Çözüm:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \in S\left(3, IR\right) \text{ olmak üzere,}$$

$\varphi : IR_3^3 \to IR^9$ dir.

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) = \left(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\right) \text{ dir.}$$

$\phi\big|_{S(3,R)} : S\left(3, IR\right) \to IR^9$ olduğunda, $\phi\left(A\right) = \left(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{13}, a_{23}, a_{33}\right)$ olur.

$\pi : IR^9 \to IR^6$

$\pi\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\right) = \left(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_9\right)$

$\pi \circ \phi\big|_{S(3,R)} : S\left(3, IR\right) \to IR^6$ dir.

$$\begin{tikzcd} S\left(3, IR\right) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\bar{\varphi} = \pi \circ \varphi"'] & IR^9 \arrow[dl, "\pi"] \\ IR^6 & \end{tikzcd}$$

S için $A = \{(S, \overline{\varphi})\}$ tek haritalı bir atlastır. Bu atlasla birlikte $S(3, IR)$, $6-$boyutlu bir $C^\infty-$manifolddur.

$\overline{x_i} = x_i \circ \overline{\varphi}$, $x_i : IR^6 \to IR$ lokal koordinat fonksiyonlarıdır.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{x_1}(A) = a_{11} \\ \overline{x_2}(A) = a_{12} \\ \overline{x_3}(A) = a_{13} \\ \overline{x_4}(A) = a_{22} \\ \overline{x_5}(A) = a_{23} \\ \overline{x_6}(A) = a_{33} \end{array}\right\} \left\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{x_5}, \overline{x_6}\right\} \text{ lokal koordinat fonksiyonlarıdır.}$$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & M(3\times 3, IR) \\ \overline{\phi}\downarrow & & \downarrow\phi \\ IR^6 & \xrightarrow{\hat{i}} & IR^9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{i}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) &= \left(\phi \circ i \circ \left(\overline{\phi}\right)^{-1}\right)(x_1,x_2,\cdots,x_6) \\ &= (\phi \circ i)\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x_1,x_2,x_3,x_2,x_4,x_5,x_3,x_5,x_6) \end{aligned}$$

dir.

$$J(\hat{i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{9\times 6}$$

$\Rightarrow \text{rank } J(\hat{i}) = 6 = \text{boy } S \ \ dir.$

Buradan da görülmektedir ki i bir immersiyondur. O halde $S(3, IR)$, $M(3\times 3, IR)$ nin bir altmanifoldudur.

Örnek 2.9.4: S^2 nin**,** IR^3 ün bir altmanifoldu olduğu gösterilebilir ve teğet uzayı bulunabilir.

$S^2 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, IR^3 deki birim kürenin,

$U \subset S^2$ olmak üzere $U = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ olsun.

$\phi : U \to IR^2$ için
$(x, y, z) \to (x, y)$

H_1.) ϕ, $1:1$ dir.

Gerçekten,

$\phi(x_1, y_1, z_1) = \phi(x_2, y_2, z_2)$ olsun.

$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ dir.

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} = \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2} = z_2$

$\Rightarrow z_1 = z_2$ dir.

$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ olduğundan ϕ , $1:1$ dir.

H_2.) $\phi(U) \subset IR^2$ açıktır.

Gerçekten,

$\phi(U) = (-1, +1) \times (-1, +1) \subset IR^2$ açıktır.

O halde (U, ϕ), S^2 de bir haritadır.

$S^2 \subseteq IR^3$, $i : S^2 \to IR^3$ dönüşümünün $1:1$ bir immersiyon olduğunu gösterelim.

$\{x_1, x_2\}$, IR^2 de koordinat fonksiyonları, $\{u_1, u_2\}$, S^2 de lokal koordinatlardır.

$$\begin{tikzcd} U \subset S^2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & IR^3 \\ V = (-1,+1)\times(-1,+1) \subset IR^2 \arrow[ur, "\hat{i}"'] & \end{tikzcd} \qquad \hat{i} = i \circ \varphi^{-1}$$

$x_1 \circ \phi = u_1,\ u_1(P) = (x_1 \circ \phi)(P) = p_1$ ve $x_2 \circ \phi = u_2,\ u_2(P) = (x_2 \circ \phi)(P) = p_2$ dir.

$$\begin{aligned} \hat{i}(P) &= \left(i \circ \phi^{-1}\right)(p) \\ &= i\left(\phi^{-1}(p)\right) \\ &= i\left(p_1, p_2, \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}\right) \\ &= \left(p_1, p_2, \sqrt{1 - p_1^2 - p_2^2}\right) \end{aligned}$$

$$\hat{i}(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right)$$

dir. Jakobiyen matrisi,

$$J\left(\hat{i}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} & \dfrac{-x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

olduğundan rank $J\left(\hat{i}\right) = 2 =$ boy S^2 dir.Buna göre i bir immersiyondur.

$i,\ 1:1$ olduğundan S^2, R^3 ün, bir altmanifoldu olduğu görülür.

$$J\left(\hat{i}\right)_{\phi(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} & \dfrac{-x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \end{bmatrix}_{\phi(p)}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-x_1(\phi(p))}{\sqrt{1-(x_1(\phi(p)))^2-(x_2(\phi(p)))^2}} & \dfrac{-x_2(\phi(p))}{\sqrt{1-(x_1(\phi(p)))^2-(x_2(\phi(p)))^2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} & \dfrac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \end{bmatrix}_P$$

olduğunu biliyoruz.

$p \in U$, p nin (U,φ) ye göre koordinatları (p_1, p_2) olsun. $i_{*p} : T_pS^2 \to T_{i(p)}IR^3$ lineer dönüşümü gözönüne alınsın. i nin Jakobiyen matrisini ve lineer dönüşüm ile matris eşlemesini de gözönüne alarak şunu yazabiliriz.

$$V_p = V_1 \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p + V_2 \left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_p$$

olmak üzere

$$i_{*p}(V_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} & \dfrac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(V_1, V_2, \frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}.V_1 + \frac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}.V_2 \right)$$

yazılabilir.

Özel olarak V_p yerine $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_1}\right|_p$ ve $\left.\dfrac{\partial}{\partial u_2}\right|_p$ baz vektörleri alınırsa,

$$i_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p\right)=\left(1,0,\frac{-p_1}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}\right)$$

$$i_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_p\right)=\left(0,1,\frac{-p_2}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}\right)$$

elde edilir. S^2, IR^3 ün bir altmanifoldu olduğundan S^2 nin p deki tanjant uzayı $i_{*p}\left(T_pS^2\right)\subset T_pIR^3$ altuzayıdır.

Buna göre

$$\begin{aligned}i_{*p}\left(T_pS^2\right)&=S_p\left\{i_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_p\right),i_{*p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_2}\right|_p\right)\right\}\\&=S_p\left\{\left(1,0,\frac{-p_1}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}\right),\left(0,1,\frac{-p_2}{\sqrt{1-p_1^2-p_2^2}}\right)\right\}\end{aligned}$$

dir.

i_{*p} birebir olduğundan T_pS^2 ile $i_{*p}\left(T_pS^2\right)$ izomorftur.

Daha genel olarak,

Tanım 2.9.4: M bir $C^\infty-$manifold ve M' de M nin bir altmanifoldu olsun. $i:M'\to M$ doğal inclucion (1:1) dönüşümü olmak üzere i_{*p} lineer dönüşümünün görüntü cümlesine $p\in M'$ noktasında M' ye *teğet uzay* denir.

Örnek 2.9.5: M bir diferensiyellenebilir manifold ve $U\subset M$ açık olsun. U, M nin bir altmanifoldudur. Bu tür altmanifoldlara *açık altmanifoldlar* denir. Ayrıca boy $U=$ boy M dir. Öte yandan M nin kendi boyutuna eşit boyutlu altmanifoldları sadece açık altmanifoldlarıdır.

Tanım 2.9.5: (V,G), $(W,\overline{G})$ birer iç çarpım uzayı ve $L:V\to W$ lineer olsun. $\forall u,v\in V$ için $G(u,v)=\overline{G}(L(u),L(v))$ ise L ye bir *izometri* denir.

Buna göre $\forall u\in V$ için $\|u\|=\|L(u)\|$ dir.

Tanım 2.9.6: $(\overline{M},\overline{G})$ bir Riemann manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için $G(X,Y)=\overline{G}(di(X),di(Y))$ şeklinde tanımlı G ye M üzerinde $\overline{G}$ den *indirgenmiş Riemann metriği* denir.

$(\overline{M},\overline{G})$ n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\overline{M}$ de bir harita $(U,(x^i))$ olsun. $X,Y\in\chi(\overline{M})$ ve $X=\sum_{i=1}^{n}X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=\sum_{j=1}^{n}Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ olsun. $\overline{G}$ nin özelliklerini gözönüne alırsak, $\overline{G}(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}X^iY^j\overline{G}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ yazılabilir.

$\overline{G}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\overline{G}_{ij}$ yazılırsa, $\overline{G}(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{G}_{ij}X^iY^j$ elde edilir.

$X^i=dx^i(X)$ ve $Y^j=dx^j(Y)$ olduğunu da biliyoruz. O halde,

$\overline{G}(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{G}_{ij}dx^i(X)dx^j(Y)$ yazılabilir. Tensörlerin çarpımı tanımı gözönüne alındığında $\overline{G}(X,Y)=\left(\sum_{i,j=1}^{n}\overline{G}_{ij}dx^i\otimes dx^j\right)(X,Y)$ yazılabilir.

İki fonksiyonun eşitliğinden

$$\overline{G}=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{G}_{ij}dx^i\otimes dx^j \qquad (2.9.1)$$

elde edilir. $(2.9.1)$ eşitliğine $\overline{G}$ nin $\left(U,\left(x^i\right)\right)$ haritasına göre *lokal ifadesi* ve $\overline{G}_{ij}$ reel değerli fonksiyonlarına da $\overline{G}$ nin verilen haritaya göre *bileşenleri* denir. $\overline{G}_{ij}$ fonksiyonlarının bilinmesi $\overline{G}$ yi belirtmeye yeter.

Örnek 2.9.6: R^3 deki standart iç çarpımı kullanarak, S^2 üzerine bir metrik indirgeyelim.

Örnek 2.9.4 de S^2 nin R^3 ün bir altmanifoldu olduğu gösterilmişti.

$$\begin{aligned}G_{11} &= \overline{G}\left(di\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right), di\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)\right)\\ &=<\left(1,0,\frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}\right),\left(1,0,\frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}\right)>\\ &=1+\frac{u_1^2}{1-u_1^2-u_2^2}\\ &=\frac{1-u_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{11}=\frac{1-u_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}$$

dir.

$$\begin{aligned}G_{12} &= \overline{G}\left(di\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right), di\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)\right)\\ &=<\left(1,0,\frac{-u_1}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}\right),\left(0,1,\frac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}\right)>\\ &=\frac{u_1.u_2}{1-u_1^2-u_2^2}\\ &=G_{21}\end{aligned}$$

dir.

$$G_{22} = \bar{G}\left(di\left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right), di\left(\frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right)$$

$$= < \left(0, 1, \frac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \right), \left(0, 1, \frac{-u_2}{\sqrt{1-u_1^2-u_2^2}} \right) >$$

$$= 1 + \frac{u_2^2}{1-u_1^2-u_2^2}$$

$$= \frac{1-u_1^2}{1-u_1^2-u_2^2}$$

$$\Rightarrow G_{22} = \frac{1-u_1^2}{1-u_1^2-u_2^2}$$

dir.

Böylece S^2 üzerinde indirgenmiş metrik matris formunda

$$G = \begin{bmatrix} \dfrac{1-u_2^2}{1-u_1^2-u_2^2} & \dfrac{u_1.u_2}{1-u_1^2-u_2^2} \\ \dfrac{u_1.u_2}{1-u_1^2-u_2^2} & \dfrac{1-u_1^2}{1-u_1^2-u_2^2} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.9.7: $(\bar{M}, \bar{G})$ bir Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için T_pM, $T_p\bar{M}$ nin bir altuzayıdır. T_pM nin dik tümleyeni $T_p^{\perp}M = \left\{ V_p \middle| \bar{G}(V_p, U_p) = 0, \forall U_P \in T_PM \right\}$ şeklinde tanımlıdır. Lineer cebirden biliyoruz ki $T_p\bar{M} = T_pM \oplus T_p^{\perp}M$ şeklinde yazılabilir. $X \in \chi(\bar{M})$ olmak üzere, $\forall p \in M$ için $X_p \in T_p^{\perp}M$ oluyorsa X e M nin bir *normal kesiti* denir. M nin normal kesitlerinin cümlesini, $\chi^{\perp}(M)$ ile göstereceğiz. $\chi^{\perp}(M)$, $C^{\infty}(\bar{M}, IR)$ üzerinde bir modüldür. Böylece $\chi(\bar{M})\big|_M = \chi(M) \oplus \chi^{\perp}(M)$ yazılabilir. Burada

$\chi(\bar{M})\big|_M = \{X \mid X : M \to T\bar{M}\}$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.9.8: m-boyutlu bir Riemann manifoldu $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ nin n-boyutlu $(n \leq m)$ bir altmanifoldu M olsun. $\chi(M)$ nin $\chi(\bar{M})$ deki dik tümleyeni $\chi(M)^{\perp}$ ve $\bar{M}$ nin Riemann konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olsun.

$$\chi(\bar{M}) = \chi(M) \oplus \chi(M)^{\perp}$$

eşitliği gereğince, C^{∞} olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için yazılabilen

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.9.2}$$

eşitliğine *Genelleştirilmiş Gauss Denklemi* denir.

Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$ terimlerine, $\bar{\nabla}_X Y$ nin sırası ile *teğetsel ve normal bileşenleri* denir. $\nabla_X Y$ yerine $\tan \bar{\nabla}_X Y$, $h(X,Y)$ yerine nor $\bar{\nabla}_X Y$ de yazılabilir(2).

Teorem 2.9.1: $\bar{M}$ m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M, $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun.

O zaman

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to \nabla_X Y = \tan \bar{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ∇ fonksiyonu, M nin Riemann konneksiyonudur(2).

Tanım 2.9.9: $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. O zaman ,

$$\begin{aligned} h : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi^{\perp}(M) \\ (X,Y) &\to h(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

şeklinde tanımlı, $\chi^{\perp}(M)$ değerli, simetrik, 2-kovaryant tensöre M nin *ikinci temel tensörü* veya *Genelleştirilmiş Weingarten dönüşümü* denir[(2)].

Tanım 2.9.10: $\bar{M}$ m-boyutlu bir manifold ve $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. M ye normal bir birim vektör alanı ξ olsun. $\bar{\nabla}_X \xi$ nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $-A_\xi X$ ve $\nabla_X^{\perp}\xi$ olmak üzere;

$$A : \chi(M) \times \chi^{\perp}(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece,

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^{\perp}\xi \tag{2.9.4}$$

biçiminde *Weingarten denklemi* elde edilir. Burada A_ξ ya şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e de M nin $T^{\perp}M$ *normal demetindeki (normal) konneksiyon* adı verilir[(2)].

