KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR VE I. MERTEBEDEN DİFERENSİYELLENEBİLİR DENKLEMLER

NURDAN ÇİZMECİ

HAZİRAN 2005

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı

Bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ali Paşa AYDIN

Doç. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

ÖZET

DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR VE I. MERTEBEDEN DİFERENSİYELLENEBİLİR DENKLEMLER

ÇİZMECİ, NURDAN

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Haziran 2005, 90 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde temel kavramlar, diferensiyellenebilir manifoldlar, manifold topolojisi ve manifold üzerinde türev konuları ele alınmıştır. Üçüncü bölümde vektör alanları kullanılarak diferensiyellenebilir manifold üzerinde I. mertebeden diferensiyel denklemler ele alınmış ve örneklerle incelenmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Diferensiyellenebilir manifoldlar, vektör alanları ve I. mertebeden diferensiyel denklemler

ABSTRACT

DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER

ÇİZMECİ, Nurdan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

June 2005, 90 pages

This thesis consists of four sections. The first section is reserved for introduction. In the second section, we give basic concepts, diferentiable manifolds, the topology of a manifolds and differentiation on a manifold. In the third sections, the vector fields are used to differential equations of first order were investigated on the related examples. The forth sections is reserved for disscussion and conclusion.

Key words: Differentiable manifolds, vector fields and differential equations of first order

TEŞEKKÜR

Bu çalışma ile ilgili her çeşit bilgi, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Doç. Dr. Halit GÜNDOĞAN'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmam esnasında yakın ilgi ve yardımlarını gördüğüm Arş. Gör. Ayşe ÇİÇEK, Arş. Gör. Sıddıka ÖZKALDI ve Arş. Gör. Semih YILMAZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Differentiable Manifolds (R. S. Clark and F. Brickell), Lineer Cebir (H. H. Hacısalihoğlu) ve topolojik kavramlar için Topoloji (C. Yıldız) adlı kitaplardan faydalanılmıştır. R. S. Clark and F. Brickell, Differentiable Manifolds adlı kitabında diferensiyellenebilir manifoldları, manifold üzerindeki topolojik yapıyı ele almıştır. Ayrıca manifold üzerindeki türevi kullanarak vektör alanlarını ve I. mertebeden diferensiyel denklemleri incelemiştir. Örnekler için Diferensiyel Geometri I. Cilt (H. H. Hacısalihoğlu) adlı kitaptan faydalanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Diferensiyellenebilir manifoldlar, manifoldun C^∞ yapısından indirgediği topolojinin bazı temel özellikleri ve manifold üzerinde I. mertebeden diferensiyel denklemlerin ele alınması ve bunların örneklendirilerek incelenmesi amaçlanmıştır.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1. Topolojik Temel Kavramlar

***Tanım 2.1.1*: (Global Fonksiyon)** $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ olmak üzere $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. *f*'in tanım kümesi $Domf \subset A$ ve değer cümlesi $rangef \subset B$ ile gösterilecektir. Eğer $Domf = A$ ise *f* 'ye global fonksiyon denir [1].

$Domf = U$ olmak üzere $U \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir V cümlesi varsa

$$\begin{aligned} f|_V &: U \cap V \to B \\ x &\to f|_V(x) = f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonuna *f*'in *V* cümlesine kısıtlanmışı denir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe fonksiyon denildiğinde global olmayan fonksiyon anlaşılacaktır.

***Tanım 2.1.2*: (İzdüşüm Fonksiyonu)**

$A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$ iki cümle olsun.

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) | a_i \in A_i, i = 1,2\}$$

cümlesine A_1 ve A_2 cümlelerinin kartezyen çarpımı denir.

$$\begin{aligned} P_i &: A_1 \times A_2 \to A_i \\ a = (a_1, a_2) &\to P_i(a) = a_i, \; i = 1,2 \end{aligned}$$

fonksiyonuna *i*. izdüşüm fonksiyonu denir [1].

***Tanım 2.1.3*: (Özdeşlik Dönüşümü)** $A \neq \varnothing$ bir cümle olmak üzere

$$\begin{aligned} id : A &\to A \\ x &\to id(x) = x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme A cümlesi üzerinde özdeşlik dönüşümü denir.

***Tanım 2.1.4*: (Topoloji, Topolojik Uzay)** $S \neq \varnothing$ cümlesinin alt cümlelerinin bir ailesi τ olsun. Eğer,

i) $S \in \tau, \varnothing \in \tau$

ii) $\bigcup_i A_i \in \tau, \forall A_i \in \tau$

iii) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau, \forall A_i \in \tau$

aksiyomları sağlanıyorsa τ ailesine S üzerinde bir topoloji (S,τ) ikilisine de topolojik uzay denir. τ 'nun elemanlarına S'nin açık alt cümleleri denir [4].

***Tanım 2.1.5*: (Baz, Temel Açık Cümle, Açık Cümle)** $S \neq \varnothing$ bir cümle ve $\mathcal{B}$, S 'nin alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

i) $\bigcup_i B_i = S, \ \forall B_i \in \mathcal{B}$

ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \ B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ iken $B_1 \cap B_2 = \bigcup_i B_i$

özellikleri sağlanırsa $\mathcal{B}$'ye S üzerindeki bir topoloji için bir baz, $\mathcal{B}$'nin elemanlarına da temel açık cümleler denir [4].

$\mathcal{B}$ bazındaki temel açık cümlelerin birleşimi olarak yazılabilen S'in boş cümleden farklı elemanlarına S'de $\mathcal{B}$ bazından elde edilen topolojiye göre açık cümleler denir [4].

***Tanım 2.1.6*: (Komşuluk, Komşuluklar Bazı)** (S,τ), bir topolojik uzay ve $s \in S$ olsun. $s \in A$ ve $A \in \tau$ olacak şekilde bir A cümlesi varsa A'ya s'in bir komşuluğu denir [1].

Buna göre bu çalışmamızda komşuluğun bir açık cümle olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca s'nin komşuluklar ailesi $N(s)$ ile gösterilirse,

$$N(s) = \{A \mid s \in A \in \tau\}$$

dir.

$\mathcal{B}(s) \subset N(s)$ ailesi verilsin. Eğer $\forall V \in N(s)$ için $U \subset V$ olacak şekilde $\exists U \in \mathcal{B}(s)$ varsa bu $\mathcal{B}(s)$ ailesine $s \in S$ noktasında bir baz veya $s \in S$ noktasında komşuluklar tabanı denir [4].

***Tanım 2.1.7*: (Sürekli Fonksiyon)** S ve T herhangi iki topolojik uzay ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall V \in N(f(s))$ için $f(U) \subset V$ olacak şekilde $\exists U \in N(s)$ varsa f'e $s \in S$ noktasında süreklidir denir [4].

***Tanım 2.1.8*: (Açık Fonksiyon)** S ve T herhangi iki topolojik uzay ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. $\forall U \subset Domf$ açık iken $f(U) \subset T$ açık ise f'ye açık fonksiyon denir [4].

***Tanım 2.1.9*: (Homeomorfizm)** *S* ve *T* herhangi iki topolojik uzay ve $f : S \to T$ bir fonksiyon olsun. *f*; 1:1, sürekli ve açık ise *f*'ye bir homeomorfizm denir [4].

***Tanım 2.1.10*: (Kapalı Cümle)** (S,τ) topolojik uzay olsun. $S - U \in \tau$ olacak şekilde bir $U \subset S$ cümlesine *U* kapalıdır denir. Kapalı cümlelerin ailesi τ^C ile gösterilir [4].

***Tanım 2.1.11*: (Kapanış, İç, Sınır)** (S,τ) topolojik uzay ve $A \subset S$ olsun. *A*'nın içi $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilir ve

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{ U \mid U \subset A, U \in \tau \}$$

olarak tanımlanır. *A*'nın kapanışı $\overline{A}$ ile gösterilir ve

$$\overline{A} = \bigcap \{ U \mid A \subset U, U \in \tau^C \}$$

olarak tanımlanır. *A*'nın sınırı ∂A ile gösterilir ve

$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$$

olarak tanımlanır [4].

***Tanım 2.1.12*: (Alt Cümle Topolojisi)** (S,τ) topolojik uzay ve $A \subset S$ olsun.

$\tau_1 = \{ A \cap U \mid U \in \tau \} \subset P(A)$ olmak üzere τ_1, A üzerinde bir topolojidir. (A,τ_1) topolojik uzayı (S,τ) topolojik uzayının alt uzayıdır [4].

***Tanım 2.1.13*: (Ayırma Aksiyomları)**

(S,τ), bir topolojik uzay olsun.

T_1 Ayırma Aksiyomu:

$p \neq q$ olacak şekildeki $\forall p,q \in S$ için $\exists\, U \in N(p), \exists\, V \in N(q) \ni\; p \notin V, q \notin U$ şartı sağlanıyorsa (S,τ) topolojik uzayı T_1 ayırma aksiyomunu sağlar denir [4].

T_2 Ayırma Aksiyomu:

$p \neq q$ olacak şekildeki $\forall p,q \in S$ için $\exists\, U \in N(p), \exists\, V \in N(q) \ni\; U \cap V = \varnothing$ şartı sağlanıyorsa (S,τ) topolojik uzayı T_2 ayırma aksiyomunu sağlar denir [4].

T_2 'yi sağlayan bir uzaya **Hausdorff uzayı** denir [4].

***Tanım 2.1.14*: (Açık Örtü, Alt Örtü)** (S,τ), bir topolojik uzay ve $\varphi \subset \tau$ olsun. $\bigcup_{U \in \varphi} U = S$ ise φ'ye *S*'in bir açık örtüsü denir. *S*'nin $\varphi_1 \subset \varphi$ olacak şekilde φ_1 açık örtüsü varsa φ_1'e φ'nin alt örtüsü denir [4].

***Tanım 2.1.15*: (Kompakt Uzay)** (S,τ), bir topolojik uzay olsun. *S*'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (S,τ)'ya kompakt topolojik uzay denir [4].

***Tanım 2.1.16*: (Lokal Kompakt Uzay)** (S,τ), bir topolojik uzay olsun. *S*'in her noktasının kapanışı kompakt olan bir komşuluğu varsa *S*'ye lokal kompaktdır denir [4].

***Tanım 2.1.17*: (Bağlantılı(İrtibatlı) Uzay)** (S,τ), bir topolojik uzay olsun. *S* ayrık açıkların birleşimi şeklinde yazılamıyorsa *S*'ye bağlantılıdır veya irtibatlıdır denir [4].

***Tanım 2.1.18*: (Sayılabilirlik Aksiyomları)** (S,τ), bir topolojik uzay olsun.

S'nin her noktasının sayılabilir komşulukları varsa (S,τ) topolojik uzayına sayılabilirliğin birinci aksiyomunu sağlar denir.

S, sayılabilir bir baza sahipse (S,τ) topolojik uzayına sayılabilirliğin ikinci aksiyomunu sağlar denir [4].

***Tanım 2.1.19*: (C^{∞} Fonksiyon)** Her mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyona C^{∞} fonksiyon denir [1].

***Tanım 2.1.20*:** $n\times m$-tipinden reel matrislerin cümlesi $M(n\times m, IR)$ ile gösterilsin. $f: IR^m \to IR^n$ bir C^{∞} fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} J_f &: IR^m \to M(n\times m, IR) \\ z &\to J_f(z) = J(f,z) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)\right]_{n\times m} \end{aligned} \text{"}$$

ile tanımlanan $J(f,z)$ matrisine $z\in IR^m$ noktasında f fonksiyonun Jakobiyen matrisi denir [1].

