KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

CENKER BİÇER

ŞUBAT 2006

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Prof. Dr. M. Yakup ARICA

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Danışman

Jüri Üyeleri

…………………………	________________________
…………………………	________________________
…………………………	________________________
…………………………	________________________
…………………………	________________________

ÖZET

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

BİÇER, Cenker

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Kerim KOCA

Şubat 2006, 131 sayfa

Tez üç temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde amaç ve konunun gelişimi hakkında ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde integral dönüşümleri hakkında temel bilgiler ve Fourier dönüşümünün temelini oluşturan periyodik olaylar için Fourier serileri incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise özel integral çekirdeklerine sahip Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümleri ortaya konulmuştur. Ayrıca bu bölümde integral dönüşümlerin fiziksel ve istatistiksel bazı uygulamaları üzerinde durulmuş ve konuya ilişkin örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : İntegral dönüşümleri, Fourier dönüşümleri, Laplace dönüşümleri, Mellin dönüşümleri, Karakteristik fonksiyon, Dağılımlar, Momentler.

ABSTRACT

INTEGRAL TRANSFORMS AND SOME APPLICATIONS

BİÇER, Cenker

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural and Applied Sciences

Deparment of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor : Prof. Dr. Kerim KOCA

February 2006, 131 pages

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, our objectives are listed and a short background on the subject is given. In the second chapter, some fundamental knowledge on integral transformations are stated and Fourier series of periodic events which are the basis of Fourier transformation are analyzed. In the third chapter, the transformations those have special integral kernels such as Fourier, Laplace and Mellin transformations are presented. Furthermore some examples on the physical an statistical applications of the integral transformations are given.

Key Words: Integral transformations, Fourier transformations, Laplace transformations, Mellin transformations, Characteristic function, Distributions, Moments.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında her türlü yardımını esirgemeyen tez yöneticisi hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda yardımlarını gördüğüm arkadaşlarıma, manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen aileme son olarak bana birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımlarını esirgemeyen eşime teşekkür ederim.

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanmasında İngilizce yazılmış bazı kitaplardan yararlanılmıştır. Önce [Murray] [G. B Folland] kaynaklarından Fourier Dönüşümünün çeşitli temel özellikleri öğrenilmiştir. [Myn. Tu] kaynağından ise konuyla ilişkin bazı teoremler alınarak ispatlanmıştır. [R. Yarasa] dan Dağılım ve genelleştirilmiş fonksiyonlar hakkında bilgi edinilmiştir.

Tezin esas uygulama kısmı [Debnath] kaynağı esas alınarak hazırlanmış özellikle Fourier Dönüşümünden hareket edilerek Mellin Dönüşümünün ortaya konuluşu ve bu dönüşümün İstatistiksel uygulamaları hakkında bu kaynaktan geniş olarak yararlanılmıştır. Yine Laplace ve Mellin dönüşümünün İstatistiksel uygulamalarında [C. Giffin] kaynağından yararlanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bilindiği gibi genel integral dönüşümleri çok geniş ve değişik uygulamalara sahiptir. Örneğin Laplace ve Fourier dönüşümleri gerek adi türevli gerekse kısmi türevli denklemlerde Başlangıç ve Sınır Değer problemlerinin çözümlerinde güçlü bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca konvolüsyon tipi integral denklemlerin çözümlerinde, belli tipten bazı genelleştirilmiş integrallerin hesaplanmasında bu tip integral dönüşümler büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu nedenle integral dönüşümlerin temel bilimler ve mühendislikte uygulama alanları çok yaygındır.

Bu tezin temel amacı ise belli tipten integral dönüşümlerinin İstatistik biliminde nasıl kullanıldığını araştırmak ve örneklerle konuyu açıklamaktır. Bu amaçtan hareketle Fourier Dönüşümü ve bu dönüşümde uygun bir değişken değiştirmesi yapılarak elde edilen Mellin Dönüşümü yardımıyla Olasılık yoğunluk fonksiyonu, Dağılım fonksiyonu ve karakteristik fonksiyonlar ile beklenen değer kavramları arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur.

Tez, integral dönüşümlerin İstatistiksel uygulamaları hakkında doktora yapacak öğrenciler için temel bir kaynak niteliğindedir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. İntegral Dönüşümleri ve Özellikleri

Bu kesimde, tezin temelini oluşturan bazı kavramlar ve tanımlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1.1. f, $[a,b]$ aralığında tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{F}[f(x)]=F(\alpha)=\int_a^b K(x,\alpha)f(x)\,dx \tag{2.1.1}$$

ifadesine f fonksiyonunun $[a,b]$'deki *İntegral Dönüşümü* denir. Burada $K(x,\alpha)$ iki değişkenli fonksiyonuna *İntegral Dönüşümünün Çekirdeği* adı verilir. $\mathcal{F}$ ise *İntegral Dönüşüm Operatörü* olarak isimlendirilir.

n- boyutlu Öklid Uzayında, bir integral dönüşüm benzer şekilde $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ ve $D\subset\mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\mathcal{F}[f(x)]=F(\alpha)=\int_D K(x,\alpha)f(x)\,dx \tag{2.1.2}$$

olarak tanımlanır.

Herhangi bir fonksiyonun her zaman türev ve integralinin olmayacağı gibi her f reel değerli fonksiyonunun da integral dönüşümü olmayabilir. Hangi fonksiyonların hangi koşullar altında integral dönüşümlerinin özellikle de Fourier, Laplace, Mellin dönüşümlerinin mevcut olduğu 3. Bölümde verilecektir.

İntegral dönüşümün çeşitli özellikleri Banach Uzayı, L_p Uzayı, Hilbert Uzayı gibi çeşitli uzaylarda incelenebilir ve geliştirilebilir. $K(x,s)$ çekirdek fonksiyonunun özel seçimlerine göre (2.1.1) İntegral Dönüşümü; Fourier, Laplace, Hankel, Mellin dönüşümü adlarını alır.

İntegral bağıntılarının tamamı integral dönüşümleri için de geçerlidir. Örneğin c_1, c_2 reel sabitler olmak üzere

$$\mathcal{F}\left[c_1 f(x)+c_2 g(x)\right]=c_1 \mathcal{F}\left[f(x)\right]+c_2 \mathcal{F}\left[g(x)\right] \tag{2.1.3}$$

lineerlik özelliği sağlanır.

Tanım 2.1.2. $F(\alpha), f(x)$ fonksiyonunun bir İntegral Dönüşümü iken

$$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha)\right] \tag{2.1.4}$$

oluyorsa $f(x)$'e, $F(\alpha)$ fonksiyonunun *Ters İntegral Dönüşümü* denir.

Tanım 2.1.3. f ve g integral dönüşümlerine sahip fonksiyonlar olmak üzere

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\mathcal{F}\left[g(x)\right] \tag{2.1.5}$$

olması $f(x)=g(x)$ olmasını gerektiriyorsa $\mathcal{F}$ integral dönüşümüne *Teklik özelliğini* sağlar denir.

Tanım 2.1.4. Bir D bölgesinin kompakt bir M alt bölgesi üzerinde sıfırdan farklı; bölgenin dışında özdeş olarak sıfır ve klasik anlamda türeve sahip bir φ fonksiyonuna, D üzerinde bir *Test Fonksiyonu* denir.

Tanım 2.1.5. Her φ test fonksiyonuna bir sayı karşılık getiren bir f fonksiyonuna *Fonksiyonel* denir ve karşılık getirdiği sayı $\langle f, \varphi \rangle$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.6. Bir f fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlarsa bu fonksiyonele *Lineer ve Süreklidir* denir:

a) c_1, c_2 sabitleri için

$$\begin{aligned}\langle f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\rangle &= \langle f, c_1\varphi_1\rangle + \langle f, c_2\varphi_2\rangle \\ &= c_1\langle f, \varphi_1\rangle + c_2\langle f, \varphi_2\rangle\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

dır.

b) Her $\{\varphi_n\}_1^\infty$ test fonksiyonu dizisine karşılık elde edilen $\{\langle f, \varphi_n\rangle\}_1^\infty$ dizisi sıfıra yakınsar.

Tanım 2.1.7. Sürekli ve lineer bir fonksiyonele *Genelleştirilmiş Fonksiyon* veya *Dağılım Fonksiyonu* denir.

Genelleştirilmiş birim fonksiyon

$$\langle 1, \varphi\rangle = \int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{2.1.7}$$

olarak tanımlanır. Genelleştirilmiş fonksiyonların bir noktadaki değerinden bahsedilemez, yani $f(x_0)$ yazılış şekli anlamsızdır. Ayrıca $f(x) = g(x)$ ise $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ yazılışı doğrudur.

Adi fonksiyonların klasik türevleri olmayabilir. Ancak dağılım (genelleştirilmiş) fonksiyonlarının her basamaktan türevleri daima vardır. Bu türevler de birer dağılım (genelleştirilmiş) fonksiyonudur.

Tanım kullanılarak

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = \langle f, -\varphi'\rangle \tag{2.1.8}$$

olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan f ve g iki genelleştirilmiş fonksiyon ise

$$\begin{aligned}\langle (f\,g)', \varphi\rangle &= -\langle f\,g, \varphi'\rangle \\ &= -\langle f, g\,\varphi'\rangle \\ &= -\langle f, ((g\,\varphi)' - g'\,\varphi)\rangle \\ &= -\langle f, (g\,\varphi)'\rangle + \langle f, g'\,\varphi\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle f', g\varphi \rangle + \langle f, g'\varphi \rangle \\
&= \langle g f', \varphi \rangle + \langle g' f, \varphi \rangle \qquad (2.1.9) \\
&= \langle g f' + g' f, \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

dır.

Örneğin;

$$
u(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases} \qquad (2.1.10)
$$

Heaviside birim basamak fonksiyonunun klasik anlamda türevi olmadığı halde $\langle u'(x), \varphi(x) \rangle \big|_{x=0} = \varphi(0)$ türevi mevcuttur.

Bir $f(x)$ genelleştirilmiş fonksiyonunun k ıncı basamaktan türevi $\left\langle f^{(k)}(x), \varphi(x) \right\rangle = (-1)^k \left\langle f, \varphi^{(k)} \right\rangle$ olarak tanımlanır. Buna göre Heaviside birim basamak fonksiyonunun k ıncı basamaktan türevi $\left\langle u^{(k)}(x), \varphi(x) \right\rangle = (-1)^k \varphi^{(k-1)}(0)$ 'dır.

2.2. Periyodik Fonksiyonlar ve Özellikleri

Tanım 2.2.1. Bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin. Tanımlı olduğu yerdeki her x için

$$f(x+p) = f(x)$$

olacak şekilde bir p pozitif sayısı varsa bu takdirde $f(x)$'e p periyotlu bir fonksiyon veya $f(x)$, p *periyoduna sahiptir* denir. Bir fonksiyon periyodik ise periyot tek olmayabilir.

Tanım 2.2.2. $f(x)$ periyodik bir fonksiyon olsun. Pozitif p periyotlarının en küçüğüne $f(x)$'in *asli (esas) periyodu* veya $f(x)$'in *basit periyodu* denir.

$f(x+p) = f(x)$ periyodik fonksiyonu aşağıdaki temel özelliklere sahiptir:

1) $\displaystyle\int_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\,dx$, (a , herhangi bir sabit sayı)

dir. Özel olarak $a = \dfrac{p}{2}$ alındığında

$$\int_{0}^{p} f(x)\,dx = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\,dx$$

olur.

2) $\displaystyle\int_{p}^{p+x} f(x)\,dx = \int_{0}^{x} f(x)\,dx$

3) $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt$, $(f(x+p) = f(x))$ olarak tanımlanan fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu durumda

$$\int_{\frac{-p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow g(x+p) = g(x)$$

dır.

4) $\displaystyle\int_{a}^{a+p} f(x)\,dx = \int_{0}^{p} f(x)\,dx$

dir.

2.3. Dirichlet Koşulları

2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlanmış aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.

1) $f(x)$, $(-\pi,\pi)$ aralığında sürekli veya parçalı sürekli bir fonksiyondur.

2) $f(x)$ fonksiyonunun bir periyot içindeki maksimum ve minimumları sonlu sayıda olsun.

3) $f(x)$ fonksiyonu bir periyot aralığında mutlak integrallenebilir yani,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dt = M < \infty$$

Özelliğini sağlasın.

Tanım 2.3.1. 1),2) ve 3) özelliklerine bir $f(x)$ fonksiyonu için *Dirichlet Koşulları* denir.

2.4. Fourier Serileri

Fiziksel bir olayı modelleyen diferensiyel denklem elde edildikten sonra uygun bir bölgede bu denklemin genel çözümü yerine baştan verilen bazı koşulları sağlayan çözümün bulunması, bir Cauchy problemi olarak bilinir. Bu koşullar başlangıç koşulları olabileceği gibi sınır koşulları da olabilir. Matematik-Fiziğin bazı denklemlerinin genel çözümleri elde edebildiği halde çoğu denklemlerin (özellikle de eliptik tipten olanlarının) genel çözümleri bulunamamaktadır. Bu durumda genel çözüm yerine amaca uygun olarak özel tipten çözümler aranır. Örneğin üstel tipten, değişkenlerine ayrılabilir tipten belli tipten çözümler genel olarak keyfi sabitler kapsar. Bu tip çözümler genel çözümün bir alt sınıfını oluşturur. Verilen başlangıç ve sınır koşulları elde edilen genel çözüme veya belli tipten çözüme uygulanarak keyfi fonksiyonların veya keyfi parametrelerin yok edilmesinde kullanılır. Çoğu zaman sınır koşulları uygulandığında çözümler $n \in N$ olmak üzere n sayılarına bağlı çıkar. Fiziksel denklemlerin büyük çoğunluğu lineerdir. Eğer denklem lineer ise her bir n için elde edilen çözümlerin sabitlerle çarpılıp toplanması da lineer denklemi sağlar. Bu durumda serisel çözüme ulaşılır. Sınır koşullarının uygulanması sırasında bazı keyfi sabitler yok edilmişti. Serisel çözüme başlangıç koşulları uygulandığında geri kalan keyfi sabitler de yok edilmek istendiğinde bu defa Fourier serileri ve Fourier katsayıları ile karşılaşılır. Fourier serileri başlangıç koşullarının uygulanması sırasında ortaya çıkabileceği gibi, sınır koşullarının uygulanması sırasında da karşılaşılabilir.

Tanım 2.4.1. $f(x)$, $\left(-L, L\right)$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon olsun ve bu aralığın dışında $f(x+2L) = f(x)$ özelliği sağlanacak şekilde periyodik olarak genişletilebilsin. Bu durumda

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\right] \tag{2.4.1}$$

ifadesine $f(x)$' in Fourier serisi veya Fourier açılımı denir. Burada a_n ve b_n'ler *Fourier Katsayıları* adını alır ve

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,dx \quad ,n=0,1,2,... \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,dx \quad ,n=1,2,... \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

olarak hesaplanır. Bazen $f(x)$ fonksiyonunun Fourier açılımı

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, cos(n\pi + \varphi_n) \tag{2.4.3}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu durumda $c_n\, cos(n\pi+\varphi_n)$ genel terimine $f(x)$'in n. Harmonik fonksiyonu denir.

Eğer $f(x)$ $P=2L$ periyotlu periyodik bir fonksiyon ise c herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ,n=0,1,2,... \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \quad ,n=1,2,...
\end{aligned}
\qquad (2.4.4)
$$

yazılabilir. Çünkü $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ve $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ fonksiyonlarının her ikisi de $p=2L$ ile periyodik fonksiyonlardır. Ayrıca $f(x)$ de $p=2L$ ile periyodik ise bunların çarpımları olan $f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ve $f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ fonksiyonları da $p=2L$ ile periyodiktir.

(2.4.4) eşitliğinde $c=-L$ alındığında buradan (2.4.2) eşitsizliklerinin doğruluğu görülür. Diğer taraftan (2.4.1)'deki $\frac{a_0}{2}$ sabit sayısı

$$
\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \qquad (2.4.5)
$$

olarak verilir.

Özel olarak $L=\pi$ seçildiğinde (2.4.2) ve (2.4.3) eşitlikleri basitleşir ve $f(x)$'in periyodu $p=2\pi$ olur. Böylece

$$
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right] \qquad (2.4.6)
$$

Fourier serisine ilişkin katsayılar;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \tag{2.4.7}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n\,x)\, dx \quad , n = 0, 1, 2, ... \tag{2.4.8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(n\,x)\, dx \quad , n = 1, 2, ... \tag{2.4.9}$$

biçiminde elde edilir..

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Fourier İntegralleri ve Fourier Dönüşümleri

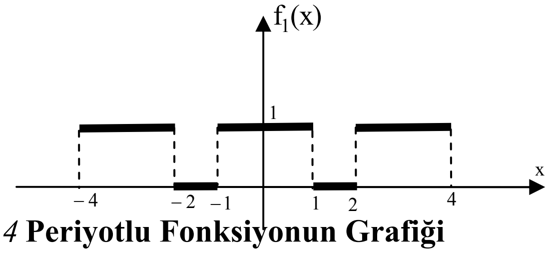
3.1.1. Fourier İntegralleri

Periyodik olayların incelenmesinde periyodik fonksiyonlar için Fourier serisi kavramı güçlü bir araçtır. Eğer bir olay periyodik değil veya periyodu sonsuz ise bu olayın incelenmesinde Fourier serisi kullanılamaz. Bu çeşit problemlerde (Mekanik, Elektrik sistemleri vs.) etki eden kuvvet veya voltaj periyotsuz olabilir. Örneğin bir defa oluşan ve tekrarlanmayan çeşitli darbe hareketleri gibi fakat verilen periyodik bir fonksiyonun periyodu sonsuza gittiğinde Fourier serisinin limiti varsa bu taktirde Fourier serisine benzer fakat farklı bir gösterilim şekli elde edebiliriz, fonksiyonun Fourier integral gösterilimi adı verilen bu kavram örnek 3.1.1 yardımı ile aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Örnek 3.1.1. $2L=4$ periyotlu $f_L(x)$ fonksiyonu

$$f_L(x)=\begin{cases}1 & ,-1<x<1\\ 0 & ,-2<x<-1,1<x<2\end{cases}$$

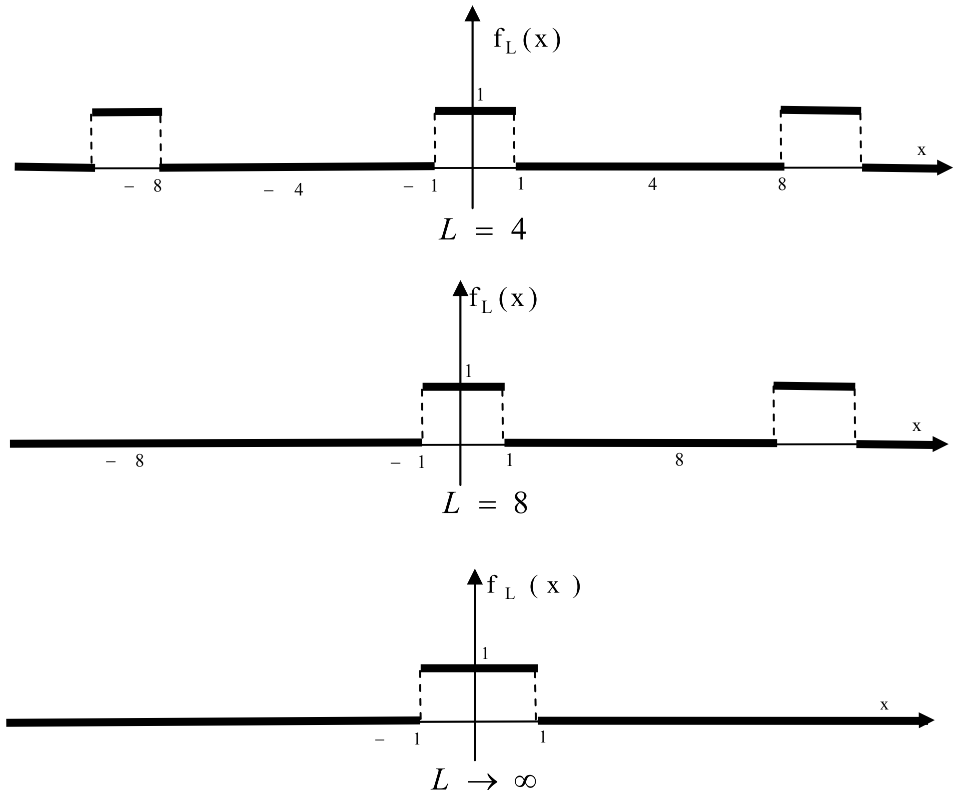
olarak tanımlansın.



Şekil 3.1. *$2L=4$* **Periyotlu Fonksiyonun Grafiği**

Bu periyodik fonksiyonun, periyodunun büyüyerek sonsuza gitmesi halinde periyodik olmayan bir şekle dönüştüğü durum incelensin.

Bunun için $L=4, L=8$ ve $L \to \infty$ için fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 3.2. Periyodun Sonsuza Gitmesi

$f_L(x)$ çift fonksiyon olduğundan

$$f_L(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\frac{\pi x}{L}) + a_2 \cos(\frac{2\pi x}{L}) + ... + a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + ... \tag{3.11}$$

şeklinde Fourier serisine açılabilir. Burada

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L dx = 2$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\, dx = \frac{2}{L}\frac{\sin(\frac{n\pi}{L})}{(\frac{n\pi}{L})}$$

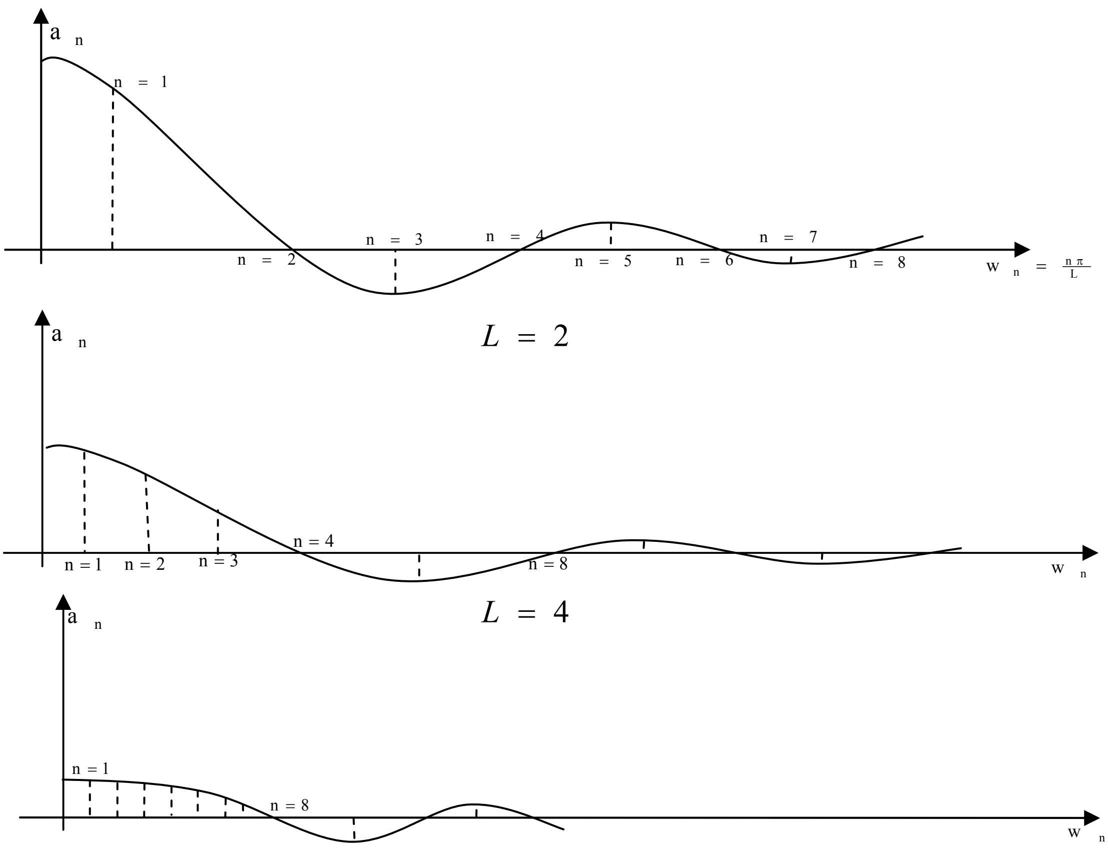
dır. a_n, $\frac{n\pi}{L}$ frekansının fonksiyonu olarak değişmektedir. a_n'de

$$w_n = \frac{n\pi}{L}$$

diyelim. Bu durumda

$$a_n = \frac{2}{L}\frac{\sin w_n}{w_n}$$

olur. w_n ler n ye ardışık değerler verilerek elde edilebilir ve ardışık iki değer arasındaki fark sabit olup bu fark $\frac{\pi}{L}$ dir. n indisi tamsayı olduklarından a_n amplitüdleri (w_n değiştikçe) sürekli bir eğri göstermezler. a_n'ler $y = \frac{2}{L}\frac{\sin w}{w}$ eğrisinde w nin sadece ardışık değerlerine karşılık gelen $\frac{\pi}{L}$ aralıklı ordinat değerleridir. Bu nedenle a_n'nin grafiği olan amplitüd spektrumuna *Çizgi Spektrumu* denir. Bu durum Şekil 3.3.'de $L = 2, L = 4, L \to \infty$ için çizilmiş a_n'nin grafiklerinde belirgin olarak görülmektedir.