Tanım 2.9.11: $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\chi^{\perp}(M)$ in

$$\psi = \{\xi_1, \cdots, \xi_{m-n}\}$$

ortonormal bazı yardımıyla, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$B_i(X,Y) = \langle h(X,Y), \xi_i \rangle, \quad 1 \le i \le m-n$$

şeklinde tanımlı B_i bilineer formlarına, M nin ψ ye göre *ikinci temel formları* denir[(2)].

Tanım 2.9.12: $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\chi^{\perp}(M)$ in bir ortonormal bazı

$$\psi = \{\xi_1, \cdots, \xi_{m-n}\}$$

olmak üzere,

$$A_{\xi_i} : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$
$$X \rightarrow A_{\xi_i}(X) = -\tan \overline{\nabla}_X \xi_i \ , \ 1 \leq \mathrm{i} \leq m\text{-n}$$

şeklinde tanımlı A_{ξ_i} fonksiyonuna M nin ψ ye göre *i-yinci Weingarten dönüşümü* denir[(2)].

Teorem 2.9.2: $\overline{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\chi^{\perp}(M)$ in bir ortanormal ψ bazına göre M nin i-yinci Weingarten dönüşümü A_{ξ_i} ve ikinci temel formları $B_1, \cdots, B_{m-n}$ ise,

i.) $B_i(X,Y) = -\left\langle A_{\xi_i}(X), Y \right\rangle, \ \ \forall X, Y \in \chi(M)$

ii.) $\mathrm{h}(\mathrm{X,Y}) = -\sum_{i=1}^{m-n} \left\langle A_{\xi_i}(X), Y \right\rangle \xi_i, \ \ \forall X, Y \in \chi(M)$

dir[(2)].

Tanım 2.9.13: $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu olsun. $\overline{M}$ nin Riemann konneksiyonu $\overline{\nabla}$ olmak üzere, $X, Y, Z \in \chi(\overline{M})$ için,

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

ifadesine $\overline{M}$ nin *Riemann eğrilik tensörü* denir[(2)].

Tanım 2.9.14: $\overline{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu, $\overline{M}$ nin Riemann konneksiyonu $\overline{\nabla}$, eğrilik tensörü $\overline{R}$, M nin Riemann konneksiyonu ∇, eğrilik tensörü R, ikinci temel tensörü h olsun. O zaman,

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\tan\left(\overline{R}(X,Y)Z\right) = R(X,Y)Z + \tan\left\{\overline{\nabla}_X h(Y,Z) - \overline{\nabla}_Y h(X,Z)\right\}$$

denklemine M üzerinde *Genelleştirilmiş Gaus Eğrilik denklemi* ve

$$\begin{aligned}\operatorname{nor}\left(\overline{R}(X,Y)Z\right) &= h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h([X,Y],Z) \\ &\quad + \operatorname{nor}\left\{\overline{\nabla}_X h(Y,Z) - \overline{\nabla}_Y h(X,Z)\right\}\end{aligned}$$

denklemine M üzerinde *Genelleştirilmiş Codazzi-Mainardi denklemi* denir[(2)].

Şimdi de Genelleştirilmiş Weingarten Dönüşümünün cebirsel değişmezlerini verelim.

Tanım 2.9.15: $\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. M de ξ normal vektör alanı, şekil operatörü A_ξ olmak üzere, eğer A_ξ, X ile aynı yönlü ise yani $A_\xi X = \lambda X$, λ reel fonksiyonları için doğru ise, M de bir X vektör alanı M de bir *Asli eğrilik (principal) vektör alanı* olarak tanımlanır. Burada M nin herhangi bir p noktasında $\lambda(p)$ sabitine eşit karekteristik değerlerine, M nin *asli eğriliği (principal)* denir[(2)].

Tanım 2.9.16: c, M de bir eğri ve teğet vektör alanı T olsun. Eğer T, M de bir asli eğrilik (principal) vektör alanı ise c ye M üzerinde bir *eğrilik çizgisi* denir.

Bu tanıma göre M üzerindeki eğrilik çizgilerinin difererensiyel denklemi λ reel fonksiyonları için, $A_\xi T = \lambda T$ dir[(2)].

Tanım 2.9.17: $\overline{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasında $X_p, Y_p \in T_p M$ için,

$$h\left(X_p, Y_p\right) = h\left(X, Y\right)\Big|_p = 0$$

ise X_p ve Y_p doğrultularına p noktasındaki *eşlenik doğrultular* denir[2].

Tanım 2.9.18: $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasında $X_P \in T_P M$ için,

$$h(X_P, X_P) = 0$$

ise X_P doğrultusuna M üzerinde, p noktasındaki, bir *asimtotik doğrultu* denir[2].

Tanım 2.9.19: $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasında $X_P, Y_P \in T_P M$ için,

$$h(X_P, Y_P) = 0$$

ise p noktasına M nin bir *flat (düzlemsel) noktasıdır* denir[2].

Tanım 2.9.20: $\bar{M}$ bir Riemann manifoldu ve $\bar{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olsun. O zaman, $\bar{M}$ üzerinde $\left\{\left(I, c\right)\right\}$ atlası ile verilen eğri boyunca bu eğrinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere $\bar{\nabla}_T T$ vektör alanına *$\bar{M}$ üzerinde geodezik eğrilik vektör alanı* denir.

$$\begin{aligned} &\bar{k}_g : I \to IR \\ &\quad t \to \bar{k}_g\left(t\right) = \left\|\bar{\nabla}_T T\right\| \end{aligned} \tag{2.9.5}$$

olarak tanımlanan $\bar{k}_g$ fonksiyonuna da c eğrisinin *geodezik eğrilik fonksiyonu* denir[2].

Tanım 2.9.21: $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere, $\bar{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonu $\bar{\nabla}$ ve M altmanifoldunun da konneksiyonu ∇ olsun.

$$c : I \to M, \quad I \subset IR$$

eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere $\nabla_T T$ vektör alanına M *üzerinde geodezik eğrilik vektör alanı* denir.

$$\begin{aligned} &k_g : I \to IR \\ &\quad t \to k_g(t) = \|\nabla_T T\| \end{aligned} \tag{2.9.6}$$

olarak tanımlanan k_g fonksiyonuna da c eğrisinin *geodezik eğrilik fonksiyonu* denir[2].

Tanım 2.9.22: $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. M nin ikinci temel tensörü h ve bir

$$c : I \to M, \quad I \subset IR$$

eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere, $h(T,T)$ vektör alanına c nin *normal eğrilik vektör alanı*,

$$k_T = \|h(T,T)\| \tag{2.9.7}$$

olarak tanımlanan

$$k_T : c(I) \to IR$$

fonksiyonuna da c *nin normal eğrilik fonksiyonu* denir[2].

Teorem 2.9.2: (Meusnier) $\bar{M}$ bir m-boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun.

i.) Bir $P \in M$ noktasından geçen M nin bütün eğrileri arasında aynı T_P birim teğetine sahip olanları için P deki normal eğrilik aynıdır.

ii.) Bir

$c : I \to M, \quad I \subset IR$

eğrisinin $\overline{M}$ ve M deki geodezik eğrilikleri, sırası ile $\overline{k}_g$ ve k_g ile gösterilirse, c nin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$\left(\overline{k}_g\right)^2 = \left(k_g\right)^2 + \left(k_T\right)^2 \tag{2.9.8}$$

dir. Burada,

$k_g = \left\|\nabla_T T\right\|$

$\overline{k}_g = \left\|\overline{\nabla}_T T\right\|$ dir.

iii.) Bir

$c : I \to M, \quad I \subset IR$

eğrisinin $\overline{M}$ ye göre 2-nci Frenet vektör alanı V_2 ile normal eğrilik vektör alanı $h(T,T)$ arasındaki açı tanımlı ve ϕ ise

$k_T = \overline{k}_g \cos\phi$

dir[2].

Tanım 2.9.23: $\overline{M}$ bir m-boyutlu manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere $h = 0$ ise M altmanifolduna $\overline{M}$ manifoldunun *total jeodezik altmanifoldu* denir[5].

Tanım 2.9.24: $\bar{M}$ bir m-boyutlu manifold ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h\left(E_i, E_i\right)$$

ifadesine *ortalama eğrilik* denir(5).

Tanım 2.9.25: $\bar{M}$ bir m-boyutlu manifold ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere $H = 0$ ise M altmanifolduna *minimal altmanifold* denir(5).

Tanım 2.9.26: $\bar{M}$ bir m-boyutlu manifold ve M de $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere,

$\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için,

$$h\left(X, Y\right) = g\left(X, Y\right).H$$

ise M ye *total umbilik altmanifold* denir(5).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Giriş

Bu bölümde $\bar{M}$ Riemann manifoldunun M altmanifoldunda bir Z $\bar{M}$ vektör alanı ile birlikte *Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal altmanifoldları* gibi, altmanifoldların bazı özel türleri incelenecektir.

Ayrıca $\bar{M}$ Riemann manifoldunun M ve M' hiperyüzeyleri olmak üzere, eğer $F: M \to M'$ I. ve II. temel formları koruyan bir diffeomorfizm ise F M ve M' hiperyüzeylerinin Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal özelliklerini koruduğu gösterilecektir.

3.2. Başlangıç

M , $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olmak üzere M boyunca tanımlı $\chi\left(\bar{M}\right)$ de bir vektör alanı demekle, $Z: M \to T\bar{M}$ şeklinde bir vektör alanı kastedilecektir. Daha açıkçası Z M nin noktalarına $\bar{M}$ ye teğet vektör alanı karşılık getirir. Bu vektör alanlarının kümesini $\chi\left(M, \bar{M}\right)$ sembolü ile göstereceğiz.

$\bar{M}$ m-boyutlu C^{∞}-Riemann manifoldunun, n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda $Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ biri M ye teğet diğeride M ye dik iki vektör alanının toplamı olarak yazılır.

$$Z = Z_T + Z^N \qquad (3.2.1)$$

$Z_T \in \chi\left(M\right)$, $Z^N \in \chi^{\perp}\left(M\right)$ dir. Z_T ve Z^N her ikisi birlikte M de birer C^{∞}-vektör alanıdırlar.

M de verilen X tanjant vektör alanına göre Z nin kovaryant türevi,

$$\bar{\nabla}_X Z = (\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X) + (\nabla_X^{\perp} Z^N + h(X, Z_T)) = \tan \bar{\nabla}_X Z + \mathrm{nor} \bar{\nabla}_X Z \qquad (3.2.2)$$

şeklindedir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_X \left(Z_T + Z^N\right) \\
&= \bar{\nabla}_X Z_T + \bar{\nabla}_X Z^N \\
&= \nabla_X Z_T + h\left(X, Z_T\right) - A_{Z^N} X + \nabla^{\perp}{}_X Z^N \\
&= \left(\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X\right) + \left(\nabla^{\perp}{}_X Z^N + h\left(X, Z_T\right)\right) \\
&= \tan \bar{\nabla}_X Z + \mathrm{nor} \bar{\nabla}_X Z
\end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_X Z = (\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X) + (\nabla_X^{\perp} Z^N + h(X, Z_T)) = \tan \bar{\nabla}_X Z + \mathrm{nor} \bar{\nabla}_X Z$$

olduğu kolaylıkla görülür. Burada ∇, M de $\bar{M}$ nin $\bar{\nabla}$ Riemann konneksiyonu tarafından indirgenmiş bir konneksiyonudur.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} l_Z(X,Y) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z) \\ h_Z(X,Y) &= \overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N + h(X,Z_T), \nabla^{\perp}_Y Z^N + h(Y,Z_T)) \\ q_Z(X,Y) &= \overline{g}(\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X, \nabla_Y Z_T - A_{Z^N} Y) \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.3)$$

şeklinde tanımlı tensör alanları verilsin [(6)].

$(3.2.3)$ eşitlikleriyle tanımlı tensör alanları l_Z, h_Z ve q_Z (0,2) tipinde simetrik tensörlerdir.

Gerçekten,

$\forall X, Y, W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} l_Z(X+Y,W) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{X+Y} Z, \overline{\nabla}_W Z) \\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z + \overline{\nabla}_Y Z, \overline{\nabla}_W Z) \\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_W Z) + \overline{g}(\overline{\nabla}_Y Z, \overline{\nabla}_W Z) \\ &= l_Z(X,W) + l_Z(Y,W) \end{aligned}$$

$$l_Z(X+Y,W) = l_Z(X,W) + l_Z(Y,W)$$

dir.

Benzer şekilde, konneksiyonun ve metriğin özellikleri kullanılarak,

$$l_Z(X,Y+W) = l_Z(X,Y) + l_Z(X,W)$$

olduğu gösterilebilir.

$\forall f \in C^{\infty}(M, IR)$ için,

$$\begin{aligned} l_Z(fX,Y) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_{fX} Z, \overline{\nabla}_Y Z) \\ &= \overline{g}(f\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z) \\ &= f\overline{g}(\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z) \end{aligned}$$

$$= f.l_Z(X,Y)$$

$$\Rightarrow l_Z(fX,Y) = f.l_Z(X,Y)$$

dir.

Benzer şekilde konneksiyonun ve metriğin özellikleri kullanılarak,

$$l_Z(X,fY) = f.l_Z(X,Y)$$

olduğu da gösterilebilir.

Şimdi de l_Z nin simetrik olduğunu gösterelim.

$\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} l_Z(X,Y) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z) \\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_Y Z, \overline{\nabla}_X Z) \\ &= l_Z(Y,X) \end{aligned}$$

Sonuçta l_Z M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensördür.

h_Z ninde $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensör olduğunu gösterelim.

$\forall X,Y,W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} h_Z(X+Y,W) &= \overline{g}(\nabla^{\perp}_{X+Y} Z^N + h((X+Y),Z_T), \nabla^{\perp}_W Z^N + h(W,Z_T)) \\ &= \overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N + \nabla^{\perp}_Y Z^N + h(X,Z_T) + h(Y,Z_T), \nabla^{\perp}_W Z^N + h(W,Z_T)) \\ &= \overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N + h(X,Z_T), \nabla^{\perp}_W Z^N + h(W,Z_T)) \\ &\quad + \overline{g}(\nabla^{\perp}_Y Z^N + h(Y,Z_T), \nabla^{\perp}_W Z^N + h(W,Z_T)) \\ &= h_Z(X,W) + h_Z(Y,W) \end{aligned}$$

$$h_Z(X+Y,W) = h_Z(X,W) + h_Z(Y,W)$$

dir. Benzer şekilde konneksiyonun ve metriğin özellikleri kullanılarak,

$$h_Z(X,Y+W)=h_Z(X,Y)+h_Z(X,W)$$

olduğu gösterilebilir.