***Tanım 2.1.21*:** $f: IR^n \to IR^n$ fonksiyonu 1:1, f ve f^{-1}, C^{∞} ise f'ye diffeomorfizm denir [1].

***Teorem 2.1.1 (İnvers Fonksiyon Teoremi)*:**

$f: IR^n \to IR^n$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve bir $z\in Domf$ için

$$\det(J(f,z)) \neq 0$$

ise $\exists\, V\in N(z)$ vardır öyle ki $f|_V$ bir diffeomorfizmdir [1].

Tanım 2.1.22: $f : IR^n \to IR^n$ olsun. Eğer $\forall z \in Domf$ için $\exists V \in N(z) \ni f|_V$ diffeomorfizm ise f 'ye lokal diffeomorfizm denir [1].

Teorem 2.1.2: $f : IR^n \to IR^n$ fonksiyonu lokal diffeomorfizm ve 1:1 ise f bir diffeomorfizmdir [1].

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1:

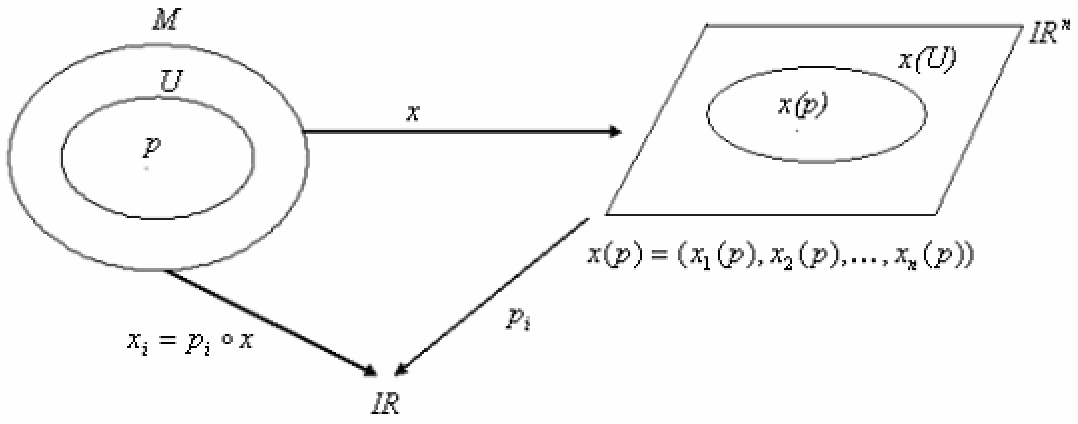
$M \neq \emptyset$ bir cümle olsun. $x : M \to IR^n$ bir fonksiyon ve $Domx = U \subset M$ olmak üzere

H1) x, 1:1

H2) $rangex \subset IR^n$ açık

ise *x*' e *M*' de n-boyutlu bir harita denir ve (U, x) ile gösterilir [1].

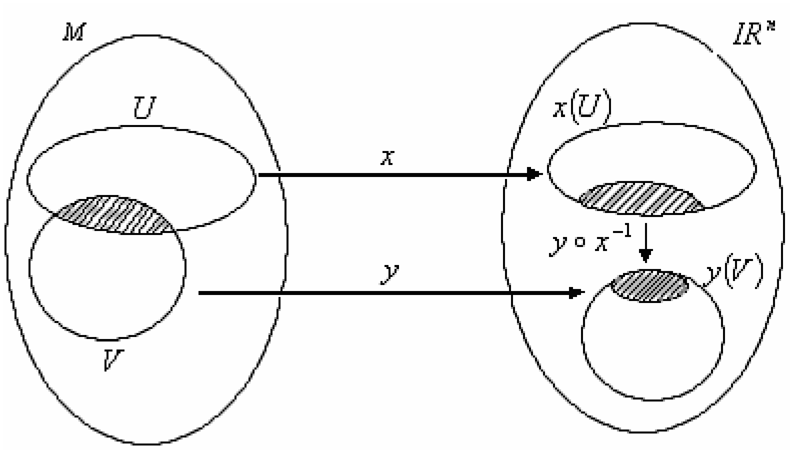
Tanım 2.2.2: *M* bir cümle ve (U, x), *M*'nin n-boyutlu haritası olsun. p_i, IR^n'nin *i.* koordinat fonksiyonu olmak üzere $x_i = p_i \circ x$ fonksiyonuna *M*'nin (U, x) haritasına göre *i.* koordinat fonksiyonu denir $(1 \leq i \leq n)$.



Şekil 2.2.1

***Tanım 2.2.3*:**

$M \neq \emptyset$ bir cümle, (U,x) ve (V,y) M' de $U \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde iki harita olsun.



Şekil 2.2.2

Eğer $y \circ x^{-1} : IR^n \to IR^n$ fonksiyonu bir diffeomorfizm ise M de (U,x) ve (V,y) haritaları uyumludur veya bağdaşabilirdir denir [1].

Tanım 2.2.4: $M \neq \emptyset$ bir cümle ve $A = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}, M$ 'nin haritalarının bir koleksiyonu olsun. Eğer

A1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$

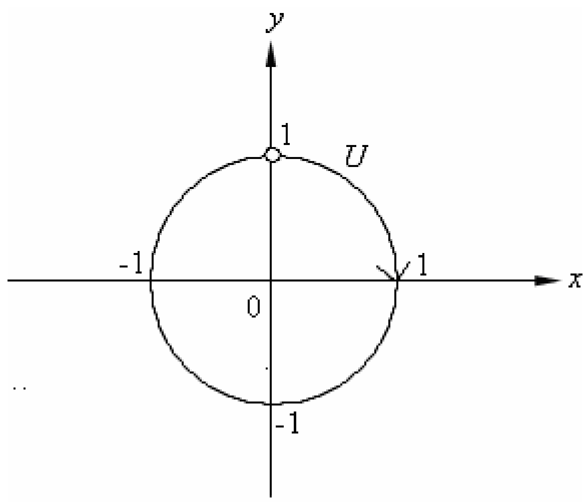
A2) $\forall i, j \in I$ için $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ olacak şekildeki $\forall (U_i, x_i), (U_j, x_j) \in A$

haritaları uyumlu

ise A ' ya M 'nin bir C^∞ atlası denir [1].

Örnek 2.2.1: $S^1 = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid s \in IR\}$

$$U = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) | 0 < s < 1\} \subset S^1$$



Şekil 2.2.3

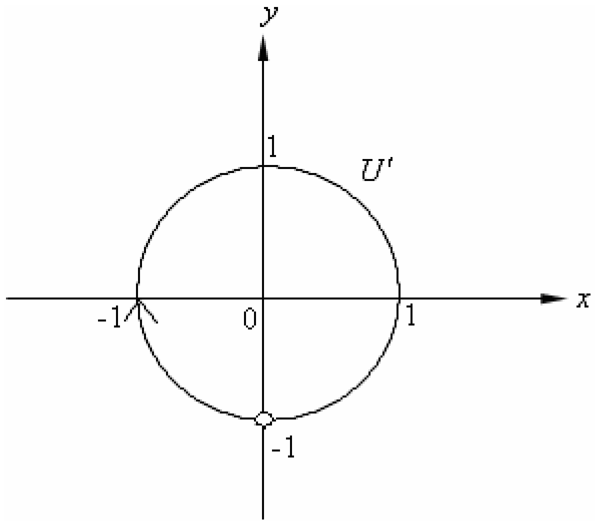
$$x : U \to IR$$
$$p = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \to x(p) = s$$

H1) $x, 1:1$ dir.

H2) $x(U) = (0,1) \subset IR$, açık

olduğundan (U, x), S^1 için 1-boyutlu bir haritadır.

$$U' = \left\{ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \middle| -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} \right\} \subset S^1$$



Şekil 2.2.4

$x' : U' \to IR$

$q = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \to y(q) = s$

H1) $x', 1:1$

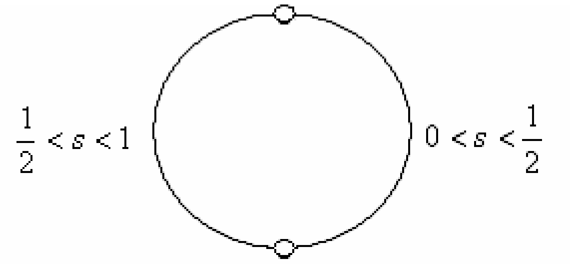
H2) $x'(U') = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset IR$ açık

olduğundan (U', x'), S^1 için 1-boyutlu bir haritadır.

$A=\{(U,x),(U',x')\}$ cümlesinin S^1'in bir C^∞ atlası olduğunu gösterelim.

A1) $U \cup U' = S^1$

A2) $U \cap U' \neq \emptyset$



Şekil 2.2.5

$0 < s < \frac{1}{2}$ için

$$\left(x' \circ x^{-1}\right)\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(x' \circ x^{-1}\right)(s)=s$$

olduğundan $x' \circ x^{-1}$ fonksiyonu özdeşlik fonksiyonu olup diffeomorfizmdir.

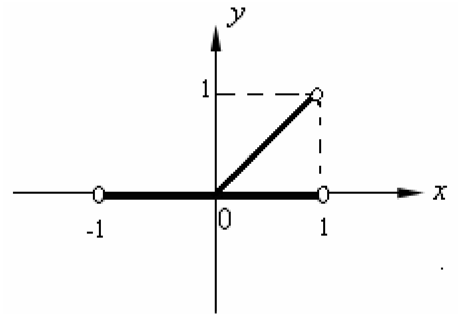
$\frac{1}{2} < s < 1$ için

$$\left(x' \circ x^{-1}\right)\left(\frac{1}{2},1\right)=\left(-\frac{1}{2},0\right) \Rightarrow \left(x' \circ x^{-1}\right)(s)=s-1$$

olduğundan $x' \circ x^{-1}$ polinom fonksiyonu olup diffeomorfizimdir.

O halde (U,x) ile (U',x') uyumludur. (A1) ve (A2) aksiyomları gereğince $A=\{(U,x),(U',x')\}$ S^1in bir C^∞ atlasıdır.

Örnek 2.2.2: $M=\{(s,0)\mid -1<s<1\}\cup\{(s,s)\mid 0<s<1\}$ cümlesi üzerinde

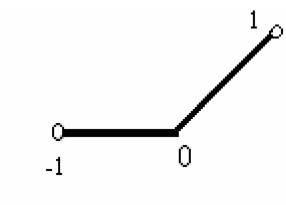


Şekil 2.2.6

$U=\{(s;0)\mid -1<s<1\}$

Şekil 2.2.7

$V=\{(s,0)\mid -1<s\leq 0\}\cup\{(s,s)\mid 0<s<1\}$



Şekil 2.2.8

$$\begin{aligned} x : U &\to IR \\ (s,0) &\to s \end{aligned}$$

H1) x, $1:1$

H2) $x(U)=(-1,1)\subset IR$ açık

olduğundan (U,x) M için 1-boyutlu bir haritadır.

$$\begin{aligned} y: V &\to IR \\ (s,0) &\to s \\ (s,s) &\to s \end{aligned}$$

H1) y, $1:1$

H2) $y(V)=(-1,1)\subset IR$ açık

olduğundan (V,y) M için 1-boyutlu bir haritadır.

$\{(U,x),(V,y)\}$ M için bir C^∞ atlas değildir. Çünkü

A1) $U\cup V=M$

A2) $U\cap V=\{(s,0)\mid -1<s\leq 0\}$

olup $x(U\cap V)=(-1,0]\subset IR$ dır. $Dom(y\circ x^{-1})$ açık olmadığından $y\circ x^{-1}$ sürekli değildir. O halde diferensiyellenebilirliğinden bahsedilemez. Dolayısıyla $y\circ x^{-1}$ diffeomorfizm değildir. (U,x) ve (V,y) haritaları uyumlu değildir. (A2) aksiyomu sağlanmadığından $\{(U,x),(V,y)\}$ M için bir C^∞ atlas değildir.