Şekil 3.3. Çizgi Spektrumu

L sonsuz büyüdükçe (3.1.1) eşitliği ile gösterilen $f_L(x)$ serisinin terimlerinin frekansları giderek sıklaşmakta ve katsayıları da sıfıra yaklaşmaktadır.

Bundan dolayı $f_L(x)$ serisini, limiti integral olan sonsuz küçük terimlerin toplamı olarak düşünülebilir. Doğal olarak, bu durumda $f(x)$ periyodik değildir.

Her sonlu $(-L, L)$ aralığında Dirichlet koşullarını sağlayan ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak integrallenebilir olan $f(x)$ fonksiyonunun

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inwx} \quad ,(w=\frac{\pi}{L}) \tag{3.1.2}$$

şeklindeki seri açılımı ele alındığında C_n katsayıları

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-inwx}\, dx$$

olup bunların seride yerine yazılmasıyla

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-inwx}\, dx\right] e^{inwx}$$

veya π ile çarpılıp bölünmesiyle

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{u=-L}^{L} f(u) e^{-inwx}\, dx\right] e^{inwx}\left(\frac{\pi}{L}\right) \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Bu toplamın $L \to \infty$ için e^{inwx}'in limiti alındığında $w=\frac{\pi}{L}$'den görüleceği gibi $L \to \infty$ olurken, w küçülerek sıfıra yaklaşmaktadır.

Burada $n\,w = n\frac{\pi}{L}$ ifadesine *genel terim frekansı* denir. İki ardışık frekans arasındaki fark $\frac{\pi}{L}$ olup bunu

$$\frac{(n+1)\pi}{L}-\frac{n\pi}{L}=\frac{\pi}{L}=\Delta w$$

ile göstererek (3.1.3) de yerine konulduğunda

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{u=-L}^{L} f(u)\,e^{-i\,n\,w\,u}\,du\right]e^{i\,n\,\Delta\,w\,x}\,\Delta\,w \tag{3.1.4}$$

olur. Burada

$$\varphi(n\,\Delta\,w)=\left[\frac{1}{2}\int_{u=-L}^{L} f(u)\,e^{-i\,n\,w\,u}\,du\right]e^{i\,n\,\Delta\,w\,x}$$

olmak üzere (3.1.4) serisi

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n\,\Delta\,w) \tag{3.1.5}$$

şeklini alır. Ayrıca $L\to\infty$ olduğunda $\Delta\,w$ sıfıra yaklaşır. Diğer taraftan $n\to\infty$ için $n\,\Delta\,w$ harmonikleri sürekli değişeceğinden spektrumda sürekli sıralanacaklardır. Diğer bir deyişle $n\,w$'ya karşı gelen tek tek harmonikler yerine limit halinde $n\,\Delta\,w\to w$ alınabilir.

$L\to\infty\,(\Delta\,w\to 0)$ için (3.1.5) toplamının limiti Riemann integrali tanımından

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(w)\,dw$$

ifadesine eşit olacaktır. O halde $L\to\infty$ için (3.1.4) eşitliği

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{w=-\infty}^{\infty}\left[\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-i\,w\,u}\,du\right]e^{i\,w\,x}\,dw \tag{3.1.6}$$

biçimine gelir.

Bu eşitlik limit olarak elde edilmiş periyodik olmayan $f(x)$ fonksiyonunu sürekli harmonikler ile gösterme olanağı verir. (3.1.6) eşitliğinin geçerli olması için aşağıdaki koşulların sağlanması yeterlidir

1) $f(x), -\infty < x < \infty$ aralığında tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon ve sonlu sayıda süreksizlik noktaları bulunabilir.

2) Bir x_0 süreksizlik noktasındaki değeri

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0+0) + f(x_0-0)\right]$$

dır.

3) $f(x), -\infty < x < \infty$ aralığında mutlak integrallenebilir, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < M$$

olacak şekilde M sayısı mevcuttur.

Tanım 3.1.1. 1), 2) ve 3) koşullarının sağlanması durumunda (3.1.6) eşitliğine $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier İntegral* gösterilimi denir.

Tanım 3.1.2. 1), 2), 3) özelliklerine $f(x)$ in Fourier İntegral gösterilimi için Dirichlet koşulları denir.

Not : Periyodik fonksiyonların Fourier serisi gösteriliminde olduğu gibi sonsuz periyotlu $f(x)$ fonksiyonunun bir Fourier integral gösterilimine sahip olması için Dirichlet koşullarının sağlanması yeterli fakat gerekli değildir.

3.1.2. Fourier Dönüşümleri ve Ters Fourier Dönüşümleri

Tezin amacında da belirtildiği gibi Fourier dönüşümlerinin çok geniş kullanım alanları mevcuttur, özellikle periyodik olmayan ya da sonsuz periyotlu olayların incelenmesinde Fourier dönüşümleri ile karşılaşılır. En yaygın olarak Matematik-Fizik'in klasik denklemleri için verilen başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde; İstatistikte dağılım fonksiyonları ve karakteristik fonksiyonları arasındaki ilişkileri belirtmede; Matematik de elementer işlemlerle sonucu bulunamayan genelleştirilmiş integrallerin hesaplanmasında kullanılır..

Tanım 3.1.3. $f(x)$ $\mathbb{R}$ ' de Dirichlet şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere,

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\alpha x}\,dx \tag{3.1.7}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu taktirde

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha \tag{3.1.8}$$

fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun Fourier integrali denir. Burada $F(\alpha)$ fonksiyonuna da $f(x)$'in *Fourier dönüşümü* denir ve $F(\alpha)=\mathcal{F}\left[f(x)\right]$ ile gösterilir, ayrıca $f(x)$ fonksiyonuna da $F(\alpha)$ fonksiyonunun *Ters Fourier dönüşümü* denir. Bu ifade $f(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha)\right]$ biçiminde gösterilir.

3.1.3. Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.1.1. $\mathcal{F}\left[f(x)\right]=F(\alpha)$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}\left[f(x-a)\right]=e^{-i\alpha a}\,\mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{3.1.9}$$

dir. Bu özelliğe *Fourier Dönüşümünün Öteleme(Shifting) Özelliği* denir.

İspat: Fourier dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f(x-a)\right]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x-a)\,e^{-i\alpha x}\,dx \quad ,x-a=\varsigma\,,dx=d\varsigma\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty} f(\varsigma)\,e^{-i\alpha(a+\varsigma)}\,d\varsigma\\ &=e^{-i\alpha a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty} f(\varsigma)\,e^{-i\alpha\varsigma}\,d\varsigma\\ &=e^{-i\alpha a}\,\mathcal{F}\left[f(x)\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2. $\mathcal{F}\left[f\left(x\right)\right]=F\left(\alpha\right)$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}[f(ax)]=\frac{1}{|a|}F(\frac{\alpha}{a}) \tag{3.1.10}$$

dır.

İspat: Fourier dönüşümü tanımından

$$\mathcal{F}[f(a\,x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(a\,x)\,e^{-i\alpha x}\,dx$$

yazılabilir. Elde edilen integrale $ax=\varsigma$ dönüşümünü uygulayalım.Bu durumda $dx=\frac{1}{a}d\varsigma\,,x=\frac{\varsigma}{a}$ olacağından son integral

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(a\,x)]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(ax)\,e^{-i\alpha x}\,dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty} f(\varsigma)\,e^{-i\alpha(\frac{\varsigma}{a})}\,\frac{1}{a}d\varsigma\\&=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty} f(\varsigma)\,e^{-i(\frac{\alpha}{a})\varsigma}\,d\varsigma\\&=\frac{1}{|a|}F(\frac{\alpha}{a})\end{aligned}$$

dır. Burada $|a|$ olmasının nedeni integral sınırlarının $(-\infty)$ dan $(+\infty)$ a olmasındandır. Çünkü $a<0$ ise $ax=\varsigma$ dönüşümünde integral dönüşümleri $(+\infty)$ dan $(-\infty)$ a olur.

Teorem 3.1.3. $\mathcal{F}\left[f\left(x\right)\right]=F\left(\alpha\right)$ ve $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right]=F(\alpha-a) \tag{3.1.11}$$

dır.

İspat: Fourier dönüşümü tanımından

$$\mathcal{F}\left[e^{iax} f(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} f(x) e^{iax}\, dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-ix(\alpha-a)} f(x)\, dx$$
$$=F(\alpha-a)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4. Eğer $f(x)$ ' in Fourier dönüşümü

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x}\, dx$$

ise

$$\mathcal{F}\left[\overline{f(-x)}\right]=\overline{\mathcal{F}\left[f(x)\right]} \tag{3.1.12}$$

dir. Burada eşlenik i yerine $-i$ yazılacak anlamındadır.

İspat: Ters Fourier dönüşümü tanımından

$$f(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha \tag{3.1.13}$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafının eşleniğinin alınmasıyla

$$\overline{f(-x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha \tag{3.1.14}$$

elde edilir. $\overline{f(-x)}$ ifadesinin Fourier dönüşümünün alınmasıyla

$$\mathcal{F}\left[\overline{f(-x)}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha\, dx \tag{3.1.16}$$

olur. Ayrıca

$$\mathcal{F}\left[f(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha\, dx \tag{3.1.17}$$

yazılabilir. Bu ifadenin de eşleniği alınacak olursa

$$\overline{\mathcal{F}\left[f(x)\right]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha\, dx \tag{3.1.18}$$

elde edilir. Burada integral içerisindeki üstel ifadelerin işaretleri yer değiştirebilir. Böylece (3.1.16) ve (3.1.18) ifadeleri eşit olacaktır. Buradan

$$\mathcal{F}\left[\overline{f(-x)}\right] = \overline{\mathcal{F}\left[f(x)\right]}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5. $\mathcal{F}\left[f(x)\right] = F(\alpha)$ olmak üzere

$$\mathcal{F}\left[F(x)\right] = f(-\alpha) \tag{3.1.19}$$

dır.

İspat: Ters Fourier dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x}\, d\alpha \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha)\right] \end{aligned}$$

dır. Burada x ile α 'nın yerleri değiştirilip α yerine de $-\alpha$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(-\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\alpha x}\, dx \\ &= \mathcal{F}\left[F(x)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.6. $f(x), \mathbb{R}$ 'de parçalı sürekli ve $|x| \to \infty$ için $f(x) \to 0$ olsun. Eğer f ve f' türevi $\mathbb{R}$ 'de mutlak integrallenebilen fonksiyonlar ise bu durumda

$$\mathcal{F}\left[f'(x)\right] = i\alpha\, \mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{3.1.20}$$

dır.

İspat: Fourier dönüşümü tanımından

$$\mathcal{F}\left[f'(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f'(x)\,e^{-i\alpha x}\,dx$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f(x)\,e^{-i\alpha x}\Big|_{x=-\infty}^{\infty}+i\alpha\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\alpha x}\,dx\right]$$

dır. Hipotezden $f(x)e^{i\alpha x}\Big|_{x=-\infty}^{\infty}=0$ olacağından yukarıdaki integral

$$\mathcal{F}\left[f'(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}i\alpha\int_{u=-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}\,dx$$
$$=i\alpha\,\mathcal{F}\left[f(x)\right]$$

olup bu da istenilen özelliktir. Burada $e^{-i\alpha x}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}$ ifadesi $\lim\limits_{a\to\infty}\left[e^{-i\alpha x}f(x)\right]_{-a}^{a}$ anlamındadır.

Bu özellik genelleştirilmek istenirse $f(x)$'in $(n-1)$. basamağa kadar türevleri $\mathbb{R}$'de sürekli ancak n. basamaktan türevi $\mathbb{R}$'de parçalı sürekli, $f(x)$ ve $(n-1)$. basamağa kadar olan türev fonksiyonları $|x|\to\infty$ için sıfıra gidiyorsa bu durumda

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(x)\right]=(i\alpha)^n\,\mathcal{F}\left[f(x)\right]=(i\alpha)^n F(\alpha),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.1.21}$$

elde edilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişkene sahip fonksiyonların kısmi türevlerinin Fourier dönüşümleri için (3.1.21) ve (3.1.21) sonuçları yine geçerli olacaktır. Örneğin iki bağımsız değişkene sahip $u(x,t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım, $u(x,t)$ fonksiyonunun kısmi türevlerine ait Fourier dönüşümleri

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=i\alpha U(\alpha,t), && \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\alpha^2 U(\alpha,t)\\
&\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{dU}{dt}, && \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]=\frac{d^2U}{dt^2}
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.4. $f(x)$ ve $g(x)$ integrallenebilen herhangi iki fonksiyon ise

$$(f*g)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t=-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt=f(x)*g(x)=H(x) \qquad (3.1.23)$$

ifadesine f ile g'nin *Konvolüsyon Çarpımı* denir.

Konvolüsyon çarpımı,

$$f*g=g*f\,, \qquad f*(g*h)=(f*g)*h\,,$$
$$f*(g+h)=(f*g)+(f*h), \quad f*\sqrt{2\pi}\,\delta=f=\sqrt{2\pi}\,\delta*f$$

özelliklerine sahiptir. Tanımdan hareket ederek bu özellikler kolayca görülebilir.

Teorem 3.1.7. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları ayrı ayrı Fourier dönüşümlerine sahipler

ve $\mathcal{F}\left[f(x)\right]=F(\alpha)$, $\mathcal{F}\left[g(x)\right]=G(\alpha)$ ise, bu durumda

$$\mathcal{F}\left[f(x)*g(x)\right]=F(\alpha)G(\alpha) \qquad (3.1.24)$$

veya

$$f(x)*g(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[F(\alpha)G(\alpha)\right] \qquad (3.1.25)$$

veya daha genel hali ile

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}F(\alpha)G(\alpha)\,d\alpha \qquad (3.1.26)$$

dır.

İspat: Fourier dönüşümü tanımından,

$$\mathcal{F}\left[f(x)*g(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}\left[f(x)*g(x)\right]e^{-i\alpha x}\,dx$$

yazılabilir. Buradan $\mathcal{F}\left[f(x)*g(x)\right]$ ifadesi açık olarak yazılacak olursa eğer

$$\mathcal{F}\left[f(x)*g(x)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}f(x-t)\,g(t)\,dt\right]e^{-i\alpha x}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}f(x-t)\,g(t)\,dt\;dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x+i\alpha t-i\alpha t}f(x-t)\,g(t)\,dt\;dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(t)\,e^{-i\alpha t}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha(x-t)}f(x-t)\;dx\;dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}g(t)\,e^{-i\alpha t}F(\alpha)\;dt$$

$$=F(\alpha)G(\alpha)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8. $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\mathcal{F}\left[f(x)\right]=F(\alpha)$ olmak üzere

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2dx=\int\limits_{\alpha=-\infty}^{\infty}\left|F(\alpha)\right|^2d\alpha \tag{3.1.27}$$

dır.

İspat: Teorem (3.1.7.) den

$$\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}f(x-t)\,g(t)\,dt=\int\limits_{\alpha=-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}F(\alpha)G(\alpha)\,d\alpha$$

yazılabilir. Eşitliğin solundaki integralde $u=x-t$, değişken değiştirmesi yapıldığında $dt=-du$ olur. Böylece

$$\int\limits_{u=-\infty}^{\infty}f(u)\,g(x-u)\,du=\int\limits_{\alpha=-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}F(\alpha)G(\alpha)\,d\alpha \tag{3.1.28}$$

olur. Bu sonuç tüm reel x değerleri için geçerlidir. Özel olarak $x=0$ alınırsa (3.1.28) ifadesinden

$$\int\limits_{u=-\infty}^{\infty}f(u)\,g(-u)\,du=\int\limits_{\alpha=-\infty}^{\infty}F(\alpha)G(\alpha)\,d\alpha \tag{3.1.29}$$

elde edilir. Burada özel olarak $g(u)=\overline{f(-u)}$ seçilirse

$$G(\alpha)=\mathcal{F}\left[g(u)\right]=\mathcal{F}\left[\overline{f(-u)}\right]=\overline{\mathcal{F}\left[f(u)\right]}=\overline{F(\alpha)} \tag{3.1.30}$$

olur ve (3.1.29) ifadesi de bu seçime göre

$$\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\overline{g(u)}du=\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{F(\alpha)}d\alpha \tag{3.1.31}$$

veya

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx=\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\left|F(\alpha)\right|^2 d\alpha \tag{3.1.32}$$

bulunur.

Tanım 3.1.5. (3.1.32) eşitliğine Fourier dönüşümleri için *Parseval Özdeşliği* denir.

$f(x)$ ve $g(x)$ karesi integrallenebilen iki fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonların iç çarpımları (f,g) şeklinde tanımlanırsa

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{3.1.33}$$

olur. Böylece $\|f\|$ normu

$$\|f\|^2=(f,f)=\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\overline{f(x)}dx=\int_{x=-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx \tag{3.1.34}$$

olarak tanımlanır ve buradan

$$\|f\|=\|F\|=\|\mathcal{F}\,f\| \tag{3.1.35}$$

dir. Bu Fourier dönüşümünün üniter olduğunu gösterir. $\|f\|$ Fiziksel olarak enerjinin ölçüsüdür ve $\|F\|$ ise f in güç spektrumunu temsil eder.

Teorem 3.1.9. $\mathcal{F}\left[f(y)\right]=F(\alpha)$ ve $\mathcal{F}\left[g(x)\right]=G(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}\,d\alpha \tag{3.1.36}$$

dır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}\,d\alpha &= \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha y} f(y)\,dy \,\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} g(x)\,dx}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha y} f(y)\,dy \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\,\overline{g(x)}\,dx\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha y} f(y) e^{i\alpha x}\,\overline{g(x)}\,dy\,dx\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-y)} f(y)\,\overline{g(x)}\,d\alpha\,dy\,dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(x-y)} f(y)\,d\alpha\,dy\,dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{y=-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y)\,dy\,dx \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x)\,dx
\end{aligned}$$

dir. Burada özel olarak $g(x) = f(x)$ seçilirse (3.1.31) *Parseval Özdeşliğindeki* sonuç elde edilir.

3.1.4. Fourier Dönüşümünün Adi Türevli Denklemlere Uygulanması

n. basamaktan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemi

$$Ly = f(x) \tag{3.1.37}$$

şeklinde verilsin. Burada L $n.$ basamaktan ve $D = \frac{d}{dx}$ olmak üzere

$$L \equiv a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\,, \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ reel sabitler}) \tag{3.1.38}$$

şeklinde bir diferensiyel operatördür.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0 y = f\left(x\right) \tag{3.1.39}$$

sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denkleminde $f\left(x\right)$ Fourier dönüşümüne sahip bir fonksiyon olsun, $\mathcal{F}\left[y(x)\right] = Y\left(\alpha\right)$ ve $\mathcal{F}\left[f(x)\right] = F\left(\alpha\right)$ olmak üzere Fourier dönüşümünün özellikleri de kullanılarak her iki tarafın Fourier dönüşümü alındığında

$$\left[a_n \left(i\alpha\right)^n + a_{n-1}\left(i\alpha\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(i\alpha\right) + a_0\right] Y\left(\alpha\right) = F\left(\alpha\right) \tag{3.1.40}$$

veya

$$P\left(i\alpha\right) Y\left(\alpha\right) = F\left(\alpha\right) \tag{3.1.41}$$

elde edilir. Burada

$$P\left(i\alpha\right) = \sum_{r=0}^{n} a_r \left(i\alpha\right)^r$$

olarak kullanılmıştır. Benzer olarak $Q\left(\alpha\right) = \dfrac{1}{P\left(i\alpha\right)}$ olarak alınırsa (3.1.41) ifadesi

$$Y\left(\alpha\right) = F\left(\alpha\right) Q\left(\alpha\right) \tag{3.1.42}$$

biçiminde yazılır. $\mathcal{F}^{-1}\left[Q\left(\alpha\right)\right] = q\left(x\right)$ olmak üzere teorem (3.1.7) nin kullanılmasıyla

$$y\left(x\right) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f\left(t\right) q\left(x-t\right) dt \tag{3.1.43}$$

çözümü elde edilir.

Çözümün fiziksel bir sonucunu elde etmek için bir darbe fonksiyonu uygulaması olan $f\left(x\right) = \delta\left(x\right)$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$L\{G(x)\} = \delta(x) \tag{3.1.44}$$

ifadesi ortaya çıkar. Bu denklemin çözümünü (3.1.42)'nin tersinden yazacak olursak

$$G(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Q(\alpha)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} q(x) \tag{3.1.45}$$

olarak elde edilir. Böylece çözüm (3.1.43)'den (3.1.44) denkleminin çözümü

$$y(x) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) G(x-t)\, dt \tag{3.1.46}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.1.2. $I(t)$ basit bir devredeki elektrik akımı, R rezistans ve L de indüktans olmak üzere

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \tag{3.1.47}$$

diferensiyel denklemi geçerlidir. Burada $E(t)$ uygulanan elektro manyetik güçtür. $E(t) = E_0\, e^{-a|t|}$ olarak alınırsa (3.1.47) ifadesi

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0\, e^{-a|t|} \tag{3.1.48}$$

olur. t zamanına bağlı olarak eşitliğin her iki tarafına Fourier dönüşümü uygularsak $\mathcal{F}\left[I(t)\right] = \hat{I}(\alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(i\alpha L + R)\hat{I}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} e^{-a|t|} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \left[\int_{t=-\infty}^{0} e^{-i\alpha t} e^{at} dt + \int_{t=0}^{\infty} e^{-i\alpha t} e^{-at} dt\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \left[\int_{t=-\infty}^{0} e^{t(a-i\alpha)} dt + \int_{t=0}^{\infty} e^{-t(i\alpha+a)} dt\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \left[\frac{1}{a-i\alpha} + \frac{1}{a+i\alpha}\right]
\end{aligned}$$

veya

$$\hat{I}(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\,E_0}{iL\left[\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)+\left(a^2+\alpha^2\right)\right]} \tag{3.1.49}$$

elde edilir. Buradan (3.1.49) ‘un ters Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} I(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a\,E_0}{iL}\int\limits_{\alpha=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha t}}{\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)+\left(a^2+\alpha^2\right)}d\alpha \\ &=\frac{a\,E_0}{i\pi L}\int\limits_{\alpha=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha t}}{\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)+\left(a^2+\alpha^2\right)}d\alpha \end{aligned} \tag{3.1.50}$$

biçimindedir. Bu integral ise *Cauchy Rezidü* teoremi ile çözülebilir, $t>0$ için *Cauchy Rezidü* teoremine göre

$$I(t)=\frac{a\,E_0}{i\pi L}2\pi i\left[kalan \quad \alpha=\frac{Ri}{L} \quad + \quad kalan \quad \alpha=ia\right] \tag{3.1.51}$$

yazılabilir. Buradan

1. Rezüdi için

$$\lim_{\alpha\to\frac{Ri}{L}}\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)\frac{\mathrm{e}^{i\alpha t}}{\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)\left(\alpha^2+a^2\right)}$$

$$=\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{a^2-\frac{R^2}{L^2}}$$

dir

2. Rezüdi için

$$\lim_{\alpha\to ia}\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)\frac{\mathrm{e}^{i\alpha t}}{\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)(\alpha-ia)(\alpha+ia)}$$

$$=\frac{e^{-at}}{\left(ia-\frac{Ri}{L}\right)(2ia)}=-\frac{e^{-at}}{2a\left(a-\frac{R}{L}\right)}$$

dir. Buna göre

$$I(t) = \frac{a\,E_0}{i\pi L} 2\pi i \left[\frac{e^{-\frac{R}{L}t}}{a^2 - \frac{R^2}{L^2}} - \frac{e^{-at}}{2a\left(a - \frac{R}{L}\right)} \right]$$
$$= E_0 \left[\frac{e^{-at}}{R - aL} - \frac{2aLe^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 - a^2L^2} \right] \tag{3.1.52}$$

olur. Benzer şekilde $t < 0$ için yine *Cauchy Rezidü* teoreminden

$$I(t) = -\frac{a\,E_0}{i\pi L} 2\pi i \left[\lim_{\alpha \to -ia} (\alpha + ia) \frac{\mathrm{e}^{i\alpha t}}{\left(\alpha - \frac{Ri}{L}\right)(\alpha - ia)(\alpha + ia)} \right]$$
$$= -\frac{2a\,E_0}{L} \left[\frac{e^{at}}{-ia - \frac{Ri}{L}(-2ia)} \right] \tag{3.1.53}$$
$$= -\frac{2a\,E_0}{L} \left[\frac{-Le^{at}}{(aL + R)2a} \right]$$
$$= \frac{E_0 e^{at}}{(aL + R)}$$

olur. $t = 0$ da akım süreklidir ve

$$I(0) = \lim_{t \to 0} \frac{E_0 e^{at}}{(aL + R)}$$
$$= \frac{E_0}{aL + R} \tag{3.1.54}$$

dir. Eğer $E(t) = \delta(t)$ alınırsa $\widehat{E}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ve dolayısı ile

$$(i\alpha L + R)\hat{I}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

veya

$$\hat{I}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}iL}\cdot\frac{1}{\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)} \tag{3.1.55}$$

elde edilir. Bu ifadenin ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} I(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{iL}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha t}}{\left(\alpha-\frac{Ri}{L}\right)} \\ &=\frac{1}{L}e^{\frac{-R}{L}t} \end{aligned} \tag{3.1.56}$$

çözümü elde edilir. Böylece $t\to\infty$ durumunda akımın sıfıra gitmesi beklenir.