$\forall\ f \in C^{\infty}(M,IR)$ için,

$$h_Z(fX,Y)=\overline{g}(\nabla^{\perp}_{fX}Z^N+h(fX,Z_T),\nabla^{\perp}_{Y}Z^N+h(Y,Z_T))$$

$$=\overline{g}(f\nabla^{\perp}_{X}Z^N+fh(X,Z_T),\nabla^{\perp}_{Y}Z^N+h(Y,Z_T))$$

$$=f\overline{g}(\nabla^{\perp}_{X}Z^N+h(X,Z_T),\nabla^{\perp}_{Y}Z^N+h(Y,Z_T))$$

$$=f.h_Z(X,Y)$$

$$h_Z(fX,Y)=f.h_Z(X,Y)$$

dir.

Benzer şekilde konneksiyonun ve metriğin özellikleri kullanılarak,

$$h_Z(X,fY)=f.h_Z(X,Y)$$

olduğu da gösterilebilir.

Şimdide h_Z nin simetrik olduğunu gösterelim.

$\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}h_Z(X,Y)&=\overline{g}(\nabla^{\perp}_{X}Z^N+h(X,Z_T),\nabla^{\perp}_{Y}Z^N+h(Y,Z_T))\\&=\overline{g}(\nabla^{\perp}_{Y}Z^N+h(Y,Z_T),\nabla^{\perp}_{X}Z^N+h(X,Z_T))\\&=h_Z(Y,X)\end{aligned}$$

Sonuçta h_Z M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensördür.

q_Z inde $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensör olduğunu gösterelim.

$\forall X,Y,W \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$q_Z(X+Y,W)=\overline{g}(\nabla_{X+Y}Z_T-A_{Z^N}(X+Y),\nabla_W Z_T-A_{Z^N}W)$$

$$=\overline{g}(\nabla_X Z_T+\nabla_Y Z_T-A_{Z^N}X-A_{Z^N}Y,\nabla_W Z_T-A_{Z^N}W)$$

$$=\overline{g}(\nabla_X Z_T-A_{Z^N}X,\nabla_W Z_T-A_{Z^N}W)+\overline{g}(\nabla_Y Z_T-A_{Z^N}Y,\nabla_W Z_T-A_{Z^N}W)$$

$\Rightarrow q_Z(X+Y,W)=q_Z(X,W)+q_Z(Y,W)$ dir.

Benzer şekilde konneksiyonun ve metriğin özellikleri kullanılarak,

$$q_Z(X,Y+W)=q_Z(X,Y)+q_Z(X,W)$$

olduğu gösterilebilir.

$\forall\ f\in C^{\infty}(M)$ için,

$$q_Z(fX,Y)=\overline{g}(\nabla_{fX}Z_T-A_{Z^N}fX,\nabla_Y Z_T-A_{Z^N}Y)$$

$$=\overline{g}(f\nabla_X Z_T-fA_{Z^N}X,\nabla_Y Z_T-A_{Z^N}Y)$$

$$=f\,\overline{g}(\nabla_X Z_T-A_{Z^N}X,\nabla_Y Z_T-A_{Z^N}Y)$$

$$=fq_Z(X,Y)$$

$$q_Z(fX,Y)=fq_Z(X,Y)$$

dir.

Benzer şekilde konneksiyonun ve metriğin özellikleri kullanılarak,

$$q_Z(X,fY)=f.q_Z(X,Y)$$

olduğu gösterilebilir.

Şimdide q_Z nin simetrik olduğunu gösterelim.

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$
\begin{aligned}
q_Z(X,Y) &= \overline{g}(\nabla_X Z_T - A_{Z^N}X, \nabla_Y Z_T - A_{Z^N}Y) \\
&= \overline{g}(\nabla_Y Z_T - A_{Z^N}Y, \nabla_X Z_T - A_{Z^N}X) \\
&= q_Z(Y,X)
\end{aligned}
$$

dir.

Sonuçta q_z M üzerinde $(0,2)$ tipinde simetrik bir tensördür.

Dolayısıyla l_Z, h_Z ve q_Z (0,2) tipinde simetrik tensörlerdir.

Bu şekilde tanımlanmış l_Z, h_Z ve q_Z arasında,

$$
l_Z(X,Y) = h_Z(X,Y) + q_Z(X,Y) \tag{3.2.4}
$$

bağıntısı vardır. Böyle bir ilişkinin varlığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$
\begin{aligned}
l_Z(X,Y) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z) \\
&= \overline{g}(\overline{\nabla}_X (Z_T + Z^N), \overline{\nabla}_Y (Z_T + Z^N)) \\
&= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z_T + \overline{\nabla}_X Z^N, \overline{\nabla}_Y Z_T + \overline{\nabla}_Y Z^N) \\
&= \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z_T, \overline{\nabla}_Y Z_T) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z_T, \overline{\nabla}_Y Z^N) \\
&+ \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z^N, \overline{\nabla}_Y Z_T) + \overline{g}(\overline{\nabla}_X Z^N, \overline{\nabla}_Y Z^N) \\
&= \overline{g}(\nabla_X Z_T + h(X + Z_T), \nabla_Y Z_T + h(Y + Z_T)) \\
&+ \overline{g}(\nabla_X Z_T + h(X + Z_T), \nabla^\perp{}_Y Z^N - A_{Z^N}Y) \\
&+ \overline{g}(\nabla^\perp{}_X Z^N - A_{Z^N}X, \nabla_Y Z_T + h(Y + Z_T)) \\
&+ \overline{g}(\nabla^\perp{}_X Z^N - A_{Z^N}X, \nabla^\perp{}_Y Z^N - A_{Z^N}Y))
\end{aligned}
$$

$$=\overline{g}\left(\nabla_X Z_T,\nabla_Y Z_T\right)+\underbrace{\overline{g}\left(\nabla_X Z_T,h\left(Y,Z_T\right)\right)}_{0}+\underbrace{\overline{g}\left(h\left(X,Z_T\right),\nabla_Y Z_T\right)}_{0}$$

$$+\overline{g}\left(h\left(X,Z_T\right),h\left(Y,Z_T\right)\right)+\underbrace{\overline{g}\left(\nabla_X Z_T,\nabla^{\perp}{}_Y Z^N\right)}_{0}+\overline{g}\left(\nabla_X Z_T,-A_{Z^N}Y\right)$$

$$+\overline{g}\left(h\left(X,Z_T\right),\nabla^{\perp}{}_Y Z^N\right)+\underbrace{\overline{g}\left(h\left(X,Z_T\right),-A_{Z^N}Y\right)}_{0}+\underbrace{\overline{g}(\nabla^{\perp}{}_X Z^N,\nabla_Y Z_T)}_{0}$$

$$+\overline{g}(\nabla^{\perp}{}_X Z^N,h(Y+Z_T))+\overline{g}(-A_{Z^N}X,\nabla_Y Z_T)+\underbrace{\overline{g}(-A_{Z^N}X,h(Y+Z_T)}_{0}$$

$$+\overline{g}(\nabla^{\perp}{}_X Z^N,\nabla^{\perp}{}_Y Z^N)+\underbrace{\overline{g}(\nabla^{\perp}{}_X Z^N,-A_{Z^N}Y)}_{0}+\underbrace{\overline{g}(-A_{Z^N}X,\nabla^{\perp}{}_Y Z^N)}_{0}$$

$$+\overline{g}(-A_{Z^N}X,-A_{Z^N}Y)$$

$$=\overline{g}(\nabla^{\perp}{}_X Z^N,\nabla^{\perp}{}_Y Z^N)+\overline{g}(\nabla^{\perp}{}_X Z^N,h(Y+Z_T))$$

$$+\overline{g}\left(h\left(X,Z_T\right),h\left(Y,Z_T\right)\right)+\overline{g}\left(h\left(X,Z_T\right),\nabla^{\perp}{}_Y Z^N\right)$$

$$+\overline{g}(-A_{Z^N}X,-A_{Z^N}Y)+\overline{g}(-A_{Z^N}X,\nabla_Y Z_T)$$

$$+\overline{g}\left(\nabla_X Z_T,-A_{Z^N}Y\right)+\overline{g}\left(\nabla_X Z_T,\nabla_Y Z_T\right)$$

$$=\overline{g}(\nabla^{\perp}{}_X Z^N+h\left(X,Z_T\right),\nabla^{\perp}{}_Y Z^N+h\left(Y,Z_T\right))$$

$$+\overline{g}\left(\nabla_X Z_T-A_{Z^N}X,\nabla_Y Z_T-A_{Z^N}Y\right)$$

$$=h_Z\left(X,Y\right)+q_Z\left(X,Y\right)$$

$\Rightarrow l_Z\left(X,Y\right)=h_Z\left(X,Y\right)+q_Z\left(X,Y\right)$ dir.

Örnek 3.2.1:

IR^3 ün bir altmanifoldu $S^2=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|x^2+y^2+z^2=1\right\}$ için

$Z=\left(x,y,2z\right)\in\chi\left(S^2,IR^3\right)$, S^2 de tanımlı bir IR^3-vektör alanı olsun. Daha açıkça $Z:S^2\rightarrow TIR^3$ $p\in S^2$ için $Z_p\in T_pIR^3$ dür. Z nin, teğet ve normal bileşenleri, Z_T ve Z^N şeklinde gösterilsin.

S^2 nin birim normal vektör alanının $\vec{N}=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$ olduğunu biliyoruz.

Şimdi de $\chi\left(S^2\right)$ için bir baz oluşturalım.

$\bar{E}_1=\left(y,-x,0\right)$ olsun. $\left\langle\bar{E}_1,N\right\rangle=0$ olduğundan $\bar{E}_1\in\chi\left(S^2\right)$ dir.

$$
\begin{aligned}
E_1=\frac{1}{\left\|\bar{E}_1\right\|}\bar{E}_1&=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(y,-x,0\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
E_2=E_1\times\vec{N}&=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(-xz,-yz,y^2+x^2\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(-xz,-yz,1-z^2\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(-xz\frac{\partial}{\partial x}-yz\frac{\partial}{\partial y}+\left(1-z^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde seçilirse $\left\{E_1,E_2\right\}$, $\chi\left(S^2\right)$ için ortonormal bir bazdır.

Şimdi de Z yi biri S^2 ye teğet diğeri de S^2 ye dik olacak şekilde iki vektör alanının toplamı olarak yazalım.

$Z=\lambda_1 E_1+\lambda_2 E_2+\lambda_3 \vec{N}$ ifadesindeki λ_1, λ_2, λ_3 ü hesaplayalım. $\{E_1, E_2, N\}$

$\chi\left(IR^3\right)\Big|_{S^2}$ için bir ortonormal baz olduğundan

$$\lambda_1 = Z.E_1 = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(xy-yx+0\right)=0$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 = Z.E_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(-x^2z-y^2z+2z\left(1-z^2\right)\right)\\ &=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(1-z^2\right)z\\ &=z\sqrt{1-z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 = Z.\vec{N} &= x^2+y^2+2z^2\\ &=1-z^2+2z^2\\ &=1+z^2\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. λ_1, λ_2, λ_3 ü yerlerine yazarsak,

$$Z=\underbrace{z\sqrt{1-z^2}E_2}_{Z_T}+\underbrace{\left(z^2+1\right)\vec{N}}_{Z^N}$$

elde edilir.

Buradan da $\overline{\nabla}_{E_1}Z$ ve $\overline{\nabla}_{E_2}Z$ yi hesaplayalım.

$$\overline{\nabla}_{E_1}Z=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\overline{\nabla}_{E_2}Z=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(-xz\frac{\partial}{\partial x}-yz\frac{\partial}{\partial y}+2\left(1-z^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$X=X^1E_1+X^2E_2\in\chi\left(S^2\right)$ olmak üzere, X tanjant vektör alanına göre Z nin

kovaryant türevi,

$$\bar{\nabla}_X Z = X^1 \bar{\nabla}_{E_1} Z + X^2 \bar{\nabla}_{E_2} Z$$

$$= X^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + X^2 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left(-xz \frac{\partial}{\partial x} - yz \frac{\partial}{\partial y} + 2\left(1-z^2\right) \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \mu_3 \vec{N}$$

olmak üzere, μ_1, μ_2, μ_3 bileşenlerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \mu_1 = \bar{\nabla}_X Z . E_1 &= \frac{1}{1-z^2} \left(X^1 y^2 - X^2 xyz + X^1 x^2 + X^2 xyz \right) \\ &= \frac{1}{1-z^2} X^1 . \left(y^2 + x^2 \right) \\ &= \frac{X^1 \left(1-z^2\right)}{1-z^2} \\ &= X^1 \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \mu_2 = \bar{\nabla}_X Z . E_2 &= \frac{1}{1-z^2} \left(-X^1 xyz + X^2 x^2 z^2 + X^1 xyz + X^2 y^2 z^2 + 2X^2 \left(1-z^2\right)^2 \right) \\ &= \frac{X^2 \left(1-z^2\right)}{1-z^2} \left(z^2 + 2\left(1-z^2\right) \right) \\ &= \frac{X^2 \left(1-z^2\right)}{1-z^2} \left(2-z^2\right) \\ &= X^2 \left(2-z^2\right) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} \mu_3 = \bar{\nabla}_X Z . \vec{N} &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left(X^2 z \left(1-z^2\right) \right) \\ &= X^2 z \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

dir. μ_1, μ_2, μ_3 ün değerlerini yerlerine yazarsak,

$$\bar{\nabla}_X Z = \underbrace{X^1 E_1 + X^2 \left(2-z^2\right) E_2}_{\tan \bar{\nabla}_X Z} + \underbrace{X^2 z \sqrt{1-z^2}\, \vec{N}}_{nor \bar{\nabla}_X Z}$$

bulunur.

$Y = Y^1 E_1 + Y^2 E_2 \in \chi\left(S^2\right)$ için,

S^2 de tanımlı Z vektör alanının normal bileşeni Z^N nin X vektör alanına göre kovaryant türevi olan

$$\overline{\nabla}_X Z^N = \overline{\nabla}_{X^1 E_1 + X^2 E_2} Z^N = X^1 \overline{\nabla}_{E_1} Z^N + X^2 \overline{\nabla}_{E_2} Z^N$$

vektör alanını bulalım.