***Tanım 2.2.5*: **Bir M cümlesi üzerinde birden fazla C^∞ atlas tanımlanabilir. A_1 ve A_2 M üzerinde IR^n içine iki atlas olmak üzere $A_1\cup A_2$, M üzerinde bir C^∞ atlas ise A_1 ve A_2 atlaslarına denk atlaslar denir [1].

***Örnek 2.2.3*:** $S^1 = \{z \in IR^2 \mid |z| = 1\}$

$$U = \{(\sin 2\pi\, s, \cos 2\pi\, s) | 0 < s < 1\} |$$

$$\begin{aligned} x &: U \to IR \\ p &= (\sin 2\pi\, s, \cos 2\pi\, s) \to x(p) = s \end{aligned}$$

(U, x), S^1 için bir haritadır.

$$U' = \left\{ (\sin 2\pi\, s, \cos 2\pi\, s \mid -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} y &: U' \to IR \\ p &= (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \to y(p) = s \end{aligned}$$

(U', y), S^1 için bir haritadır.

$A_1 = \{(U, x), (U', y)\}$, S^1 için C^∞ atlastır.

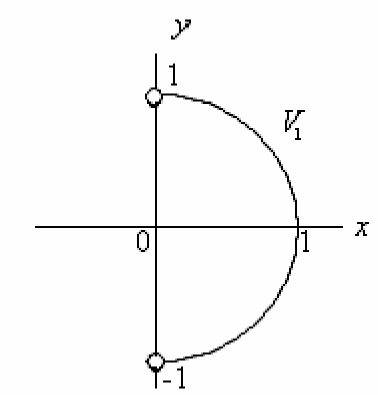
S^1 üzerinde bir A_2 atlası tanımlayıp A_1 ve A_2 atlaslarının

denk olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned} j &: S^1 \to IR^2 \\ (z_1, z_2) &\to j(z_1, z_2) = (z_1, z_2) \end{aligned}$$

doğal 1:1 dönüşümünü ele alalım.

$$V_1 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \mid z_1 > 0\} \subset S^1$$



Şekil 2.2.9

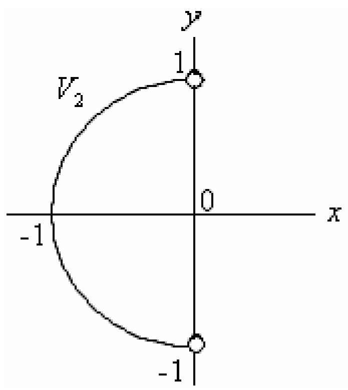
$$x_1 = P_2 \circ j|_{V_1} : V_1 \to (-1,1)$$
$$(z_1, z_2) \to z_2$$

H1) $x_1, 1:1$

H2) $x_1(V_1) = (-1,1) \subset IR$ açık

olduğundan (V_1, x_1) , S^1 için 1-boyutlu bir haritadır.

$$V_2 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \mid z_1 < 0)\} \subset S^1$$

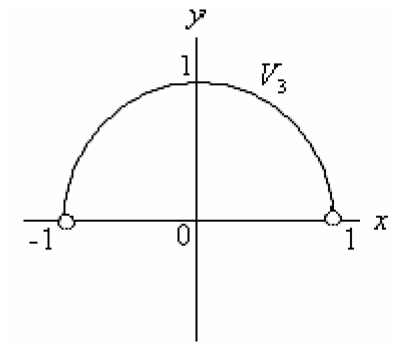


Şekil 2.2.10

$$x_2 = P_2 \circ j|_{V_2} : V_2 \to (-1,1)$$
$$(z_1, z_2) \to z_2$$

(V_2, x_2), S^1 için 1-boyutlu bir haritadır.

$$V_3 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \mid z_2 > 0)\} \subset S^1$$

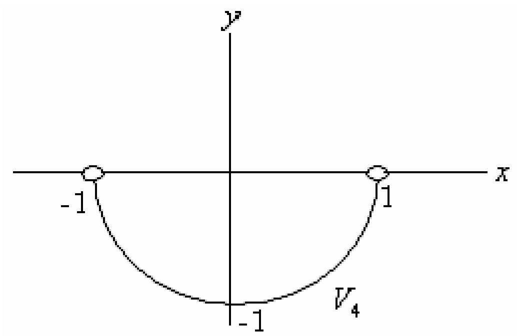


Şekil 2.2.11

$$x_3 = P_1 \circ j|_{V_3} : V_3 \to (-1,1)$$
$$(z_1, z_2) \to z_1$$

(V_3, x_3), S^1 için 1-boyutlu bir haritadır.

$$V_4 = \{(z_1, z_2) \in S' \mid z_2 < 0)\} \subset S^1$$



Şekil 2.2.12

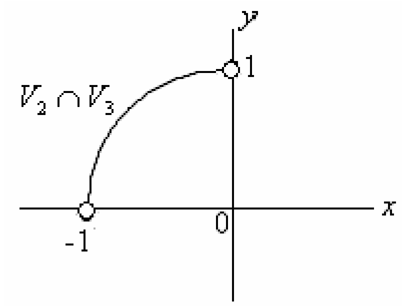
$$x_4 = P_1 \circ j|_{V_4} : V_4 \to (-1,1)$$
$$(z_1, z_2) \to z_1$$

(V_4, x_4), S^1 için 1-boyutlu bir haritadır.

$A_2 = \{(V_1, x_1), (V_2, x_2), (V_3, x_3), (V_4, x_4)\}$, S^1 için bir C^∞ atlasıdır. Gerçekten,

A1) $\bigcup_{i=1}^{4} V_i = S^1$

A2) $V_2 \cap V_3 \neq \emptyset$

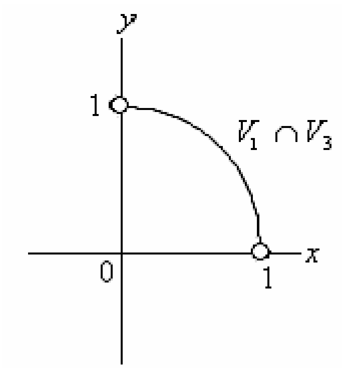


Şekil 2.2.13

$$x_2 \circ x_3^{-1} : x_3(V_2 \cap V_3) \to x_2(V_2 \cap V_3)$$
$$(-1,0) \to (0,1)$$
$$s \to x_2(x_3^{-1}(s)) = x_2((s, \sqrt{1-s^2}))$$
$$= \sqrt{1-s^2}$$

$x_2 \circ x_3^{-1}$ fonksiyonu polinom fonksiyonu olduğundan diffeomorfizmdir.

$V_1 \cap V_3 \neq \emptyset$



Şekil 2.2.14

$$
\begin{aligned}
x_1 \circ x_3^{-1} : x_3(V_1 \cap V_3) &\to x_1(V_1 \cap V_3) \\
(0,1) &\to (0,1) \\
s &\to x_1(x_3^{-1}(s)) = x_1((s, \sqrt{1-s^2})) \\
&= \sqrt{1-s^2}
\end{aligned}
$$

$x_1 \circ x_3^{-1}$ fonksiyonu polinom fonksiyonu olduğundan diffeomorfizmdir.

Benzer şekilde $x_2 \circ x_4^{-1}$, $x_1 \circ x_4^{-1}$ dönüşümleri de diffeomorfizmdir. A_2 de bulunan haritalar uyumludur. O halde A_2, S^1 için bir C^∞ atlastır. Şimdi A_1 ve A_2 nin denk atlaslar olduğunu göstereceğiz. Yani;

$$A_1 \cup A_2 = \{ \ (U,x),(U',x)\ (V_1,x_1), (V_2,x_2), (V_3,x_3), (V_4,x_4) \ \}$$

cümlesinin S^1 için bir C^∞ atlastır.

A1) $U \cup U' \cup (\bigcup_{i=1}^{4} V_i) = S^1$

A2) $x \circ x_1^{-1}, x \circ x_2^{-1}, x \circ x_3^{-1}, x \circ x_4^{-1}, y \circ x_1^{-1}, y \circ x_2^{-1}, y \circ x_3^{-1}, y \circ x_4^{-1}$

diffeomorfizmdir.

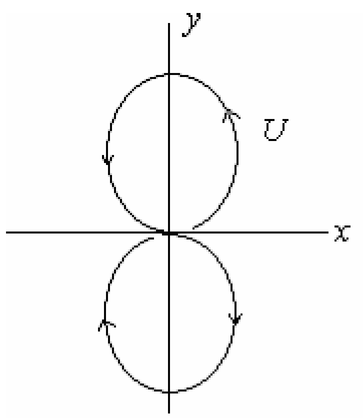
$$x_1 \circ x^{-1} : x(U \cap V_1) \to x_1(U \cap V_1)$$
$$(0, \frac{1}{2}) \to (-1,1)$$
$$s \to x_1(x^{-1}(s)) = x_1(\sin 2\pi\ s, \cos 2\pi\ s) = \cos 2\pi\ s$$

$x_1 \circ x^{-1}$ diffeomorfizmdir. Benzer şekilde diğerlerinin de diffeomorfizm olduğu gösterilebilir. O halde A_1 ile A_2 birbirine denktir. Bu denklik $A_1 \sim A_2$ ile gösterilir.

***Örnek 2.2.4*:** $E = \{(\sin 2s, \sin s) \mid s \in IR\}$

$$U = \{(\sin 2s, \sin s) \mid 0 < s < 2\pi\}$$

$$x : U \to IR$$
$$(\sin 2s, \sin s) \to s$$



Şekil 2.2.15

H1) $x ;1:1$

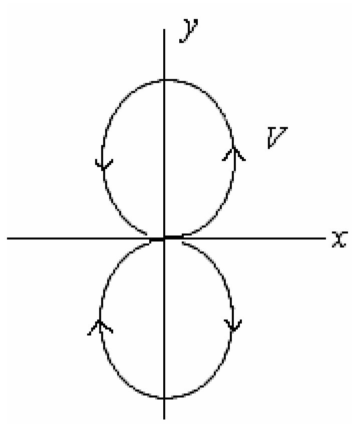
H2) $x(U) = (0,2\pi) \subset IR$, açık

(U, x) , E'nin 1-boyutlu haritasıdır.

$A_1 = \{(U, x)\}$, E'nin bir C^{∞} atlasıdır.

$V = \{(\sin 2s, \sin s) \mid -\pi < s < \pi\}$

$y : V \to IR$
$(\sin 2s, \sin s) \to s$



Şekil 2.2.16

H1) y, 1:1

H2) $y(V) = (-\pi, \pi) \subset IR$,açık

(V, y) , E'nin 1-boyutlu bir haritasıdır.

$A_2 = \{(V, y)\}$, E'nin bir C^{∞} atlasıdır.

$A_1 \cup A_2 = \{(U, x), (V, y)\}$ cümlesinin E için bir atlas olup olmadığını inceleyelim.

A1) $U \cup V = E$

A2) $U \cap V \neq \varnothing$

$$
\begin{aligned}
y \circ x^{-1} : x(U \cap V) &\to y(U \cap V) \\
(0,2\pi) &\to (-\pi,\pi) \\
s &\to (y \circ x^{-1})(s) = y(x^{-1}(s)) = y(\sin 2s, \sin s) = s \notin (-\pi,\pi)
\end{aligned}
$$

olduğundan fonksiyonu parçalı tanımlayacağız.

$$
(y \circ x^{-1})(s) = \begin{cases} s & , \quad 0 < s < \pi \\ s - \pi & , \quad s = \pi \\ s - 2\pi & , \quad \pi < s < 2\pi \end{cases}
$$

i) $y \circ x^{-1}$, 1:1

ii) $\lim\limits_{s \to \pi^+} (y \circ x^{-1})(s) = -\pi$

$\lim\limits_{s \to \pi^-} (y \circ x^{-1})(s) = \pi$

$y \circ x^{-1}(\pi) = 0$

olduğundan $s = \pi$ de sürekli değildir. $y \circ x^{-1}$, $s \in (0,2\pi)$ için diferensiyellenebilir değildir. O halde diffeomorfizm değildir. Dolayısıyla $(U,x),(V,y)$ haritaları uyumlu değildir. Öyleyse $A_1 \cup A_2$, E'nin C^∞ atlası değildir.