Örnek 3.1.3. $f(x)$ Fourier dönüşümüne sahip bir fonksiyon ve a da bir sabit olmak üzere

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+a^2u=f(x) \tag{3.1.57}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım $F(\alpha)=\mathcal{F}\left[f(x)\right]$ olmak üzere (3.1.57) eşitliğinin her iki tarafının fourier dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} &-\left(i^2\alpha^2U(\alpha)\right)+a^2U(\alpha)=F(\alpha) \\ &\left(\alpha^2+a^2\right)U(\alpha)=F(\alpha) \end{aligned} \tag{3.1.58}$$

veya

$$U(\alpha)=\frac{F(\alpha)}{\alpha^2+a^2} \tag{3.1.59}$$

olur. Teorem (3.1.7) ye göre bu sonuç

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt \tag{3.1.60}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g(x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e\left(-a|x|\right)$ dir. Böylece

çözüm

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-a|x-t|}dt$$
$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-a|x-t|}dt \qquad (3.1.61)$$

olur.

3.1.5. Fourier Dönüşümleri Yardımıyla İntegral Denklemlerinin Çözümleri

Konvolüsyon tipinden basit integral denklemleri Fourier dönüşümü kullanılarak çözülebilir. Bunu birkaç örnekle açıklayalım.

Örnek 3.1.4. İlk olarak

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,dt+\lambda f(x)=u(x) \qquad (3.1.66)$$

eşitliği ile verilen konvolüsyon çekirdeğine sahip Fredholm İntegral denklemini ele alalım burada $g(x)$ ve $u(x)$ verilmiş birer fonksiyon, λ ise bilinen bir parametredir. (3.1.66) denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümünü alırsak Teorem (3.1.7) nin de kullanılmasıyla

$$f(x)*g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t=-\infty}^{\infty}f(t)\,g(x-t)\,dt$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,dt+\lambda f(x)=u(x)$$

$$\sqrt{2\pi}F(\alpha)G(\alpha)+\lambda F(\alpha)=U(\alpha) \qquad (3.1.67)$$

elde edilir veya buradan

$$F(\alpha)=\frac{U(\alpha)}{\sqrt{2\pi}G(\alpha)+\alpha} \qquad (3.1.68)$$

bulunur. Eğer hesaplanan bu ifadenin ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{F}^{-1}\left(F(\alpha)\right)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}F(\alpha)\,d\alpha$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\frac{U(\alpha)}{\sqrt{2\pi}G(\alpha)+\lambda}d\alpha \tag{3.1.69}$$

çözümü elde edilir. Özel olarak $g(x)=\frac{1}{x}$ olarak alınırsa bu fonksiyona ait Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned}G(\alpha)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\frac{1}{x}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}\left(Cos\alpha x-iSin\alpha x\right)\frac{1}{x}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}Cos\alpha x\frac{1}{x}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}iSin\alpha x\frac{1}{x}dx\\&=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sgn}\alpha\end{aligned}$$

olur. (3.1.69) eşitliğinde bu çözümü yerine yazacak olursak aranan fonksiyon

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\frac{U(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha}{\lambda+i\pi Sgn\alpha}$$

olarak elde edilir. Eğer $\lambda=1$ ve $g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\right)$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}G(\alpha)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\right)dx\\&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\left(\frac{x}{|x|}\right)dx\end{aligned} \tag{3.1.70}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{x=-\infty}^{0}e^{-i\alpha x}(-1)dx+\int_{x=0}^{\infty}e^{i\alpha x}dx\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\alpha}\end{aligned}$$

olur. Bu sonuç, $\lambda = 1$ alınarak (3.1.69) da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \frac{U(\alpha)e^{i\alpha x}}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\alpha}+1} d\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \frac{U(\alpha)e^{i\alpha x}}{1+\frac{1}{i\alpha}} d\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} (i\alpha)\frac{U(\alpha)e^{i\alpha x}}{1+i\alpha} d\alpha \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[u'(x)\right]\mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}e^{-x}\right]e^{i\alpha x} d\alpha \\
&= u'(x) * \sqrt{2\pi}e^{-x} \\
&= \int_{\xi=-\infty}^{\infty} u'(\xi)e^{(\xi-x)} d\xi
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Örnek 3.1.5. $f(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$
\int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(x-\xi)f(\xi)d\xi = \frac{1}{x^2+a^2} \tag{3.1.71}
$$

integral denklemini çözelim. İlk olarak (3.1.71) denkleminin her iki tarafın Fourier dönüşümünü alalım. Bu durumda konvolüsyon teoreminin de kullanılmasıyla

$$
f(x)*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(x)g(x-\xi)d\xi
$$

ve

$$
\mathcal{F}\left[f(x)g(x)\right] = F(\alpha)G(\alpha)
$$

olması nedeniyle

$$
\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left[f(x)f(x)\right] = \sqrt{2\pi}F(\alpha)F(\alpha) \tag{3.1.72}
$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.1.71) denkleminin sağ tarafına da Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\frac{1}{x^2+a^2}dx$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{x^2+a^2}dx \tag{3.1.73}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\alpha|}}{a}$$

bulunur. Elde edilen (3.1.72) ve (3.1.73) sonuçları yerine yazılırsa

$$\sqrt{2\pi}F(\alpha)F(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\alpha|}}{a}$$

$$F^2(\alpha)=\frac{1}{2a}e^{-a|\alpha|}$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{2}a|\alpha|} \tag{3.1.74}$$

elde edilir. Son olarak bilinmeyen fonksiyon $f(x)$'i bulabilmek için (3.1.74) eşitliğinin ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}e^{-\frac{1}{2}a|\alpha|}d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\left[\int_{\alpha=-\infty}^{0}e^{i\alpha x+\frac{1}{2}a\alpha}d\alpha+\int_{\alpha=0}^{\infty}e^{i\alpha x-\frac{1}{2}a\alpha}d\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\left[\int_{\alpha=-\infty}^{0}e^{\alpha\left(\frac{a}{2}+ix\right)}d\alpha+\int_{\alpha=0}^{\infty}e^{-\alpha\left(\frac{a}{2}-ix\right)}d\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\left(\frac{1}{\frac{a}{2}+ix}+\frac{1}{\frac{a}{2}-ix}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\frac{4a}{a^2+4x^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{2}{a^2+4x^2}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.6. $f(x)$ Fourier dönüşümüne sahip bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^2+a^2} = \frac{1}{x^2+b^2} \tag{3.1.75}$$

integral denklemini çözelim.

Çözümü elde edebilmek için ilk olarak (3.1.75) denkleminin iki tarafının Fourier dönüşümünü alalım Teorem (3.1.7) nin göz önüne alınmasıyla eşitliğin sol tarafının Fourier dönüşümü

$$\sqrt{2\pi}F(\alpha)=\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right] \tag{3.1.76}$$

olur. Burada

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\alpha|}}{a} \tag{3.1.77}$$

dır. Buna göre

$$\sqrt{2\pi}F(\alpha)\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+a^2}\right]=\sqrt{2\pi}F(\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\alpha|}}{a} \tag{3.1.78}$$

olur. (3.1.75) eşitliğinin sağ tarafının Fourier dönüşümü ise

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+b^2}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b|\alpha|}}{b}$$

dir. Elde edilen bu sonuçlar (3.1.75) e göre yerlerine yazılırlarsa

$$\sqrt{2\pi}F(\alpha)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|\alpha|}}{a}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-b|\alpha|}}{b}$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{b}\right)\frac{e^{-b|\alpha|}}{e^{-a|\alpha|}}$$

veya

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{b}\right)e^{-|\alpha|(b-a)} \qquad (3.1.79)$$

elde edilir. (3.1.79) un her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa $f(x)$ bilinmeyen fonksiyonu

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{b}\right)e^{-|\alpha|(b-a)+i\alpha x}d\alpha\\
&=\frac{a}{2\pi b}\cdot\left(\frac{1}{(b-a)-ix}+\frac{1}{(b-a)+ix}\right)\\
&=\frac{a}{2\pi b}\cdot\frac{2(b-a)}{(b-a)^2+x^2}\\
&=\frac{a}{\pi b}\cdot\frac{(b-a)}{(b-a)^2+x^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1.7. f ve g Fourier dönüşümüne sahip iki fonksiyon olmak üzere

$$f(t)+4\int_{t=-\infty}^{\infty}e^{-a|x-t|}f(t)dt=g(x) \qquad (3.1.80)$$

integral denklemini çözelim. Burada g verilmiş, f ise bilinmeyen bir fonksiyondur. $F(\alpha)=\mathcal{F}\left[f(x)\right]$ olmak üzere (3.1.80) denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa

$$F(\alpha)+4\sqrt{2\pi}F(\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}e^{-a|x|}dx=G(\alpha)$$

$$F(\alpha)+4\sqrt{2\pi}F(\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{x=-\infty}^{0}e^{-i\alpha x+ax}dx+\int_{x=0}^{\infty}e^{-i\alpha x-ax}dx\right)=G(\alpha)$$

$$F(\alpha)+4\sqrt{2\pi}F(\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a-i\alpha}+\frac{1}{i\alpha+a}\right)=G(\alpha)$$

$$F(\alpha)+4\sqrt{2\pi}F(\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\alpha^2}=G(\alpha)$$

$$F(\alpha)\left(1+\frac{8a}{a^2+\alpha^2}\right)=G(\alpha)$$

elde edilir. Buradan $F(\alpha)$ çözülürse

$$F(\alpha)=\frac{G(\alpha)\left(a^2+\alpha^2\right)}{a^2+\alpha^2+8a} \tag{3.1.81}$$

olur. (3.1.81) in her iki tarafının ters Fourier dönüşümünün alınmasıyla $f(x)$ bilinmeyen fonksiyonu

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\frac{G(\alpha)\left(a^2+\alpha^2\right)}{a^2+\alpha^2+8a}d\alpha \tag{3.1.82}$$

olarak bulunur. Özel olarak $a=1$ ve $g(x)=e^{-|x|}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}e^{-|x|}d\alpha\right)\left(1^2+\alpha^2\right)}{1^2+\alpha^2+8}d\alpha\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+i\alpha}+\frac{1}{1-i\alpha}\right)\left(1^2+\alpha^2\right)}{1^2+\alpha^2+8}d\alpha\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right)\left(1^2+\alpha^2\right)}{1^2+\alpha^2+8}d\alpha\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{3^2+\alpha^2}d\alpha\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\frac{1}{3^2+\alpha^2}d\alpha
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $x>0$ için

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{\pi}\left(\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\cos\alpha x\frac{1}{3^2+\alpha^2}d\alpha+i\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\sin\alpha x\frac{1}{3^2+\alpha^2}d\alpha\right)\\
&=\frac{1}{\pi}2\int_{\alpha=0}^{\infty}\cos\alpha x\frac{1}{3^2+\alpha^2}d\alpha\\
&=\frac{1}{3}e^{-3x}
\end{aligned} \tag{3.1.83}$$

elde edilir. Eğer $x<0$ ise

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \tag{3.1.84}$$

dir. Sonuç olarak $f(x)$ aranan fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-|3x|}$$

olarak elde edilir.

3.1.6. Fourier Dönüşümünün Kısmi Türevli Denklemlere Uygulanması

Bu bölümde; Fourier dönüşümü kullanılarak farklı tipteki lineer kısmi türevli denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünün nasıl elde edileceğini örnekler ile açıklayacağız.

Örnek 3.1.8. (Yarı düzlemde Dirichlet problemi)

$y \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ yarı düzleminde

$$u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = 0 \quad , -\infty < x < \infty \quad , y > 0 \tag{3.1.85}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , -\infty < x < \infty \tag{3.1.86}$$

$$|x| \to +\infty \, , y \to +\infty \quad \text{için} \quad u(x,y) \to 0 \tag{3.1.87}$$

şeklinde tanımlanan sınır değer problemini göz önüne alalım. $u(x,y)$ çözümü Fourier dönüşümüne sahip ve $u(x,y)$'nin sadece x değişkenine göre Fourier dönüşümü

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} u(x,y)\,dx \tag{3.1.88}$$

dir. Ayrıca (3.1.85) ve (3.1.86) nın Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$\frac{d^2U(\alpha, y)}{dy^2} - \alpha^2 U(\alpha, y) = 0 \tag{3.1.89}$$

$$U(\alpha,0)=F(\alpha) \tag{3.1.90}$$

$$U(\alpha,y)\to 0 \quad ,y\to\infty \tag{3.1.91}$$

olduğu kolayca elde edilebilir. (3.1.89) denkleminin çözümü ise

$$U(\alpha,y)=C_1e^{-\alpha y}+C_2e^{\alpha y} \tag{3.1.92}$$

dir. Başlangıç ve sınır değerleri de kullanılırsa

$$U(\alpha,0)=C_1+C_2=F(\alpha)$$

olur. $y\to+\infty$ için $U(\alpha,y)\to 0$ olması gerekmektedir. Diğer taraftan $\alpha>0$ olduğunda $e^{-\alpha y}\to 0$, $e^{\alpha y}\to\infty$ olacağından $C_2=0$ olmalıdır. Ayrıca buna karşılık $\alpha<0$ olduğunda $e^{-\alpha y}\to\infty$ ve $e^{\alpha y}\to 0$ olacak ve $C_1=0$ değerini alacaktır. O halde tüm bu koşulları sağlayan çözüm

$$U(\alpha,y)=F(\alpha)e^{-|\alpha|y} \tag{3.1.93}$$

olur. (3.1.93) sonucuna Teorem (3.1.7.) nin uygulanmasıyla

$$u(x.y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)\,d\xi \tag{3.1.94}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
g(x)&=\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-|\alpha|y}\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}e^{-|\alpha|y}\,d\alpha\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\alpha=-\infty}^{0} e^{\alpha(ix+y)}d\alpha+\int_{\alpha=}^{\infty} e^{-\alpha(y-ix)}d\alpha\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{ix+y}+\frac{1}{y-ix}\right]\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

dir. Bu ifadeyi (3.1.94) eşitliğinde yerine yazacak olursak

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi$$
$$=\frac{y}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}d\xi \qquad (3.1.95)$$

çözümünü elde ederiz.

Tanım 3.1.6. **(**3.1.95) eşitliğine üst yarı düzlemde iki boyutlu *Laplace denklemi* için *Poisson integral formülü* denir. Başlangıç değerinin verilmesi halinde bu integral tek anlamlı olarak

$$\lim_{y\to\infty^+} u(x,y)=\int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\lim_{y\to\infty^+}\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2}\right]d\xi \qquad (3.1.96)$$

şeklinde hesaplanır. Burada delta fonksiyonunun Cauchy tanımı olan

$$\delta(x-\xi)=\lim_{y\to\infty^+}\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2} \qquad (3.1.97)$$

ifadesi kullanılırsa

$$\lim_{y\to\infty^+} u(x,y)=\int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\lim_{y\to\infty^+}\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x-\xi)^2+y^2}\right]d\xi$$
$$=\int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)dx \qquad (3.1.98)$$

elde edilir. Bu ifade x noktasında çift kutuplu bir kaynağın bu noktada Laplace denkleminin bir çözümü gibi yorumlanabilir.

$$H(a-|x|)=\begin{cases}1, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases} \qquad ,a\in\mathbb{R}$$

olmak üzere

$$f(x)=T_0H\left(a-|x|\right) \qquad (3.1.99)$$

olarak seçilirse

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int_{\xi=-a}^{a} \frac{1}{(\xi-x)^2+y^2} d\xi \\
&= \frac{T_0}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right)-\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)\right] \\
&= \frac{T_0}{\pi}\arctan\left\{\tan\left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right)-\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)\right]\right\} \\
&= \frac{T_0}{\pi}\arctan\left\{\frac{\tan\left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right)\right]-\tan\left[\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)\right]}{1+\tan\left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right)\right]\tan\left[\arctan\left(\frac{x-a}{y}\right)\right]}\right\} \\
&= \frac{T_0}{\pi}\arctan\left(\frac{\frac{x+a}{y}-\frac{x-a}{y}}{1+\left(\frac{x+a}{y}\right)\left(\frac{x-a}{y}\right)}\right) \\
&= \frac{T_0}{\pi}\arctan\left(\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bir diğer özel durum olarak $f(x)=\delta(x)$ olsun. Bu durum için çözüm (3.1.95) den eşitliğinden

$$
I = u(x,\xi) = \frac{y}{\pi}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi
$$

yazılır. Burada $v = x-\xi$ değişken değiştirmesi yaparsak bu taktirde $I(x)$ çözümü

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{y}{\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-v)}{v^2+y^2} dv \\
&= \frac{y}{\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} \delta(v-x)\frac{1}{v^2+y^2} dv \\
&= \frac{y}{\pi}\int_{v=-\infty}^{\infty} \delta(v-x) f(v) dv
\end{aligned}
$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{v=-\infty}^{\infty} f(v)\delta(v-x)dv$$

$$= \frac{y}{\pi} f(x)$$

$$= \frac{y}{\pi}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.7. Bir Sınır-Değer probleminde denklemle birlikte sınır koşulu olarak çözümün sınırdaki türevi veya sınırın normali doğrultusundaki türevi verilirse bu tür problemlere *Neumann Problemi* denir.

Örnek 3.1.9.

$y>0$ yarı-düzleminde

$$\begin{aligned} &u_{xx}+u_{yy}=0 \quad ,-\infty<x<\infty \\ &u_y(x,0)=g(x) \quad ,-\infty<x<\infty \end{aligned} \tag{3.1.100}$$

$y\to\infty$ için u çözümü sınırlı

$x\to\infty$ için u ve u_x sınırlı

olarak verilen Neumann problemini inceleyelim. Önce $v(x,y)=u_y(x,y)$ diyelim. Bu durumda

$$u(x,y)=\int_{\eta=a}^{y} \mathsf{v}(x,\eta)\,d\eta+a \tag{3.1.101}$$

yazılabilir. Burada a keyfi bir sabittir. Böylece Neumann Problemi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(u_{xx}+u_{yy})=0 \\ &\mathsf{v}(x,0)=u_y(x,0)=g(x) \end{aligned} \tag{3.1.102}$$

şekline gelir. Bir önceki Dirichlet probleminin çözümünden

$$v(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty}\frac{g(\varsigma)\,d\varsigma}{(\varsigma-x)^2+y^2} \tag{3.1.103}$$

yazılabilir. Buradan Neumann probleminin çözümü (3.1.101) yardımıyla

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=\frac{1}{\pi}\int_{\eta=a}^{y}\eta\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty}\frac{g(\varsigma)\,d\varsigma}{(\varsigma-x)^2+\eta^2}\,d\eta\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty}\int_{\eta=a}^{y}\eta\frac{g(\varsigma)}{(\varsigma-x)^2+\eta^2}\,d\eta d\varsigma\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty}g(\varsigma)\frac{1}{2}\int_{\eta=a}^{y}\frac{2\eta}{(\varsigma-x)^2+\eta^2}\,d\eta d\varsigma\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty}g(\varsigma)\log\left[\frac{(\varsigma-x)^2+y^2}{(\varsigma-x)^2+a^2}\right]d\varsigma
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu sonuca bir sabit ilave edilebilir, diğer bir ifadeyle bir Neumann probleminin çözümü bir sabit farkıyla sonsuz çokluktadır.

Örnek 3.1.10. x ekseni boyunca yerleştirilmiş bir boyutlu metal çubuk üzerindeki zamana bağlı ısı yayılımı

$$u_t = Ku_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \qquad t > 0 \tag{3.1.104}$$

bir boyutlu ısı denklemini sağlar. Başlangıç koşulu

$$u(x,0)=f(x), \qquad -\infty < x < \infty, \tag{3.1.105}$$

$u(x,t)$ sınırlı $t>0, |x|\to\infty$ için

olsun. Burada K ortamın yoğunluğuyla ilgili bir sabit $f(x)$ ise Fourier dönüşümüne sahip verilmiş bir fonksiyondur. Diğer taraftan $u(x,t)$ çözümünün Fourier dönüşümü

$$U(\alpha,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\alpha x}\,dx$$

olur ve (3.1.21) den

$$\mathcal{F}\left[u_{xx}\right]=(-i\alpha)^2 K\mathcal{F}\left[u(x,t)\right]=-\alpha^2 KU(\alpha,t) \tag{3.1.106}$$

ve

$$\mathcal{F}\left[u_t\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} u_t\, e^{-i\alpha x}\, dx=U_t \tag{3.1.107}$$

dir. Bu durumda verilen ısı denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[u_t+u_{xx}\right]=\mathcal{F}\left[u_t\right]-\mathcal{F}\left[u_{xx}\right] \\ &U_t+\alpha^2 KU=0 \end{aligned} \tag{3.1.108}$$

olur. Bu birinci basamaktan bir denklem olup doğrudan integralleme ile çözüm

$$U(\alpha,t)=F(\alpha)\,e^{-K\alpha^2 t} \tag{3.1.109}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} U(\alpha,0)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} u(x,0)\,e^{-i\alpha x}\, dx \\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\alpha x}\, dx=F(\alpha) \end{aligned}$$

yazılır. Böylece dönüşmüş denklemin çözümü

$$U(\alpha,t)=U(\alpha,0)\,e^{-K\alpha^2 t}=F(\alpha)\,e^{-K\alpha^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\alpha x}\, dx\, e^{-K\alpha^2 t} \tag{3.1.110}$$

dir. Bunun her iki tarafının Ters Fourier Dönüşümünün alınmasıyla verilen Başlangıç-Değer probleminin çözümü

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\left[F(\alpha)\,e^{-K\alpha^2 t}\right]e^{i\alpha x}\, dx \tag{3.1.111}$$

olarak bulunur. $G(\alpha)=e^{-K\alpha^2 t}$ nin Ters Fourier Dönüşümü

$$\begin{aligned} g(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-K\alpha^2 t+i\alpha x}\, d\alpha \\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-Kt\left[\left(\alpha+\frac{ix}{2Kt}\right)^2-\frac{x^2}{4Kt}\right]}\, d\alpha \\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-x^2}{4Kt}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-Kt\xi^2}\, d\xi \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{4Kt}}\sqrt{\frac{\pi}{Kt}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2Kt}}e^{\frac{-x^2}{4Kt}} \tag{3.1.112}$$

olacağından $u(x,t)$ çözümü (3.1.112)'nin de kullanılmasıyla

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Kt}}\int_{\varsigma=-\infty}^{\infty} f(\varsigma)e^{\frac{-(x-\varsigma)^2}{4Kt}}\,d\varsigma$$

bulunur.