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{E_1} Z^N &= \overline{\nabla}_{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)} \left(z^2+1\right).\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= E_1\left[z^2+1\right]\left(x, y, z\right) + \left(z^2+1\right).\nabla_{E_1}\vec{N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(z^2+1\right).\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{E_2} Z^N &= \overline{\nabla}_{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(-xz, -yz, 1-z^2\right)} \left(z^2+1\right).\vec{N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.\left(2z\left(1-z^2\right)\left(x, y, z\right) + \left(z^2+1\right)\left(-xz, -yz, 1-z^2\right)\right)
\end{aligned}$$

dir. Bu ifadeleri yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Z^N = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \{ & X^1\left(z^2+1\right).\left(y, -x, 0\right) \\
& + X^2.\left(2z\left(1-z^2\right)\left(x, y, z\right) + \left(z^2+1\right)\left(-xz, -yz, 1-z^2\right)\right)\} \\
= {} & \eta_1 E_1 + \eta_2 E_2 + \eta_3 \vec{N}
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \overline{\nabla}_X Z^N . E_1 \\
&= \frac{1}{1-z^2}\{\left(z^2+1\right)\left(X^1 y^2\right) + X^2\left(2z\left(1-z^2\right)yx + \left(z^2+1\right)\left(-xyz\right)\right) \\
&\quad + \left(z^2+1\right)\left(X^1 x^2\right) + X^2\left(2z\left(1-z^2\right)\left(-xy\right) + \left(z^2+1\right)\left(xyz\right)\right) \\
&\quad + \left(z^2+1\right)\left(X^1.0\right) + X^2\left(2z\left(1-z^2\right).0 + \left(z^2+1\right).0\right)\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{1-z^2}\left(\left(z^2+1\right)X^1\left(\underbrace{x^2+y^2}_{1-z^2}\right)\right)$$
$$=\left(z^2+1\right)X^1$$

$$\eta_1=\left(z^2+1\right)X^1$$

dir.

$$\eta_2=\overline{\nabla}_X Z^N.E_2$$
$$=\frac{1}{1-z^2}\{\left(z^2+1\right)\left(-xyz\right)X^1+X^2\left(2z\left(1-z^2\right)\left(-x^2z\right)+\left(z^2+1\right)\left(x^2z^2\right)\right)$$
$$+\left(z^2+1\right)\left(xyz\right)X^1+X^2\left(2z\left(1-z^2\right)\left(-y^2z\right)+\left(z^2+1\right)\left(y^2z^2\right)\right)$$
$$+\left(z^2+1\right).0.X^1+X^2\left(2z\left(1-z^2\right)z\left(1-z^2\right)+\left(z^2+1\right)\left(1-z^2\right)^2\right)\}$$
$$=\frac{1}{1-z^2}X^2\{-2z\left(1-z^2\right)z\left(\underbrace{x^2+y^2}_{1-z^2}\right)+\left(z^2+1\right)z^2\left(\underbrace{x^2+y^2}_{1-z^2}\right)$$
$$+\left(2z\left(1-z^2\right)z\left(1-z^2\right)+\left(z^2+1\right)\left(1-z^2\right)^2\right)\}$$
$$=\frac{1}{1-z^2}X^2\left(1-z^2\right)\left(z^2+1\right)$$
$$=\left(z^2+1\right)X^2$$

$$\eta_2=\left(z^2+1\right)X^2$$

dir.

$$\eta_3=\overline{\nabla}_X Z^N.\vec{N}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\{\left(z^2+1\right)\left(xyX^1\right)+X^2\left(2z\left(1-z^2\right)x^2+\left(z^2+1\right)\left(-x^2z\right)\right)$$
$$+\left(z^2+1\right)\left(-xyX^1\right)+X^2\left(2z\left(1-z^2\right)y^2+\left(z^2+1\right)\left(-y^2z\right)\right)$$
$$+\left(z^2+1\right)\left(0.z.X^1\right)+X^2\left(2z\left(1-z^2\right)z^2+\left(z^2+1\right)\left(\left(1-z^2\right)z\right)\right)\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}X^2\{2z\left(1-z^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(z^2+1\right)z\left(x^2+y^2\right)$$
$$+2z\left(1-z^2\right)z^2+\left(z^2+1\right)\left(\left(1-z^2\right)z\right)\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} 2z\left(1-z^2\right) X^2$$
$$= 2z\sqrt{1-z^2}\, X^2$$

$$\eta_3 = 2z\sqrt{1-z^2}\, X^2$$

dir. Burada bulunan η_1, η_2, η_3 ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\overline{\nabla}_X Z^N = \underbrace{\left(z^2+1\right) X^1 E_1 + \left(z^2+1\right) X^2 E_2}_{-A_{Z^N} X} + \underbrace{2z\sqrt{1-z^2}\, X^2 \vec{N}}_{\nabla_X^{\perp} Z^N}$$

bulunur.

Şimdi de X tanjant vektör alanına göre Z nin tanjant bileşeninin kovaryant türevi olan

$$\overline{\nabla}_X Z_T = \overline{\nabla}_{X^1 E_1 + X^2 E_2} Z_T = X^1 \overline{\nabla}_{E_1} Z_T + X^2 \overline{\nabla}_{E_2} Z_T$$

vektör alanını hesaplayalım.

$$\overline{\nabla}_{E_1} Z_T = \overline{\nabla}_{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}(y,-x,0)} z\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \overline{\nabla}_{(y,-x,0)} z\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left((y,-x,0)[z]\left(-xz,-yz,1-z^2\right) + z.\overline{\nabla}_{(y,-x,0)}\left(-xz,-yz,1-z^2\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \{\left\langle (y,-x,0),(0,0,1)\right\rangle \left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$+ z\{\left\langle (y,-x,0),(-z,0,-x)\right\rangle, \left\langle (y,-x,0),(0,-z,-y)\right\rangle, \left\langle (y,-x,0),(0,0,-2z)\right\rangle\}\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left(z\left(-yz,xz,0\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} z^2 \left(y,-x,0\right)$$
$$= -z^2 E_1$$

$$\overline{\nabla}_{E_1} Z_T = -z^2 E_1$$

dir.

Ayrıca,

$$\overline{\nabla}_{E_2} Z_T = \overline{\nabla}_{\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left(-xz,-yz,1-z^2\right)} z\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \overline{\nabla}_{\left(-xz,-yz,1-z^2\right)} z\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} (\left(-xz,-yz,1-z^2\right)[z]\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$+ z.\overline{\nabla}_{\left(-xz,-yz,1-z^2\right)} \left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \{\left\langle\left(-xz,-yz,1-z^2\right),\left(0,0,1\right)\right\rangle\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$+ z\{\left\langle\left(-xz,-yz,1-z^2\right),\left(-z,0,-x\right)\right\rangle,$$
$$\left\langle\left(-xz,-yz,1-z^2\right),\left(0,-z,-y\right)\right\rangle,$$
$$\left\langle\left(-xz,-yz,1-z^2\right),\left(0,0,-2z\right)\right\rangle\}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} (\left(1-z^2\right)\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$+ z\left(xz^2 - x\left(1-z^2\right), yz^2 - y\left(1-z^2\right), -2z\left(1-z^2\right)\right))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} (\left(1-z^2\right)\left(-xz,-yz,1-z^2\right) + z\left(2xz^2 - x, 2yz^2 - y, 2z^3 - 2z\right))$$

dir. Böylece,

$$\overline{\nabla}_X Z_T = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \{-X^1 z^2 \left(y,-x,0\right)$$
$$+ X^2(\left(1-z^2\right)\left(-xz,-yz,1-z^2\right)$$
$$+ z\left(2xz^2 - x, 2yz^2 - y, 2z^3 - 2z\right))\}$$
$$= \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 \vec{N}$$

kovaryant türevi hesaplanabilir. Bu hesabı yapabilmek için ξ_1, ξ_2, ξ_3 ü hesaplayalım.

$$\xi_1 = \overline{\nabla}_X Z_T . E_1 = \frac{1}{1-z^2}\{-X^1 z^2 y^2 + X^2\left(\left(1-z^2\right)\left(-xyz\right) + z\left(2xyz^2 - xy\right)\right)$$
$$- X^1 z^2 x^2 + X^2\left(\left(1-z^2\right)\left(xyz\right) + z\left(-2xyz^2 + xy\right)\right)$$
$$- X^1 z^2 .0 + X^2\left(\left(1-z^2\right).0 + z.0\right)\}$$
$$= \frac{1}{1-z^2}\left(-X^1 z^2 (\underbrace{x^2 + y^2}_{1-z^2}) + X^2 .0\right)$$
$$= -X^1 z^2$$

$$\xi_1 = -X^1 z^2 ,$$

$$\xi_2 = \overline{\nabla}_X Z_T . E_2 = \frac{1}{1-z^2}\begin{pmatrix} -X^1 z^2\left(-xyz\right) + X^2\left(\left(1-z^2\right)x^2 z^2 + z\left(-2x^2 z^3 + x^2 z\right)\right) + \\ -X^1 z^2\left(xyz\right) + X^2\left(\left(1-z^2\right)y^2 z^2 + z\left(-2y^2 z^3 + y^2 z\right)\right) + \\ -X^1 z^2 .0 + X^2\left(\left(1-z^2\right)^3 + z\left(1-z^2\right)\left(2z^3 - 2z\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-z^2} X^2 \begin{pmatrix} \left(1-z^2\right)z^2\left(x^2+y^2\right) + \left(1-z^2\right)^3 \\ +z\left(-2x^2 z^3 + x^2 z - 2y^2 z^3 + y^2 z - \left(1-z^2\right)2z\left(1-z^2\right)\right) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{1-z^2} X^2\left(\left(1-z^2\right)^2 z^2 + \left(1-z^2\right)^3 + \mathrm{z}\left(1-z^2\right)\left(-2z^3 + z\right) - 2\left(1-z^2\right)^2 z^2\right)$$
$$= \frac{1}{1-z^2} X^2\left(1-z^2\right)\left(1-2z^2\right)$$
$$= \left(1-2z^2\right) X^2$$

$$\xi_2 = \left(1-2z^2\right) X^2 ,$$

$$\xi_3 = \overline{\nabla}_X Z_T . \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\begin{pmatrix} -X^1 z^2 xy + X^2\left(\left(1-z^2\right)\left(-x^2 z\right) + z\left(2x^2 z^2 - x^2\right)\right) \\ -X^1 z^2\left(-xy\right) + X^2\left(\left(1-z^2\right)\left(-y^2 z\right) + z\left(2y^2 z^2 - y^2\right)\right) \\ -X^1 z^2 z.0 + X^2\left(\left(1-z^2\right)\left(1-z^2\right)z + z\left(2z^3 - 2z\right)z\right) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} X^2 \begin{pmatrix} -z\left(1-z^2\right)\left(x^2+y^2\right) + z\left(1-z^2\right)^2 \\ +z\left(2z^2\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right) + z\left(2z^3 - 2z\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} X^2 \begin{pmatrix} -z\left(1-z^2\right)^2 + z\left(1-z^2\right)^2 \\ +z\left(\left(1-z^2\right)\left(2z^2-1\right) + z\left(2z^3-2z\right)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} X^2 z\left(\left(1-z^2\right)\left(2z^2-1\right) + 2z^2\left(z^2-1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} X^2 z\left(\left(z^2-1\right)\left(1-2z^2\right) + 2z^2\left(z^2-1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} X^2 z\left(z^2-1\right)$$

$$= \text{-z}\sqrt{1-z^2}\, X^2$$

$$\xi_3 = \text{-z}\sqrt{1-z^2}\, X^2$$

dir. Hesaplanan ξ_1, ξ_2 ve ξ_3 değerleri,

$\overline{\nabla}_X Z_T = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 \vec{N}$ ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$\overline{\nabla}_X Z_T = \underbrace{-z^2 X^1 E_1 + \left(1-2z^2\right) X^2 E_2}_{\nabla_X Z_T} \underbrace{\text{-z}\sqrt{1-z^2}\, X^2 \vec{N}}_{h(X, Z_T)}$$

bulunur. Buna göre,

$$\overline{\nabla}_X Z^N = \underbrace{\left(z^2+1\right) X^1 E_1 + \left(z^2+1\right) X^2 E_2}_{-A_{Z^N} X} + \underbrace{2z\sqrt{1-z^2}\, X^2 \vec{N}}_{\nabla_X^{\perp} Z^N}$$

bulunmuştu. Bu son iki ifade,

$$\overline{\nabla}_X Z = \underbrace{X^1 E_1 + \left(2-z^2\right) X^2 E_2}_{\tan \overline{\nabla}_X Z} + \underbrace{z\sqrt{1-z^2}\, X^2 \vec{N}}_{nor \overline{\nabla}_X Z}$$

ifadesini sağlar.

Buna göre $l_z\left(X,Y\right)$, $h_z\left(X,Y\right)$ ve $q_z\left(X,Y\right)$ tensör alanlarını $\forall X, Y \in \chi\left(S^2\right)$ için hesaplayabiliriz.

$$
\begin{aligned}
l_Z(X,Y) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z\right) \\
&= \overline{g}(X^1E_1 + \left(2-z^2\right)X^2E_2 + z\sqrt{1-z^2}\,X^2\vec{N} \\
&\qquad ,Y^1E_1 + \left(2-z^2\right)Y^2E_2 + z\sqrt{1-z^2}\,Y^2\vec{N}) \\
&= X^1Y^1 + \left(2-z^2\right)^2 X^2Y^2 + z^2\left(1-z^2\right)X^2Y^2 \\
&= X^1Y^1 + \left(\left(2-z^2\right)^2 + z^2\left(1-z^2\right)\right)X^2Y^2
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
h_z\left(X,Y\right) &= \overline{g}(\text{nor }\overline{\nabla}_X Z, \text{nor }\overline{\nabla}_Y Z) \\
&= \overline{g}(z\sqrt{1-z^2}\,X^2\vec{N}, z\sqrt{1-z^2}\,Y^2\vec{N}) \\
&= z^2\left(1-z^2\right)X^2Y^2
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
q_z\left(X,Y\right) &= \overline{g}(\tan\ \overline{\nabla}_X Z, \tan\ \overline{\nabla}_Y Z) \\
&= \overline{g}(X^1E_1 + \left(2-z^2\right)X^2E_2, Y^1E_1 + \left(2-z^2\right)Y^2E_2) \\
&= X^1Y^1 + \left(2-z^2\right)^2 X^2Y^2
\end{aligned}
$$

dir.

Buradan da $l_Z\left(X,Y\right) = h_Z\left(X,Y\right) + q_Z\left(X,Y\right)$ elde edilir.

Örnek 3.2.1 de $z=1$ alınırsa Z=$\left(x,y,2z\right)$ den Z=$\left(x,y,2\right)$ elde ederiz. Buna göre S^2 de tanımlı Z=$\left(x,y,2\right)$ IR^3 vektör alanına göre örnek 3.2.1 de elde etmiş olduğumuz sonuçları tekrardan düzenleyelim.