Tanım 2.2.6: M cümlesinin bir A, C^∞ atlası M'nin hiçbir atlası tarafından kapsanmıyorsa A atlasına M'nin bir tam atlası denir [1].

Teorem 2.2.1: M'nin IR^n içine herbir C^∞ atlası bir tek tam atlas içindedir [1].

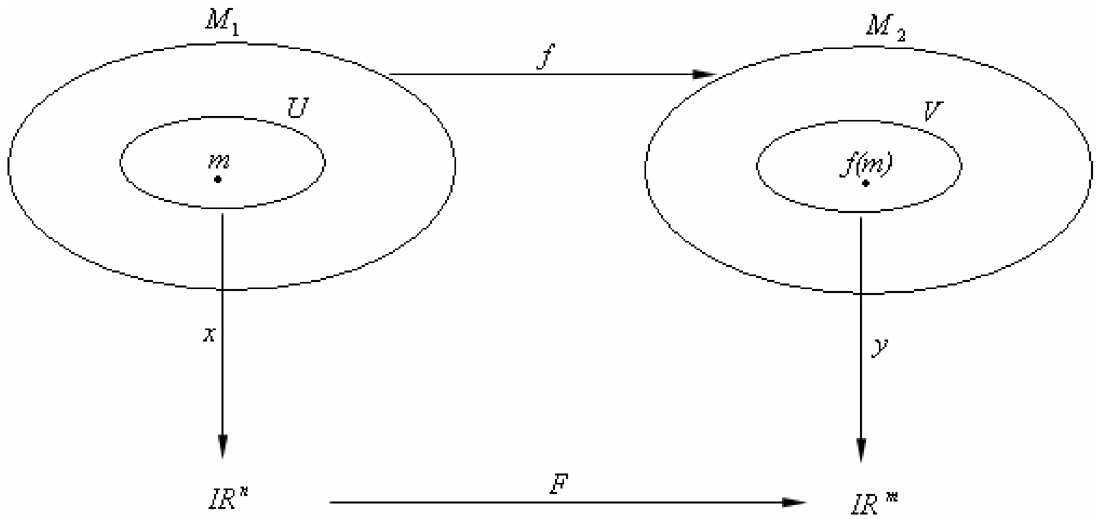
Tanım 2.2.7: Bir M cümlesinin IR^n içine bir C^∞ tam atlasına M 'de n-boyutlu bir C^∞ yapı denir [1].

Tanım 2.2.8: Verilen bir n-boyutlu bir C^∞ yapı ile birlikte M cümlesine bir n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir [1].

Bundan sonra diferensiyellenebilir kavramı kısaca dif.bilir olarak ifade edilecektir.

2.3. Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

M_1, n-boyutlu M_2, m-boyutlu dif.bilir manifoldlar olsun. Bir $f: M_1 \to M_2$ fonksiyonunun dif.bilirliğini tanımlayacağız. (U, x) ve (V, y) sırasıyla M_1 ve M_2'de birer harita olsun.



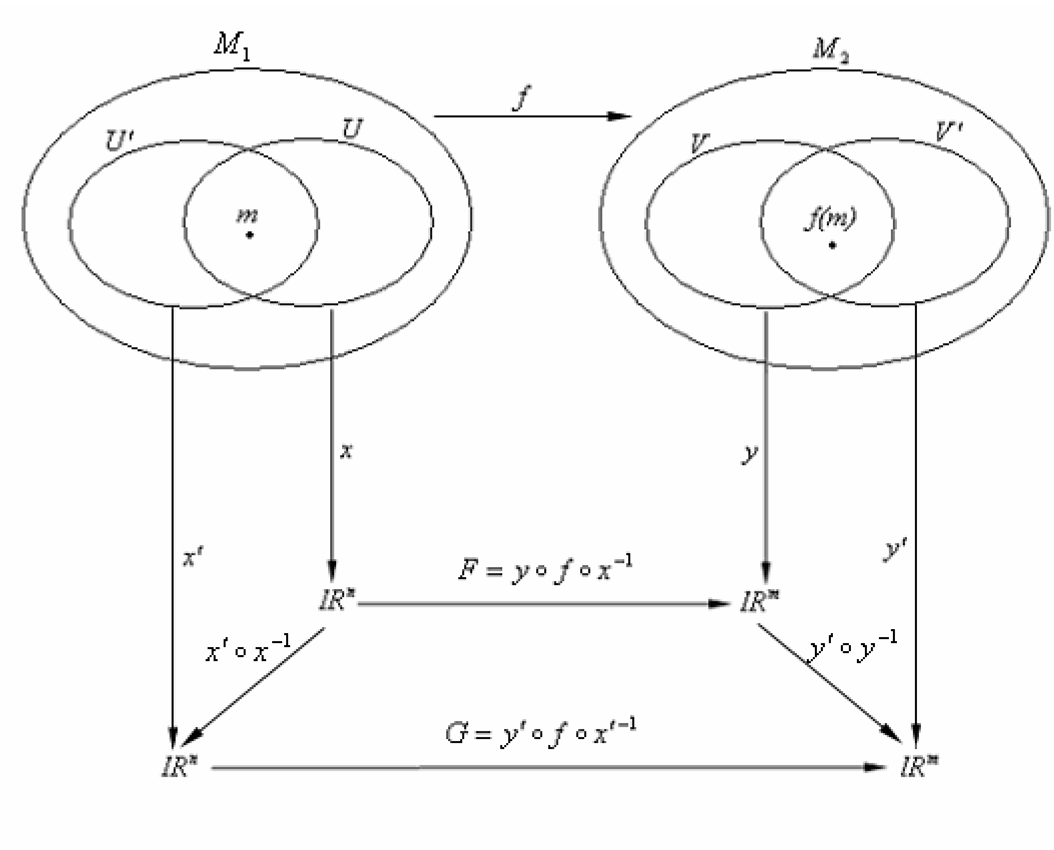
Şekil 2.3.1

$F = y \circ f \circ x^{-1}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun bir koordinat temsilcisi denir. Eğer F, $x(m) \in IR^n$ de dif.bilir ise f ’ye $m \in U \subset M_1$ ’de dif.bilirdir denir. [1]

***Teorem 2.3.1*:** M_1 ve M_2 sırasıyla n ve m-boyutlu dif.bilir manifoldlar, $f : M_1 \to M_2$ bir fonksiyon ve $m \in Domf$ olsun. f ’nin m ’deki dif.bilirliği seçilen haritalardan bağımsızdır.

***İspat*:** $(U, x), (U', x')$, M_1 ’de m ’yi kapsayan haritalar,

$(V, y), (V', y'), M_2$ ’de $f(m)$ ’yi kapsayan haritalar olsun.



Şekil 2.3.2

$$F = y \circ f \circ x^{-1}$$

F, $x(m)$'de dif.bilir ise G'de $x'(m)$'de dif.bilirdir.

$$G = (y' \circ y^{-1}) \circ F \circ (x' \circ x^{-1})$$

(U, x) ve (U', x'), M_1'de haritalar ve $U \cap U' \neq \emptyset$ olduğunda uyumludurlar. O halde $x' \circ x^{-1}$ diffeomorfizmdir. Benzer şekilde $y' \circ y^{-1}$ de diffeomorfizmdir.

$x' \circ x^{-1}, (y' \circ y^{-1})$ ve F, dif.bilir olduğundan

$$G = (y' \circ y^{-1}) \circ F \circ (x' \circ x^{-1})$$

de dif.bilirdir.

Tanım 2.3.1**:** M_1, M_2 dif.bilir manifoldlar ve $f : M_1 \to M_2$ bir dif.bilir fonksiyon olsun. Eğer f, $1:1$ ve f^{-1} de dif.bilir ise f'ye bir diffeomorfizm adı verilir.

Eğer f bir global diffeomorfizm (Yani $Domf = M_1, rangef = M_2$) ise M_1 ve M_2'ye diffeomorfiktirler denir. [1]

Örnek 2.3.1**:** $M_1 = M_2 = IR$ olsun.

$$\begin{aligned} x : M_1 &\to IR \\ s &\to s \end{aligned}$$

$A_1 = \{(IR, id)\}$ bir atlastır. Bu atlasın oluşturduğu dif.bilir manifold M_1 olsun.

$$\begin{aligned} y = M_2 &\to IR \\ s &\to s^3 \end{aligned}$$

$A_2 = \{IR, y)\}$ bir atlastır. Bu atlasın oluşturduğu dif.bilir manifold M_2 olsun. A_1 ile A_2 denk değildir. Denk olması için $A_1 \cup A_2$ bir atlas olmalıdır. Fakat

$$x \circ y^{-1} : y(IR) = IR \to x(IR) = IR$$
$$s \to \sqrt[3]{s}$$

dönüşümü $s = 0$ da türevlenemezdir. O halde $x \circ y^{-1}$ dif.bilir değildir. $x \circ y^{-1}$ diffeomorfizm değildir. (IR, x) ve (IR, y) haritaları uyumlu olmayıp $A_1 \cup A_2$, IR için bir atlas değildir.

Şimdi M_1 ve M_2'nin diffeomorfik olduğunu göstereceğiz.

$$f : M_1 \to M_2$$
$$s \to \sqrt[3]{s}$$

$$F(s) = (y \circ f \circ x^{-1})(s) = (y \circ f)((x^{-1}(s)) = (y \circ f)(s) = y(\sqrt[3]{s}) = s$$

olduğundan $F = id$ olup F, IR'de dif.bilirdir. f, M_1'de dif.bilirdir. F 1:1 olduğundan f 1:1 dir.

$$G = id \circ f^{-1} \circ y^{-1} = f^{-1} \circ y^{-1}$$

olmak üzere

$$G(s) = (f^{-1} \circ y^{-1})(s) = f^{-1}(\sqrt[3]{s}) = s$$

eşitliğinden $G = id$ olup G, IR'de dif.bilirdir. f^{-1} de M_2'de dif.bilirdir. G, 1:1 olduğundan f^{-1} de 1:1 dir.

Sonuç olarak $f : M_1 \to M_2$ bir diffeomorfizmdir. f, global olduğundan M_1 ve M_2, diffeomorfiktirler.

2.4. Bir Manifold Üzerinde İndirgenmiş Topoloji

***Teorem 2.4.1*:** (M, A) $n-$boyutlu bir dif.bilir manifold olsun (Yani M, A C^∞ atlasından elde edilen bir manifold). $\forall (U, x) \in A$ için $W \subset U \ni x(W) \subseteq IR^n$ açık ise $(W, x|_W) \in A$ dır.

***İspat*:** (U, x) harita olduğundan $x, 1:1$dir. Dolayısıyla $x|_W$ de $1:1$ dir. Aynı zamanda $x(W) \subset x(U) \subset IR^n$ olduğundan $x(W) \subset IR^n$ dır. O halde $(W, x|_W)$, M de bir haritadır.

$(W, x|_W) \in A$ olduğunu göstereceğiz .Bunun için $\forall (V, y) \in A$, $V \cap W \neq \varnothing$, $y \circ x|_W^{-1}$ ve $x|_W \circ y^{-1}$ dönüşümlerinin dif.bilir olduğunu göstereceğiz. $V \cap W \neq \varnothing$ ve $W \subset U$ olduğundan $U \cap V \neq \varnothing$ dır. $(U, x), (V, y) \in A$ olduğundan $y \circ x^{-1}$ ve $x \circ y^{-1}$ dönüşümleri dif.bilirdir.