Örnek 3.1.11.

$$\begin{aligned} &u_{tt}=C^2u_{xx} \quad ,-\infty<x<\infty \quad ,t>0 \\ &u(x,0)=f(x) \quad ,u_t(x,0)=g(x) \quad ,-\infty<x<\infty \end{aligned} \tag{3.1.113}$$

biçiminde verilen başlangıç değer probleminin çözümünü araştıralım. Burada $f(x)$ ve $g(x)$ Fourier dönüşümüne sahip iki fonksiyondur. Belirtilen Başlangıç-Değer probleminin çözümü, $u(x,t)$'nin x değişkenine göre Fourier dönüşümü alındığında

$$U(\alpha,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\alpha x}\,dx$$

olur ve (3.1.21) den

$$\mathcal{F}\left[C^2u_{xx}\right]=(-i\alpha)^2\,C^2\mathcal{F}\left[u(x,t)\right]=-\alpha^2\,C^2U(\alpha,t) \tag{3.1.114}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\mathcal{F}\left[u_{tt}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x=-\infty}^{\infty} u_{tt}\,e^{i\alpha x}\,dx=U_{tt} \tag{3.1.115}$$

olup. (3.1.113) ün her iki tarafının Fourier dönüşümünün alınmasıyla

$$U_{tt}+\alpha^2\,C^2U(\alpha,t)=0 \tag{3.1.116}$$

$$
\begin{aligned}
&U(\alpha,0)=F(\alpha) \\
&\left(\frac{dU(\alpha,t)}{dt}\right)_{t=0}=G(\alpha)
\end{aligned}
\tag{3.1.117}
$$

elde edilir. Bu dönüşümün çözümü sabit katsayılı adi türevli denklem olup genel çözüm

$$
U(\alpha,t)=Ae^{iC\alpha t}+Be^{-iC\alpha t}
\tag{3.1.118}
$$

dir. Verilen denklem kararlı bir denklem olduğundan başlangıç verilerinin kullanılmasıyla

$$
A+B=F(\alpha)
$$

ve

$$
A-B=\frac{1}{iC\alpha}G(\alpha)
$$

bulunur. Buradan $A=\dfrac{F(\alpha)}{2}+\dfrac{G(\alpha)}{2iC\alpha}$ ve $B=\dfrac{F(\alpha)}{2}-\dfrac{G(\alpha)}{2iC\alpha}$ olduğu kolayca hesaplanabilir. Bulunan bu katsayılar (3.1.118) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
U(\alpha,t)&=\left[e^{iC\alpha t}\left(\frac{F(\alpha)}{2}+\frac{G(\alpha)}{2iC\alpha}\right)\right]+\left[e^{-iC\alpha t}\left(\frac{F(\alpha)}{2}-\frac{G(\alpha)}{2iC\alpha}\right)\right] \\
&=\frac{1}{2}F(\alpha)\left(e^{iC\alpha t}+e^{-iC\alpha t}\right)+\frac{1}{2iC\alpha}G(\alpha)\left(e^{iC\alpha t}+e^{-iC\alpha t}\right)
\end{aligned}
\tag{3.1.119}
$$

olur. Bunun her iki tarafının ters Fourier dönüşümü alınırsa (3.1.113) başlangıç değer probleminin çözümü

$$
u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\left[\frac{1}{2}F(\alpha)\left(e^{iC\alpha t}+e^{-iC\alpha t}\right)+\frac{1}{2iC\alpha}G(\alpha)\left(e^{iC\alpha t}-e^{-iC\alpha t}\right)\right]d\alpha
$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}F(\alpha)\left(e^{i\alpha(Ct+x)}+e^{i\alpha(-Ct+x)}\right)d\alpha\right]$$

$$+\frac{1}{2C}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\frac{G(\alpha)}{i\alpha}\left(e^{i\alpha(Ct+x)}-e^{i\alpha(-Ct+x)}\right)d\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x+Ct)+f(x-Ct)\right]+\frac{1}{2C}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\frac{G(\alpha)}{i\alpha}\left(e^{i\alpha(Ct+x)}-e^{i\alpha(-Ct+x)}\right)d\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x+Ct)+f(x-Ct)\right]+\frac{1}{2C}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}G(\alpha)\int_{u=x-Ct}^{x+Ct}e^{i\alpha u}du\,d\alpha\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x+Ct)+f(x-Ct)\right]+\frac{1}{2C}\left[\int_{u=x-Ct}^{x+Ct}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}G(\alpha)e^{i\alpha u}d\alpha\,du\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(x+Ct)+f(x-Ct)\right]+\frac{1}{2C}\left[\int_{u=x-Ct}^{x+Ct}g(u)du\right]$$

olarak elde edilir. Bu sonuç dalga denklemi için D'Alambert çözümü olarak bilinir. Bu metot dalga denkleminin birkaç özelliği için önemli yer tutar. D'Alambert çözümünün geçerli olabilmesi için $f(x)$ ve $g(x)$'in Fourier dönüşümüne sahip olması yanında $f(x)$'in iki defa $g(x)$'in de bir defa sürekli türetilebilir olması gerekir. $f(x\pm C)$ terimi $x+Ct,\ x-Ct$ karakteristikleri boyunca dalganın yayıldığını gösterir.

Sonuç olarak çözüm başlangıç değerlerine bağlıdır. Diğer bir deyişle $f(x)$ veya $g(x)$ deki herhangi bir değişme $u(x,t)$'de de küçük bir değişime sebep olur. Örneğin özel olarak $f(x)=e^{-x^2}$ ve $g(x)\equiv 0$ ve $C=1$ seçilecek olursa bir önceki çözümünden

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(x-t)^2}+e^{-(x+t)^2}\right] \tag{3.1.120}$$

elde edilir.

3.1.7. Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs Dönüşümleri

Tanım 3.1.8. Eğer $f(x)$, $\mathbb{R}$ ’de tanımlı, Fourier dönüşümüne sahip tek bir fonksiyon ise $f(x)$ ’in Fourier İntegrali

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha=0}^{\infty} sin(\alpha x)\, d\alpha \int_{u=0}^{\infty} f(u)\, sin(\alpha u)\, du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha=0}^{\infty} \left[\int_{u=0}^{\infty} f(u) \sin(\alpha u)\, du \right] \sin(\alpha x)\, d\alpha \end{aligned}$$

şeklindedir. Eğer özel olarak

$$F_s(\alpha) = \int_{u=0}^{\infty} f(u)\, sin(\alpha u)\, du \tag{3.1.121}$$

alınırsa $f(x)$ ’in tek olması halinde Fourier integrali

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha=0}^{\infty} F_s(\alpha)\, sin(\alpha x)\, d\alpha \tag{3.1.122}$$

olur. $F_s(\alpha)$ fonksiyonuna $f(x)$ ’in *Fourier Sinüs Dönüşümü* denir ve $\mathcal{F}_s\left[f(x) \right]$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $f(x)$ fonksiyonuna da $F_s(\alpha)$ ’nın *Ters Fourier Sinüs Dönüşümü* denir ve $\mathcal{F}_s^{-1}\left[F_s(\alpha) \right]$ ile gösterilir.

Benzer şekilde eğer $f(x)$, $\mathbb{R}$ ’de Fourier dönüşümüne sahip çift bir fonksiyon ise $f(x)$ ’in Fourier integrali

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha=0}^{\infty} \cos(\alpha x)\, d\alpha \int_{u=0}^{\infty} f(u) \cos(\alpha u)\, du$$

olur. Buradan

$$F_c(\alpha) = \int_{u=0}^{\infty} f(u)\, cos(\alpha u)\, du \tag{3.1.123}$$

alınırsa $f(x)$ ’in Fourier integrali

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}F_c(\alpha)\,cos(\alpha\,x)\,d\alpha \tag{3.1.124}$$

olur.

Tanım 3.1.9. $F_c(\alpha)$ fonksiyonuna $f(x)$'in *Fourier Kosinüs Dönüşümü* denir ve $\mathcal{F}_c\left[f(x)\right]$ ile gösterilir. Ayrıca, $f(x)$ fonksiyonuna da $F_c(\alpha)$'nın *Ters Fourier Kosinüs Dönüşümü* denir ve $\mathcal{F}_c^{-1}\left[F_c(\alpha)\right]$ biçiminde de gösterilir.

Örnek 3.1.12. $a>0$ olmak üzere $\mathcal{F}_c\left[e^{-ax}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\left(a^2+\alpha^2\right)}$ olduğunu gösterelim.

Tanımdan direkt olarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\left[e^{-ax}\right]&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\cos(\alpha x)e^{-ax}dx\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x}+e^{i\alpha x}}{2}e^{-ax}dx\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\left[e^{-x(a+i\alpha)}+e^{-x(a-i\alpha)}\right]dx\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a-i\alpha+a+i\alpha}{a^2+\alpha^2}\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\alpha^2}
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.1.13. $a>0$ olmak üzere $\mathcal{F}_s\left[e^{-ax}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\left(a^2+\alpha^2\right)}$ olduğunu gösterelim.

Fourier Sinüs dönüşümü tanımdan direkt olarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\left[e^{-ax}\right]&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\sin(\alpha x)e^{-ax}dx\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i}e^{-ax}dx\\
&=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\left[e^{-x(a-i\alpha)}-e^{-x(a+i\alpha)}\right]dx
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a+i\alpha-a+i\alpha}{a^2+\alpha^2}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}$$

olur.

Örnek 3.1.14. $\mathcal{F}_s^{-1}\left[\frac{1}{\alpha}e^{-s\alpha}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\left(\frac{x}{s}\right)$ olduğunu gösterelim.

Fourier Sinüs dönüşümü tanımından

$$\mathcal{F}_s^{-1}\left[\frac{1}{\alpha}e^{-s\alpha}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{-s\alpha}}{\alpha}\sin(\alpha x)\,d\alpha \qquad (3.1.125)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca örnek (3.1.7.2) den

$$\mathcal{F}_s\left[e^{-sx}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}\sin(\alpha x)e^{-sx}\,d\alpha=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{s^2+x^2}$$

olduğu bilinmektedir. Bu sonuç kullanılarak (3.1.125) ifadesi

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{e^{-sx}}{\alpha}\sin(\alpha x)\,d\alpha=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{s=s}^{\infty}\left[\int_{\alpha=0}^{\infty}e^{-sx}\sin(\alpha x)\,d\alpha\right]ds$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{s=s}^{\infty}\left[\frac{x}{x^2+s^2}\right]ds$$
$$=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\left(\frac{s}{x}\right)\Bigg|_{s=s}^{t}$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{s}{x}\right)\right]$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\left(\frac{x}{s}\right)$$

olur.

Örnek 3.1.15. $g(x)=erfc(ax)=\int\limits_{t=ax}^{\infty}e^{-t^2}dt$ olmak üzere $g(x)$'in Fourier Sinüs

dönüşümünün

$$\mathcal{F}_s\left[erfc(ax)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2}}\right]$$

olduğunu gösterelim. Fourier Sinüs dönüşümünün tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left[erfc(ax)\right]&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{x=0}^{\infty}erfc(ax)\sin(\alpha x)dx\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\infty}\sin(\alpha x)\int\limits_{t=ax}^{\infty}e^{-t^2}dtdx\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{x=0}^{\infty}\int\limits_{t=ax}^{\infty}e^{-t^2}\sin(\alpha x)dtdx\end{aligned}$$

integral sırasının değiştirilmesiyle

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\left[erfc(ax)\right]&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{t=0}^{\infty}\int\limits_{x=0}^{\frac{t}{a}}e^{-t^2}\sin(\alpha x)dxdt\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-t^2}\int\limits_{x=0}^{\frac{t}{a}}\sin(\alpha x)dxdt\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\alpha}\int\limits_{t=0}^{\infty}e^{-t^2}\left[1-\cos\left(\frac{\alpha t}{a}\right)\right]dt\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\alpha}\int\limits_{t=0}^{\infty}\left[e^{-t^2}-e^{-t^2}\cos\left(\frac{\alpha t}{a}\right)\right]dt\\&=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\alpha}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2}}\right]\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2}}\right]\end{aligned}$$

bulunur.

3.1.7.1.Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs Dönüşümlerinin Bazı Özellikleri

Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs dönüşümlerinin lineerlik ve öteleme özellikleri gibi birkaç özelliği vardır. Bu tür özellikler kullanılarak birçok işlemlerin sonucu doğrudan yazılabilir.

Teorem 3.1.10. $f(x)$ 'in Fourier Kosinüs dönüşümü

$$\mathcal{F}_c\left[f(x)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{x=0}^{\infty}\cos(\alpha x)f(x)dx=F_c(\alpha)$$

ve $f(x)$ 'in Fourier Sinüs dönüşümü

$$\mathcal{F}_s\left[f(x)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{x=0}^{\infty}\sin(\alpha x)f(x)dx=F_s(\alpha)$$

ise bu takdirde a pozitif reel bir sabit olmak üzere

$$\mathcal{F}_c\left[f(ax)\right]=\frac{1}{a}F_c\left(\frac{\alpha}{a}\right) \tag{3.1.126}$$

ve

$$\mathcal{F}_s\left[f(ax)\right]=\frac{1}{a}F_s\left(\frac{\alpha}{a}\right) \tag{3.1.127}$$

dir.

İspat: Önce

$$\mathcal{F}_c\left[f(ax)\right]=\frac{1}{a}F_c\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

olduğunu gösterelim. Fourier Kosinüs dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c\left[f(ax)\right]&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{x=0}^{\infty}\cos(\alpha x)f(x)dx\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{x=0}^{\infty}\cos(\alpha x)f(ax)dx \qquad ,ax=u \quad ,dx=\frac{du}{a}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\int_{u=0}^{\infty}\cos\left(\frac{\alpha u}{a}\right)f(u)du$$

$$=\frac{1}{a}F_c\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

olur. Fourier Sinüs dönüşümü tanımından

$$\mathcal{F}_s\left[f(ax)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\sin(\alpha x)f(x)dx \qquad ,u=ax \quad ,dx=\frac{du}{a}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a}\int_{u=0}^{\infty}\sin\left(\frac{\alpha u}{a}\right)f(u)du$$

$$=\frac{1}{a}F_s\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.11. $f(x)$ Fourier Kosinüs dönüşümüne sahip $\mathbb{R}$ 'de parçalı sürekli bir fonksiyon ve $f(x)$ 'in Fourier Kosinüs dönüşümü $\mathcal{F}_c\left[f(x)\right]=F_c(\alpha)$, ayrıca $u\to\infty$ için $f(u)\to 0$ olsun. Eğer f, f', f'' türevi $\mathbb{R}$ 'de mutlak integrallenebilen fonksiyonlar ise bu takdirde

$$\mathcal{F}_c\left[f'(x)\right]=\alpha F_s(\alpha)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) \tag{3.1.128}$$

ve

$$\mathcal{F}_c\left[f''(x)\right]=-\alpha^2 F_c(\alpha)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) \tag{3.1.129}$$

dır.

İspat: Önce Fourier Kosinüs dönüşümü tanımını kullanarak

$$\mathcal{F}_c\left[f'(x)\right]=\alpha F_s(\alpha)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$$

olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\left[f'(x)\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty} f'(x)\cos(\alpha x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\lim_{b\to\infty} f(x)\cos(\alpha x)\Big|_0^b\right] + \alpha\int_{x=0}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx \\
&= \alpha F_s(\alpha) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)
\end{aligned}
$$

olur. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\left[f''(x)\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty} f''(x)\cos(\alpha x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\lim_{b\to\infty} f'(x)\cos(\alpha x)\Big|_0^b + \alpha\int_{x=0}^{\infty} f'(x)\sin(\alpha x)\,dx\right]\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[-f'(0) + \alpha\int_{x=0}^{\infty} f'(x)\sin(\alpha x)\,dx\right]\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{-f'(0) + \alpha\left[\lim_{b\to\infty} f(x)\sin(\alpha x)\Big|_0^b - \alpha\int_{x=0}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx\right]\right\} \\
&= -\alpha^2 F_c(\alpha) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)
\end{aligned}
$$

olur.

Teorem 3.1.12. $f(x)$ Fourier Sinüs dönüşümüne sahip $\mathbb{R}$'de parçalı sürekli bir fonksiyon ve $f(x)$'in Fourier Sinüs dönüşümü $\mathcal{F}_s\left[f(x)\right] = F_s(\alpha)$, ayrıca $u\to\infty$ için $f(u)\to 0$ olsun. Eğer f, f', f'' türevi $\mathbb{R}$'de mutlak integrallenebilen fonksiyonlar ise bu takdirde

$$
\mathcal{F}_s\left[f'(x)\right] = -\alpha F_c(\alpha) \qquad (3.1.130)
$$

ve

$$
\mathcal{F}_s\left[f''(x)\right] = -\alpha^2 F_s(\alpha) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha f(0) \qquad (3.1.131)
$$

dır.

İspat: Fourier Sinüs dönüşümü tanımını kullanarak

$$\mathcal{F}_s\left[f'(x)\right] = -\alpha F_c(\alpha)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\left[f'(x)\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} f'(x)\sin(\alpha x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\lim_{b\to\infty} f(x)\sin(\alpha x)\Big|_0^b\right] - \alpha \int_{x=0}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx \\
&= -\alpha F_c(\alpha)
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_s\left[f''(x)\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x=0}^{\infty} f''(x)\sin(\alpha x)dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{\left[\lim_{b\to\infty} f'(x)\sin(\alpha x)\Big|_0^b - \alpha \int_{x=0}^{\infty} f'(x)\cos(\alpha x)\,dx\right]\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{\left[-\alpha \int_{x=0}^{\infty} f'(x)\sin(\alpha x)\,dx\right]\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{-\alpha\left[\lim_{b\to\infty} f(x)\cos(\alpha x)\Big|_0^b + \alpha \int_{x=0}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx\right]\right\} \\
&= -\alpha^2 F_s(\alpha) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha f(0)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.13. (Konvolüsyon teoremi) $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları Fourier Kosinüs dönüşümlerine sahip ve $\mathcal{F}_c\left[f(x)\right] = F_c(\alpha)$, $\mathcal{F}_c\left[g(x)\right] = G_c(\alpha)$ ise bu taktirde

$$\mathcal{F}_c^{-1}\left[F_c(\alpha)G_c(\alpha)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\left[g(x+\xi) + g\left(|x-\xi|\right)\right]d\xi \qquad (3.1.132)$$

veya buna denk olarak

$$\int_{\alpha=0}^{\infty} F_c(\alpha)G_c(\alpha)\cos(\alpha x)\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\left[g(x+\xi) + g\left(|x-\xi|\right)\right]d\xi \qquad (3.1.133)$$

dır.

İspat: İspatı yaparken ters Fourier Kosinüs dönüşümünü kullanalım. Bu tanıma göre

$$\mathcal{F}_c^{-1}\left[F_c(\alpha)G_c(\alpha)\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}F_c(\alpha)G_c(\alpha)\cos(\alpha x)\,d\alpha$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}G_c(\alpha)\cos(\alpha x)\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi)\cos(\alpha\xi)\,d\xi\right]d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi)G_c(\alpha)\cos(\alpha x)\cos(\alpha\xi)\,d\xi d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi)G_c(\alpha)\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha x+\alpha\xi)+\cos(|\alpha x-\alpha\xi|)\right]d\xi d\alpha$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi)\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}G_c(\alpha)\left[\cos(\alpha x+\alpha\xi)+\cos(|\alpha x-\alpha\xi|)\right]d\alpha\right\}d\xi$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi)\left[g(x+\xi)+g(|x-\xi|)\right]d\xi$$

olur. Diğer taraftan Ters Fourier dönüşümünün kullanılmasıyla (3.1.133)

$$\int_{\alpha=0}^{\infty}F_c(\alpha)G_c(\alpha)\cos(\alpha x)\,d\alpha=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}\left[F_c(\alpha)G_c(\alpha)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi)\left[g(x+\xi)+g(|x-\xi|)\right]d\xi$$

elde edilir. Bu da (3.1.133) ifadesini ispatlar. Burada özel olarak $x=0$ seçilirse

$$\int_{\alpha=0}^{\infty}F_c(\alpha)G_c(\alpha)\,d\alpha=\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi)g(\xi)\,d\xi=\int_{x=0}^{\infty}f(x)g(x)\,dx \tag{3.1.134}$$

olur eğer $g(x)=\overline{f(x)}$ olacak biçimde seçilirse $G_c(x)=\overline{F_c(x)}$ olur (3.1.134) eşitliğinde verilenler yerine yazılırsa böylece

$$\int_{\alpha=0}^{\infty}\left|F_c(\alpha)\right|^2 d\alpha=\int_{x=0}^{\infty}\left|f(\xi)\right|^2 d\xi \tag{3.1.135}$$

bulunur. Bu sonuç Fourier Kosinüs dönüşümü için *Parseval Özdeşliği* olarak bilinir. Tamamen benzer olarak

$$\int_{\alpha=0}^{\infty} F_s(\alpha) G_s(\alpha)\cos(\alpha x)\,d\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha=0}^{\infty} G_s(\alpha)\cos(\alpha x) \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\sin(\alpha x)\,d\xi\, d\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha=0}^{\infty} \int_{\xi=0}^{\infty} G_s(\alpha) f(\xi)\cos(\alpha x)\sin(\alpha x)\,d\xi\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\alpha=0}^{\infty} G_s(\alpha)\cos(\alpha x)\sin(\alpha x)\,d\alpha\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\left[g(x+\xi)+g(x-\xi)\right]d\xi$$

olur. Böylece

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F_s(\alpha) G_s(\alpha)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\left[g(x+\xi)+g(x-\xi)\right]d\xi$$

veya buna denk olarak

$$\mathcal{F}^{-1}\left[F_c(\alpha) G_c(\alpha)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\left[g(x+\xi)+g(x-\xi)\right]d\xi$$

bulunur. (3.1.133) denkleminde $x = 0$ alınırsa

$$\int_{\alpha=0}^{\infty} F_s(\alpha) G_s(\alpha)\,d\alpha = \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi) g(\xi)\,d\xi$$
$$= \int_{x=0}^{\infty} f(x) g(x)\,dx \qquad (3.1.136)$$

olur. Burada $g(x) = \overline{f(x)}$ seçip ve (3.1.136) da yerine yazarsak

$$\int_{\alpha=0}^{\infty} \left|F_S(\alpha)\right|^2 d\alpha = \int_{x=0}^{\infty} \left|f(\xi)\right|^2 d\xi \qquad (3.1.137)$$

elde edilir. Bu sonuç Fourier Sinüs dönüşümü için *Parseval Özdeşliği* olarak bilinir.

3.1.7.2. Kısmi Türevli Denklemlerin Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs Dönüşümleri Yardımıyla Çözümü

Bu bölümde Fourier Sinüs ve Fourier Kosinüs dönüşümlerinin kısmi türevli denklemlerde nasıl kullanılabileceğini örneklerle açıklayacağız.