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Z_T &= \underbrace{-z^2 X^1 E_1 + \left(1-2z^2\right) X^2 E_2}_{\nabla_X Z_T} \underbrace{-z\sqrt{1-z^2}\, X^2 \vec{N}}_{h(X,Z_T)} \\
&= -1^2 X^1 E_1 + \left(1-2.1^2\right) X^2 E_2 - 1\sqrt{1-1^2}\, X^2 \vec{N} \\
&= -\left(X^1 E_1 + X^2 E_2\right) \\
&= -X
\end{aligned}
$$

dir. Buradan da $\nabla_X Z_T = -X$ ve $h\left(X, Z_T\right) = 0$ elde edilir. $\forall X, Z_T \in \chi\left(M\right)$ için doğru olduğundan $h = 0$ dır.

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Z^N &= \underbrace{\left(z^2+1\right) X^1 E_1 + \left(z^2+1\right) X^2 E_2}_{-A_{Z^N} X} + \underbrace{2z\sqrt{1-z^2}\, X^2 \vec{N}}_{\nabla^{\perp}_X Z^N} \\
&= \left(1^2+1\right) X^1 E_1 + \left(1^2+1\right) X^2 E_2 + 2.1\sqrt{1-1^2}\, X^2 \vec{N} \\
&= 2X
\end{aligned}
$$

dir. Buradan da $-A_{Z^N} X = 2X$ ve $\nabla^{\perp}_X Z^N = 0$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Z &= \underbrace{X^1 E_1 + \left(2-z^2\right) X^2 E_2}_{\tan \overline{\nabla}_X Z} + \underbrace{z\sqrt{1-z^2}\, X^2 \vec{N}}_{\text{nor } \overline{\nabla}_X Z} \\
&= X^1 E_1 + \left(2-1^2\right) X^2 E_2 + 1\sqrt{1-1^2}\, X^2 \vec{N} \\
&= X
\end{aligned}
$$

dir. Buradan da $\tan \overline{\nabla}_X Z = X$ ve $\text{nor } \overline{\nabla}_X Z = 0$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
l_Z(X,Y) &= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Z, \overline{\nabla}_Y Z\right) \\
&= \overline{g}\left(X^1 E_1 + X^2 E_2, Y^1 E_1 + Y^2 E_2\right) \\
&= X^1 Y^1 + X^2 Y^2
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
h_z\left(X,Y\right) &= \overline{g}(\text{nor } \overline{\nabla}_X Z, \text{nor } \overline{\nabla}_Y Z) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır.

$$q_z(X,Y) = \overline{g}(\tan\ \overline{\nabla}_X Z, \tan\ \overline{\nabla}_Y Z)$$
$$= X^1Y^1 + X^2Y^2$$

dir.

Buradan da $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $l_Z(X,Y) = h_Z(X,Y) + q_Z(X,Y)$ eşitliği rahatlıkla görülür.

c, M de bir eğri ve c nin tanjant vektör alanı T olmak üzere,

$$\overline{K}^2_{Z/a} = l_Z(T,T) \text{ ve } K^2{}_{Z/g} = q_Z(T,T) \text{ ve } K^2{}_{Z/n} = h_Z(T,T) \qquad (3.2.5),$$

olsun.

Tanım 3.2.1: $(3.2.5)$ de ki $\overline{K}_{Z/a}$, $K_{Z/g}$ ve $K_{Z/n}$ ifadelerine sırasıyla *Z- mutlak eğrilik, Z- geodezik eğrilik* ve Z-*normal eğrilik* denir(6).

Buna göre M deki bir c eğrisi için aşağıdaki ifadeleri söyleyebiliriz.

c eğrisi bir $Z-$ mutlak geodeziktir. $\Leftrightarrow \overline{K}_{Z/a} = 0$

c eğrisi bir Z - geodeziktir. $\Leftrightarrow$ c nin herhangibir noktasında $K_{Z/g} = 0$ dır (6).

Böylece, bir mutlak geodezik eğride $l_Z(T,T) = 0$ ve Z-geodeziklikde de $q_Z(T,T) = 0$ eşitlikleri sağlanır.

Tanım 3.2.2: Eğer $\tan\overline{\nabla}_X Z$, X ile aynı yönlü ise M de bir X vektör alanına, M de *Z- kuasi asli eğrilik vektör alanı* denir (6).

Örnek 3.2.1 de $\tan \overline{\nabla}_X Z = X$ olduğundan S^2 de bu X vektör alanı, S^2 de $Z = (x, y, 2)$ - *kuasi asli eğrilik vektör alanı*dır.

Tanım 3.2.3: c, M de bir eğri olmak üzere, M deki tanjant vektör alanı T, M de Z- kuasi asli eğrilik vektör alanı ise c ye M de *Z- kuasi eğrilik çizgisi* denir [6].

Örnek 3.2.1 de $\tan \overline{\nabla}_T Z = T$ olduğundan S^2 de bu T vektör alanı $Z = (x, y, 2)$ -*kuasi asli eğrilik vektör alanı* dır. Buna göre c eğrisi S^2 de Z- *kuasi eğrilik çizgisi* dir.

Tanım 3.2.4: $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

Eğer,

$$q_Z(X,Y) = \overline{g}(\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X, \nabla_Y Z_T - A_{Z^N} Y) = 0 \qquad (3.2.6)$$

ise X ve Y vektör alanları Z - *rölatif eşlenik vektörler* olarak tanımlanır[6].

3.3. Z-Umbilik Altmanifold

Tanım 3.3.1: M de ξ normal vektör alanı olmak üzere, eğer şekil operatörü A_ξ için I özdeşlik dönüşümü olmak üzere,

$$A_\xi = \lambda . I \qquad (3.3.1)$$

olacak şekilde M de λ reel fonksiyonu varsa o zaman ξ ye M de *umbilik vektör alanı* denir. Ya da M, ξ ye göre *umbiliktir* denir[6].

Tanım 3.3.2: Eğer M de her X tanjant vektör alanı için

$$\tan \overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X = \lambda X \tag{3.3.2}$$

ise $\bar{M}$ Riemann manifoldunun bir M altmanifoldu, *Z-umbiliktir* denir[(6)].

Buna göre Z-umbilik bir $M \subset \bar{M}$ altmanifoldu için aşağıdakiler doğrudur.

i.) M de her bir tanjant vektör alanı, M de Z - kuasi asli eğrilik vektör alanıdır.

ii.) M deki her bir eğri p noktasında kuasi asli eğriliği $\lambda(p)$ ye eşit, bir Z-kuasi asli eğrilik çizgisidir.

Örnek 3.2.1 de $\tan \overline{\nabla}_X Z = X$ olduğundan IR^3 Riemann manifoldunun S^2 altmanifoldu *Z-umbilik* altmanifolddur.

Sonuç 3.3.1: $Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$, M ye normal ise o zaman (3.3.2), (3.3.1) e indirgenir. Bu yüzden normal vektör alanına göre bir Z-umbilik altmanifold, umbilik altmanifolda indirgenir.

M, Z-umbilik altmanifold olsun. M de iki farklı tanjant vektör alanı için,

$$\overline{g}(\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X, \nabla_Y Z_T - A_{Z^N} Y) = \lambda^2 \overline{g}(X, Y) \tag{3.3.3}$$

dir.

Teorem 3.3.1: M , $\bar{M}$ Riemann manifoldunun Z-umbilik altmanifoldu olsun. O zaman M deki bir p noktasında birbirinden farklı iki tanjant vektör alanı rölatif eşlenik vektörlerdir $\Leftrightarrow$ Bu vektörler ortogonaldırlar [6].

İspat: M , $\bar{M}$ Riemann manifoldunun Z-umbilik altmanifoldu olduğundan,

X tanjant vektör alanı için,

$$\tan \overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X = \lambda X$$

dir.

$X, Y \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olmak üzere X_p ile Y_p rölatif eşlenik olsun.

O halde $q_Z(X,Y) = \overline{g}(\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X, \nabla_Y Z_T - A_{Z^N} Y) = 0$ dır.

$\overline{g}$ bilineer olduğundan $q_Z(X,Y) = \lambda^2 \overline{g}(X,Y)$ dir. $\lambda \neq 0$ olduğundan $\overline{g}(X,Y) = 0$ olup X ve Y ortogonaldırlar.

3.4. Total Z-Geodezik Altmanifold

Tanım 3.4.1: M de $h_Z = 0$ a özdeş ise M altmanifolduna, $\bar{M}$ Rieman manifoldunun *total Z- geodezik altmanifoldu* denir[6].

Örnek 3.2.1 de $h_Z = 0$ olduğundan IR^3 Riemann manifoldunun S^2 altmanifoldu *total Z- geodezik* altmanifolddur.

Total Z- geodezik altmanifold için (3.2.2) ve (3.2.3) den

$\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\overline{\nabla}_X Z = \tan \overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X \tag{3.4.1}$$

yazılır. Bu yüzden, M total Z- geodezik altmanifoldundaki bir c eğrisi,

Z - mutlak geodeziktir. $\Leftrightarrow$ Z – geodeziktir.

özelliği ile karekterize edilir.

Total Z-geodezik altmanifold tanımına göre $\text{nor}\overline{\nabla}_X Z = 0$ dır. Buna göre şu eşitlik verilebilir.

$$l_Z(T,T) = \overline{g}(\overline{\nabla}_T Z, \overline{\nabla}_T Z) = 0$$

$$= \left\| \overline{\nabla}_T Z \right\|^2 = 0$$

$$= \left\| \overline{\nabla}_T Z \right\| = 0$$

$$= \overline{\nabla}_T Z = 0$$

O halde Z, c boyunca paraleldir.

Z-geodezik ise $K_{Z/g} = 0$ dır.

$$\Rightarrow q_Z(T,T) = \overline{g}(\nabla_T Z_T - A_{Z^N} T, \nabla_T Z_T - A_{Z^N} T)$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow \left\| \nabla_T Z_T - A_{Z^N} T \right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_T Z_T - A_{Z^N} T = 0$$

$$\Rightarrow \tan \overline{\nabla}_T Z = 0$$

$$\overline{\nabla}_T Z = \underbrace{\tan \overline{\nabla}_T Z}_{0} + \underbrace{\text{nor}\overline{\nabla}_T Z}_{0}$$

$\overline{\nabla}_T Z = 0 \Rightarrow Z,\ c$ boyunca paraleldir.

Tanım 3.4.2: M bir manifold ve ∇, lineer bir konneksiyon olsun.

$Z \in \chi(M)$ alalım.

$i.)$ $\forall X \in \chi(M)$ için $\nabla_X Z = 0$ ise

Z ye, M üzerinde ∇ ye göre *paralel vektör alanı* denir.

$$\nabla Z(X) = \nabla_X Z = 0$$

oluğundan, Z nin M üzerinde paralel olması demek $\nabla Z = 0$ olması demektir.

$ii.)$ $Z \in \chi(M)$, $c : I \to M$ bir eğri, T, c nin teğet vektör alanı olmak üzere, $\nabla_T Z = 0$ ise Z ye *c-boyunca parelel vektör alanı* denir.

Burada $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{dc^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$ şeklindedir.

Eğer M, total geodezik altmanifold ise $h = 0$ dır. Böylece, (3.2.3) den

$$h_Z(X,Y) = \overline{g}(\nabla_X^{\perp} Z^N, \nabla_Y^{\perp} Z^N) \quad \text{dir.}$$

Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 3.4.1: M total geodezik altmanifoldu , total Z-geodezikdir. $\Leftrightarrow$ Z nin normal bileşeni, M nin normal demetinde paraleldir(6).

İspat:

M, total geodezik altmanifold olduğundan $h = 0$ dır. Buna göre

$h_Z(X,Y) = \overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N, \nabla^{\perp}_Y Z^N)$ dir. M total Z-geodezik ise $h_Z = 0$ dır. h_Z nin tanımına göre

$$\overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N, \nabla^{\perp}_Y Z^N) = 0$$

dır.

$\forall X \in \chi(M)$ ve $\forall Y \in \chi(M)$ için

$\overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N, \nabla^{\perp}_Y Z^N) = 0$ olduğundan özel olarak $X = Y$ için de $\overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N, \nabla^{\perp}_X Z^N) = 0$ olup $\nabla^{\perp}_X Z^N = 0$ dır. Bu ise Z^N nin M nin normal demetinde paralel olduğu anlamına gelir.

Tersine, Z^N normal demette paralel olsun, yani $\forall X \in \chi(M)$ için $\nabla^{\perp}_X Z^N = 0$ dır. Buradan

$$\overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N, \nabla^{\perp}_Y Z^N) = 0$$

eşitliği yazılabilir. M total geodezik olduğundan $h(X,Y) = 0$ dır. $\overline{g}$ nin bir metrik olmasından

$$\overline{g}(\nabla^{\perp}_X Z^N + h(X, Z_T), \nabla^{\perp}_Y Z^N + h(Y, Z_T)) = 0$$

yazılabilir. h_Z nin tanımı gözönüne alınırsa

$$h_Z(X,Y) = 0 \text{ dır.}$$

Total Z-geodezik olma tanımından, M total Z-geodeziktir.

Örnek 3.2.1 de $h = 0$ olduğundan IR^3 Riemann manifoldunun S^2 altmanifoldu *total geodezik* altmanifold olur ve bu örnekte $h_Z = 0$ bulunduğundan $\nabla^{\perp}_X Z^N = 0$ dır. Böylece *teorem 3.4.1* in gerçeklendiği rahatlıkla görülür.

3.5. Z-Minimal Altmanifold

Tanım 3.5.1: Bir $Z \in \chi\left(M, \overline{M}\right)$ göre $p \in M$ noktasındaki $Z-$*ortalama eğriliği*

$$H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_z(E_{i,} E_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\nabla_{E_I}^{\perp} Z^N + h(E_i, Z_T), \nabla_{E_I}^{\perp} Z^N + h(E_i, Z_T)) \qquad (3.5.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$h_z(E_i, E_i)$, E_i yönünde Z nin normal eğriliğinin karesidir ve E_i ler $1 \le i \le n$, M de ortonormal vektör alanıdırlar[(6)].

Örnek 3.2.1 de IR^3 Riemann manifoldunun S^2 altmanifoldu üzerinde $H_Z = 0$ olduğundan $p \in S^2$ noktasındaki $Z-$*ortalama eğriliği* sıfırdır.

Tanım 3.5.2: Eğer Z- ortalama eğriliği M nin her noktasında sıfıra özdeş ise M altmanifolduna *Z-minimaldir* denir[(6)].

Örnek 3.2.1 de S^2 nin her noktasında $H_Z = 0$ olduğundan S^2 altmanifoldu *Z-minimaldir*.

$$(3.2.3) \ ve \ (3.5.1) \text{ den } H_Z = 0 \Leftrightarrow h_z(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in T(M)$$

dir.

Böylece şu teorem verilebilir.

Teorem 3.5.1: $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda,

M total Z-geodezik $\Leftrightarrow$ Z-minimaldir

önermesi doğrudur[(6)].