$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ diffeomorfizm olduğundan

$y \circ x^{-1} |_{x(W \cap V)} : x(W \cap V \to y(W \cap V)$ diffeomorfizmdir.

$y \circ x|_W^{-1} : x(W \cap V \to y(W \cap V)$ diffeomorfizmdir.O halde $(W, x|_W) \in A$ dır.

Teorem 2.4.2: *M* bir dif.bilir manifold ve *M*'nin bir tam atlası A^t olsun. *M*'de bu tam atlastaki haritaların tanım cümlelerinden oluşan aile *M* cümlesi üzerinde bir topoloji için bir baz oluşturur.

İspat: $A^t = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}$ olmak üzere $\mathcal{B} = \{U_i \mid i \in I\}$ cümlesinin *M* cümlesi üzerindeki bir topoloji için baz oluşturduğunu göstereceğiz.

i) A^t, *M* için bir atlas olduğundan $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ dir.

ii) $\forall (U,x),(V,y) \in A^t, U \cap V \neq \varnothing$ verilsin. $\exists i \in I$, $(U_i, x_i) \in A^t$ için $U \cap V = \bigcup_{i \in I} U_i$ olduğunu göstereceğiz.

$(U,x),(V,y) \in A^t$ olduğundan $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$ diffeomorfizmdir. Aynı zamanda sürekli olduğundan $x(U \cap V) \subseteq IR^n$ açıktır. Ayrıca $U \cap V \subset U$ ve $x(U \cap V)$ açık olduğundan Teorem 2.3.1 gereğince $(U \cap V, x|_{U \cap V}) \in A^t$ dır. $U \cap V \in \mathcal{B}$ dir.

O halde $\mathcal{B} = \{U_i \mid i \in I\}$ cümlesi *M* cümlesi üzerindeki bir topoloji için baz oluşturur.

Tanım 2.4.1: *M* tam atlası A^t olan bir dif.bilir manifold olsun. *M*'de bu tam atlastaki haritaların tanım cümlelerinden oluşan aileyi baz kabul eden topolojiye M'nin A^t'dan indirgediği veya C^∞ yapıdan indirgediği topoloji denir ve τ_C yada τ_A ile gösterilir. [1]

Örnek 2.4.1: $A = \{(IR, id)\}$, $M = IR$ için bir C^∞ atlastır.

$(a,b) \subseteq IR$ bir açık aralık olsun, $x = id$ için $x((a,b)) = (a,b)$ IR'de bir açık aralık olduğundan $\left((a,b), id|_{(a,b)}\right) \in A^t$ dır.

$$A^t = \left\{(IR, id), ((a,b), id|_{(a,b)}) \middle| a,b \in IR\right\}$$

$$A^t = \left\{(U, id|_U) \middle| U \subseteq IR\right\} \text{ (Burada } U \subseteq IR \text{ açık)}$$

$$B = \left\{U \subset IR \middle| (U, id|_U) \in A^t\right\}$$

B'yi baz kabul eden topoloji IR'in standart topolojisidir. Ayrıca B'yi baz kabul eden topoloji IR'in C^∞ yapısından indirgediği topolojidir.

Sonuç olarak IR'in $A = \{(IR, id)\}$ atlasından indirgediği topoloji ile IR'in standart topolojisi çakışır.

***Teorem 2.4.3*:** M, A C^∞ atlasıyla verilen *n*- boyutlu bir dif.bilir manifold olsun. τ_C, M'in C^∞ yapısından indirgenen topoloji olmak üzere $\forall (U,x) \in A$ için $x : U \to IR^n$ haritası bir τ_C-homeomorfizmdir. [1]

***Teorem 2.4.4*:** *M* ile M' dif.bilir manifoldlar ve $f : M \to M'$ bir fonksiyon olsun. Eğer bir $m \in M$ noktasında *f* dif.bilir ise $m \in M$'de *f* süreklidir. [1]

***Sonuç 2.3.1*:** $f : M \to M'$ sürekli ise *f*'in tanım aralığı *M*'de bir açık aralıktır. [1]

Bir topolojik uzay üzerinde bir manifold tanımlandığında topolojik uzaydaki topoloji ile manifoldun indirgenmiş topolojisi arasındaki ilişki aşağıdaki teoremle verilebilir:

***Teorem 2.4.5*:** M, A C^∞ atlasıyla verilen *n*- boyutlu bir dif.bilir manifold olmak üzere (M, τ) bir topolojik uzay ve *M* manifoldunun C^∞ yapıdan indirgediği topoloji τ_C olsun. Bu durumda $\tau = \tau_C$ olması gerek ve yeter şart *M* bir A atlasının haritaları τ, homeomorfizmdir. [1]

Örnek 2.4.2: *M*, *n*-boyutlu bir dif.bilir manifold ve $M' \subset M$ açık olsun. $\forall (U, x) \in A$ için

$$j : M' \to M$$
$$p \to j(p) = p$$

olmak üzere $(U \cap M', x' = x \circ j)$, M''nin bir haritasıdır.

$$x : M \to IR^n \quad , \quad x' : M' \to IR^n$$

dönüşümleri ile

H1) $x \circ j$, 1:1

H2) $(x \circ j)(U \cap M')$, IR^n'de bir açıktır.

$A' = \{(U \cap M', x') \mid (U, x) \in A\}$ olsun. A' de bir atlastır.

A1) $\bigcup_{U \in M} U \cap M' = M'$

A2) $\forall x', y'$ haritaları için

$$x' \circ (y')^{-1} = (x \circ j) \circ (y \circ j)^{-1} = (x \circ j) \circ (j^{-1} \circ y^{-1}) = x \circ y^{-1}$$

olduğundan $x' \circ (y')^{-1}$ diffeomorfizmdir.

$A' = \{(U \cap M', x') \mid (U, x) \in A\}$ bir C^∞ atlastır.

Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 2.4.2: $A' = \{(U \cap M', x') \mid (U, x) \in A\}$, C^∞ atlası ile birlikte verilen M' manifolduna *M'*nin bir açık alt manifoldu denir [1].

Teorem 2.4.6: *M* bir kompakt uzay ise tek haritalı atlası ile tanımlı bir C^∞ yapısı yoktur [1].

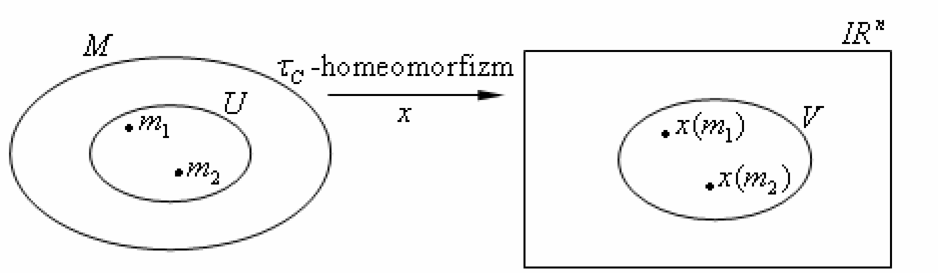
2.4.1. İndirgenmiş Topolojinin Bazı Özellikleri

***Teorem 2.4.1.1*:** Bir dif.bilir manifold üzerinde indirgenmiş topoloji T_1 aksiyomunu sağlar.

***İspat*:** (M,τ_C) M manifoldu üzerinde indirgenmiş topoloji olsun.

$\tau_{C,}\ T_1$ aksiyomunu sağlar. $\Leftrightarrow$ $\forall m_{1,}m_2 \in M, m_1 \neq m_2$ için $\exists U \in N(m_1)$ ve $\exists V \in N(m_2) \ni m_1 \notin V, m_2 \notin U$ dir.

$\forall m_1, m_2 \in M$ için $m_1 \neq m_2$ olmak üzere ya m_1 ile m_2 nin ikisi de aynı haritadadır ya da farklı haritalardır. Eğer m_1 ile m_2 aynı haritada ise $(U,x) \in A$ için $m_1 \in U, m_2 \in U$ dır. $x(U) = V \subseteq IR^n$ diyelim.



Şekil 2.4.1.1

x süreklidir. x 1:1 olduğundan $m_1 \neq m_2$ iken $x(m_1) \neq x(m_2)$ dir. IR^n de T_2 aksiyomu sağladığından $\exists V_1 \in N(x(m_1)), \exists V_2 \in N(x(m_2))$ için $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ dır. x sürekli olduğundan

$$x^{-1}(V_1) = U_1 \in \tau_C \ . \ni m_1 \in U_1 \text{ ve } x^{-1}(V_2) = U_2 \in \tau_C \ni m_2 \in U_2$$

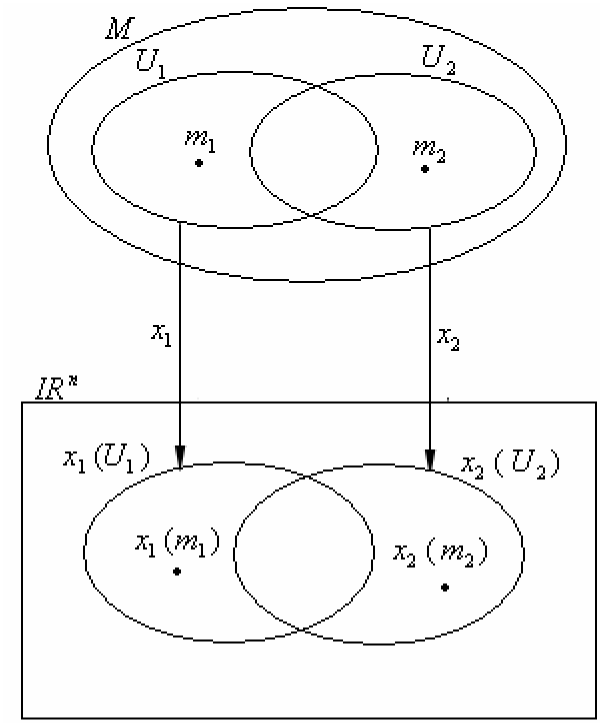
dir.

$$x^{-1}(V_1) \cap x^{-1}(V_2) = x^{-1}(V_1 \cap V_2) = x^{-1}(\varnothing) = \varnothing$$

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing$$

T_2 aksiyomu sağlanır. Bu durumda T_1 aksiyomu da sağlanır.

Eğer m_1 ile m_2 aynı harita değilse



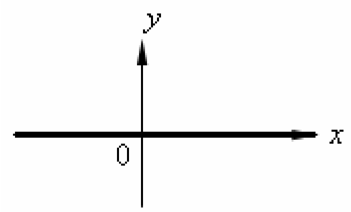
Şekil 2.4.1.2

$$(U_1, x_1) \in A \ni m_1 \in U_1 \in \tau_C \Rightarrow U_1 \in N(m_1)$$
$$(U_2, x_2) \in A \ni m_2 \in U_2 \in \tau_C \Rightarrow U_2 \in N(m_2)$$

$m_2 \notin U_1$ ve $m_1 \notin U_2$ dir. O halde (M, τ_C) uzayında T_1 aksiyomu sağlanır.