Örnek 3.1.16. (Yarı düzlemde bir boyutlu Difüzyon denklemi) x ekseni boyunca yerleştirilmiş bir boyutlu metal çubuk üzerine zamana bağlı ısı yayılımı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ,-\infty < x < \infty \quad ,t > 0 \tag{3.1.138}$$

denklemini sağlar. Burada K ortamın yoğunluğu ile ilgili bir sabittir. Bu denklem için başlangıç koşulu

$$u(x,0) = 0 \quad ,0 < x < \infty \tag{3.1.139}$$

olsun. Sınır koşulu ise

$$\text{a)}\, u(0,t) = f(t) \quad ,t \geq 0 \quad x \to \infty, \quad u(x,t) \to 0 \tag{3.1.140}$$

veya

$$\text{b)}\; u_x(0,t) = f(t) \quad ,t \geq 0 \quad x \to \infty, \quad u(x,t) \to 0 \tag{3.1.141}$$

olsun. Bu problemi önce a şıkkında verilen sınır koşulu ile çözelim. Eğer (3.1.138) - (3.1.140) ile verilen ifadelerin x değişkenine göre her iki tarafının Fourier Sinüs dönüşümü alınırsa

$$\frac{dU_s}{dt} = -K\alpha^2 U_s(\alpha,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} K\alpha f(t) \tag{3.1.142}$$

$$U_s(\alpha,0) = 0 \tag{3.1.143}$$

$$U_s(0,t) = f(t) \tag{3.1.144}$$

elde edilir. $U_s(\alpha,0) = 0$ sınır koşulu altında bu diferensiyel denklemin çözümü

$$U_s(\alpha,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\alpha\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)e^{-K(t-\tau)\alpha^2}d\tau \tag{3.1.145}$$

olur. (3.1.145) denkleminin ters Fourier Sinüs dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\mathcal{F}_s^{-1}\left[\alpha e^{-K(t-\tau)\alpha^2}\right]d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}\sin(\alpha x)\alpha e^{-K(t-\tau)\alpha^2}d\alpha d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha e^{-K(t-\tau)\alpha^2+i\alpha x}-\alpha e^{-K(t-\tau)\alpha^2-i\alpha x}}{2i}\right)d\alpha d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha e^{-K(t-\tau)\alpha^2+i\alpha x}}{2i}\right)d\alpha-\int_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha e^{-K(t-\tau)\alpha^2-i\alpha x}}{2i}\right)d\alpha\right]d\tau
\end{aligned}$$

olur. Burada $a=K(t-\tau)$ dersek

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha e^{-a\left(\alpha-\frac{ix}{2a}\right)^2-\frac{x^2}{4a}}}{2i}\right)d\alpha-\int_{\alpha=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha e^{-a\left(\alpha+\frac{ix}{2a}\right)^2-\frac{x^2}{4a}}}{2i}\right)d\alpha\right]d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2i}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\left[\int_{\alpha=0}^{\infty}\alpha e^{-a\left(\alpha-\frac{ix}{2a}\right)^2-\frac{x^2}{4a}}d\alpha-\int_{\alpha=0}^{\infty}\alpha e^{-a\left(\alpha+\frac{ix}{2a}\right)^2-\frac{x^2}{4a}}d\alpha\right]d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2i}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)e^{-\frac{x^2}{4a}}\left[\int_{y=-\frac{x^2}{4a^2}}^{\infty}\left(y^{1/2}+\frac{ix}{2a}\right)e^{-ay}\frac{dy}{2y^{1/2}}-\int_{y=-\frac{x^2}{4a^2}}^{\infty}\left(y^{1/2}-\frac{ix}{2a}\right)e^{-ay}\frac{dy}{2y^{1/2}}\right]d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2i}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)e^{-\frac{x^2}{4a}}\left[\int_{y=-\frac{x^2}{4a^2}}^{\infty}\left(\frac{ix}{2a}\right)e^{-ay}\frac{dy}{2y^{1/2}}-\int_{y=-\frac{x^2}{4a^2}}^{\infty}\left(\frac{ix}{2a}\right)e^{-ay}\frac{dy}{2y^{1/2}}\right]d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2i}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)e^{-\frac{x^2}{4a}}\left[\int_{y=-\infty}^{\infty}\left(\frac{ix}{2a}\right)e^{-ay}\frac{dy}{2y^{1/2}}\right]d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2i}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)e^{-\frac{x^2}{4a}}\left[\frac{ix}{2a}\int_{y=0}^{\infty}e^{-ay}\frac{dy}{y^{1/2}}\right]d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\frac{1}{2i}K\frac{ix\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a}}d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar $a=K(t-\tau)$ alınırsa sınır-değer probleminin çözümü

$$u(x,t)=\frac{x}{\sqrt{4\pi K}}\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4K(t-\tau)}}}{(t-\tau)}d\tau \tag{3.1.146}$$

olarak bulunur. Özel olarak $f(t)=T_0$ gibi bir reel sabit olarak seçilirse bu durumda (3.1.145) denkleminin Fourier Sinüs dönüşümü

$$U_s(\alpha,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{T_0}{\alpha}\left[1-e^{-Kt\alpha^2}\right] \tag{3.1.147}$$

olup. Buradan

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}\sin(\alpha x)\frac{T_0}{\alpha}\left[1-e^{-Kt\alpha^2}\right]d\alpha\\
&=\frac{2T_0}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\left[1-e^{-Kt\alpha^2}\right]d\alpha\\
&=\frac{2T_0}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}d\alpha-\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}e^{-Kt\alpha^2}d\alpha\\
&=\frac{2T_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}e^{-Kt\alpha^2}d\alpha\right]\\
&=\frac{2T_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}erf\left(\frac{x}{2a}\right)\right]\\
&=T_0\left[1-erf\left(\frac{x}{2a}\right)\right]\\
&=T_0 erfc\left(\frac{x}{2a}\right)
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi (3.1.138) denklemini (3.1.141) ile verilen sınır koşulu altında Fourier Kosinüs dönüşümü yardımıyla çözelim eğer (3.1.138) - (3.1.141) ile verilen ifadelerin sadece x değişkenine göre her iki tarafının Fourier Kosinüs dönüşümleri alınırsa

$$\frac{dU_c}{dt}+K\alpha^2U_c(\alpha,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}Kf(t) \tag{3.1.148}$$

$$U_c(\alpha,0)=0 \tag{3.1.149}$$

$$U_c(0,t)=f(t) \tag{3.1.150}$$

olur. $U_c(\alpha,0)=0$ sınır koşulu altında bu diferensiyel denklemin çözümü

$$U_c(\alpha,t)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)e^{-K(t-\tau)\alpha^2}d\tau \tag{3.1.151}$$

olur. Buradan (3.1.151) denkleminin ters Fourier Kosinüs dönüşümünün alınmasıyla çözüm

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\mathcal{F}_c^{-1}\left[e^{-K(t-\tau)\alpha^2}\right]d\tau\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}\cos(\alpha x)e^{-K(t-\tau)\alpha^2}d\alpha d\tau\\
&=\frac{2}{\pi}K\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)\int_{\alpha=0}^{\infty}\cos(\alpha x)e^{-K(t-\tau)\alpha^2}d\alpha d\tau\\
&=-\sqrt{\frac{K}{\pi}}\int_{\tau=0}^{t}\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4K(t-\tau)}}d\tau
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1.17. (Çeyrek düzlemde Laplace denklemi)

$$\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0 \quad &&,0<x \quad ,y<\infty\\
&u(0,y)=a &&,a\in\mathbb{R}\\
&u(x,y)\to 0 &&,r^2=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty
\end{aligned} \tag{3.1.152}$$

biçiminde verilen denklemin çözümünü Fourier Sinüs dönüşümü yardımıyla elde etmeye çalışalım. İlk olarak (3.1.152) ile verilen denklemlerin Fourier Sinüs dönüşümleri alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2U_s}{dy^2}-\alpha^2U_s(\alpha,y)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha a=0\\
&U_s(0,y)=a\\
&U_s(\alpha,0)=0
\end{aligned} \tag{3.1.153}$$

olur. Bu homojen olmayan denklemin çözümü

$$U_s(\alpha, y) = Ae^{-\alpha y} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\alpha}$$

dır. Burada A, $U_s(\alpha, 0) = 0$ ile sınırlanmış bir sabittir. Sonuç olarak

$$U_s(\alpha, y) = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - e^{-\alpha y}\right) \tag{3.1.154}$$

olup. Buradan $u(x, y)$ (3.1.154) ifadesinin ters Fourier Sinüs dönüşümünün alınmasıyla

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{2a}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha y}\right)\sin(\alpha x)\,d\alpha \\ &= a - \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - Arc\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ &= \frac{2a}{\pi}Arc\tan\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.1.18.

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad ,0 < x < \infty \qquad ,0 < y < b \\ &u(0, y) = 0 \qquad ,u(x, y) \to 0 \qquad ,x \to \infty \qquad \text{ve} \qquad 0 < y < b \\ &u(x, b) = 0 \qquad ,u(x, 0) = f(x) \qquad ,0 < x < \infty \end{aligned} \tag{3.1.155}$$

şeklinde verilen sınır-değer probleminin çözümünü araştıralım. (3.1.155) ile verilen denklemlere Fourier Sinüs dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U_s}{dy^2} - \alpha^2 U_s = 0 \\ &U_s(\alpha, b) = 0 \\ &U_s(\alpha, 0) = F_s(\alpha) \end{aligned} \tag{3.1.156}$$

olur. Bu denklemin çözümü de

$$U_s(\alpha, y) = F_s(\alpha)\frac{\sinh(\alpha(b - y))}{\sinh(\alpha b)} \tag{3.1.157}$$

dir. Elde edilen (3.1.157) ifadesinin ters Fourier Sinüs dönüşümü alınırsa

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\infty}F_{s(\alpha)}\frac{\sinh(\alpha(b-y))}{\sinh(\alpha b)}\sin(\alpha x)\,d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\left[\int_{t=0}^{\infty}f(t)\sin(\alpha t)\,dt\right]\frac{\sinh(\alpha(b-y))}{\sinh(\alpha b)}\sin(\alpha x)\,d\alpha$$

olup. Limit $\alpha b\to\infty$ durumunda

$$\frac{\sinh(\alpha(b-y))}{\sinh(\alpha b)}\sim e^{-\alpha y} \tag{3.1.158}$$

dir. $u(x,y)$ çözümünde $\frac{\sinh(\alpha(b-y))}{\sinh(\alpha b)}$ yerine $e^{-\alpha y}$ yazılırsa bu durumda

$$u(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}f(t)\sin(\alpha t)\sin(\alpha x)e^{-\alpha y}\,dt\,d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{t=0}^{\infty}f(t)\int_{\alpha=0}^{\infty}\sin(\alpha t)\sin(\alpha x)e^{-\alpha y}\,d\alpha\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\infty}f(t)\int_{\alpha=0}^{\infty}\cos(\alpha(x-t))-\cos(\alpha(x+t))e^{-\alpha y}\,d\alpha\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\infty}f(t)\left[\frac{y}{(x-t)^2+y^2}-\frac{y}{(x+t)^2+y^2}\right]dt$$

olur.

3.1.8. Belli Tipten Bazı İntegrallerin Fourier Dönüşümleri Yardımıyla Hesaplanması

Belirli integrallerin tam olarak hesaplanmasında Fourier dönüşümleri kullanılabilir. Metod tamamen basit ve kesin çözüm vermesinin yanı sıra belli tip genelleştirilmiş integrallerin hesabında güçlü bir metottur.

Örnek 3.1.19.

$$I(a,b)=\int_{x=-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)} \qquad ,a>0 \qquad ,b>0 \tag{3.1.159}$$

integralini göz önüne alalım. Diğer taraftan $f(x)=e^{-a|x|}$ ve $g(x)=e^{-b|x|}$ olsun. Bu durumda

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\alpha^2+a^2} \tag{3.1.160}$$

$$G(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{b}{\alpha^2+b^2} \tag{3.1.161}$$

olduğu kolayca elde edilir. Teorem (3.1.7) den

$$\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}F(\alpha)G(\alpha)d\alpha=\int_{x=-\infty}^{\infty}f(x)g(-x)dx$$

olup buradan

$$\begin{aligned}\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}&=\frac{\pi}{2ab}\int_{x=-\infty}^{\infty}e^{-|x|(a+b)}dx\\&=\frac{\pi}{ab}\int_{x=0}^{\infty}e^{-x(a+b)}dx\\&=\frac{\pi}{ab(a+b)}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.1.20. Fourier dönüşümü yardımıyla

$$\int_{x=0}^{\infty}\frac{x^{-p}dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2}a^{-(p+1)}\sec\left(\frac{\pi p}{2}\right) \tag{3.1.162}$$

olduğunu gösterelim. $f(x)=e^{-ax}$ olarak alındığında

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\left(a^2+\alpha^2\right)} \tag{3.1.163}$$

olacaktır. $g(x)=x^{p-1}$, $(0<p<1)$ dersek

$$G_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{x=0}^{\infty}\cos(\alpha x)x^{p-1}dx \tag{3.1.164}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha^{-p}\Gamma(p)\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)$$

elde edilir. Eğer Fourier Kosinüs dönüşümü için verilen Parseval özdeşliği olan

$$\int_{\alpha=0}^{\infty}F_c(\alpha)G_c(\alpha)d\alpha=\int_{x=0}^{\infty}f(x)g(x)dx$$

ifadesinde bu değerler kullanılırsa

$$\frac{2a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)\Gamma(p)\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\alpha^2 d\alpha}{\alpha^2+a^2}=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}e^{-ax}dx$$

$$\frac{2a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)\Gamma(p)\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\alpha^2 d\alpha}{\alpha^2+a^2}=\frac{1}{a^p}\int_{t=0}^{\infty}t^{p-1}e^{-t}dx$$

$$\frac{2a}{\pi}\cos\left(\frac{\pi p}{2}\right)\Gamma(p)\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\alpha^2 d\alpha}{\alpha^2+a^2}=\frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

$$\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\alpha^2 d\alpha}{\alpha^2+a^2}=\frac{\pi}{2a^{p+1}}\sec\left(\frac{\pi p}{2}\right)$$

elde edilir.

Örnek 3.1.21. $a>0$ ve $b>0$ olmak üzere Fourier dönüşümü yardımıyla

$$\int_{x=0}^{\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx=\frac{\pi}{2(a+b)} \tag{3.1.165}$$

olduğunu gösterelim. $f(x)=e^{-ax}$ ve $g(x)=e^{-bx}$ olmak üzere bu fonksiyonlara ait Fourier Sinüs dönüşümleri sırası ile

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+a^2} \tag{3.1.166}$$

ve

$$G_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+b^2} \tag{3.1.167}$$

dir. Fourier Kosinüs dönüşümü için verilen Teorem (3.1.13) göre

$$\int_{\alpha=0}^{\infty} F_s(\alpha)G_s(\alpha)\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_{\xi=0}^{\infty} g(\xi)\left[f(\xi+x)+f(\xi-x)\right]d\xi$$

yazılabilir. Burada $x=0$ olarak alınırsa

$$\int_{\alpha=0}^{\infty} F_s(\alpha)G_s(\alpha)\,d\alpha=\int_{\xi=0}^{\infty} g(\xi)f(\xi)\,d\xi \tag{3.1.168}$$

olur. (3.1.168) in her iki tarafının ters Fourier Sinüs dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}\int_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\alpha^2}{\left(\alpha^2+a^2\right)\left(\alpha^2+b^2\right)}d\alpha&=\frac{\pi}{2}\int_{\xi=0}^{\infty}e^{-(a+b)\xi}d\xi\\&=\frac{\pi}{2(a+b)}\end{aligned}$$

elde edilir. Buda istenen sonuçtur.

Örnek 3.1.22. $a>0$ olmak üzere

$$\int_{x=0}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^4}dx=\frac{\pi}{(2a)^5} \tag{3.1.169}$$

olduğu gösterelim $f(x)=\dfrac{1}{2\left(x^2+a^2\right)}$ dersek $f'(x)=-\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ olur ve $f(x)$ ‘in

Fourier dönüşümü

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{2a}\right)e^{-a|\alpha|} \tag{3.1.170}$$

dır. Teorem (3.1.8) ile verilen Parseval özdeşliğine göre

$$\begin{aligned}\int_{x=-\infty}^{\infty}\left|f'(x)\right|^2dx&=\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left[f'(x)\right]\right|^2d\alpha\\&=\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\left|(i\alpha)\mathcal{F}\left[f(x)\right]\right|^2d\alpha\end{aligned} \tag{3.1.171}$$

olur. (3.1.171) ifadesinde seçilen $f(x)$ fonksiyonu ve (3.1.170) sonucu yerine yazılırsa

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^4} dx = \frac{\pi}{2} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} \alpha^2 \frac{1}{(2a)^2} e^{-2a|\alpha|} d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{(2a)^2} \int_{\alpha=0}^{\infty} \alpha^2 e^{-2a\alpha} d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{(2a)^5}$$

biçiminde elde edilir.

3.1.9. Matematiksel İstatistikte Fourier Dönüşümlerinin Uygulamaları

Olasılık teorisi ve matematiksel istatistikte bir rasgele değişkenin dağılımının veya momentlerinin belirlenebilmesi için karakteristik fonksiyon önemli bir yer tutar. Bir rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonunu elde etmek için X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunun fourier dönüşümü kullanılır.

Bir olasılık deneyinin sonuçlarının kümesi olan Ω örnek uzayının elemanları çok değişik türde olabilir. Rasgele değişkenler yardımıyla Ω'nın her elemanına reel sayılar kümesinden bir sayı karşılık getirilir, öyle ki (Ω, U, P) olasılık uzayındaki $\forall A \in U$ için $P(A)$ olasılığı reel sayılardaki $\mathcal{B}$ Borel cebiri üzerinde kurulmuş uygun bir olasılık ölçüsü ile verilmektedir. Böylece teorik olarak incelenmesi gereken olasılık ölçüleri Borel cebiri üzerindeki olasılık ölçülerine indirgenmiş olmaktadır.

Tanım 3.1.10. (Ω, U, P) bir olasılık uzayı ve

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to R \\ w &\to X(w) \end{aligned}$$

olmak üzere, $\forall a \in R$ için, $\{w \in \Omega : X(w) \leq a\} \in U$ ise X fonksiyonuna bir *rasgele değişken* denir. Rasgele değişkenler genellikle $X, Y, Z, U, V, \ldots$ gibi büyük harflerle gösterilir.

Tanım 3.1.11. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

1) $f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

özelliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir.

Tanım 3.1.12. Bir X rasgele değişkeninin F dağılım fonksiyonu bir f olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx, \quad -\infty < x < \infty \qquad (3.1.172)$$

olarak yazılabiliyorsa X rasgele değişkenine *mutlak sürekli* veya kısaca *sürekli rasgele değişken* ve f fonksiyonuna X'in *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ise $F(x)$ biçiminde gösterilir. Buradaki dağılım fonksiyonunun gösterilim şekli Fourier dönüşümü anlamında değil sadece biçimsel olarak bir benzerliktir.

X rasgele değişkeni ile ilgili olasılık hesapları X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu, dolayısıyla olasılık dağılımını belirleyen f olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla da yapılabilir. Sürekli rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ için,

$$P(X=a)=0,$$

$$P(X \le a)=P(X<a)=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx,$$

$$P(a \le X \le b)=P(a<X \le b)=P(a \le X<b)=P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$P(X \ge a)=P(X>a)=\int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

olur.

Tanım 3.1.13. X bir rasgele değişken ve $g: R \to R$, $\forall B \in \mathcal{B}(R)$ için

$\{x : g(x) \in B\} \in \mathcal{B}(R)$ özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere:

i) X kesikli ve $\sum_{x} |g(x)| f(x) < \infty$ olduğunda

$$E\left(g(x)\right)=\sum_{x} g(x) f(x) \tag{3.1.173}$$

ii) X sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) < \infty$ olduğunda

$$E\left(g(x)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \tag{3.1.174}$$

değerine $g(x)$ 'nin *beklenen değeri* denir.

Tanım 3.1.14. t reel bir değişken olmak üzere X rasgele değişkeninin $e^{itX}=\cos(tX)+i\sin(tX)$ kompleks fonksiyonu verilsin. $E(e^{itX})$ ortalama değeri t 'nin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon ise X rasgele değişkeninin *karakteristik fonksiyonu* olarak bilinir. Böylece X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu

$$E(e^{itX})=\phi_X(t)=E\left[\cos(tX)\right]+iE\left[\sin(tX)\right] \tag{3.1.175}$$

dir.

a) X kesikli rasgele değişken ise, yani sonlu sayıda yada sayılabilir sonsuzlukta $x_1, x_2, \ldots$ değerlerini $p_1, p_2, \ldots$ olasılıkları ile alıyorsa, karakteristik fonksiyon

$$\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k} , \tag{3.1.176}$$

b) X sürekli rasgele değişken ve X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise, karakteristik fonksiyon

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{3.1.177}$$

dir.

X sürekli rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür.

Tanım 3.1.15. X ve Y bağımsız iki rasgele değişken ise, $Z = X + Y$ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu

$$\phi_Z(t) = \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) \tag{3.1.178}$$

şeklindedir. Şimdi temel iki teoremi ispatsız olarak verelim. Bunların ispatları çeşitli olasılık kitaplarında bulunabilir.

Teorem 3.1.14. Karakteristik fonksiyon t'nin bütün değerleri için tanımlıdır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

a) $\phi_X(0) = 1$,

b) $|\phi_X(t)| \leq 1, \quad -\infty < t < \infty$,

c) Tüm reel eksen üzerinde düzgün süreklidir.

d) $\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(ta), \quad t \in R, ($ a ve b sabit)

dır.

Teorem 3.1.15. X rasgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu, kendi karakteristik fonksiyonuyla tek olarak belirtilir.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\,t\,x)\,\phi_X(t)\,dt\ . \tag{3.1.179}$$

şeklinde tek olarak belirtilebilir.

Teorem 3.1.16. $m_k = E(X^k),\ X$ rasgele değişkeninin merkezi k. momenti ve $\phi_X(t),\ X$'in karakteristik fonksiyonu ise momentler ve karakteristik fonksiyonlar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\left.\frac{d(\phi_X(t))}{dt}\right|_{t=0} = im_1,\quad \left.\frac{d^2(\phi_X(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = i^2 m_2,\quad \ldots\quad ,\left.\frac{d^k(\phi_X(t))}{dt^k}\right|_{t=0} = i^k m_k\ . \tag{3.1.180}$$

İspat: X sürekli rasgele değişken ise

$$\frac{d(\phi_X(t))}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} ise^{its} f(s)ds,\qquad \frac{d(\phi_X(0))}{dt} = i\int_{-\infty}^{\infty} sf(s)ds = iE(X) = im_1,$$

$$\begin{matrix}.\\.\\.\end{matrix} \tag{3.1.181}$$

$$\frac{d^k(\phi_X(t))}{dt^k} = \int_{-\infty}^{\infty} i^k s^k e^{its} f(s)ds,\qquad \frac{d^k(\phi_X(0))}{dt^k} = i^k\int_{-\infty}^{\infty} s^k f(s)ds = i^k m_k$$

elde edilir.

Teorem 3.1.17. Bir X rasgele değişkeninin n. momenti varsa $k \le n$ için

$$\left.\frac{d^k(\phi_X(t))}{dt^k}\right]_{t=0} = i^k E(X^k) \tag{3.1.182}$$

dır.

Teorem 3.1.18. Bir X rasgele değişkeninin olasılık(yoğunluk) fonksiyonu f, dağılım fonksiyonu F ve karakteristik fonksiyonu ϕ olmak üzere:

i) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, (x_1 < x_2)$ noktalarında F sürekli ise

$$F(x_2)-F(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\phi(t)dt \tag{3.1.183}$$

dir.

ii) X sürekli rasgele değişken ise,

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{1-e^{-ith}}{ith}e^{-itx}\phi(t)dt \tag{3.1.184}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(t)|\,dt<\infty \tag{3.1.185}$$

ise

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\phi(t)dt\,, \tag{3.1.186}$$

iii) X kesikli rasgele değişken ise

$$f(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}e^{-itx}\phi(t)dt \tag{3.1.187}$$

dir.

Örnek 3.1.23. $\phi(t)=e^{ict}$, $c\in\mathbb{R}$ karakteristik fonksiyonuna karşılık gelen dağılımı bulalım.

$x_1<x_2$ için, Teorem (3.1.18) den

$$\begin{aligned}F(x_2)-F(x_1)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}e^{ict}dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(c-x_1)}-e^{-it(c-x_2)}}{it}dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\sin(c-x_1)-\sin(c-x_2)}{t}dt\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{T}\frac{\sin(c-x_1)-\sin(c-x_2)}{t}dt\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin(a\,t)}{t}\,dt=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & ,a>0\\ \dfrac{-1}{2} & ,a<0\end{cases}$$

olduğu göz önüne alınırsa

$x_1\,,x_2<c$ için

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\,,$$

$x_1\,,x_2>c$ için

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{-1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)=0\,,$$

$x_1<c<x_2$ için

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)=1$$

dir. Dağılım fonksiyonunun özelliklerinden,

$$F(x_2)=\lim_{x_1\to-\infty}\left[F(x_2)-F(x_1)\right]=\begin{cases}0 & ,x_2<c\\ 1 & ,x_2\ge c\end{cases} \qquad (3.1.188)$$

bulunur (3.1.188) ifadesine ise c noktasında yoğunlaşmış dağılımdır denir.

Örnek 3.1.24. $\phi(t)=e^{-t^2/2}$, karakteristik fonksiyonu sürekli bir dağılıma karşılık gelmektedir. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu Teorem (3.1.18.) yardımıyla bulunmak istenirse

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(t)|\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}<\infty$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(t^2+2itx\right)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{\frac{-1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{\frac{-1}{2}x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}x^2} \qquad ,x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.2. Laplace Dönüşümleri

Laplace dönüşümleri'nin diferensiyel ve integral denklemlerin çözümünde önemli bir araç niteliğine sahip olması ve ayrıca pür matematiğin çeşitli alanları ile çok sayıda yakın ilişkiye sahip bulunması nedeniyle bu türden dönüşümler son yıllarda artan ilgi kaynağı olmuştur.