İspat: M , total Z-geodeziktir. $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in T(M)$ için $h_z(X,Y)=0$ dır.

Özel olarak $X = Y = E_i$ alınırsa;

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_z(E_{i,}E_i) = 0$$

$\Leftrightarrow H_Z = 0$ dır.

$\Leftrightarrow M$, Z- minimaldir.

Sonuç 3.5.1: Total geodezik altmanifold olsun. Buna göre,

Z- minimaldir. $\Leftrightarrow$ $Z-$nin normal bileşeni, normal demette paraleldir [(6)].

İspat: M , total geodezik altmanifold olduğundan $h=0$ dır.

Z-minimal olsun. O halde $H_Z = 0$ dır.

$$\Leftrightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_z(E_{i,}E_i) = 0$$

$\Leftrightarrow h_z(E_{i,}E_i) = 0$ dır.

$$\Leftrightarrow \overline{g}(\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N + h(E_i, Z_T), \nabla^{\perp}_{E_i} Z^N + h(E_i, Z_T)) = 0$$

ve $h(E_i, Z_T) = 0$ olduğundan,

$$\Leftrightarrow \overline{g}(\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N, \nabla^{\perp}_{E_i} Z^N) = 0$$

$\Leftrightarrow \nabla^{\perp}_{E_i} Z^N = 0$ dır.

$\Leftrightarrow$ Z nin normal bileşeni normal demette paraleldir.

Tanım 3.5.3: Z nin geodezik eğriliklerinin karelerinin ortalaması, *Z- ortalama geodezik eğrilik* olarak tanımlanır ve

$$Q_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_Z\left(E_i, E_i\right) \tag{3.5.2}$$

ile ifade edilir[(6)].

Tanım 3.5.4: Benzer biçimde, mutlak geodezik eğriliklerin karelerinin ortalaması, *Z- ortalama mutlak eğrilik* olarak tanımlanır, ve

$$L_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_Z\left(E_i, E_i\right) \tag{3.5.3}$$

şeklinde ifade edilir[(6)].

$(3.2.4), (3.5.1), (3.5.2)$ *ve* $(3.5.3)$ den

$$L_Z = H_Z + Q_Z \tag{3.5.4}$$

olduğu söylenebilir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} L_Z &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} l_Z\left(E_i, E_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(h_Z\left(E_i, E_i\right) + q_Z\left(E_i, E_i\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_Z\left(E_i, E_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_Z\left(E_i, E_i\right) \\ &= H_Z + Q_Z \end{aligned}$$

Bundan dolayı,

$$L_Z = H_Z + Q_Z$$

dir.

Teorem 3.5.2 : $\bar{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu M olsun. Z-minimaldir gerek ve yeter koşul Z- ortalama mutlak eğriliği, Z- ortalama geodezik eğriliğine eşittir.

Yani,

$$M\ ,\ Z-\ \text{minimaldir.} \Leftrightarrow L_Z = Q_Z$$

dir[6].

İspat: M Z-minimaldir $\Leftrightarrow\ H_Z = 0$ dır.

$$L_Z = H_Z + Q_Z$$

eşitliğinden

$$L_Z = Q_Z$$

dir.

Sonuç olarak Z- ortalama mutlak eğriliği, Z- ortalama geodezik eğriliğine eşittir.

M nin total umbilik altmanifold olmasını dikkate alınırsa,

$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve H, M nin ortalama eğriliği olmak üzere,

$$h(X,Y) = g(X,Y)H \tag{3.5.5}$$

dir.

M manifoldunun normal vektör alanları $\{N_1, N_2, ..., N_{m-n,}\}$ olsun.

$$\begin{aligned} h(X,Y) &= nor\overline{\nabla}_X Y \\ &= \sum_{i=1}^{m-n} f^i . N_i \end{aligned}$$

dir.

$$G\left(h\left(X,Y\right),N_j\right)=G\left(\sum_{i=1}^{m-n} f^i.N_i,N_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m-n} f^i.G\left(N_i,N_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m-n} f^i\delta_{ij}$$

$$=f^j$$

Bu ifadeyi bir önceki ifadede yerine yazarsak,

$$h(X,Y)=\sum_{i=1}^{m-n} G(h(X,Y),N_i).N_i$$

$$h(X,Y)=\sum_{i=1}^{m-n} G\left(\overline{\nabla}_X Y-\nabla_X Y,N_i\right).N_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m-n} G\left(\overline{\nabla}_X Y,N_i\right).N_i$$

dir.

$G(Y,N_i)=0$, $\forall Y\in\chi(M)$ için $\overline{\nabla}_X G(Y,N_i)=0$ dır.

$$\overset{\overline{\nabla} metrik}{\Rightarrow} G\left(\overline{\nabla}_X Y,N_i\right)+G\left(Y,\overline{\nabla}_X N_i\right)=0$$

$$\Rightarrow G\left(\overline{\nabla}_X Y,N_i\right)=G\left(Y,-\overline{\nabla}_X N_i\right)$$

$\tan\left(\overline{\nabla}_X N_i\right)=-A_iX$ olduğundan,

$$\Rightarrow h(X,Y)=\sum_{i=1}^{m-n} G\left(Y,-\overline{\nabla}_X N_i\right).N_i$$

$$\Rightarrow h\left(X,Y\right)=\sum_{i=1}^{m-n} G\left(Y,A_iX\right).N_i$$

$\Rightarrow g(A_iX,Y)=\lambda_i\, g\left(X,Y\right)$ ve $A_iX=\lambda_i.I_m$ ise M total umbilik altmanifoldudur.

$$\Rightarrow h(X,Y)=g(X,Y)\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{m-n}\lambda_i N_i}_{H}$$

$$\Rightarrow h(X,Y)=g(X,Y).H$$

dır.

Z nin normal bileşeni normal demette paralel olursa ,

$\nabla_{E_i}{}^{\perp}Z^N=0$, $i=1,2,...,n$ dir.

$(3.5.1)$ *ve* $(3.5.5)$ den

$$H_Z=\frac{1}{n}|H|^2\sum_{i=1}^{n}g(E_i,Z_T)^2 \qquad (3.5.6)$$

dir.

$(3.5.6)$ dan $H_Z=0 \Leftrightarrow M$ de $\sum_{i=1}^{n}g(E_i,Z_T)^2\neq 0$ olduğundan $H=0$ dır.

Gerçekten,

$$H_Z=0\Leftrightarrow H_Z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}h_z(E_{i,}E_i)=0$$

$$\Leftrightarrow H_Z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(\underbrace{\nabla_{E_i}^{\perp}Z^N}_{0}+h(E_i,Z_T),\underbrace{\nabla_{E_i}^{\perp}Z^N}_{0}+h(E_i,Z_T))=0$$

$$\Leftrightarrow H_Z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(h(E_i,Z_T),h(E_i,Z_T))=0$$

$$\Leftrightarrow H_Z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|h(E_i,Z_T)\right\|^2=0$$

$$\Leftrightarrow H_Z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\|g(E_i,Z_T)H\right\|^2=0$$

$$\Leftrightarrow H_Z=\frac{1}{n}|H|^2\sum_{i=1}^{n}g(E_i,Z_T)^2=0$$

$\Leftrightarrow g(E_i, Z_T)^2 \neq 0$ için $H = 0$ dır.

Teorem 3.5.3: $Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ vektör alanı, total umbilik altmanifold olan M de tanımlı olup, Z nin normal bileşeni normal demette paralel olsun.O zaman,

M , $Z-$minimaldir $\Leftrightarrow$ M minimaldir [6].

İspat: M , total umbilik altmanifold olduğundan,

$\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için $h\left(X, Y\right) = g\left(X, Y\right).H$ dir.

Z nin normal bileşeni normal demette paralel olduğundan

$\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N = 0$, $i = 1,2,...,n$ dir.

$(:\Rightarrow)$

$Z-$minimal olsun.

O halde $H_Z = 0$ dır.

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\underbrace{\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N}_{0} + h(E_i, Z_T), \underbrace{\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N}_{0} + h(E_i, Z_T)) = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(h(E_i, Z_T), h(E_i, Z_T)) = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\| h(E_i, Z_T) \right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\| g(E_i, Z_T) H \right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\left|H\right|^2 \sum_{i=1}^{n} g(E_i, Z_T)^2 = 0$$

$\Rightarrow g(E_i, Z_T)^2 \neq 0$ için $H = 0$ dır.

$\Rightarrow M$, minimaldir.

$(\Leftarrow:)$

M, minimal olsun. O halde $H=0$ dır.

M umbilik altmanifold ve Z nin normal bileşeni normal demette paralel olduğundan $H_Z=0$ dır.

$\Rightarrow M, Z-$minimaldir.

Teorem 3.5.4: $Z\in\chi\left(M,\bar{M}\right)$ vektör alanı, total umbilik altmanifold olan M de tanımlı olup, Z nin normal bileşeni normal demette paralel olsun. O halde aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

$i)$ M, total Z$-$geodeziktir.

$ii)$ $M, Z-$minimaldir.

$iii)$ M, minimaldir.

$iv)$ M, total geodeziktir

[6].

İspat:

$i)\Rightarrow ii)$

M total Z-geodezik olsun. M nin $Z-$minimal olduğunu göstereceğiz.

M total Z-geodezik olduğundan $h_Z=0$ dır.

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için $h_Z(X,Y)=0$ dır. $X=Y=E_i$ alınırsa $h_Z(E_i,E_i)=0$ olur.

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_Z\left(E_i, E_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = 0$$

$$\Rightarrow M, Z - \text{minimaldir.}$$

$ii.) \Rightarrow iii.)$

M , Z minimal olsun. O halde $H_Z = 0$ dır.

M total umbilik altmanifold olduğundan $h(X,Y) = Hg(X,Y)$ ve $\forall X,Y \in \chi(M)$ dir.

Ayrıca Z nin normal bileşeni normal demette paralel olduğundan $\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N = 0$, $1 \le i \le n$ dir.

O halde

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\underbrace{\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N}_{0} + h(E_i, Z_T), \underbrace{\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N}_{0} + h(E_i, Z_T)) = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(h(E_i, Z_T), h(E_i, Z_T)) = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\| h(E_i, Z_T) \right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left\| g(E_i, Z_T) H \right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow H_Z = \frac{1}{n}\left|H\right|^2 \sum_{i=1}^{n} g(E_i, Z_T)^2 = 0$$

$$\Rightarrow g(E_i, Z_T)^2 \neq 0 \text{ için } H = 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow M - \text{minimaldir.}$$

$iii.) \Rightarrow iv.)$

M minimal ise $H=0$ dır.

$h(X,Y)=Hg(X,Y)$ ve $\forall X,Y\in\chi(M)$ ve $g(X,Y)\neq 0$ için $h=0$ dır.

$\Rightarrow M$, total geodeziktir.

$iv.) \Rightarrow i.)$

M , total geodezik ise $h=0$ dır.

Z nin normal bileşeni normal demette paralel olduğundan $\nabla^{\perp}_{E_i} Z^N = 0$, $1\leq i\leq n$ dir.

$$h_Z\left(E_i,E_i\right)=\overline{g}\left(\underbrace{\nabla^{\perp}{}_{E_i}Z^N}_{0}+\underbrace{h\left(E_i,Z_T\right)}_{0},\underbrace{\nabla^{\perp}{}_{E_i}Z^N}_{0}+\underbrace{h\left(E_i,Z_T\right)}_{0}\right)$$

$$=0$$

$\Rightarrow h_Z = 0$ dır.

$\Rightarrow M$ total Z-geodeziktir.

3.6. Konneksiyonu Koruyan Dönüşüm

$\overline{M}$ m-boyutlu Riemann manifoldunda M ve M' bağlantılı hiperyüzeyler, sırasıyla A ve A' M ve M' de Weingarten dönüşümleri ve

$$F: M \to M'$$

örten diffeomorfizmi $I.$ ve $II.$ temel formları koruyan bir izometri olsun. Daha açıkca F_* ın

$\forall X_p, Y_p \in T_pM$ için

$$g\left(X_P,Y_P\right)=g'\left(F_{*P}\left(X_P\right),F_{*P}\left(Y_P\right)\right)$$

ve

$$F_* \circ A = A' \circ F_* \qquad (3.6.1)$$

dır.

Teorem 3.6.1: M ve M' iki manifold olsun. Bir

$$F : M \to M'$$

diffeomorfizmi ve M' üzerinde bir ∇' konneksiyonu verildiğinde, M üzerinde öyle bir tek ∇ konneksiyonu vardır ki,

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$F_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{F_* X} F_* Y \qquad (3.6.2)$$

dir. (Yani F konneksiyon koruyan dönüşümdür.) [(2)].