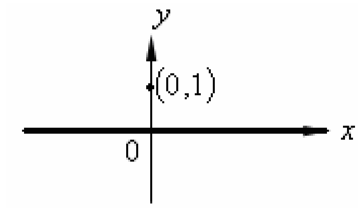
Fakat dif.bilir bir manifold üzerindeki indirgenmiş topoloji T_2 aksiyomunu sağlamak zorunda değildir. Bunu aşağıdaki örnekle görebiliriz:

Örnek 2.4.1.1: $U = \{(s,0) \,|\, s \in IR\}$



Şekil 2.4.1.3

$$H = U \cup \{(0,1)\}$$



Şekil 2.4.1.4

cümlelerini ele alalım.

$$U_1 = \{(s,0) \mid s \in IR, s \neq 0\} \cup \{(0,1)\}$$

$$x : U \to IR$$
$$(s,0) \to x((s,0)) = s$$

$$x_1 : U_1 \to IR$$
$$(s,0) \to x_1((s,0)) = s \neq 0 \ , \ x_1((0,1)) = 0$$

dönüşümleriyle $(U, x), (U_1, x_1)$ H'da iki haritadır.

A1) $U \cup U_1 = H$ dır.

A2) $U \cap U_1 = \{(s,0) \mid s \in IR, s \neq 0\}$ olup

$$x_1 \circ x^{-1} : x(U \cap U_1) = IR - \{0\} \to x_1(U \cap U_1) = IR - \{0\}$$
$$s \to (x_1 \circ x^{-1})(s) = s$$

$x_1 \circ x^{-1} = id$ ve $x \circ x_1^{-1} = id$ dönüşümleri dif.bilirdir. O halde $(U, x), (U_1, x_1)$ haritaları uyumludur. $\{(U, x), (U_1, x_1)\}$, H'ın bir C^∞ atlasıdır.

H, bu C^∞ yapıdan indirgediği topolojiye göre Hausdorff değildir. Gerçekten, $m_1 = (0,0) \in U, m_2 = (0,1) \in U_1$, $m_1 \neq m_2$ için $V \in N(m_1)$, $W \in N(m_2)$ olsun.

$x(V \cap U) \subset IR$, açık ve $(V \cap U, x|_{V \cap U})$, H için bir haritadır. Üstelik $0 \in x(V \cap U)$dır.

$x_1(W \cap U_1) \subset IR$, açık ve $(W \cap U_1, x_1|_{W \cap U_1})$, H için bir haritadır. Yine $0 \in x_1(W \cap U_1)$dır.

$a \neq 0$ olmak üzere $\exists (a,0) \in V \cap U$ ve $(a,0) \in W \cap U_1$ $\ni$ $(a,0) \in W \cap V$ ve $W \cap V \neq \varnothing$ dır. O halde *H*, Hausdorff değildir.

***Teorem 2.4.1.2*: **Bir dif.bilir manifold üzerindeki indirgenmiş topoloji sayılabilirliğin 1. aksiyomunu sağlar.

***İspat*: ***M* bir dif.bilir manifold olsun. $\forall m \in M$ için $m \in U$ olacak şekilde (U, x) haritası vardır. IR^n metrik uzay ve her metrik uzay sayılabilirliğin 1.aksiyomunu sağladığından, $x(m) \in x(U) \subset IR^n$'de sayılabilir bir $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ bazı vardır. Çünkü W, $m \in M$'in herhangi bir komşuluğu ise $m \in W \cap U$ açık $x(m) \in x(W \cap U) \subset IR^n$ açık $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}, x(m)$'de baz olduğundan $\exists V_i \subset x(W \cap U)$ dır. Böyleyse

$$x^{-1}(V_i) \subset W \cap U \subset W \Rightarrow \{x^{-1}(V_1), x^{-1}(V_2), \ldots, x^{-1}(V_n)\}$$

sayılabilirdir. O halde *M*, 1. sayılabilirdir.

***Teorem 2.4.1.3*: **İndirgenmiş topolojisine göre bir dif.bilir manifold lokal irtibatlıdır.

İspat: *M* bir dif.bilir manifold olsun $\forall m \in M$ için $m \in U$ olacak şekilde (U, x) haritası vardır. $x(m) \in x(U) \subset IR^n$ açık olduğundan $x(m) \in B(x(m), \rho) \subset x(U)$ olacak şekilde $\rho > 0$ vardır. $B(x(m), \rho) = \{y \in IR \mid d(x(m), y) < \rho\}, IR^n$ irtibatlı olduğundan $B(x(m), \rho)$, $x(m)$'nin bir irtibatlı komşuluğudur. Böyle ise x sürekli olduğundan $\underbrace{x^{-1}(B(x(m), \rho))}_{\in N(m)} \subset U \subset M$ irtibatlıdır.

O halde $\forall m \in M$ noktasının bir irtibatlı komşuluğu vardır. Öyleyse M lokal irtibatlıdır.

***Tanım 2.4.1.1*:** Bir M manifoldu üzerindeki indirgenmiş topoloji T_2 ayırma aksiyomunu sağlar ise M manifolduna Hausdorff manifoldu denir. [1]

***Örnek 2.4.1.2*:** IR^n bir Hausdorff manifoldudur.

***Örnek 2.4.1.3*:** IR^n'nin her alt manifoldu bir Hausdorff manifoldudur.

***Teorem 2.4.4*:** Her bir Hausdorff manifoldu lokal kompakttır.

İspat: M bir Hausdorff manifoldu olsun. $\forall m \in M$ noktasının $m \in U$ olacak şekilde (U, x) haritası vardır. IR^n lokal kompakt olduğundan *x(m)* merkezli bir V_m açık yuvarı vardır ve $\overline{V}_m$ kompakttır.

$$V_m = B(x(m), \rho) = \{y \in IR^n \,|\, d(x(m), y) < \rho\}$$

$$\overline{V}_m = \{y \in IR^n \,|\, d(x(m), y) \leq \rho\}$$

$$\overline{V}_m \subset x(U)$$

dır. O halde $x(m) \in V_m \subset \overline{V}_m \subset x(U)$ dır.

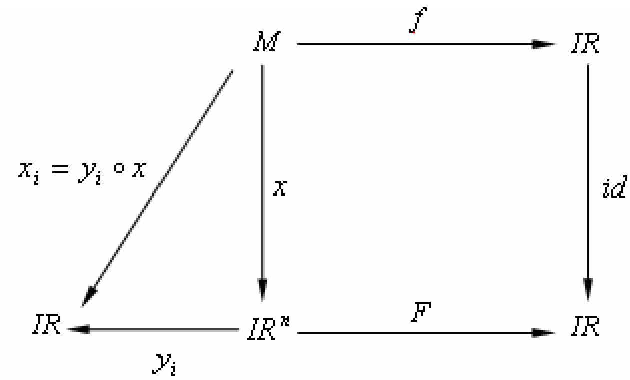
$x^{-1}(V_m) = U_m$'in m'in bir komşuluğu ve $\overline{U}_m$'in kompakt olduğunu göstereceğiz.

x^{-1} sürekli olduğundan $x^{-1}(\overline{V}_m) \subset \overline{x^{-1}(V_m)} = \overline{U}_m, \overline{V}_m \subset IR^n$ kompakt ise $x^{-1}(\overline{V}_m) \subset U$ dır.

M Hausdorff uzayının kompakt alt cümlesi olduğundan kapalıdır. $\overline{U}_m, U_m$'yi kapsayan kapalıların arakesiti olduğundan $x^{-1}(\overline{V}_m) = \overline{U}_m$ dır. $x^{-1}(\overline{V}_m)$ kompakt olduğundan $\overline{U}_m$ kompaktdır. Dolayısıyla (M, τ_c) lokal kompakttır.

2.5. Bir Manifold Üzerinde Türev

M bir difbilir manifold, *A* *M*'nin bir C^{∞} atlası olmak üzere dif.bilir fonksiyonu için *Domf*=*V* ve $(U,x) \in A$ olsun. $U \cap V$ üzerinde $f = F \circ x$ olacak şekildeki bir *F* fonksiyonu (yani *f*'in koordinat temsilcisi) için *F* difbilir ise *f* de difbilirdir. y_i, IR^n'nin *i*. koordinat fonksiyonu olmak üzere



Şekil 2.5.1

F difbilir ise

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} : x(U \cap V) \subset IR^n \to IR$$

fonksiyonları mevcut ve süreklidir.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \circ x : U \cap V \subset M \to IR$$

$\frac{\partial F}{\partial y_i}$'ler $\frac{\partial f}{\partial x_i}$'lerin koordinat temsilcisidir. $\forall \frac{\partial F}{\partial y_i}$ difbilir olduğundan $\forall \frac{\partial f}{\partial x_i}$'de difbilirdir. O halde *f* de dif.bilirdir.

***Tanım 2.5.1*:** $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \circ x$ fonksiyonuna *f* fonksiyonunun *i*. kısmi türevi denir [1].

***Teorem 2.5.1*:** M bir difbilir manifold $f: M \to IR$, $g: M \to IR$ difbilir fonksiyonlar ve $a, b \in IR$ olsun. Bu durumda

$$i)\ \frac{\partial}{\partial x_i}(af + bg) = a\frac{\partial f}{\partial x_i} + b\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$ii)\ \frac{\partial}{\partial x_i}(f.g) = \frac{\partial f}{\partial x_i}.g + f\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

dır [1].

2.5.1. Tanjant Vektörler

M, n-boyutlu bir dif.bilir manifold ve $m \in M$ olsun. M üzerinde tanım cümleleri m'yi kapsayan $f: M \to IR$ dif.bilir fonksiyonlarının cümlesi $\Im(m)$ olsun

$$\Im(m) = \left\{ f \,\middle|\, f: M \xrightarrow{difbilir} IR, m \in Domf \right\}$$

şeklinde tanımlı cümle üzerinde tanımlı toplama ve skalar çarpma işlemleri ile birlikte bir reel vektör uzayı oluşturur.

$$\begin{aligned} + : \Im(m) \times \Im(m) &\to \Im(m) \\ (f, g) &\to f + g : M \xrightarrow{difbilir} IR \\ &\qquad p \to (f + g)(p) = f(p) + g(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \dot{I}R \times \Im(m) &\to \Im(m) \\ (\lambda, f) &\to \lambda.f : M \xrightarrow{difbilir} IR \\ &\qquad p \to (\lambda.f)(p) = \lambda.f(p) \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \bullet : \Im(m) \times \Im(m) &\to \Im(m) \\ (f, g) &\to f \bullet g : M \xrightarrow{difbilir} IR \\ &\qquad p \to (f \bullet g)(p) = f(p).g(p) \end{aligned}$$

iç işlemiyle birlikte $\Im(m)$ bir reel cebirdir.

***Tanım 2.5.1.1*:** $\Im(m)$'de tanımlı bir *IR*-lineer fonksiyona $\Im(m)$'de bir lineer operatör denir [1].

$$L : \Im(m) \xrightarrow{lineer} IR$$
$$f \to L(f)$$

$$\forall a, b \in IR, \forall f, g \in \Im(m) \text{için}\, L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$$

***Teorem 2.5.1.1*:** $\Lambda, \Im(m)$**'**de bir lineer operatör ve $f, g \in \Im(m)$ olsun. *M'*nin enaz bir komşuluğunda $f = g$ ise $\Lambda(f) = \Lambda(g)$ dir [1].

***Tanım 2.5.1.2*:** $\Lambda : \Im(m) \to IR$ bir lineer operatör ve

$$\forall f, g \in \Im(m) \text{ için } \Lambda(f \cdot g) = \Lambda(f) \cdot g + f \cdot \Lambda(g)$$

ise Λ'ye $\Im(m)$'nin bir türevi denir [1].

***Teorem 2.5.1.2*:** $\Lambda, \Im(m)$**'**de bir türev ve $f \in \Im(m)$ olsun. *f,m'*in en az bir komşuluğunda sabit ise $\Lambda(f) = 0$ dır [1].