Tanım 3.2. 1. $f(x)$ fonksiyonu sonlu ya da sonsuz $a\le x\le b$ aralığında tanımlı s bir parametre ve belli bir fonksiyon $K(s,x)$ olmak üzere genel bir integral dönüşüm

$$T\left(f(x)\right)=\int_a^b K(s,x)f(x)dx=F(s) \tag{3.2.1}$$

şeklindedir. Burada $K(s,x)$ dönüşümün çekirdeği adını alır. Eğer $a=0$, $b=\infty$ ve $K(s,x)=e^{-sx}$ olarak alınırsa (3.2.1) in özel durumu olan ve $\mathcal{L}$ ile gösterilen

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right]=\int_{x=a}^{b} e^{-sx}f(x)dx=F(s) \tag{3.2.2}$$

integral dönüşümüne *Laplace Dönüşümü* denir.

Bu integral bir genelleştirilmiş integraldir ve

$$\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{x=0}^{b} e^{-sx} f(x)\,dx \tag{3.2.3}$$

ile tanımlıdır sağ taraftaki limit var sol taraftaki integral yakınsaktır., yani belli bir değeri vardır.

Her fonksiyonun Laplace dönüşümü yoktur. Bunun için bazı tanımlar ve bir teorem verelim.

Teorem 3.2.1. (Üstel Basamaktan Kavramı) Her $x > x_0$ için $e^{-\alpha x}\left|f(x)\right| \le M$ olacak şekilde α, M ve x_0 sabitleri var ise $f(x)$ fonksiyonu α üstel basamaktandır denir.

Örnek 3.2.1. $f(x) = e^{4x}$ fonksiyonunun üstel basamaktan olup olmadığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}\left|e^{4x}\right| &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{4x}}{e^{\alpha x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{(\alpha-4)x}}\\ &= 0, \quad \alpha > 4\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha > 4$ için α üstel basamaktır.

Örnek 3.2.2. $f(x) = \cos(7x)$ fonksiyonunun üstel basamaktan olup olmadığını gösterelim.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}\left|\cos(7x)\right| &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\alpha x}}\\ &= 0, \quad \alpha > 0\end{aligned}$$

olduğundan α üstel basamaktandır.

Örnek 3.2.3. $f(x)=e^{x^2}$ fonksiyonunun üstel basamaktan olup olmadığı araştıralım

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x}\left|e^{x^2}\right| &= \lim_{x\to\infty} e^{\left(x^2-\alpha x\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty} e^{x^2\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)}\\ &= \infty\end{aligned}$$

olduğundan α üstel basamaktan değildir.

Tanım 3.2. 2. (Açık Aralıkta Parçalı Süreklilik)

Bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda $a \le x \le b$ açık aralığında parçalı süreklidir.

i) Sonlu sayıda $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ süreksizlik noktaları dışında $a \le x \le b$ aralığının her noktasında süreklidir.

ii) Süreksizlik noktalarında $f(x)$'in sağ ve sol limitleri vardır.

Tanım 3.2. 3. (Kapalı Aralıkta Parçalı Süreklilik)

Bir $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda $a \le x \le b$ kapalı aralığında parçalı süreklidir.

i) $f(x)$ fonksiyonu $a \le x \le b$ aralığında parçalı süreklidir.

ii) $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasında sağ ve $x=b$ noktasında sol limiti vardır.

Teorem 3.2.2. $f(x)$ fonksiyonu her sonlu kapalı $a \le x \le b$, $b>0$ aralığı üzerinde parçalı sürekli ve $f(x)$ fonksiyonu α üstel basamaktan ise bu durumda $s>\alpha$ için $f(x)$'in Laplace dönüşümü vardır.

Örnek 3.2.4. $f(x)=x^n$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. Tanımdan kısaca

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} x^n dx$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \int_{x=0}^{\infty} e^{-u} u^n du$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma(n+1), \qquad s > 0$$

dir.

Tanımdan hareket edilerek $\mathcal{L}\left[e^{ax}\right] = \frac{1}{s-a}$, $s > a$, $\mathcal{L}\left[\sin(ax)\right] = \frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathcal{L}\left[\cos(ax)\right] = \frac{s}{s^2 + a^2}$

olur.

Örnek 3.2.5. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s)$$

$$= \int_{x=0}^{4} e^{-sx}(-1)dx + \int_{x=4}^{\infty} e^{-sx}(1)dx$$

$$= \left.\frac{e^{-sx}}{s}\right]_{x=0}^{4} + \lim_{b\to\infty} \int_{x=4}^{\infty} e^{-sx} dx$$

$$= \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{1}{s} + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sb} + \frac{1}{s}e^{-4s}\right]$$

$$= \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{1}{s} \quad , s > 0$$

dir.

	$f(x)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(x)]$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	x	$\frac{1}{s^2}$
3	$x^n \quad ,(n\in\mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
6	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
7	$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
8	$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9	$\sinh(ax)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
10	$\cosh(ax)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
11	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
12	$x\sin(ax)$	$\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$
13	$x\cos(ax)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
14	$e^{ax}\sin(bx)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
15	$e^{ax}\sin(bx)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

Tablo 3.2.1. Belli Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

Her fonksiyonun Laplace dönüşümünü sadece tanımdan giderek bulmak zaman kaybı yanında son derece uzun işlemleri gerektirir. Bununla beraber çok kullanılan bazı fonksiyonların Laplace dönüşümlerinin bilinmesi yanında ayrıca Laplace dönüşümlerinin temel özellikleri bilinirse, belli tipten bazı fonksiyonların Laplace dönüşümlerinden faydalanarak tablodan bulunmayan çok sayıda fonksiyonun Laplace dönüşümü bulunabilir.

3.2.1. Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Laplace dönüşümlerinin bulunmasında son derece yararlı olan bazı teoremler vardır. Bu teoremlerin ifadelerini sadeleştirmek için öncelikle bir tanım verelim :

Tanım 3.2. 4. Aşağıdaki koşulların sağlanması halinde $f(x) \in E_\alpha$ dır denir.

i) $f(x)$ fonksiyonu $0 < x < \infty$ aralığında her x için tanımlıdır.

ii) $f(x)$ fonksiyonu her kapalı $0 < x < b \quad, b > 0$ aralığında parçalı süreklidir.

iii) $f(x)$ fonksiyonu α üstel basamaktandır..

Bu koşullar f fonksiyonunun Laplace dönüşümünün varlığını gerektiren koşullardır.

Teorem 3.2.3. (Lineerlik Özelliği)

$f_1(x) \in E_\alpha$ ve $f_2(x) \in E_\alpha$ ise bu durumda herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için , $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \in E_\alpha$ ve

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] = c_1 \mathcal{L}\left[f_1(x)\right] + c_2 \mathcal{L}\left[f_2(x)\right] \tag{3.2.4}$$

dır.

İspat : Laplace dönüşümü tanımından

$$\mathcal{L}\left[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\right]=\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}\left[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)\right]dx$$

$$=\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}\left[c_1 f_1(x)\right]dx+\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}\left[c_2 f_2(x)\right]dx$$

$$=c_1\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f_1(x)dx+c_2\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f_2(x)dx$$

$$=c_1\mathcal{L}\left[f_1(x)\right]+c_2\mathcal{L}\left[f_2(x)\right]$$

dır.

Örnek 3.2.6. $f(x)=2\sin(x)+\cos(2x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği kullanılarak

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right]=\mathcal{L}\left[2\sin(x)+3\cos(2x)\right]$$

$$=2\mathcal{L}\left[\sin(x)\right]+3\mathcal{L}\left[\cos(2x)\right]$$

$$=\frac{2}{s^2+1}+\frac{3s}{s^2+4}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 3.2.4. $f(x)\in E_\alpha$ ise bu durumda herhangi bir a sabiti için

$$\mathcal{L}\left[e^{ax} f(x)\right]=F(s-a) \tag{3.2.5}$$

dır.

İspat :

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(s)=\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx \quad , \quad s>\alpha+a$$

ifadesinde s yerine $s+a$ yazılırsa bu taktirde

$$F(s-a)=\int_{x=0}^{\infty} e^{-(s-a)x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}\left[e^{ax} f(x)\right]dx$$
$$= \mathcal{L}\left[e^{ax} f(x)\right]$$

olup teorem böylece ispatlanmış olur.

Örnek 3.2.7. $f(x) = e^{-2x}\sin(5x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Teorem (3.2.4) ye göre $a = -2$ ve $f(x) = \sin(5x)$ olarak seçilirse

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(x)\right]$$
$$= \mathcal{L}\left[\sin(5x)\right]$$
$$= \frac{5}{s^2 + 25}$$

olduğuna göre

$$\mathcal{L}\left[e^{-2x}\sin(5x)\right] = F(s+2)$$
$$= \frac{5}{(s+2)^2 + 25}$$

dir.

Teorem 3.2.5. $f(x) \in E_\alpha$ ise, bu durumda herhangi pozitif n sayısı için

$$\mathcal{L}\left[x^n f(x)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left[F(s)\right] \qquad (3.2.6)$$

dır.

İspat : İlk olarak $n = 1$ için teoremin doğruluğunu gösterelim

$$-\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$
$$= -\int_{x=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sx} f(x)\,dx$$
$$= \int_{x=0}^{\infty} x e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}\left[x f(x)\right]$$

$n = n-1$ için teoremin doğru olduğunu kabul edelim yani

$$\mathcal{L}\left[x^{n-1}f(x)\right] = (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[F(s)\right] \tag{3.2.7}$$

olsun. Şimdi teoremin n için de doğru olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned}
(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx \\
&= (-1)\frac{d}{ds}(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx \\
&= (-1)\frac{d}{ds}\int_{x=0}^{\infty} x^{n-1}e^{-sx} f(x)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{n}e^{-sx} f(x)\,dx \\
&= \mathcal{L}\left[x^n f(x)\right]
\end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.2.8. $f(x) = x\cos(ax)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. Teorem (3.2.5) e göre $n=1$ ve $f(x) = \cos(ax)$ olarak seçilirlerse

$$\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\left[f(x)\right] \\
&= \mathcal{L}\left[\cos(ax)\right] \\
&= \frac{s}{\left(s^2+a^2\right)}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[x\cos(ax)\right] &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) \\
&= \frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2.9. $f(x) = xe^{4x}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. Teorem (3.2.5) e göre $n=1$ ve $f(x) = e^{4x}$ olarak seçilirlerse

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \mathcal{L}\left[f(x)\right] \\
&= \mathcal{L}\left[e^{4x}\right] \\
&= \frac{1}{(s-4)}
\end{aligned}
$$

dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[xe^{4x}\right] &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-4}\right) \\
&= \frac{1}{(s-4)^2}
\end{aligned}
$$

olarak sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.6. $f(x) \in E_\alpha$ ve $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ mevcut ise, bu durumda

$$
\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_{t=s}^{\infty} F(t)\,dt \tag{3.2.8}
$$

dir.

İspat : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ fonksiyonu tanımlansın bu durumda $f(x) = xg(x)$ olur. Buradan eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulandığında

$$
\mathcal{L}\left[f(x)\right] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left[g(x)\right] \tag{3.2.9}
$$

veya

$$
F(s) = -\frac{dG(s)}{ds} \tag{3.2.10}
$$

olur. Bunun her iki tarafının $+\infty$ dan s 'ye kadar integrali alınırsa

$$
\begin{aligned}
G(s) &= -\int_{t=\infty}^{s} F(t)\,dt \\
&= \int_{t=s}^{\infty} F(t)\,dt
\end{aligned} \tag{3.2.11}
$$

veya

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_{t=s}^{\infty} F(t)\,dt \tag{3.2.12}$$

olur. Diğer taraftan $f(x)$ $\alpha-$ üstel mertebeden olması nedeniyle

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

dır.

NOT: Eğer $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s)$ ise $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ dır.

Örnek 3.2.10. $g(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$g(x) = \frac{\sin(3x)}{x} \in E_{\alpha}$$

ve

$$\lim_{x\to\infty^{+}} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$$

dir. Ayrıca $f(x) = \sin(3x)$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(x)\right] &= \mathcal{L}\left[\sin(3x)\right] \\ &= \frac{3}{s^2+9}\end{aligned}$$

olur. Buradan Teorem (3.2.6) ya göre aranan çözüm

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{g(x)}{x}\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{\sin(3x)}{x}\right] \\ &= \int_{t=s}^{\infty} F(t)\,dt \\ &= \int_{t=s}^{\infty} \frac{3}{t^2+9}\,dt\end{aligned}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \arctan\left(\frac{t}{3}\right)\Bigg|_{t=s}^{b}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{3}\right)$$

dır.

Örnek 3.2.11. Teorem (3.2.6) yı kullanarak $\int\limits_{x=0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ integralinin değerini bulalım.

Teorem (3.2.6) e göre

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int\limits_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \frac{f(x)}{x} dx = \int\limits_{t=s}^{\infty} F(t)\, dt$$

dir. Bu ifade $s \to 0$ için limit alınırsa

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int\limits_{x=0}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx = \int\limits_{t=0}^{\infty} F(t)\, dt$$

biçimindedir. Bu formül, problemlerin çözümlerinin elde edilişinin diğer yöntemlerle zor olduğu integralleri bulmada kullanılabilir:

$$\mathcal{L}[\sin x] = \frac{1}{s^2+1}$$

olduğundan

$$\int\limits_{x=0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int\limits_{t=0}^{b} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \arctan t \Big|_{t=0}^{b}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

bulunur.

Teorem 3.2.7. $f, f' \in E_\alpha$, ve $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s)$ olsun. Bu takdirde

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = sF(s) - f(0) \tag{3.2.13}$$

ve

$$\mathcal{L}\left[f''(x)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{3.2.14}$$

dır.

İspat : Laplace dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f'(x)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f'(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{x=0}^{b} e^{-sx} f'(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-sx} f(x)\Big|_{x=0}^{b} + s\int_{x=0}^{b} e^{-sx} f(x)\,dx \right] \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_{x=0}^{b} e^{-sx} f(x)\,dx \right] \\
&= s\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx - f(0) \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}$$

olup buda (3.2.13) in doğru olduğunu gösterir. Yine benzer olarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f''(x)\right] &= s\mathcal{L}\left[f'(x)\right] - f'(0) \\
&= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

olup böylece (3.2.14) ispatlanmış olur.

Genelleştirme: $f, f', f'', ..., f^{(n-1)} \in E_\alpha$ ve $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s)$ ise

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(x)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{3.2.15}$$

dır. Burada $f(x)$ ve ilk $(n-1)$. basamağa kadar türevleri $x>0$ için $\alpha-$üstel basamaktan ve $f^{(n)}(x)\in E_\alpha$ dır.

Teorem 3.2.8. $f(x)\in E_\alpha$ ve $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(s)$ ise bu durumda

$$\mathcal{L}\left[\int\limits_{t=0}^{x} f(t)\,dt\right]=\frac{1}{s}F(s) \tag{3.2.16}$$

dır.

İspat : Önce $g(x)=\int\limits_{t=0}^{x} f(t)\,dt$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $g'(x)=f(x)$ olur. Ayrıca $g(0)=0$ olduğu açıktır. $g'(x)=f(x)$'in her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[g'(x)\right]&=s\mathcal{L}\left[g(x)\right]-g(0)\\&=s\mathcal{L}\left[g(x)\right]\\&=\mathcal{L}\left[f(x)\right]\\&=F(s)\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

yani

$$\mathcal{L}\left[g(x)\right]=\frac{1}{s}F(s) \tag{3.2.18}$$

veya

$$\mathcal{L}\left[\int\limits_{t=0}^{x} f(t)\,dt\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

bulunur.

Örnek 3.2.12. $g(x)=\int\limits_{t=0}^{x}\sinh(2t)\,dt$ olarak tanımlanan fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım. $f(x)=\sinh(2x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(x)] \\ &= \mathcal{L}[\sinh(2x)] \\ &= \frac{2}{s^2-4} \end{aligned}$$

olur. Buradan Teorem (3.2.8) gereğince

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_{t=0}^{x} \sinh(2t)\,dt\right] &= \frac{1}{s}\left(\frac{2}{s^2-4}\right) \\ &= \frac{2}{s\left(s^2-4\right)} \end{aligned}$$

dür.

Örnek 3.2.13. $g(x)=\int_{t=0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\sin x}{x}\right] &= \int_{u=s}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_{u=s}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du \\ &= \lim_{b\to\infty}\arctan u\Big|_{u=s}^{b} \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\arctan b-\arctan s\right) \\ &= \frac{\pi}{2}-\arctan s \\ &= \arctan\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\left[\int_{t=0}^{x}\frac{\sin t}{t}dt\right]=\frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur.

Teorem 3.2.9. $\mathcal{L}[f(x)]=F(s)$ ise

$$\mathcal{L}[f(ax)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \tag{3.2.19}$$

dır.

İspat : Laplace dönüşümü tanımını kullanarak

$$\mathcal{L}\left[f(ax)\right]=\int_{x=0}^{\infty}e^{-sx}f(ax)\,dx$$
$$=\frac{1}{a}\int_{t=0}^{\infty}e^{-s\frac{t}{a}}f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

dır.

Teorem 3.2.10. $f\in E_\alpha$, $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(\alpha)$ ve $f(x+T)=f(x)$ ise

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right]=\frac{1}{1-e^{-st}}\int_{x=0}^{T}e^{-sx}f(x)\,dx \tag{3.2.20}$$

dir.

İspat :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(x)\right]&=\int_{x=0}^{\infty}e^{-sx}f(x)\,dx\\&=\int_{x=0}^{T}e^{-sx}f(x)\,dx+\int_{x=T}^{2T}e^{-sx}f(x)\,dx+\cdots+\int_{x=nT}^{(n+1)T}e^{-sx}f(x)\,dx+\cdots\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

yazılabilir. (3.2.21) eşitliğinin sağındaki ikinci integral için $x=t+\tau$, üçüncü integral için $x=t+2\tau,\cdots,n+1$. integral için ise $x=t+n\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa bu durumda

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right]=\int_{t=0}^{\tau}e^{-st}f(t)\,dt+\int_{t=0}^{\tau}e^{-s(t+\tau)}f(t+\tau)\,dt+$$
$$\cdots+\int_{t=0}^{\tau}e^{-s(t+(n-1)\tau)}f\left(t+(n-1)\tau\right)dt+\cdots$$
$$=\int_{t=0}^{\tau}e^{-st}f(t)\,dt+e^{-st}\int_{t=0}^{\tau}e^{-st}f(t)\,dt+e^{-2st}\int_{t=0}^{\tau}e^{-st}f(t)\,dt+$$
$$\cdots+e^{-s(n-1)t}\int_{t=0}^{\tau}e^{-st}f(t)\,dt+\cdots$$

$$=\left(1+e^{-st}+e^{-2st}+\cdots\right)\int_{t=0}^{\tau} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-st}}\int_{x=0}^{\tau} e^{-sx} f(x)\,dx$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2.2. Ters Laplace Dönüşümleri

Verilen bir $F(s)$ fonksiyonunun $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$ ile gösterilen bir ters Laplace dönüşümü vardır ve $\mathcal{L}\left[f(x)\right]=F(s)$ özelliğine sahip bir diğer $f(x)$ fonksiyonudur. Örneğin $F(s)=\frac{1}{s}$ ise $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=1$ dir. Çünkü $\mathcal{L}[1]=\frac{1}{s}$ dir. Bir başka örnek olarak $F(s)=\frac{1}{s^2+1}$ ise bu durumda $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin x$ dir. Bazı kaynaklarda ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]=f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s=c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx}F(s)\,ds \qquad c>0 \tag{3.2.22}$$

şeklinde verilir.

Teorem 3.2.11. (Lineerlik Özeliği) $F_1(s)$ ve $F_2(s)$ fonksiyonlarının ters Laplace dönüşümleri var ise, bu durumda herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için

$$\mathcal{L}^{-1}\left[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\right]=c_1\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]+c_2\mathcal{L}^{-1}\left[F_2(s)\right] \tag{3.2.23}$$

dir

İspat : Ters Laplace dönüşümü tanımından

$$\mathcal{L}^{-1}\left[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\right]=\int_{s=c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\left[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\right]ds$$

$$=\int_{s=c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\left[c_1F_1(s)\right]ds+\int_{s=c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\left[c_1F_2(s)\right]dsdx$$

$$=c_1\mathcal{L}^{-1}\left[F_1(s)\right]+c_2\mathcal{L}^{-1}\left[F_2(s)\right]$$

dır.

Verilen bir fonksiyonun ters Laplace dönüşümünü bulmada yukarıdaki özellik yanında gerektiğinde *tam kare yöntemi* ve *basit kesirlere ayırma yöntemi* kullanılır.

Örnek 3.2.14. $F(s)=\dfrac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$ fonksiyonunun Ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$F(s)=\dfrac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$ fonksiyonu $a=1$ olmak üzere aynen tabloda formül 12 olarak var. O halde

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right]=x\sin x$$

dir.

Örnek 3.2.15. $F(s)=\dfrac{1}{\sqrt{s}}$ fonksiyonunun Ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$ 'in ters Laplace dönüşümü tabloda yok ancak $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ olarak var. O halde ters Laplace dönüşümünün lineerlik özeliği kullanılarak

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

bulunur.

Örnek 3.2.16. $F(s)=\dfrac{1}{s^2-2s+9}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Tabloya bakıldığında tabloda bu biçimde bir fonksiyon yoktur. Kesrin paydası tam kare yapılırsa

$$s^2-2s+9=s^2-2s+1-1+9=(s-1)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2$$

olup buradan

$$\frac{1}{s^2-2s+9}=\frac{1}{(s-1)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}$$

bulunur. Tabloda Formül 14'e göre $a=1$, $b=\sqrt{8}$ olarak alınırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-2s+9}\right]=\frac{1}{\sqrt{8}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{8}}e^x\sin\left(\sqrt{8}x\right)$$

olur.

Örnek 3.2.17. $F(s)=\dfrac{s+2}{s^2-3s+4}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Bu fonksiyon tabloda yoktur, kesrin paydası tam kare yapılırsa

$$s^2-3s+4=s^2-3s+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4=\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

ve buna göre

$$\frac{s+2}{s^2-3s+4}=\frac{s+2}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{s-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\sqrt{7}\,\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

olarak yazılırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2-3s+4}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\right]+\sqrt{7}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\right]$$

$$=e^{\frac{3}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+\sqrt{7}e^{\frac{3}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

elde edilir.

Örnek 3.2.18. $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

biçiminde yazılırsa

$$1=A(s^2+1)+(Bs+C)(s+1)$$
$$=(A+B)s^2+(B+C)s+A+C$$

dır. Buradan A, B ve C’yi çözersek

$$\left.\begin{aligned}A+B&=0\\B+C&=0\\A+C&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}$$

olur. Buna göre

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right]=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$
$$=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$$

dır.

Örnek 3.2.19. $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+d}{s^2+4s+8}$$

biçiminde yazılır ve buradan A, B, C ve D'yi çözersek $A=-\dfrac{4}{65}$, $B=\dfrac{7}{65}$, $C=\dfrac{4}{65}$, $D=\dfrac{9}{65}$ olarak bulunur. O halde

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}=\frac{-\frac{4}{65}s+\frac{7}{65}}{s^2+1}+\frac{\frac{4}{65}s+\frac{9}{65}}{s^2+4s+8}$$
$$=-\frac{4}{65}\frac{s}{s^2+1}+\frac{7}{65}\frac{1}{s^2+1}+\frac{4}{65}\frac{s+2}{(s+2)s^2+2^2}+\frac{1}{130}\frac{2}{(s+2)s^2+2^2}$$

dır. Buradan ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}\right]=-\frac{4}{65}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+\frac{7}{65}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$
$$+\frac{4}{65}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)s^2+2^2}\right]+\frac{1}{130}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)s^2+2^2}\right]$$
$$=-\frac{4}{65}\cos x+\frac{7}{65}\sin x+\frac{4}{65}e^{-2x}\cos(2x)+\frac{1}{130}e^{-2x}\sin(2x)$$

elde edilir.

3.2.3. Konvolüsyon ve Birim Basamak Fonksiyonu

Tanım 3.2. 5. $f(x)$ ve $g(x) \in E_\alpha$ olmak üzere

$$f(x) * g(x) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) g(x-t)\,dt \qquad (3.2.24)$$

ile tanımlı işleme $f(x)$ ile $g(x)$'in *Konvolüsyonu* veya *Konvolüsyon çarpımı* denir.