İspat:

F dönüşümü diffeomorfizm verildiğinden ,

$$F_* : \chi(M) \to \chi(M')$$

dönüşümü, birebir ve örtendir.O halde, F_*^{-1} dönüşümü vardır. Diğer taraftan

$\chi(M)$ ve $\chi(M')$, sırasıyla, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$F_*(X+Y) = F_*(X) + F_*(Y)$$

ve $\forall f \in C^\infty(M, IR)$ için

$$F_*(fX) = (f \circ F^{-1}) F_* X$$

dir. Buna göre

$$\nabla_X Y = F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_* X} F_* Y\right)$$

şeklinde tanımlı ∇ operatörünün, M için bir konneksiyon olduğunu gösterelim.

i) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X (Y+Z) = F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*(Y+Z)\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*Y + F_*Z\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*Y + \nabla'_{F_*X} F_*Z\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*Y\right) + F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*Z\right)$$

$$= \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

dir.

ii) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_{X+Y} Z = F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X+Y)} F_*Z\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X+F_*Y} F_*Z\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*Z + \nabla'_{F_*Y} F_*Z\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_*Z\right) + F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*Y} F_*Z\right)$$

$$= \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

dir.

iii) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, IR)$ için,

$$\nabla_{fX} Y = F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*fX} F_*Y\right)$$

Burada,

$$F_*(fX) = \left(f \circ F^{-1}\right) F_*X$$

değeri yerine yazılır, $f \circ F^{-1} \in C^{\infty}\left(M', IR\right)$ ve ∇' nin de M' de konneksiyon olduğu düşünülürse,

$$\nabla_{fX} Y = F_*^{-1}\left(\nabla'_{\left(f \circ F^{-1}\right)F_*X} F_* Y\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\left(f \circ F^{-1}\right)\nabla'_{F_*X} F_* Y\right)$$

elde edilir.Diğer taraftan, F_* için bilinen özellikler

$$F_*^{-1} : \chi\left(M'\right) \to \chi\left(M\right)$$

için varolacağından

$$F_*^{-1}\left(\left(f \circ F^{-1}\right)\nabla'_{F_*X} F_* Y\right) = \left(\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F\right) F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_* Y\right)$$

$$= fF_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_* Y\right)$$

$$= f\nabla_X Y$$

buradan da

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$$

bulunur.

iv) $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ ve $\forall f \in C^{\infty}\left(M, IR\right)$ için,

$$\nabla_X fY = F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X} F_* fY\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*X}\left(f \circ F^{-1}\right) F_* Y\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\left(F_* X\right)\left(f \circ F^{-1}\right) F_* Y + \left(f \circ F^{-1}\right)\nabla'_{F_*X} F_* Y\right)$$

$$= F_*^{-1}\left(\left(F_* X\right)\left(f \circ F^{-1}\right) F_* Y\right) + F_*^{-1}\left(\left(f \circ F^{-1}\right)\nabla'_{F_*X} F_* Y\right)$$

$$= \left(\left(F_* X\right)\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F\right) Y + F_*^{-1}\left(\left(f \circ F^{-1}\right)\nabla'_{F_*X} F_* Y\right)$$

$$=\left(\left(F_*X\right)\left(f\circ F^{-1}\right)\circ F\right)Y+f\nabla_X Y$$

dir. Diğer taraftan, $\forall p\in M$ için,

$$\left(\left(F_*X\right)\left(f\circ F^{-1}\right)\circ F\right)(p)=\left(F_*X\left(f\circ F^{-1}\right)\right)\left(F(p)\right)$$

$$=F_*X\big|_{F(p)}\left(f\circ F^{-1}\right)$$

$$=\left(F_*\big|_p\left(X_p\right)\right)\left(f\circ F^{-1}\right)$$

$$=X_p\left(f\circ F^{-1}\circ F\right)$$

$$=X_p\left(f\right)$$

olduğundan,

$$\left(F_*X\right)\left(f\circ F^{-1}\right)\circ F=X\left(f\right)$$

dir. O halde,

$$\nabla_X f\,Y=X\left(f\right)Y+f\nabla_X Y$$

Böylece, ∇ konneksiyonu M üzerinde bir konneksiyondur. ∇ nın tanımı gereğince

$$F_*\left(\nabla_X Y\right)=\nabla'_{F_*X}F_*Y$$

dir, yani F konneksiyonu koruyan bir dönüşümdür.

Şimdi de ∇ nın tek olduğunu gösterelim. Bunun içinde aksini varsayacağız. F konneksiyonu koruyacak şekilde, bir diğer $\hat{\nabla}$ konneksiyonu var olsun. O zaman, $\forall X,Y\in\chi\left(M\right)$ için,

$$F_*\left(\nabla_X Y\right)=\nabla'_{F_*X}F_*Y$$

ve

$$F_*\left(\hat{\nabla}_X Y\right)=\nabla'_{F_*X}F_*Y$$

olur.

$$F_*\left(\nabla_X Y\right)=F_*\left(\hat{\nabla}_X Y\right)$$

F_* dönüşümü birebir olduğundan

$$\nabla_X Y=\hat{\nabla}_X Y$$

dir. Bu ise $\nabla=\hat{\nabla}$ olduğunu yani ∇ nın tek olduğunu gösterir.

Buna göre,

$$\left(\nabla g\right)\left(X,Y,Z\right)=0 \text{ ve } \left(\nabla g'\right)\left(X',Y',Z'\right)=0 \text{ olsun.}$$

$$\left(\nabla g\right)\left(X,Y,Z\right)=X\left[g\left(Y,Z\right)\right]-g\left(\nabla_X Y,Z\right)-g\left(Y,\nabla_X Z\right)=0$$

$$\left(\nabla' g'\right)\left(X',Y',Z'\right)=X'\left[g'\left(Y',Z'\right)\right]-g'\left(\nabla_{X'}Y',Z'\right)-g'\left(Y',\nabla_{X'}Z'\right)=0$$

$$\begin{aligned}\left(\nabla' g'\right)\left(F_*X,F_*Y,F_*Z\right)&=F_*X\left[g'\left(F_*Y,F_*Z\right)\right]-g'\left(\nabla'_{F_*X}F_*Y,F_*Z\right)-g'\left(F_*Y,\nabla'_{F_*X}F_*Z\right)\\&=0\end{aligned}$$

Buradan da,

$$\begin{aligned}F_*X\left[g'\left(F_*Y,F_*Z\right)\right]&=F_*X\left[g\left(Y,Z\right)\circ F^{-1}\right]\\&=X\left[g\left(Y,Z\right)\circ F^{-1}\circ F\right]\\&=X\left[g\left(Y,Z\right)\right]\qquad(3.6.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_*X\left[g'\left(F_*Y,F_*Z\right)\right]&=g'\left(\nabla'_{F_*X}F_*Y,F_*Z\right)+g'\left(F_*Y,\nabla'_{F_*X}F_*Z\right)\\&=g\left(\tilde{\nabla}_X Y,Z\right)+g\left(Y,\tilde{\nabla}_X Z\right)\qquad(3.6.4)\end{aligned}$$

$(3.6.3)$ ve $(3.6.4)$ den,

$$X\left[g\left(Y,Z\right)\right]=g\left(\tilde{\nabla}_X Y,Z\right)+g\left(Y,\tilde{\nabla}_X Z\right) \qquad (3.6.5)$$

Öte yandan ∇, g ye göre metrik konneksiyon olduğundan

$$X\left[g\left(Y,Z\right)\right]=g\left(\nabla_X Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_X Z\right) \qquad (3.6.6)$$

$(3.6.5)$ ve $(3.6.6)$ dan,

$$g\left(\nabla_X Y,Z\right)+g\left(Y,\nabla_X Z\right)=g\left(\tilde{\nabla}_X Y,Z\right)+g\left(Y,\tilde{\nabla}_X Z\right)$$

dir.

$$X\left[g\left(Y,Z\right)\right]-g\left(\nabla_X Y,Z\right)-g\left(Y,\nabla_X Z\right)=\nabla g\left(X,Y,Z\right)=0$$

$$X\left[g\left(Y,Z\right)\right]-g\left(\tilde{\nabla}_X Y,Z\right)-g\left(Y,\tilde{\nabla}_X Z\right)=\tilde{\nabla} g\left(X,Y,Z\right)=0$$

Böylece

$$\nabla g=\tilde{\Delta} g=0 \qquad (3.6.7)$$

dir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\left[F_*X,F_*Y\right]&=F_*\left[X,Y\right]\\&=\nabla'_{F_*X}F_*Y-\nabla'_{F_*Y}F_*X\\&=F_*\left(\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_Y X\right)\end{aligned}$$

Buradan da $\tilde{T}\left(X,Y\right)=\left[X,Y\right]-\tilde{\nabla}_X Y+\tilde{\nabla}_Y X=0$ olduğundan $\tilde{\nabla}$ nın torsiyonu sıfırdır.

$$T\left(X,Y\right)=\left[X,Y\right]-\nabla_X Y+\nabla_Y X=0$$

∇ nın da torsiyonu sıfırdır. Bir Riemann manifoldu üzerinde torsiyonu sıfır olan bir tek metrik konneksiyon olduğundan $(3.6.7)$ yi de göz önüne alarak,

$$\nabla=\tilde{\nabla}$$

dır. Böylece, F aynı zamanda Riemann konneksiyonunu koruyan bir dönüşümdür.

M de herhangibir p ve $F(p)=p'$ olacak şekildeki noktası için, F_{*p} lineer dönüşümünü $T_p(\bar{M}) \to T_{p'}(\bar{M})$ şeklinde bir lineer dönüşüme genişletelim.

$Z \in \chi\ (M,\bar{M})$ ve M ve M' nün normal vektör alanları sırasıyla ξ ve ξ' olsun.

$$Z = Z_T + \alpha_p \xi_p \tag{3.6.8}$$

M dedir. $(3.6.8)$ in her iki yanına F_* dönüşümü uygulanırsa

$$F_* Z = F_* Z_T + \left(\alpha \circ F^{-1}\right)_{F(p)} \xi'_{F(p)} \tag{3.6.9}$$

sonucunu M' de elde etmiş oluruz.

$\bar{M}$ nin M hiperyüzeyi için, Gauss ve Weingarten dönüşümlerini kullanırsak,

$$\bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - \alpha AX + \left(X[\alpha] - g(AX, Z_T)\right)\xi \tag{3.6.10}$$

formülünü elde ederiz.

Şimdi de $(3.6.10)$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X Z &= \bar{\nabla}_X \left(Z_T + \alpha\xi\right) \\
&= \bar{\nabla}_X Z_T + \bar{\nabla}_X \alpha\xi \\
&= \nabla_X Z_T - g(AX, Z_T)\xi + \alpha\bar{\nabla}_X \xi + X[\alpha]\xi \\
&= \nabla_X Z_T - g(AX, Z_T)\xi + \alpha(-AX) + X[\alpha]\xi \\
&= \nabla_X Z_T - \alpha AX + \left(X[\alpha] - g(AX, Z_T)\right)\xi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - \alpha AX + \left(X[\alpha] - g(AX, Z_T)\right)\xi$$

dir.

Bu şekilde gösterilmiş oldu.

$(3.6.1),(3.6.8)$ *ve* $(3.6.9)$ dan,

$$\begin{aligned}
F_*\left(\bar{\nabla}_X Z\right) &= \left(\nabla'_{F_*X} F_* Z_T - \left(\alpha \circ F^{-1}\right) A' F_* X\right) + \left(F_* X\left[\alpha \circ F^{-1}\right] - g'\left(A' F_* X, F_* Z_T\right)\right)\xi' \\
&= \bar{\nabla}_{F_*X} F_* Z
\end{aligned}$$

$$F_*\left(\overline{\nabla}_X Z\right)=\overline{\nabla}_{F_*X}F_*Z \qquad (3.6.11)$$

elde edildiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
F_*\left(\overline{\nabla}_X Z\right) &= F_*\left(\left(\nabla_X Z_T-\alpha AX\right)+\left(X[\alpha]-g\left(AX,Z_T\right)\right)\xi\right)\\
&= F_*\nabla_X Z_T-F_*\alpha AX+\left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'F_*X,F_*Z_T\right)\right)\xi'\\
&\overset{(3.6.2)}{=} \nabla'_{F_*X}F_*Z_T-\left(\alpha\circ F^{-1}\right)F_*AX+\left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(F_*AX,F_*Z_T\right)\right)\xi'\\
&\overset{(3.6.1)}{=} \nabla'_{F_*X}F_*Z_T-\left(\alpha\circ F^{-1}\right)A'F_*X+\left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'F_*X,F_*Z_T\right)\right)\xi'\\
&= \nabla'_{F_*X}F_*Z_T-\left(\alpha\circ F^{-1}\right)A'X'+\left(X'\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'X',F_*Z_T\right)\right)\xi'\\
&= \overline{\nabla}_{F_*X}F_*Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_*\left(\overline{\nabla}_X Z\right) &= \left(\nabla'_{F_*X}F_*Z_T-\left(\alpha\circ F^{-1}\right)A'F_*X\right)+\left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'F_*X,F_*Z_T\right)\right)\xi'\\
&= \overline{\nabla}_{F_*X}F_*Z
\end{aligned}$$

dir.

Buradan da,

$$\begin{aligned}
\tan\overline{\nabla}_{F_*X}F_*Z &= \nabla'_{F_*X}F_*Z_T-\left(\alpha\circ F^{-1}\right)A'F_*X\\
&= \nabla'_{F_*X}F_*Z_T-\left(\alpha\circ F^{-1}\right)F_*AX\\
&= F_*\left(\nabla_X Z_T-\alpha AX\right)\\
&= F_*\left(\tan\overline{\nabla}_X Z\right)
\end{aligned}$$

$$\tan\overline{\nabla}_{F_*X}F_*Z=F_*\left(\tan\overline{\nabla}_X Z\right) \qquad (3.6.12)$$

ile

$$\begin{aligned}
\operatorname{nor}\overline{\nabla}_{F_*X}F_*Z &= \left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'F_*X,F_*Z_T\right)\right)\xi'\\
&= \left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(F_*AX,F_*Z_T\right)\right)\xi'
\end{aligned}$$

$$= \left(F_*X[\alpha] - F_*g(AX, Z_T)\right)F_*\xi$$
$$= F_*\left(\left(X[\alpha] - g(AX, Z_T)\right)\xi\right)$$
$$= F_*\left(\mathrm{nor}\overline{\nabla}_X Z\right)$$

$$\mathrm{nor}\overline{\nabla}_{F_*X} F_*Z = F_*\left(\mathrm{nor}\overline{\nabla}_X Z\right) \tag{3.6.13}$$

ifadesi elde edilir.

$(3.6.12)$ den,

$$\nabla_X Z_T - \alpha AX = \lambda X, M \ dedir.$$
$$\Leftrightarrow \nabla'_{F_*X} F_*Z_T - \left(\alpha \circ F^{-1}\right)A'F_*X = \left(\lambda \circ F^{-1}\right)F_*X = \mu F_*X \tag{3.6.14}$$

M' de ve $\mu = \lambda \circ F^{-1}$ dir.

$$\nabla'_{X'} F_*Z_T - \left(\alpha \circ F^{-1}\right)A'X' = \mu X'$$

M' dedir.

$\lambda \ ve \ \mu$ sırasıyla M ve M' de C^{∞} fonksiyonlardır.

Sonra $(3.6.13)$ den,

$$M \text{ de, } \mathrm{nor}\overline{\nabla}_X Z = 0 \quad \Leftrightarrow M' \ de, \ \mathrm{nor}\overline{\nabla}_{F_*X} F_*Z = 0$$

dir.

Bu yüzden,

$$M \ de \ \mathrm{h}_Z(X, Y) = 0, \ \forall X, Y \in T(M)$$
$$\Leftrightarrow M' \ de \ \mathrm{h}'_{F_*Z}(X', Y') = 0, \ \forall X', Y' \in T(M') \tag{3.6.15}$$

dir.

Gerçekten,

$\forall X, Y \in T(M)$ için $M \ de \ \mathrm{h}_Z(X, Y) = 0$ olsun.

$\Leftrightarrow F_*\left(h_Z(X, Y)\right) = F_*(0) = 0$

$$\Leftrightarrow F_*\left(h_Z\left(X,Y\right)\right)=F_*\left(\left(\overline{g}\left(\left(X\left[\alpha\right]-g\left(AX,Z_T\right)\right)\xi,\left(Y\left[\alpha\right]-g\left(AY,Z_T\right)\right)\xi\right)\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \overline{g}(\left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(F_*AX,F_*Z_T\right)\right)\xi',\left(F_*Y\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(F_*AY,F_*Z_T\right)\right)\xi')=0$$

$$\Leftrightarrow \overline{g}(\left(F_*X\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'F_*X,F_*Z_T\right)\right)\xi',\left(F_*Y\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'F_*Y,F_*Z_T\right)\right)\xi')=0$$

$$\Leftrightarrow \overline{g}(\left(X'\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'X',F_*Z_T\right)\right)\xi',\left(Y'\left[\alpha\circ F^{-1}\right]-g'\left(A'Y',F_*Z_T\right)\right)\xi'=0$$

$$\Leftrightarrow M' \ de\ \mathrm{h}'_{F_*Z}\left(X',Y'\right)=0,\ \forall X',Y'\in T\left(M'\right)$$

olduğu buradan kolaylıkla görülür.