***Tanım 2.5.1.3*:** *M* bir dif.bilir manifold, $m \in M$ olsun.

$$T_m M = \{\Lambda \mid \Lambda, \Im(m)\text{'nin türevi}\}$$

cümlesini göz önüne alalım. Bu cümle üzerinde tanımlı toplama ve skalar çarpma işlemleriyle birlikte bir reel vektör uzayıdır.

$$+ : T_m M \times T_m M \to T_m M$$
$$(\Lambda, \Omega) \to \Lambda + \Omega : \Im(m) \to IR$$
$$f \to (\Lambda + \Omega)(f) = \Lambda(f) + \Omega(f)$$

$$\cdot : IR \times T_m M \to T_m M$$
$$(\lambda, \Lambda) \to \lambda \cdot \Lambda : \Im(m) \to IR$$
$$f \to (\lambda \cdot \Lambda)(f) = \lambda \cdot \Lambda(f)$$

$T_m M$ vektör uzayına *M*'nin *m* noktasındaki tanjant uzayı denir. $T_m M$'nin elemanlarına da *m* noktasındaki tanjant vektörleri denir [1].

***Örnek 2.5.1.1*:** $\vec{v}$ **,** IR^3 'de bir z noktasında bir vektör olsun.

$$\vec{v} : \Im(z) \to IR$$
$$f \to \vec{v}(f) = \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i}|_z$$

şeklinde tanımlanan $\vec{v}$ **,** $\Im(z)$ 'de türevdir. Gerçekten,

i) $\vec{v}$ **,** *IR*-lineerdir:

$\forall a, b \in IR, \forall f, g \in \Im(z)$ için

$$\begin{aligned}\vec{v}(af + bg) = \vec{v}(af + bg) &= \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \frac{\partial (af_i + bg_i)}{\partial x_i}|_z \\ &= \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \left[\frac{a\partial(f_i) + b\partial(g_i)}{\partial x_i}|_z\right] \\ &= a\sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i}|_z + b\sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i}|_z \\ &= a\vec{v}(f) + b\vec{v}(g)\end{aligned}$$

ii) $\vec{v}$ **,** Leibniz şartını sağlar:

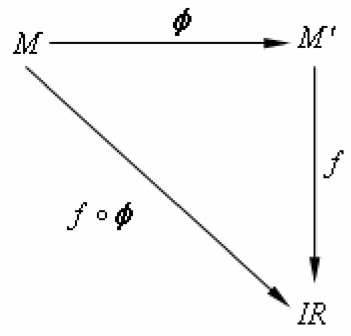
$\forall f, g \in \Im(z)$ için

$$\begin{aligned}\vec{v}(fg) &= \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \frac{\partial (fg)}{\partial x_i}|_z \\ &= \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)|_z\right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i}|_z\right) \cdot g|_z + f|_z \cdot \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i}|_z \\ &= \vec{v}(f) \cdot g + f \cdot \vec{v}(g)\end{aligned}$$

***Teorem 2.5.1.3*:** M n-boyutlu bir dif.bilir manifold, $m \in U \subset M$ olmak üzere $(U, x) \in A$ ise $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_m, \frac{\partial}{\partial x_2}|_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_m\right\}$, $T_m M$ 'nin bir bazıdır [1].

2.5.2. Türetilmiş Lineer Fonksiyonlar

M ve M' dif.bilir manifoldlar $\phi : M \to M'$ dif.bilir fonksiyon olsun. $m \in Dom\phi$ ve $\phi(m) = m'$ olmak üzere



Şekil 2.5.2.1

$f \in \Im(m') \;\Rightarrow\; f \circ \phi \in \Im(m)$

$\varphi \in T_m M$ için

$$\begin{aligned} \varphi : \Im(m) &\to IR \\ f \circ \phi &\to \varphi(f \circ \phi) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir ve Leibniz şartını sağlar. O halde φ, $\Im(m)$'de bir türevdir.

$$\begin{aligned} \phi_{*_m} : T_m M &\to T_{m'} M' \\ \varphi &\to \phi_{*m}(\varphi) : \Im(m') \to IR \\ & \qquad f \to (\phi_{*m}(\varphi))(f) = \varphi(f \circ \phi) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm de lineerdir ve Leibniz şartını sağlar. Bu φ_{*_m} dönüşümüne $T_m M$ üzerinde "ϕ'nin türetilmiş lineer fonksiyonu" veya "ϕ'den türetilmiş m'deki fonksiyonu" veya "ϕ'nin m'deki türev dönüşümü" denir.

φ_{*_m} lineer olduğundan buna bir matris karşılık gelir. Şimdi bu matrisi yani Jakobiyen matrisi bulacağız.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "x"'] & M' \arrow[d, "y"] \\ IR^n \arrow[r, "\Phi = y \circ \phi \circ x^{-1}"'] & IR^{n'} \end{tikzcd}$$

x , $m \in M$ ve y, $\phi(m) = m'$ 'de haritalar olmak üzere

$$\phi_{*_m} : T_m M \to T_{m'} M'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_m \to \phi_{*_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_m\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}|_m \left(y_j \circ \phi\right)\frac{\partial}{\partial y_j}|_{\phi(m)}$$

φ_{*_m} 'ye karşılık gelen matris yani Jakobiyen matris $J(\phi, m)$ ile gösterilirse

$$J(\phi, m) = \left[\phi_{*_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}|_m\right), \phi_{*_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}|_m\right), \ldots, \phi_{*_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n1}}|_m\right)\right]_{n' \times n}$$

$$J(\phi, m) = \left[\frac{\partial (y_j \circ \phi)}{\partial x_i}|_m\right]_{n' \times n} \in IR_n^{n'} \text{ dir.}$$

Teorem 2.5.2.1: M, M' ve M'' dif.bilir manifoldlar, $\phi : M \to M'$ ve $\psi : M' \to M''$ dif.bilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$(\psi \circ \phi)_{*m} = \psi_{*_{\phi(m)}} \circ \phi_{*_m}$$

dır [1].

Tanım 2.5.2.1: M, M' dif.bilir manifoldlar, $\phi : M \to M'$ dif.bilir bir fonksiyon olsun. $\forall m \in M$ için $rank\phi_{*_m} = rank\phi|_m$ olarak tanımlanır [1].

Teorem 2.5.2.2: : M, M' ve M'' dif.bilir manifoldlar, $\phi : M \to M'$ ve $\psi : M' \to M''$ dif.bilir fonksiyonlar olsun.

1) $rank\phi|_m = boyM \Leftrightarrow çek\phi_{*_m} = \{0\} \Leftrightarrow \phi_{*_m}$, 1:1 dir.

2) $rank\psi\,|_{\phi(m)} = boyM' \;\Rightarrow\; rank(\psi \circ \phi)|_m = rank\phi\,|_m$ dır.

3) $rank\phi\,|_m = boyM' \;\Leftrightarrow\; \phi_{*_m}$, örtendir [1].

Teorem 2.5.2.3: M, M' ve M'' dif.bilir manifoldlar, $\phi : M \to M'$ ve $\psi : M' \to M''$ dif.bilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$rank\phi\,|_m = boyM' \;\Rightarrow\; rank(\psi \circ \phi)|_m = rank\psi(\phi(m))$$

dır [1].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Vektör Alanları

M bir dif.bilir manifold ve $m \in M$ olsun.

$$\Im(m) = \left\{ f \middle| f : M \xrightarrow{difbilir} IR, m \in Domf \right\}$$

cümlesini ve bu cümle üzerindeki türevlerin oluşturduğu

$$T_m M = \left\{ \Lambda \middle| \Lambda, \Im(m)\text{'nin türevi} \right\}$$

vektör uzayını göz önüne alalım.

$X \in T_m M$ ise X, $\Im(m)$ 'de bir IR-lineer operatör ve $\forall f, g \in \Im(m)$ için

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$$

dır.

$$\bigcup_{m \in M} T_m M = TM$$

şeklinde oluşturulan cümle M'nin tanjant demeti olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.1: M ile M' dif.bilir manifoldlar, $\phi : M \to M'$ dif.bilir olsun. $Dom\psi$ üzerinde $\phi \circ \psi = id$ olacak şekilde bir $\psi : M \to M'$ dif.bilir fonksiyonu varsa ψ 'ye ϕ 'nin kesiti denir [1].

Tanım 3.1.2: $\pi : TM \to M$ dönüşümünün bir kesiti X olsun. Öyle ki $X : M \to TM, \pi \circ X = id$ dır.

$\forall f \in C^\infty(M, IR)$ ve $DomX \cap Domf = U \neq \varnothing$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Xf : U \subset M &\to IR \\ m &\to (Xf)(m) = X_m f \end{aligned}$$

fonksiyonu her f için dif.bilir ise X kesitine $U \subset M$ üzerinde bir vektör alanı denir [1].

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "\pi \circ X = id"'] & TM \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

Şekil 3.1.1

$\Im_U = \left\{ f \mid f : U \xrightarrow{\text{difbilir}} IR \right\}$ üzerinde

$$\begin{aligned} X : \Im_U &\to \Im_U \\ f &\to Xf : U \subset M \to IR \\ &\qquad m \to (Xf)(m) = X_m(f) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanı her noktada bir tanjant vektörü tek olarak belirler.

***Örnek 3.1.1*:** M dif.bilir bir manifold, TM, M'nin tanjant demeti ve $\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_m \in T_m M$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ \nu_m &\to \pi(\nu_m) = m \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, π 'nin bir kesitidir. $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, bir vektör alanıdır.

$$\pi \circ \frac{\partial}{\partial x_i} : M \to M, \quad m \to \left(\pi \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \right)(m) = m$$

$\dfrac{\partial}{\partial x_i}|_m$, $\Im(m)$ 'de türevdir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}|_m : \Im(m) &\to IR \\ f &\to \frac{\partial f}{\partial x_i}|_m \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir ve Leibniz şartını sağlar.

***Sonuç 3.1.1*:** X vektör alanının tanım cümlesi açıktır [1].

***Örnek 3.1.2*:** *M*, bir dif.bilir manifoldu üzerinde iki vektör alanı *X, Y* ve f, g reel değerli fonksiyonlar olsun. Tanım cümlelerinin arakesitinde olan

$$fX + gY : m \to (fX + gY)(m) = f(m) \cdot X_m + g(m) \cdot Y_m \in T_m M$$

fonksiyonu π nin bir kesitidir.

$$fX + gY : m \to M$$

yani

$$\pi \circ (fX + gY) = id$$

dir. Eğer f ve g dif.bilirse $fX + gY$, *M*'nin bir vektör alanıdır.

$boyM = n$, (U, ψ) *M*'nin bir haritası ve bu haritaya göre koordinat fonksiyonları $u_i, 1 \le i \le n$ olsun. $m \in U \subset M$ için

$$T_m M = Sp\left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} |_m \right\}_{1 \le i \le n}$$

dır.

Tanım cümlesi $W \subset M$ olan bir X vektör alanı için $W \cap U \neq \varnothing$ ise $W \cap U$ üzerinde X vektör alanı

$$X = \sum_i^n A_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

biçiminde tek türlü yazılabilir. Bu da A_i'lerin tek türlü ifade edilmesiyle mümkündür.

$$X(u_j) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^n A_i \delta_{ij} = A_j \ , 1 \le j \le n$$

O halde $\forall 1 \leq j \leq n$ için $A_j = X(u_j)$ dir. X dif.bilir olduğundan A_j'ler de dif.bilirdir.