Örneğin $f(x) = e^{3x}$ ve $g(x) = x$ ise, bu iki fonksiyona ait Konvolüsyon çarpımı,

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \int_{t=0}^{\infty} e^{3t}(x-t)\,dt \\ &= x\int_{t=0}^{\infty} e^{3t}\,dt - \int_{t=0}^{\infty} te^{3t}\,dt \\ &= \frac{1}{3}xe^{3t}\Big|_{t=0}^{x} - \left[\frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t}\right]\Bigg|_{t=0}^{x} \\ &= \frac{1}{9}\left(e^{3x} - 3x - 1\right) \end{aligned}$$

dır.

Konvolüsyon çarpımının aşağıdaki özelliklerinin doğru olduğu tanımından hareket edilerek kolayca gösterilebilir. $f(x) * g(x) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) g(x-t)\,dt$ olmak üzere

i) $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$

ii) $f(x) * \left[g(x) * h(x)\right] = \left[f(x) * g(x)\right] * h(x)$

iii) $f(x) * \left[g(x) \mp h(x)\right] = \left[f(x) * g(x)\right] \mp \left[f(x) * h(x)\right]$

sağlanır.

Teorem 3.2.12. (Konvolüsyon teoremi) $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s)$ ve $\mathcal{L}\left[g(x)\right] = G(s)$ ise, bu durumda

$$\mathcal{L}\left[f(x)*g(x)\right]=\mathcal{L}\left[f(x)\right].\mathcal{L}\left[g(x)\right]=F(s).G(s) \tag{3.2.25}$$

dır.

İspat : İspatı yapabilmek için Konvolüsyon çarpımı ve Laplace dönüşümü tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(x)*g(x)\right]&=\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx}\left[\int_{t=0}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt\right]dx\\&=\int_{x=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} e^{-sx}f(t)g(x-t)\,dtdx\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

elde edilir. (3.2.26) de $u=x-t$ ve $v=t$, $0\le t\le x$ değişken değiştirmesi yaparsak $u>0,\quad v>0$ ve $\dfrac{\partial(x,t)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(x)*g(x)\right]&=\int_{v=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+v)}f(v)g(u)\,dudv\\&=\int_{v=0}^{\infty} e^{-sv}f(v)\,dv\int_{u=0}^{\infty} e^{-su}g(u)\,du\\&=\mathcal{L}\left[f(x)\right]\mathcal{L}\left[g(x)\right]\\&=F(s)G(s)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Konvolüsyon teoremi için

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]=f(x)*g(x)=g(x)*f(x) \tag{3.2.27}$$

yazılış biçimi çok kullanılır. Bu form daha çok ters Laplace dönüşümünün bulunmasında son derece kolaylık sağlar.

Örnek 3.2.20. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right]$ ters Laplace dönüşümünü hesaplayalım.

$$\frac{1}{s(s^2+4)}=\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$$

olup buradan $F(s)=\dfrac{1}{s}$, $G(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$ dersek

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=f(x)=1$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]&=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]\\&=\frac{1}{2}\sin(2x)\\&=g(x)\end{aligned}$$

olur. Teorem (3.2.12) den

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}\right]&=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]\\&=f(x)*g(x)\\&=\int_{t=0}^{\infty}g(t)f(x-t)\,dt\\&=\int_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)1dt\\&=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.21. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$ ters Laplace dönüşümünü bulalım. Burada $F(s)=G(s)=\frac{1}{s-1}$ olarak alınırsa $f(x)=g(x)=e^x$ olur. Teorem (3.2.12) nin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]&=\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]\\&=f(x)*g(x)\\&=\int_{t=0}^{x}f(t)g(x-t)\,dt\end{aligned}$$

$$= \int_{t=0}^{x} e^t e^{x-t} dt$$

$$= e^x \int_{t=0}^{x} dt$$

$$= xe^x$$

bulunur.

Örnek 3.2.22. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}\right]$ ters Laplace dönüşümünü bulalım. Burada $F(s)=\dfrac{1}{s-1}$ ve $G(s)=\dfrac{1}{s-2}$ dersek $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{2x}$ olup buradan

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]$$

$$= f(x) * g(x)$$

$$= \int_{t=0}^{x} f(t)g(x-t)dt$$

$$= \int_{t=0}^{x} e^t e^{2(x-t)} dt$$

$$= e^{2x} \int_{t=0}^{x} e^{-t} dt$$

$$= e^{2x}\left(1-e^{-x}\right)$$

$$= e^{2x} - e^x$$

olur.

Tanım 3.2. 6. (Birim Basamak Fonksiyonu)

$$u_0(x) = u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \tag{3.2.28}$$

Biçiminde tanımlı $u(x)$ fonksiyonuna *birim basamak fonksiyonu* denir. Herhangi bir c sayısı için birim basamak fonksiyonu

$$u_c(x) = u(x-c) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases} \tag{3.2.29}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 3.2.13. $u_c(x) = u(x-c) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\left[u_c(x)\right] = \frac{1}{s}e^{-cx} \tag{3.2.30}$$

dir.

İspat : Laplace dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[u_c(x)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} u_c(x)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{c} e^{-sx}\,0dx + \int_{x=c}^{\infty} e^{-sx}\,1dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{x=c}^{\infty} e^{-sx}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb} + e^{-sc}}{s}\right] \\
&= \frac{1}{s}e^{-sc} \qquad , s > 0
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.2.14. $f(x) \in E_\alpha$ ve $\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s)$ olsun. Ayrıca

$$u_x(x)f(x-c) = \begin{cases} 0, & 0 < x < c \\ f(x-c), & x > c \end{cases} \tag{3.2.31}$$

olmak üzere

$$\mathcal{L}\left[u_x(x)f(x-c)\right] = e^{-cs}\mathcal{L}\left[f(x)\right] \tag{3.2.32}$$

dir.

İspat : Laplace dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[u_x(x)f(x-c)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x-c)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{c} e^{-sx}\,0dx + \int_{x=c}^{\infty} e^{-sx} f(x-c)\,dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{x=c}^{\infty} e^{-sx} f(x-c)\,dx \quad ,x-c=t \text{ dersek}$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-s(t+c)} f(t)\,dt$$
$$= e^{-sc} \int_{t=0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$
$$= e^{-sc} F(s)$$

olur. Böylece $\mathcal{L}\left[u_x(x) f(x-c)\right] = e^{-cs} \mathcal{L}\left[f(x)\right]$ dir.

Örnek 3.2.23. $k(x) = \begin{cases} 0, & x<4 \\ (x-4)^2 & x \geq 4 \end{cases}$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü hesaplayalım. $k(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayabilmemiz için $k(x)$ fonksiyonunu uygun bir $f(x)$ fonksiyonun seçimi ile

$$k(x) = u(x-4) f(x-4)$$

şeklinde yazılabilmemiz gerekir. $f(x) = x^2$ olarak seçilirse $k(x)$ fonksiyonu

$$k(x) = u(x-4) f(x-4) = \begin{cases} 0, & x<4 \\ (x-4)^2, & x \geq 4 \end{cases}$$

olur. Böylece

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} x^2 dx$$
$$= \frac{2}{s^3}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\left[k(x)\right] = \mathcal{L}\left[u(x-4) f(x-4)\right]$$
$$= e^{-4s} \frac{2}{s^3}$$

dür.

Örnek 3.2.24. $g(x)=\begin{cases} 0, & x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & x\geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulalım.

$\sin x=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ yazılabildiğinden

$$g(x)=\begin{cases} 0, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

olur. Böylece

$$u_{\frac{\pi}{2}}(x)f\left(x-_{\frac{\pi}{2}}\right)=\begin{cases} 0, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

olur. Burada $f(x)=\cos x$ ve $x>0$ olup buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f(x)\right] &= F(s) \\ &= \mathcal{L}\left[\cos x\right] \\ &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

olur. Böylece $c=\dfrac{\pi}{2}$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[g(x)\right] &= \mathcal{L}\left[u_{\frac{\pi}{2}}(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{se^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1} \end{aligned}$$

bulunur.

3.2.4. Konvolüsyon Türünden İntegral Denklemlerde Laplace Dönüşümünün Uygulamaları

Tanım 3.2. 7. $f(x)$ ve $k(x)$ verilmiş fonksiyonlar olmak üzere

$$f(x) = y(x) + \int_{t=0}^{x} (x-t)\, y(t)\, dt \qquad (3.2.33)$$

ile verilen denklem *Konvolüsyon türünde bir integral denklem* olarak bilinir. Laplace dönüşümleri yardımı ile bu türden integral denklemler kolayca çözülebilir. Eğer (3.2.33) ile verilen denklemin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\left[f(x)\right] = \mathcal{L}\left[y(x)\right] + \mathcal{L}\left[k(x)\right]\mathcal{L}\left[y(x)\right] \qquad (3.2.34)$$

olur. Böylece

$$\mathcal{L}\left[y(x)\right] = \frac{\mathcal{L}\left[f(x)\right]}{1+\mathcal{L}\left[k(x)\right]} \qquad (3.2.35)$$

elde edilir. (3.2.35) in sağ tarafı s'nin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon tanınabilir bir dönüşüm ise bu durumda $y(x)$ çözümü elde edilir.

Örnek 3.2.25. $y(x) = x^3 + \int_{t=0}^{x} \sin(x-t)\, y(t)\, dt$ olarak verilen Konvolüsyon türündeki integral denklemini çözelim. Verilen denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\left[y(x)\right] = \mathcal{L}\left[x^3\right] + \mathcal{L}\left[\sin x\right]\mathcal{L}\left[y(x)\right]$$

olur. Buradan $\mathcal{L}\left[y(x)\right]$ ifadesi

$$\mathcal{L}\left[y(x)\right]=\frac{\mathcal{L}\left[x^3\right]}{1-\mathcal{L}\left[\sin x\right]}$$

$$=\frac{\frac{3!}{s^4}}{1-\frac{1}{s^2+1}}$$

$$=\frac{3!}{s^4}+\frac{3!}{s^6}$$

olur. Bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonunu bulabilmek için elde edilen sonuca ters Laplace dönüşümü uygulayalım. Böylece

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}+\frac{3!}{s^6}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^6}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right]+\frac{3!}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5!}{s^6}\right]$$

$$=x^3+\frac{1}{20}x^5$$

olur.

Örnek 3.2.26. $f(t)=4t-3\int\limits_{\beta=0}^{t}f(\beta)\sin(t-\beta)\,d\beta$ olarak verilen Konvolüsyon türündeki integral denklemini çözelim. Verilen denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=4\mathcal{L}[t]-3\mathcal{L}\left[f(t)\right]\mathcal{L}[\sin t]$$

olur. Buradan

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\frac{4\mathcal{L}[t]}{1+3\mathcal{L}[\sin x]}$$

$$=\frac{\frac{4}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2+1}}$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}$$

elde edilir. Böylece bilinmeyen $f(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] \\ &= t + \frac{3}{2}\sin(2t) \end{aligned}$$

olur.

3.3. Mellin Dönüşümleri

Bu kesimde Mellin dönüşümleri incelenecek ve çeşitli uygulamaları üzerinde durulacaktır. Fourier dönüşümü kullanılarak Mellin dönüşümü ve ters Mellin dönüşümünün nasıl elde edildiği, Mellin dönüşümünün temel özellikleri yanında bu dönüşümlerin matematiksel istatistikte nasıl kullanıldığı incelenecektir.

Mellin dönüşümü ilk olarak asal sayılar üzerinde Riemann(1876) tarafından tanımlanmıştır. Fakat açık formülü Cahen(1894) tarafından verilmiştir. Mellin(1896-1902) ise Mellin dönüşümü ve ters Mellin dönüşümünü tanımlamıştır.

Tanım 3.3.1. $g(\xi)$ Fourier dönüşümüne sahip bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $g(\xi)$ fonksiyonuna ait Fourier ve ters Fourier dönüşümleri

$$\mathcal{F}\left[g(\xi)\right] = G(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} g(\xi)\, dx \tag{3.3.1}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left[G(\alpha)\right] = g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} G(\alpha)\, d\alpha \tag{3.3.2}$$

olur. Burada $e^{\xi} = x$ ve c bir sabit olmak üzere $i\alpha = c - p$ değişken değiştirmeleri yapılırsa (3.3.1) ve (3.3.2) eşitlikleri sırasıyla

$$G(ip - ic) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=0}^{\infty} x^{p-c-1} g(\log x)\, dx \tag{3.3.3}$$

$$g(\log x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{p=c-i\infty}^{c+i\infty} x^{c-p} G(ip - ic)\, dp \tag{3.3.4}$$

şekline gelir. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-c} g(\log x) \equiv f(x)$ ve $G(ip - ic) \equiv \tilde{f}(p)$ olarak alınırsa (3.3.3)-(3.3.4) den

$$\tilde{f}(p) = \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x)\, dx \tag{3.3.5}$$

ve

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p=c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} \tilde{f}(p)\, dp \tag{3.3.6}$$

elde edilir. (3.3.5) eşitliğiyle verilen ifadeye $f(x)$ fonksiyonunun *Mellin dönüşümü* denir ve

$$\mathcal{M}[f(x)] = \tilde{f}(p) = \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x)\, dx \tag{3.3.7}$$

olarak ya da $\tilde{f}(p) = \mathcal{M}[f(x), p]$ ile gösterilir. Burada p Mellin dönüşümünün kompleks değişkenidir. (3.3.6) eşitliğiyle verilen ifadeye de $\tilde{f}(p)$ fonksiyonunun *ters Mellin dönüşümü* denir ve

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\tilde{f}(p)\right] = f(x) = \int_{p=c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-p} \tilde{f}(p)\, dp \tag{3.3.8}$$

olarak gösterilir.

Örnek 3.3.1. $f(x)=e^{nx} \quad ,n>0$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[f(x)\right]&=\mathcal{M}\left[e^{-nx}\right]\\&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}e^{-nx}dx\\&=\int_{t=0}^{\infty}\left(\frac{t}{n}\right)^{p-1}e^{-t}\frac{1}{n}dt\\&=\frac{1}{n^p}\Gamma(p)\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.3.2. $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[f(x)\right]&=\mathcal{M}\left[\frac{1}{1+x}\right]\\&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\frac{1}{1+x}dx\end{aligned}$$

dir. Burada $x=\dfrac{t}{1+t}$ dönüşümü uygulanırsa $dx=\dfrac{1}{(1-t)^2}dt$ olup

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[f(x)\right]&=\int_{t=0}^{1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}\frac{1}{1+\left(\dfrac{t}{1-t}\right)}\frac{1}{(1-t)^2}dt\\&=\int_{t=0}^{1}t^{p-1}(1-t)^{(-p+1)-1}dt\\&=\beta\left[p,(1-p)\right]\\&=\Gamma(p)\Gamma(1-p)\end{aligned}$$

dir. Bu sonuç ise gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\pi\operatorname{cosec}(\pi p)$$

olarak bilinen özelliğidir. Böylece

$$\mathcal{M}\left[\frac{1}{1+x}\right]=\pi\operatorname{cosec}(\pi p)$$

olur.

Örnek 3.3.3. $f(x)=\left(e^x-1\right)^{-1}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. Yine Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[f(x)\right]&=\mathcal{M}\left[\frac{1}{e^x-1}\right]\\&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\frac{1}{e^x-1}dx\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan geometrik seriden $e^{-x}<1$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=\frac{1}{1-e^{-x}}$ ifadesini yazabiliriz. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\frac{1}{e^x-1}$ olup böylece

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[\frac{1}{e^x-1}\right]&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\frac{1}{e^x-1}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}e^{-nx}dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(p)}{n^p}\\&=\Gamma(p)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\qquad ,p>1\end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.3.2. $b>1,\ b\in\mathbb{R}$ ve $a\notin\mathbb{Z}^-\bigcup\{0\}$ ise

$$\zeta(b,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^b}\tag{3.3.9}$$

ifadesiyle verilen fonksiyona *Genelleştirilmiş Zeta fonksiyonu* denir. Özel olarak $a=1$ seçilirse

$$\zeta(b,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^b} \tag{3.3.10}$$

olur. Burada $\zeta(b,1)$ ifadesine *Zeta fonksiyonu* denir ve kısaca $\zeta(b)$ ile gösterilir.

Eğer örnek 6.2. nin sonucu Zeta fonksiyonu kullanılarak ifade edilmek istenirse

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[\frac{1}{e^x - 1}\right] &= \Gamma(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \\
&= \Gamma(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^p} \\
&= \Gamma(p) \zeta(p)
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.3.4. $f(x) = 2\left(e^{2x} - 1\right)^{-1}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[f(x)] &= \mathcal{M}\left[\frac{2}{e^{2x} - 1}\right] \\
&= 2 \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} \frac{1}{e^{2x} - 1} dx \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} e^{-2nx} dx \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p)}{(2n)^p} \\
&= 2^{1-p} \Gamma(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \\
&= 2^{1-p} \Gamma(p) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^p} \\
&= 2^{1-p} \Gamma(p) \zeta(p)
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.3.5. $f(x)=\left(e^x+1\right)^{-1}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. Önce $\dfrac{1}{e^x+1}$ ifadesini

$$\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2x}-1}$$

biçiminde yazalım. Bu taktirde

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[\frac{1}{e^x+1}\right]&=\mathcal{M}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2x}-1}\right]\\&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\left[\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{e^{2x}-1}\right]dx\\&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\frac{1}{e^x-1}dx-\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\frac{2}{e^{2x}-1}dx\\&=\Gamma(p)\xi(p)-2^{1-p}\Gamma(p)\xi(p)\\&=\left(1-2^{1-p}\right)\Gamma(p)\xi(p)\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.3.6. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^n}$ fonksiyonunun Mellin dönüşümünü bulalım. Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[f(x)\right]&=\mathcal{M}\left[\frac{1}{(1+x)^n}\right]\\&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\frac{1}{(1+x)^n}dx\end{aligned}$$

olup burada $x=\dfrac{t}{1-t}$ dönüşümü uygulanırsa $dx=\dfrac{1}{(1-t)^2}dt$ dir ve

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[f(x)\right]&=\int_{t=0}^{1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}\frac{1}{\left[1+\left(\dfrac{t}{1-t}\right)\right]^n}\frac{1}{(1-t)^2}dt\\&=\int_{t=0}^{1}t^{p-1}(1-t)^{1-p+n-2}dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{t=0}^{1} t^{p-1} (1-t)^{n-p-1} \, dt \\
&= \beta\left[p,(n-p)\right] \\
&= \frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+n-p)} \\
&= \frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca

$$
\mathcal{M}^{-1}\left[\Gamma(p)\Gamma(n-p)\right] = \frac{\Gamma(n)}{(1+x)^n}
$$

olduğu da bu sonuçtan açık olarak görülmektedir.

Örnek 3.3.7. $\cos\alpha x$ ve $\sin\alpha x$ olarak verilen fonksiyonlarının Mellin dönüşümlerini bulalım. Bu fonksiyonlara ait Mellin dönüşümlerini bulabilmek için $f(x) = e^{-i\alpha x}$ diyelim. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Mellin dönüşümü

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[f(x)\right] &= \mathcal{M}\left[e^{-i\alpha x}\right] \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} e^{-i\alpha x} dx \\
&= \frac{\Gamma(p)}{(i\alpha)^p} \\
&= \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}(-i)^p \\
&= \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\left(\cos\frac{p\pi}{2} - i\sin\frac{p\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\left(\cos\frac{p\pi}{2}\right) - i\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\left(\sin\frac{p\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Diğer taraftan $e^{-i\alpha x} = \cos\alpha x - i\sin\alpha x$ özdeşliği doğru olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[e^{-i\alpha x}\right] &= \mathcal{M}\left[\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)\right] \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1}\left[\cos(\alpha x) - i\sin(\alpha x)\right]dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1}\cos(\alpha x)\,dx - i\int_{x=0}^{\infty} x^{p-1}\sin(\alpha x)\,dx \\
&= \mathcal{M}\left[\cos(\alpha x)\right] - \mathcal{M}\left[-i\sin(\alpha x)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[\cos(\alpha x)\right] &= \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\left(\cos\frac{p\pi}{2}\right) \\
\mathcal{M}\left[\sin(\alpha x)\right] &= \frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}\left(\sin\frac{p\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

bulunur.

3.3.1. Mellin Dönüşümünün Bazı Özellikleri

Teorem 3.3.1. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon ve $a > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{M}\left[f(ax)\right] = a^{-p}\tilde{f}(p) \tag{3.3.12}$$

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımından

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[f(ax)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(ax)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^{p-1} \frac{1}{a} f(x)\,dx \\
&= a^{-p}\tilde{f}(p)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.3.2. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathcal{M}\left[x^a f(x)\right] = \tilde{f}(p+a) \tag{3.3.13}$$

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathcal{M}\left[x^a f(x)\right] = \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} x^a f(x)\,dx$$
$$= \int_{x=0}^{\infty} x^{(p+a)-1} f(x)\,dx = \tilde{f}(p+a)$$

dır. Bu özelliğe Mellin dönüşümünün *öteleme özelliği* denir.

Teorem 3.3.3. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathcal{M}\left[f(x^a)\right] = \frac{1}{a}\tilde{f}\left(\frac{p}{a}\right) \tag{3.3.14}$$

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathcal{M}\left[f(x^a)\right] = \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x^a)\,dx \qquad\qquad u = x^a, \qquad dx = \frac{u^{\frac{1-a}{a}}}{a}du$$

$$\int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x^a)\,dx = \int_{u=0}^{\infty} \frac{u^{\frac{p}{a}-1} f(u)}{a}du$$
$$= \frac{1}{|a|}\tilde{f}\left(\frac{p}{a}\right)$$

olur.

Teorem 3.3.4. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{M}\left[\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \tilde{f}(1-p) \tag{3.3.15}$$

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathcal{M}\left[\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1}\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-2} f\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad x^{-1} = u \qquad , dx = -\frac{1}{u^2}du$$

$$= \int_{u=0}^{\infty} \left(\frac{1}{u}\right)^{p-2} u^{-2} f(u)\,du$$

$$= \int_{u=0}^{\infty} u^{-p} f(u)\,du$$

$$= \widetilde{f}(1-p)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.5. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon ise

$$\mathcal{M}\left[\log x f(x)\right] = \frac{d}{dp}\widetilde{f}(p) \qquad (3.3.16)$$

dir.

İspat: Mellin dönüşümü göz önüne alınırsa

$$\mathcal{M}\left[\log x f(x)\right] = \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1}\log x f(x)\,dx$$

dır. Ayrıca $\frac{d}{dp}x^{p-1} = (\log x)x^{p-1}$ olduğundan

$$\mathcal{M}\left[\log(x) f(x)\right] = \int_{x=0}^{\infty} \frac{d}{dp}x^{p-1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{d}{dp}\int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{d}{dp}\widetilde{f}(p)$$

elde edilir.

Teorem 3.3.6. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon olsun.

$\lim_{x\to 0^+}\left[x^{p-1}f(x)\right] = 0$ ve $\lim_{x\to\infty}\left[x^{p-1}f(x)\right] = 0$ oluyorsa bu taktirde,

$$\mathcal{M}\left[f'(x)\right]=-(p-1)\widetilde{f}(p-1) \tag{3.3.17}$$

dır. Ayrıca $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^{p-1}f'(x)\right]=0$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{p-1}f'(x)\right]=0$ oluyorsa

$$\mathcal{M}\left[f''(x)\right]=(p-1)(p-2)\widetilde{f}(p-2) \tag{3.3.18}$$

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathcal{M}\left[f'(x)\right]=\int\limits_{x=0}^{\infty} x^{p-1}f'(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{a\to\infty}\left[x^{p-1}f(x)\right]\Big|_{x=0}^{a}-\int\limits_{x=0}^{\infty}(p-1)x^{p-2}f(x)\,dx\\
&=0-(p-1)\widetilde{f}(p-1)\\
&=-(p-1)\widetilde{f}(p-1)
\end{aligned}$$

bulunur. Yine Mellin dönüşümü tanımından

$$\mathcal{M}\left[f''(x)\right]=\int\limits_{x=0}^{\infty} x^{p-1}f''(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{a\to\infty}\left[x^{p-1}f'(x)\right]\Big|_{x=0}^{a}-\int\limits_{x=0}^{\infty}(p-1)x^{p-2}f(x)\,dx\\
&=0-(p-1)\int\limits_{x=0}^{\infty}x^{p-2}f(x)\,dx\\
&=-(p-1)\lim_{a\to\infty}\left[x^{p-1}f''(x)\right]\Big|_{x=0}^{a}-\int\limits_{x=0}^{\infty}(p-2)x^{p-3}f(x)\,dx\\
&=-(p-1)\left[0-(p-2)\widetilde{f}(p-2)\right]\\
&=(p-1)(p-2)\widetilde{f}(p-2)
\end{aligned}$$

olup böylece (3.3.18) in doğru olduğu görülmüş olur.