Buradan da,

$$M\ de\ H_Z=0\Leftrightarrow M'\ de\ H'_{F_*Z}=0 \tag{3.6.16}$$

yı verebiliriz.

Gerçekten,

$M\ de\ H_Z=0$ olsun.

$$\Leftrightarrow H_Z=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}h_z\left(E_i,E_i\right)=0$$

$$\Leftrightarrow h_Z\left(E_i,E_i\right)=0,\qquad 1\le i\le n-1$$

$$\Leftrightarrow h'_{F_*Z}\left(E'_i,E'_i\right)=0\qquad 1\le i\le n-1,\ E'_i\in T\left(M'\right)$$

$$\Leftrightarrow H'_{F_*Z}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}h'_{F_*Z}\left(E'_i,E'_i\right)=0$$

$$\Leftrightarrow M'\ de\ H'_{F_*Z}=0$$

olduğu rahatlıkla görülür.

$(3.6.14)$, $(3.6.15)$ ve $(3.6.16)$ dan, teorem $(3.6.2)$ yi verebiliriz.

Teorem 3.6.2: $\bar{M}$ Riemann manifoldunun bağlantılı hiperyüzeyleri M ve M' olsun. $F: M \to M'$ bir diffeomorfizm ve I. ve II. temel formları koruyan bir dönüşüm olsun.

$Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ vektör alanı için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$i)$ M , $Z-$umbiliktir. $\Leftrightarrow$ M' , $F_* Z-$umbiliktir.

$ii)$ M , total $Z-$geodeziktir. $\Leftrightarrow$ M' , total $F_* Z-$geodeziktir.

$iii)$ M , $Z-$minimaldir. $\Leftrightarrow$ M' , $F_* Z-$minimal

dir [6].

İspat:

$i.)$ M , $Z-$umbilik olsun. O halde,

$\forall X$ tanjant vektör alanı için, M de

$$\tan \bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - \alpha AX = \lambda X$$

dir.

$(3.6.14)$ den de M' de

$$F_*\left(\tan \bar{\nabla}_X Z\right) = \tan \bar{\nabla}_{F_* X} F_* Z = \nabla'_{X'} F_* Z_T - \left(\alpha \circ F^{-1}\right) A'X' = \left(\lambda \circ F^{-1}\right) F_* X = \mu X',$$

$\mu \in C^\infty$ dir.

M' , $F_* Z-$umbiliktir.

$ii.)$ M , total $Z-$geodezik olsun. O halde $h_Z = 0$ dır.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$h_Z\left(X, Y\right) = 0$$

dır. $(3.6.15)$ den

$$M' \; de \; \mathrm{h}'_{F_* Z}\left(X', Y'\right) = 0, \; \forall X', Y' \in T\left(M'\right)$$

Buradan da

M', total $F_* Z-$geodeziktir.

iii.) M, $Z-$minimal olsun.

O halde,

$H_Z = 0$ dır.

$(3.6.16)$ dan,

M' de $H'_{F_* Z} = 0$

Buradan da

M', $F_* Z-$minimaldir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Riemann manifoldunun özel altmanifoldları olan Z-umbilik, total Z-geodezik ve Z-minimal altmanifoldları ele alınıp incelenerek bazı karekterizasyonları verilmiştir. Riemann manifoldunun altmanifoldları üzerinde verilen genelleştirilmiş Gauss denklemi, normal eğrilik, geodezik eğrilik, asli eğrilik, asli eğrilik doğrultuları, umbilik altmanifold, total geodezik altmanifold, minimal altmanifold, ortalama eğrilik gibi kavramlar bir $Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ vektör alanı gözönüne alınarak yeniden tanımlanmıştır. Aşağıdaki incelemede $Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ vektör alanı için yapılan tanımların bazı özel durumlarda literatürde bilinen altmanifold geometrisindeki tanımlarla çakıştığı görülmektedir.

$Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ vektör alanı $Z = Z_T + Z^N$ yazılmıştı.

M de verilen X tanjant vektör alanına göre Z nin *kovaryant türevi*,

$$\bar{\nabla}_X Z = (\nabla_X Z_T - A_{Z^N} X) + (\nabla_X^{\perp} Z^N + h(X, Z_T)) = \tan \bar{\nabla}_X Z + nor \bar{\nabla}_X Z$$

dir.

Sonuç 4.1: Eğer $Z \in \chi\left(M\right)$ ise $\left(3.2.2\right)$ eşitliği, (2.9.2) eşitliğine indirgenir.

Yani, $\forall X, Z \in \chi\left(M\right)$ için

$$\bar{\nabla}_X Z = \nabla_X Z + h\left(X, Z\right)$$

ifadesi bildiğimiz *genelleştirilmiş Gauss denkleminden* başkası değildir.

M de bir c eğrisi alalım ve tanjant vektörünü T ile gösterelim.

Şimdi de *Z- mutlak eğriliğinin* yani $\overline{K}_{Z/a}$ nın, $\overline{M}$ *nin geodezik eğriliğine* yani $\overline{k}_g$ ye indirgendiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}\overline{K}^2_{Z/a} &= l_Z(T,T) \\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_T Z, \overline{\nabla}_T Z) \\ &= \left\|\overline{\nabla}_T Z\right\|^2\end{aligned}$$

Eğer $Z \in \chi(M)$ ve özel olarak $Z = T$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\overline{K}^2_{Z/a} &= \left\|\overline{\nabla}_T T\right\|^2 \\ &= \left(\overline{k}_g\right)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2: Z, M ye teğet ise *Z- mutlak eğriliği* yani $\overline{K}_{Z/a}$, $\overline{M}$ *nin geodezik eğriliğine* yani $\overline{k}_g$ ye indirgenir.

Z- geodezik eğriliğinin de yani $K_{Z/g}$ nin, M *nin geodezik eğriliğine* yani k_g e indirgendiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}K^2_{Z/g} &= q_Z(T,T) \\ &= \overline{g}(\nabla_T Z_T - A_{Z^N} T, \nabla_T Z_T - A_{Z^N} T) \\ &= \left\|\nabla_T Z_T - A_{Z^N} T\right\|^2\end{aligned}$$

Eğer $Z \in \chi(M)$ ve özel olarak $Z = T$ alınırsa,

$$\begin{aligned}K^2_{Z/g} &= \left\|\nabla_T T\right\|^2 \\ &= \left(k_g\right)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.3: Z, M ye teğet ise *Z- geodezik eğriliği* yani $K_{Z/g}$, M *nin geodezik eğriliğine* yani k_g e indirgenir.

Şimdi de Z- *normal eğriliğinin* yani $K_{Z/n}$ nın, M *nin normal eğriliğine* yani k_T ye indirgendiğini gösterelim.

$$\begin{aligned} K^2{}_{Z/n} &= h_Z(T,T) \\ &= \overline{g}(\nabla_T^{\perp} Z^N + h(T,Z_T), \nabla_T^{\perp} Z^N + h(T,Z_T)) \\ &= \left\| \nabla_T^{\perp} Z^N + h(T,Z_T) \right\|^2 \end{aligned}$$

Eğer $Z \in \chi(M)$ ve özel olarak $Z = T$ alınırsa,

$$\begin{aligned} K^2{}_{Z/n} &= \left\| h(T,T) \right\|^2 \\ &= \left(k_T\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.4: Z, M ye teğet ise Z- *normal eğriliği* yani $K_{Z/n}$, M *nin normal eğriliği* olan k_T ye indirgenir.

Bu sonuçlar birlikte düşünüldüğünde,

$$l_Z(T,T) = h_Z(T,T) + q_Z(T,T)$$

ve $(3.2.5)$ eşitliğinden,

$$\overline{K}^2_{Z/a} = K^2{}_{Z/g} + K^2{}_{Z/n}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\left(\overline{k}_g\right)^2 = \left(k_g\right)^2 + \left(k_T\right)^2$$

elde edilir.

Sonuç 4.5: $X = Y = T$ alınırsa $l_Z(X,Y) = h_Z(X,Y) + q_Z(X,Y)$ ifadesi Meusnier teoremindeki $\left(\overline{k}_g\right)^2 = \left(k_g\right)^2 + \left(k_T\right)^2$ eşitliğine indirgenir.

M deki bir c eğrisi için,

c, Z - mutlak geodeziktir. $\Leftrightarrow \overline{K}_{Z/a} = 0$ dır.

c, bir Z- geodeziktir. $\Leftrightarrow$ c nin herhangi bir noktasında $K_{Z/g} = 0$ dır.

önermeleri verilmişti.

Bu önermelerde eğer $Z \in \chi\left(M\right)$ ve özel olarak $Z = T$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6: c, M de bir eğri olmak üzere

c, $\overline{M}$ nin bir geodezik eğriliğidir. $\Leftrightarrow \overline{k}_g = 0$ dır.

c, M nin bir geodezik eğriliğidir. $\Leftrightarrow$ c nin herhangi bir noktasında $k_g = 0$ dır.

Eğer $X \in \chi\left(M\right)$ olmak üzere $\tan \overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X = \lambda X$ olacak şekilde bir λ reel değerli fonksiyonu varsa X M de *kuasi*-a*sli eğrilik vektör alanı* olarak tanımlanmıştı.

Özel olarak $Z \in \chi^{\perp}\left(M\right)$ alınırsa $\tan \overline{\nabla}_X Z = -A_{Z^N} X = \lambda X$ olur ki bu da X in M de a*sli eğrilik vektör alanı* olduğu anlamına gelir.

Sonuç 4.7: Eğer $Z \in \chi^{\perp}(M)$ ise Z- *kuasi-asli eğrilik vektör alanı*, *asli eğrilik vektör alanına* indirgenir.

c, M de bir eğri ve M deki tanjant vektör alanı T olsun. T vektör alanı M de Z- *kuasi-asli eğrilik vektör alanı* ise M deki c eğrisine Z- *kuasi-eğrilik çizgisi* olduğu şeklinde tanımlanmıştı. Buradan,

$$\tan \overline{\nabla}_T Z = \nabla_T Z_T - A_{Z^N} T = \lambda T$$

olur ki eğer $Z \in \chi^{\perp}(M)$ ise

$$\tan \overline{\nabla}_T Z = -A_{Z^N} T = \lambda T$$

olur, bu da c eğrisinin M üzerinde bir *eğrilik çizgisi* olması demektir.

Şu halde aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.8: c eğrisi, M de Z için bir *kuasi-eğrilik çizgisi* ise**,** özel olarak $Z \in \chi^{\perp}(M)$ alındığında M nin bir *eğrilik çizgisine* indirgenir.

Şimdi de Z-umbilik altmanifoldun, umbilik altmanifolda indirgendiğini gösterelim.

$(3.3.1)$ ifadesinde $A_{\xi} = \lambda . I$ olacak şekilde M de var olan bazı λ reel fonksiyonları için doğru ise o zaman ξ ye M de *umbilik vektör alanı* ya da M , ξ ye göre *umbiliktir* denir. Eğer M deki herbir X tanjant vektör alanı için, $(3.3.2)$ de

$$\tan \overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X = \lambda X$$

ise $\overline{M}$ Rieman manifoldunun bir M altmanifoldu, *Z-umbiliktir* diye tanımlanmıştı.

Sonuç 4.9: Eğer $Z \in \chi^{\perp}(M)$ ise $\tan \overline{\nabla}_X Z = -A_{Z^N} X = \lambda X$ olur ki, bu da $\overline{M}$ Riemann manifoldunun Z-umbilik altmanifold kavramının, *umbilik* altmanifold kavramıyla çakıştığını gösterir.

M de $h_Z = 0$ ise M altmanifoldu, *total Z-geodezik altmanifold* olarak tanımlanmıştı. Tanım$(3.4.1)$ de $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\overline{\nabla}_X Z = \tan \overline{\nabla}_X Z = \nabla_X Z_T - A_{Z^N} X$$

şeklinde yazılabileceği biliniyor.

Sonuç 4.10: Eğer $Z \in \chi(M)$ ve Z nin normal bileşeni normal demette paralel ise tanım$(3.4.1)$ deki total $Z-$geodezik altmaifold kavramı, tanım 2.9.23 de ki total geodezik altmanifold kavramına indirgenir.

$\overline{M}$ bir m-boyutlu manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere, M nin *ortalama eğriliği*

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(E_i, E_i)$$

şeklinde tanımlanmıştı.

Bir Z, $\overline{M}$ vektör alanının bir $p \in M$ noktasındaki $Z-$*ortalama eğriliği* $(3.5.1)$ de,

$$H_Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_z(E_{i,} E_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{g}(\nabla_{E_i}^{\perp} Z^N + h(E_i, Z_T), \nabla_{E_i}^{\perp} Z^N + h(E_i, Z_T))$$

şeklinde tanımlanmıştı. $h_z(E_i, E_i)$; E_i yönünde Z- normal eğriliğinin karesidir ve E_i ler $1 \leq i \leq n$, M de ortonormal vektör alanıdırlar.

Sonuç 4.11: $Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ vektör alanına göre $p \in M$ noktasındaki $Z-$*ortalama eğrilik* kavramı**,** eğer özel olarak $Z \in \chi\left(M\right)$ alınırsa *ortalama eğrilik* kavramına indirgenir.

Sonuç 4.12: $\bar{M}$ Riemann manifoldunun, $Z \in \chi\left(M, \bar{M}\right)$ vektör alanı, total umbilik altmanifoldu olan M de tanımlı olup, Z nin normal bileşeni normal demette paralel olduğunda, Z *-minimal* olan M altmanifoldu, *minimal altmanifolda* indirgenir.

KAYNAKLAR

1. R. S. Clark and F. Brickell, Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

2. H. H. Hacısalihoğlu, Diferensiyel Geometri, Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi, Ankara, 1983.

3. C. Yıldız, Genel Topoloji, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Ankara, 2002.

4. H. H. Hacısalihoğlu, Lineer Cebir, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Yayınları, Ankara, 1982.

5. B. Y. Chen, Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, Autumn, 1983.

6. N. S. Agashe and M. R. Chafle, On Special Submanifolds of a Riemannian Manifold, Tensor, N. S., vol. **50,** (1991)

7. N. S. Agashe, Curves Associated with an $\bar{M}$ -Vector Field on a Hypersurface M of a Riemannian Manifold $\bar{M}$, Tensor, N. S., **28**, 117-122, (1974).