Bu sonuç genelleştirilmek istenirse $r=0,1,2,\ldots,(n-1)$ için $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x^{p-r-1}f^{(r)}(x)\right]=0$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^{p-r-1}f^{(r)}(x)\right]=0$ oluyorsa

$$\mathcal{M}\left[f^{(n)}(x)\right]=(-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\widetilde{f}(p-n) \tag{3.3.19}$$

dir. Bu ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için n üzerinden tümevarım metodunu kullanalım önce (3.3.19) un $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim ve n için doğru olduğunu gösterelim. (3.3.19) da n yerine $n-1$ yazarsak

$$\mathcal{M}\left[f^{(n-1)}(x)\right]=(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n+1)}\widetilde{f}(p-n+1) \tag{3.3.20}$$

olur. Diğer taraftan kısmi integrasyon metodunun da kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[f^{(n)}(x)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f^{(n)}(x)\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[x^{p-1} f^{(n-1)}(x)\Big|_{x=0}^{a}\right] - \int_{x=0}^{\infty}(p-1)x^{p-2} f^{(n-1)}(x)\,dx \\
&= -(p-1)\int_{x=0}^{\infty} x^{(p-1)-1} f^{(n-1)}(x)\,dx \\
&= -(p-1)\mathcal{M}\left[f^{(n-1)}(x), p-1\right] \\
&= -(p-1)(-1)^{n-1}\frac{\Gamma(p-1)}{\Gamma(p-1-n+1)}\widetilde{f}(p-1-n+1) \\
&= (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}\widetilde{f}(p-n)
\end{aligned}$$

olur ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.7. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon ve $r=0,1,2,\ldots,(n-1)$ için , $\lim_{x\to 0^+}\left[x^{p+r-1} f^{(r-1)}(x)\right]=0$ ve $\lim_{x\to\infty}\left[x^{p+r-1} f^{(r-1)}(x)\right]=0$ oluyorsa bu taktirde,

i) $\mathcal{M}\left[xf'(x)\right]=-p\widetilde{f}(p)$

ii) $\mathcal{M}\left[x^2 f''(x)\right]=(-1)^2 p(p+1)\widetilde{f}(p)$

veya en genel olarak

iii) $\mathcal{M}\left[x^n f^{(n)}(x)\right]=(-1)^n \dfrac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\widetilde{f}(p)$ (3.3.21)

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımından hareket edilerek

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[xf'(x)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} x f'(x)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p} f'(x)\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty} x^p f(x)\Big|_{x=0}^{a} - p\int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x)\,dx \\
&= 0 - p\widetilde{f}(p) = -p\widetilde{f}(p)
\end{aligned}$$

biçiminde olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[x^2 f''(x)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} x^2 f''(x)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p+1} f''(x)\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty} x^{p+1} f'(x)\Big|_{x=0}^{a} - (p+1)\int_{x=0}^{\infty} x^{p} f'(x)\,dx \\
&= 0-(p+1)\int_{x=0}^{\infty} x^{p} f'(x)\,dx \\
&= -(p+1)\left[\lim_{a\to\infty} x^p f''(x)\Big|_{x=0}^{a} - p\int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x)\,dx\right] \\
&= (p+1)\,p\widetilde{f}(p)
\end{aligned}$$

dır. (3.3.21) ün doğruluğunu göstermek bu eşitliğin önce $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\mathcal{M}\left[x^{n-1} f^{(n-1)}(x)\right]=(-1)^{n-1} \frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(p)}\widetilde{f}(p)$$

eşitliği doğru olsun. bu durumda Mellin dönüşümü tanımından hareket edilerek

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[x^n f^{(n)}(x)\right] &= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} x^n f^{(n)}(x)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p+n-1} f^{(n)}(x)\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty}\left[x^{p+n-1} f^{(n-1)}(x)\right] - (p+n-1)\int_{x=0}^{\infty} x^{p+n-2} f^{(n-1)}(x)\,dx \\
&= 0 - (p+n-1)\mathcal{M}\left[x^{n-1} f^{(n-1)}(x)\right] \\
&= -(p+n-1)(-1)^{n-1}\frac{\Gamma(p+n-1)}{\Gamma(p)}\tilde{f}(p) \\
&= (-1)^{n-1}\frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}\tilde{f}(p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.8. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon olsun. Ayrıca $r = 0,1,2,\ldots,(n-1)$ için , $\lim_{x\to 0^+}\left[x^{p+r-1} f^{(r-1)}(x)\right] = 0$ ve $\lim_{x\to\infty}\left[x^{p+r-1} f^{(r-1)}(x)\right] = 0$ olmak üzere

$$
\mathcal{M}\left[D^2 f(x)\right] = p^2 \tilde{f}(p) \tag{3.3.22}
$$

dır ya da en genel hali ile

$$
\mathcal{M}\left[D^n f(x)\right] = (-1)^n p^n \tilde{f}(p) \tag{3.3.23}
$$

dır. Burada $D = x\dfrac{d}{dx}$ dir.

İspat : Öncelikle

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[D^2 f(x)\right] &= \mathcal{M}\left[D\{xf'(x)\}\right] \\
&= \mathcal{M}\left[x^2 f''(x) + xf'(x)\right] \\
&= \mathcal{M}\left[x^2 f''(x)\right] + \mathcal{M}\left[xf'(x)\right] \\
&= (-1)^2 p(p+1)\tilde{f}(p) - p\tilde{f}(p) \\
&= (-1)^2 p^2 \tilde{f}(p)
\end{aligned}
$$

dır. (3.3.23) ifadesinin doğruluğunu gösterebilmek için bu ifadenin $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim ve n üzerinden tüme varım metodunu kullanalım. (3.3.23) de n yerine $n-1$ yazılırsa

$$\mathcal{M}\left[D^{n-1}f(x)\right]=(-1)^{n-1}\,p^{n-1}\widetilde{f}(p) \tag{3.3.24}$$

olur. Böylece Mellin dönüşümü tanımı gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[D^{n}f(x)\right]&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}D^{n}f(x)\,dx\\
&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}\left(x\frac{d}{dx}\right)D^{(n-1)}f(x)\,dx\\
&=\int_{x=0}^{\infty}x^{p}\left(\frac{d}{dx}\right)D^{(n-1)}f(x)\,dx\\
&=\lim_{a\to\infty}\left[x^{p}D^{(n-1)}f(x)\right]\Big|_{x=0}^{a}-p\int_{x=0}^{\infty}x^{p-1}D^{(n-1)}f(x)\,dx\\
&=0-p\mathcal{M}\left[D^{(n-1)}f(x)\right]\\
&=-p(-1)^{n-1}\,p^{n-1}\widetilde{f}(p)\\
&=(-1)^{n}\,p^{n}\widetilde{f}(p)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.3.23) ün doğru olduğu görülmüş oldu.

Teorem 3.3.9. $f(x)$ Mellin dönüşümüne sahip bir fonksiyon ve bu fonksiyona ait Mellin dönüşümü $\mathcal{M}\left[f(x)\right]=\widetilde{f}(p)$ olsun. $I_1=\int_{t=0}^{x}f(t)\,dt,\quad I_n=\int_{t=0}^{x}I_{n-1}f(t)\,dt$ olmak üzere

$$\mathcal{M}\left[\int_{t=0}^{x}f(t)\,dt\right]=-\frac{1}{p}\widetilde{f}(p+1) \tag{3.3.25}$$

veya en genel hali ile

$$\mathcal{M}\left[I_{n}f(x)\right]=(-1)^{n}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)}\widetilde{f}(p+n) \tag{3.3.26}$$

dir.

İspat : $F(x)=\int\limits_{t=0}^{x} f(t)\,dt$ alınırsa $F'(x)=f(x)$ olur. Ayrıca $F(0)=0$ dır. Buna göre (3.3.17) den

$$\mathcal{M}\left[f(x)=F'(x),p\right]=-(p-1)\mathcal{M}\left[\int\limits_{t=0}^{x} f(t)\,dt,p-1\right] \tag{3.3.27}$$

dir. Bu eşitlikte p yerine $p+1$ alındığında

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[\int\limits_{t=0}^{x} f(t)\,dt,p\right]&=-\frac{1}{p}\mathcal{M}\left[f(x),p+1\right]\\&=-\frac{1}{p}\widetilde{f}(p+1)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan (3.3.26) ifadesinin doğruluğunu göstermek için bu eşitliğin önce $n-1$ için doğru, yani

$$\mathcal{M}\left[I_{n-1}f(x)\right]=\mathcal{M}\left[\int\limits_{t=0}^{x} I_{n-2}f(t)\,dt\right]=(-1)^{n-1}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n-1)}\widetilde{f}(p+n-1)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left[I_{n}f(x)\right]&=\mathcal{M}\left[\int\limits_{t=0}^{x} I_{n-1}f(t)\,dt\right]\\&=-\frac{1}{p}\mathcal{M}\left[I_{n-1}f(x),p+1\right]\\&=-\frac{1}{p}(-1)^{n-1}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n-1)}\widetilde{f}(p+n-1)\\&=(-1)^{n}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)}\widetilde{f}(p+n)\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.3.26) eşitliğinin doğru olduğu görülmüş olur.

3.3.2. Mellin Dönüşümü İçin Konvolüsyon Tipi Teoremler

f ve g ler Mellin dönüşümüne sahip fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(x)*g(x)=\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\,g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{dx}{\xi} \tag{3.3.28}$$

$$f(x)\circ g(x)=\int_{\xi=0}^{\infty} f(x\xi)\,g(\xi)dx \tag{3.3.29}$$

işlemlerini tanımlayalım. Şimdi bu işlemlere ilişkin aşağıdaki iki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.3.10. $f(x)$ ve $g(x)$ ler Mellin dönüşümüne sahip fonksiyonlar ve sırasıyla $\mathcal{M}\left[f(x)\right]=\tilde{f}(p)$, $\mathcal{M}\left[g(x)\right]=\tilde{g}(p)$ olmak üzere

$$\mathcal{M}\left[f(x)*g(x)\right]=\tilde{f}(p)\tilde{g}(p) \tag{3.3.30}$$

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımında (3.3.28) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[f(x)*g(x)\right] &= \mathcal{M}\left[\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\,g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{dx}{\xi}\right] \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\,g\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{dx}{\xi}\,dx \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\int_{x=0}^{\infty} x^{p-1}g\left(\frac{x}{\xi}\right)dx\frac{dx}{\xi} \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi)\int_{\eta=0}^{\infty} (\eta\xi)^{p-1}\,g(\eta)\,d\eta d\xi \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} \xi^{p-1}f(\xi)\int_{\eta=0}^{\infty} \eta^{p-1}g(\eta)\,d\eta d\xi \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} \xi^{p-1}f(\xi)\tilde{g}(p)\,d\xi \\
&= \tilde{f}(p)\tilde{g}(p)
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.11. $f(x)$ ve $g(x)$ Mellin dönüşümüne sahip iki fonksiyon ve bunlara ait Mellin dönüşümleri sırasıyla $\mathcal{M}[f(x)] = \tilde{f}(p)$, $\mathcal{M}[g(x)] = \tilde{g}(p)$ olmak üzere

$$\mathcal{M}[f(x) \circ g(x)] = \tilde{f}(p)\tilde{g}(1-p) \tag{3.3.31}$$

dir.

İspat : Mellin dönüşümü tanımında (3.3.29) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[f(x) \circ g(x)] &= \mathcal{M}\left[\int_{\xi=0}^{\infty} f(x\xi)\, g(\xi) d\xi\right] \\
&= \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} \int_{\xi=0}^{\infty} f(x\xi)\, g(\xi) d\xi dx \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} g(\xi) \int_{x=0}^{\infty} x^{p-1} f(x\xi) dx d\xi \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} g(\xi) \int_{\eta=0}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{p-1} f(\eta) \frac{d\eta d\xi}{\xi} \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} \xi^{1-p} g(\xi) \int_{\eta=0}^{\infty} \eta^{p-1} f(\eta) \frac{d\eta d\xi}{\xi} \\
&= \int_{\xi=0}^{\infty} \xi^{1-p} \xi^{-1} g(\xi) \tilde{f}(p)\, d\xi \\
&= \tilde{f}(p) \int_{\xi=0}^{\infty} \xi^{-p} g(\xi) d\xi \\
&= \tilde{f}(p)\tilde{g}(1-p)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca buradan

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\tilde{f}(1-p)\tilde{g}(p)\right] = \int_{0}^{\infty} g(st) f(t)\, dt \tag{3.3.32}$$

olduğu söylenebilir. Özel olarak $g(t) = e^{-t}$ alınırsa

$$\tilde{f}(p) = \int_{x=0}^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = \Gamma(p) \tag{3.3.33}$$

olur ve

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\widetilde{f}(1-p)\Gamma(p)\right]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \tag{3.3.34}$$

elde edilir. Bu ise $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür.

3.3.3. Mellin Dönüşümünün İstatistiksel Uygulamaları

Mellin dönüşümü rasgele değişkenlerin çeşitli kombinasyonlarının dağılımlarını bulmada oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Ayrıca dönüşüm rasgele değişkenlerden çeşitli aritmetik işlemler sonucunda elde edilen rasgele değişken veya değişkenlere ait dağılım fonksiyonunun ve bu dağılıma ait momentlerin kestiriminde büyük kolaylıklar sağlar.

Teorem 3.3.12. X_1 ve X_2 pozitif tanımlı, birbirinden bağımsız ve sırasıyla $f_1(x_1)$ ve $f_2(x_2)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip rasgele değişkenler olsun. $Y_1 = X_1X_2$ biçiminde tanımlanan yeni rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $h(y_1)$ olmak üzere

$$\mathcal{M}\left[h(y_1)\right]=\mathcal{M}\left[f_1(x_1)\right]\mathcal{M}\left[f_2(x_2)\right] \tag{3.3.35}$$

dır.

İspat : Öncelikle $Y_1 = X_1X_2$ rasgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu $h(y_1)$ i elde etmek için $Y_2 = X_2$ diyelim. Y_1 ve Y_2 rasgele değişkenlerine ait ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$h(y_1,y_2)=\frac{1}{y_2}f_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right)f_2(y_2)$$

dir. Buradan Y_1 rasgele değişkeninin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$h(y_1) = \int_{y_2=0}^{\infty} \frac{1}{y_2} f_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right) f_2(y_2)\, dy_2 \qquad (3.3.36)$$

olur. (3.3.36) nın Mellin dönüşümü Teorem (3.3.10) gereğince

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[h(y_1)\right] &= \mathcal{M}\left[\int_0^{\infty} \frac{1}{|y_2|} f_1\left(\frac{y_1}{y_2}\right) f_2(y_2)\, dy_2\right] \\
&= \mathcal{M}\left[\int_0^{\infty} \frac{1}{|x_2|} f_1\left(\frac{y_1}{x_2}\right) f_2(x_2)\, dx_2\right] \\
&= \widetilde{f}_1(p)\widetilde{f}_2(p)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ters Mellin dönüşümü ise

$$h(y_1) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b\to\infty} \int_{c-ib}^{c+ib} y_1^{-p}\, \widetilde{h}(p)\, dp \qquad (3.3.37)$$

dir. Bu teoremin bir sonucu olarak, iki rasgele değişkenin çarpımı olarak tanımlanan yeni rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunun (3.3.37) ifadesine denk olduğu söylenebilir.

Tanım 3.3.3. X bir rasgele değişken olmak üzere $m_k = E(X^k)$ ifadesine X rasgele değişkeninin sıfıra göre $k.$ momenti denir.

X, pozitif aralıkta tanımlı bir rasgele değişken olsun. Bu rasgele değişkene ait olasılık yoğunluk fonksiyonunun özel olarak $p = 2$ için Mellin dönüşümü alınırsa

$$\mathcal{M}\left[f(x)\right] = \widetilde{f}(2) = \int_{x=0}^{\infty} x f(x)\, dx = E(X)$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle $p = 2$ için $f(x)$ in Mellin dönüşümü X in beklenen değeridir. Diğer taraftan bir rasgele değişkenin varyansı

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

olarak bilinir. Varyans, Mellin dönüşümü kullanılarak

$$Var(X) = \widetilde{f}(3) - \left[\widetilde{f}(2)\right]^2$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Sürekli ve pozitif tanımlı bir X rasgele değişkeninin sıfır etrafında $k.$ momenti Mellin dönüşümü kullanılarak da elde edilebilir. p ile k nin yer değiştirmesiyle $k.$ moment

$$m_k = E\left(X^k\right) = \mathcal{M}\left[f(x), k+1\right] \tag{3.3.38}$$

olarak yazılabilir.

Teorem 3.3.13. X pozitif aralıkta tanımlı, sürekli ve $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken, ayrıca $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Y = aX$ biçiminde tanımlanan rasgele değişkenin $k.$ momenti

$$E\left(Y^k\right) = a^k \mathcal{M}\left[f(x), k+1\right] = a^k \widetilde{f}(k+1) \tag{3.3.39}$$

dir.

İspat : (3.3.38) ifadesinden faydalanarak

$$\begin{aligned} E\left(Y^k\right) &= E\left[(ax)^k\right] \\ &= \int_{x=0}^{\infty} (ax)^k f(x)\,dx \\ &= a^k \mathcal{M}\left[f(x), k+1\right] \\ &= a^k \widetilde{f}(k+1) \end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.3.8. X rasgele değişkeni $[0,1]$ aralığında Düzgün dağılıma sahip olsun. X rasgele değişkeninin $k.$ momenti hesaplayalım. X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & d.y. \end{cases}$$

dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
E\left[X^k\right] &= \mathcal{M}\left[f(x), k+1\right] \\
&= \int_{x=0}^{1} x^k f(x)\,dx \\
&= \int_{x=0}^{1} x^k\,dx \\
&= \frac{1}{k+1}
\end{aligned}
$$

olur. Özel olarak $Y = 15X$ alalım. Bu durumda Y rasgele değişkeninin $k.$ momenti Teorem (3.3.13) e göre $a = 15$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
E\left[Y^k\right] &= a^k \widetilde{f}(k+1) \\
&= 15^k \widetilde{f}(k+1) \\
&= \frac{15^k}{k+1}
\end{aligned}
$$

olur.

Teorem 3.3.14. X pozitif aralıkta tanımlı, sürekli ve $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken, ayrıca $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Y = X^b$ biçiminde tanımlanan rasgele değişkenin $k.$ momenti

$$
E\left[Y^k\right] = \widetilde{f}(bk+1) \tag{3.3.40}
$$

dir.

İspat : Basit bir hesapla

$$
\begin{aligned}
E\left(Y^k\right) &= E\left[\left(X^b\right)^k\right] \\
&= E\left[X^k\right]\Big|_{k=bk} \\
&= \mathcal{M}\left[f(x), bk+1\right] \\
&= \widetilde{f}(bk+1)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3.9. X rasgele değişkeni $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere $Y = X^3$ olarak tanımlanan rasgele değişkenin $k.$ momentini hesaplayalım. Teorem (3.3.14) den

$$E\left(Y^k\right) = \widetilde{f}\left(bk+1\right)$$

dır. Buradan $b=3$ olarak seçildiğinde $Y = X^3$ rasgele değişkenin $k.$ momenti

$$E\left(Y^k\right) = \frac{1}{3k+1}$$

olur.

Özel olarak Teorem (3.3.14) de $b=-1$ olarak alınırsa $Y = X^{-1}$ olarak tanımlanan rasgele değişkenin $k.$ momenti

$$\begin{aligned} E\left(Y^k\right) &= E\left[\left(X^{-1}\right)^k\right] \\ &= E\left[X^k\right]\Big|_{k=-k} \\ &= \mathcal{M}\left[f(x), 1-k\right] \\ &= \widetilde{f}\left(1-k\right) \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

olur.

Teorem 3.3.15. X_1, X_2 sırası ile $f_1(x_1)$ ve $f_2(x_2)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip birbirinden bağımsız ve pozitif aralıkta tanımlı iki rasgele değişken olmak üzere $Y = X_1 X_2$ biçiminde tanımlanan yeni rasgele değişkenin $k.$ momenti

$$E\left(Y^k\right) = \widetilde{f_1}\left(k+1\right)\widetilde{f_2}\left(k+1\right) \tag{3.3.42}$$

dır.

İspat : Beklenen değer tanımından

$$\begin{aligned}
E\left(Y^k\right) &= E\left[\left(X_1X_2\right)^k\right] \\
&= E\left[X_1^k X_2^k\right] \\
&= E\left[X_1^k\right]E\left[X_2^k\right] \\
&= \mathcal{M}\left[f_1\left(x_1\right),k+1\right]\mathcal{M}\left[f_2\left(x_2\right),k+1\right] \\
&= \widetilde{f_1}\left(k+1\right)\widetilde{f_2}\left(k+1\right)
\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.3.16. X_1, X_2 sırası ile $f_1\left(x_1\right)$ ve $f_2\left(x_2\right)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarına sahip birbirinden bağımsız ve pozitif bir bölgede tanımlı iki rasgele değişken olmak üzere $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$ biçiminde tanımlanan yeni rasgele değişkenin $k.$ momenti

$$E\left(Y^k\right) = \widetilde{f_1}\left(k\right)\widetilde{f_2}\left(1-k\right) \tag{3.3.43}$$

dır.

İspat : Tanımlanan Y rasgele değişkenini X_1 ile $\dfrac{1}{X_2}$ rasgele değişkenlerinin çarpımları gibi düşünelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E\left(Y^k\right) &= E\left[\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^k\right] \\
&= E\left[\left(X_1\frac{1}{X_2}\right)^k\right] \\
&= E\left[X_1^k\left(X_2^{-1}\right)^k\right] \\
&= E\left[X_1^k\right]E\left[\left(X_2^{-1}\right)^k\right] \\
&= \mathcal{M}\left[f_1\left(x_1\right),k+1\right]\mathcal{M}\left[f_2\left(x_2\right),1-k\right] \\
&= \widetilde{f_1}\left(k+1\right)\widetilde{f_2}\left(1-k\right)
\end{aligned}$$

olur.

Örnek 3.3.10. X_1, X_2 ikisi de $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun. $Y = \dfrac{X_1}{X_2}$ olarak tanımlanan rasgele değişkenin $k.$ momentini bulalım. Teorem (3.3.16) dan $k.$ moment

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\left[h(y), k+1\right] &= \left[f(x_1), k+1\right]\mathcal{M}\left[f(x_2), 1-k\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\frac{1}{(1-k)} \\
&= \frac{1}{1-k^2}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin hazırlanışındaki temel amaç, çok geniş uygulama alanına sahip olan İntegral dönüşümlerinin özelliklerini düzlemsel halde incelemektir. Özel integral dönüşümleri olan Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümlerinin temel özellikleri bu tezde verilmiştir. Benzer tanım ve kavramlar bazı küçük gösterim farklılıkları ile yüksek boyutlu uzaylarda da verilebilir.

Genel teorinin yanında Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümlerinin bazı fiziksel problemlere, özellikle de istatistikteki bazı konulara ilişkin uygulamaları üzerinde durulmuştur. Bu konu istatistikteki diğer alanlara özellikle olasılık teorisine uygulanabilir niteliktedir. İntegral dönüşümleri, istatistikte, mühendislikte ve temel bilimlerdeki bazı problemlerin çözümlerini oldukça kolaylaştırmaktadır. Mellin dönüşümünün istatistiksel uygulamaları, geliştirilmeye ve orijinal sonuçlar ortaya koymaya oldukça müsaittir.

KAYNAKLAR

1. Spiegel M. R., *Fourier Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 1991.
2. Churchill R. V. and Brown J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems* , McGraw-Hill Book Company, 1987.
3. Myınt-U, T., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, New York:Elsevier North Holland, 1980.
4. Folland G. B., *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadworth and Brooks, California, (1992).
5. Yarasa R., *Fourier Analizi*, Çağlayan Basımevi, 1976.
6. Akdeniz F., *Olasılık ve İstatistik*, Ankara Üni. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:4, 1991.
7. Öztürk F., *Matematiksel İstatistik*, Ankara Üni. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:10, 1993.
8. Cramer, H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946.
9. Debnath, L., *Integral Transforms and Their Applications*, CRC Press, 1995.
10. Giffin W. C.,*Transform Tecniques For Probability Modeling*, Academic Press Inc,1975.