Eğer (V,ψ) , M'nin bir başka haritası ise $m \in V$ ve $V \cap U \neq \emptyset$ için

$$\frac{\partial}{\partial v_j}\Big|_m = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right) \frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_m$$

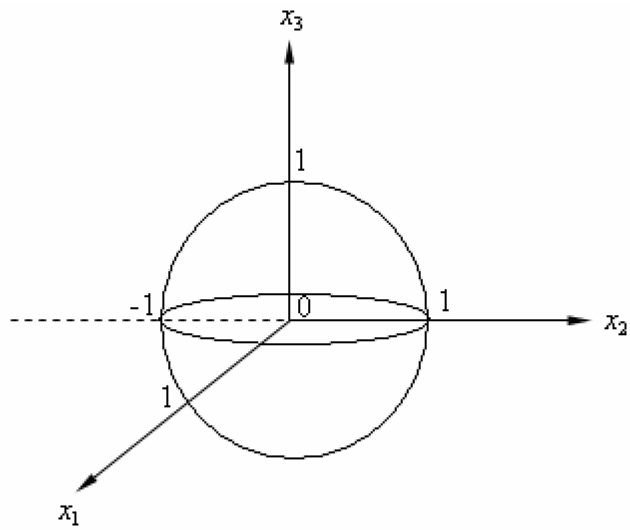
olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial v_j} . \frac{\partial}{\partial u_i} \ldots (*)$$

dır.

***Örnek 3.1.3*:** S^2 üzerinde bir vektör alanı vereceğiz. Bunun için önce S^2 üzerinde stereografik izdüşüm atlasını tanımlayalım.

S^2 'nin stereografik atlası:

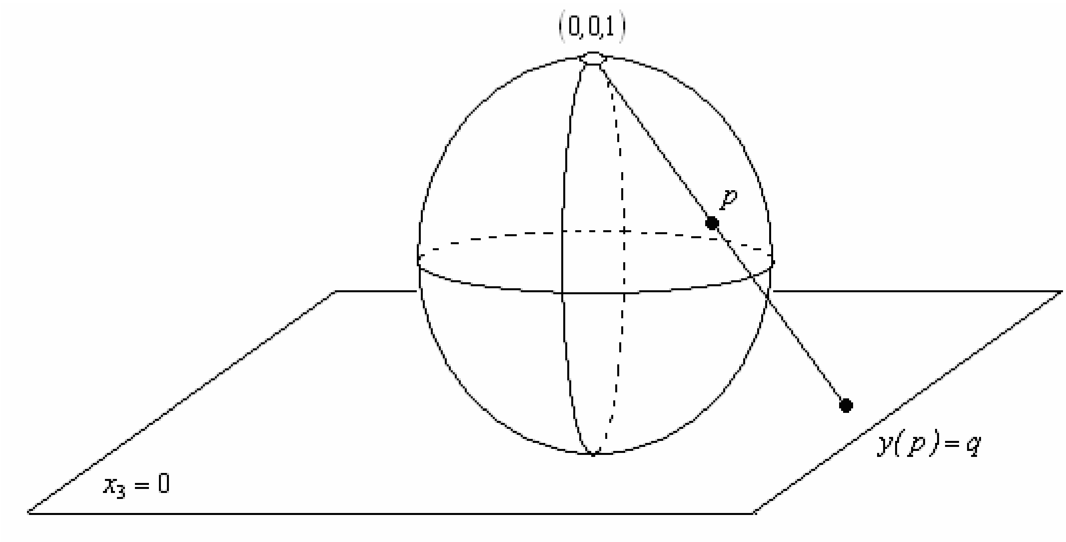


Şekil 3.1.2

$U = S^2 - \{(0,0,1)\}, \quad V = S^2 - \{(0,0,-1)\}$ olsun.

$y : U \subset S^2 \rightarrow IR^2$

$p = (p_1, p_2, p_3) \rightarrow y(p) = q = ?$



Şekil 3.1.3

$$U = S^2 - \{(0,0,1)\}, \quad V = S^2 - \{(0,0,-1)\}$$

$q = y(p) : ((0,0,1)p$ doğrusu$) \cap (x_3 = 0$ düzlemi$)$

$$\frac{x_1 - 0}{p_1 - 0} = \frac{x_2 - 0}{p_2 - 0} = \frac{x_3 - 1}{p_3 - 1} = t$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_1 t \\ x_2 &= p_2 t \\ x_3 &= 1 + (p_3 - 1)t \end{aligned}\right\} \text{arakesiti için } x_3 = 0 \text{ ise}$$

$$1 + (p_3 - 1)t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1 - p_3}$$

doğrunun düzlemi kestiği noktanın bileşenleri

$$x_1 = \frac{1}{1 - p_3} p_1$$

$$x_2 = \frac{1}{1 - p_3} p_2$$

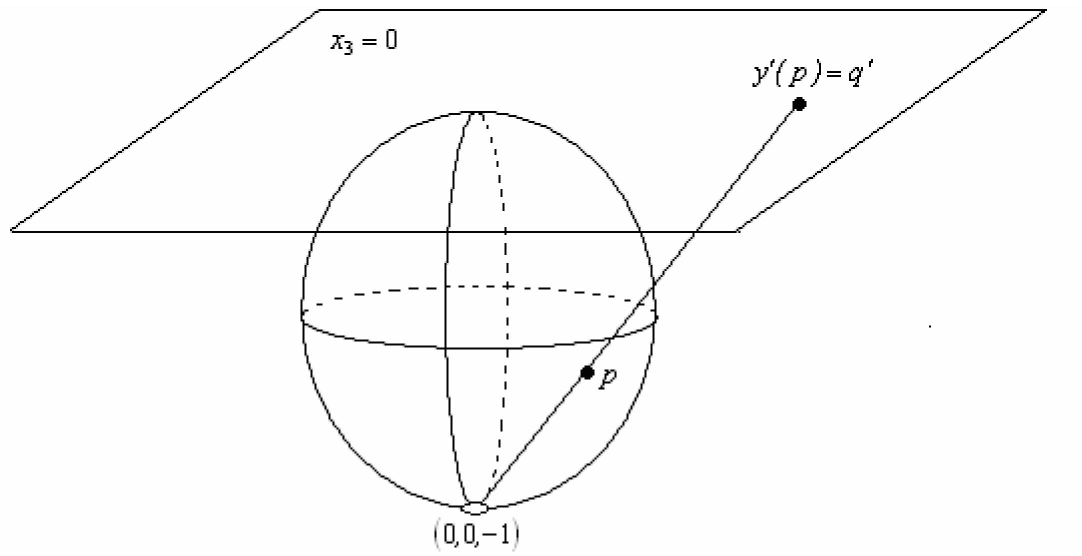
$$x_3 = 0$$

dır. O halde

$$y : U \subset S^2 \to IR^2$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \to y(p) = \frac{1}{1 - p_3}(p_1, p_2)$$

dır. Benzer şekilde



Şekil 3.1.4

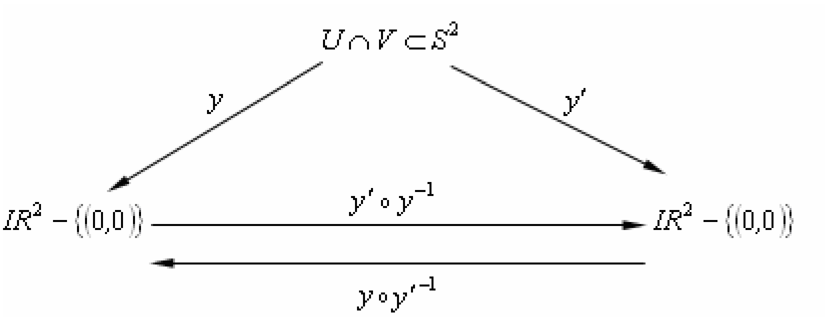
$$y' : V \subset S^2 \to IR^2$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \to y'(p) = \frac{1}{1 + p_3}(p_1, p_2)$$

olduğu gösterilebilir. Bu şekilde tanımlanan (U, y) ve (V, y') bir haritadır. Yani y ile y', $1:1$ ve $y(U) = IR^2$ ile $y'(V) = IR^2$ dir. $\{(U, y), (V, y')\}$, S^2'nin bir C^∞ atlasıdır.

A1) $U \cup V = S^2$

A2) $U \cap V = S^2 - \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$



Şekil 3.1.5

$$y(p) = q \Leftrightarrow y^{-1}(q) = p$$

p noktası ise $(0,0,1)$ ve q dan geçen doğrunun S^2 ile arakesitidir.

$q_i = \dfrac{1}{1-p_3} p_i$, $i = 1,2$ olmak üzere

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 = 1 - p_3^2$$

$$q_1^2 + q_2^2 = \frac{1}{(1-p_3)^2}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{1-p_3^2}{(1-p_3)^2} = \frac{1+p_3}{1-p_3}$$

$$(1-p_3)q_1^2 + q_2^2 = 1 + p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}$$

$$p_i = (1-p_3)q_i$$

$$p_i = \left(1 - \frac{q_1^2 + q_2^2 - 1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}\right)q_i$$

$$p_i = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2 + 1} 2q_i$$

$$y^{-1}(q_1, q_2) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}(2q_1, 2q_2, q_1^2 + q_2^2 - 1)$$

dır. Benzer şekilde

$$y'^{-1}(q_1, q_2) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}(2q_1, 2q_2, 1 - q_1^2 + q_2^2)$$

dır.

$$\left(y'\circ y^{-1}\right)(q_1,q_2)=y'\left(y^{-1}(q_1,q_2)\right)=\frac{1}{q_1^2+q_2^2}(q_1,q_2)$$

olup $y'\circ y^{-1}$, $IR^2-\{(0,0)\}$ da dif.bilirdir. Benzer şekilde $y\circ y'^{-1}$ de $IR^2-\{(0,0)\}$ da dif.biliridir. Ayrıca, y ve y', 1:1 olduğundan $y'\circ y^{-1}$ de 1:1dir. O halde $y'\circ y^{-1}$ bir diffeomorfizmdir. Dolayısıyla $(U,y),(V,y')$ haritaları uyumludur.

Buradan $A=\{(U,y),(V,y')\}$,S^2'nin bir C^∞ atlasıdır. Bu atlasa S^2'nin stereografik atlası denir. $i=1,2$ için y_i, y haritasına göre y_i', y' haritasına göre S^2'nin koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$y_i'=\frac{1}{y_1^2+y_2^2}y_i$$

dir. Gerçekten, $y'=x$ denirse $y_i=\frac{1}{1-p_3}p_i$ ve $y_i'=\frac{1}{1+p_3}p_i$ olup

$$y_1^2+y_2^2=\frac{p_1^2+p_2^2}{(1-p_3)^2}=\frac{1-p_3^2}{(1-p_3)^2}=\frac{1+p_3}{1-p_3}=\frac{y_i}{x_i}$$

olduğundan

$$x_i=\frac{1}{y_1^2+y_2^2}y_i$$

dir.

$$\begin{tikzcd}
 & U\cap V\subset S^2 \arrow[r, "x"] \arrow[dl, "y_j=u_j\circ y"'] \arrow[dd, "y"] & IR^2-\{(0,0)\} \arrow[dd, "id"'] \arrow[dr, "x_i=u_i\circ x"] & \\
IR & & & IR \\
 & IR^2-\{(0,0)\} \arrow[ul, "u_j"] \arrow[r, "F=x\circ y^{-1}"] & IR^2-\{(0,0)\} \arrow[ur, "u_i"] &
\end{tikzcd}$$

$i,j=1,2$

Şekil 3.1.6

$\forall p \in U \cap V \subset S^2$ için $y(p) = q \in IR^2 - \{(0,0)\}$ olup

$$F(q) = (x \circ y^{-1})(p) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2}(q_1, q_2)$$

dır. IR^2'nin u_i koordinat fonksiyonları dikkate alınacak olursa

$$F(u_1, u_2) = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2}(u_1, u_2) = (F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2))$$

elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \subset S^2 \arrow[r, "x_i"] \arrow[d, "y_j"'] & IR \arrow[d, "id"] \\
IR \arrow[r, "F_i = x_i \circ y_j^{-1}"] & IR
\end{tikzcd} \qquad i, j = 1,2$$

Şekil 3.1.7

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \subset S^2 \arrow[r, "\frac{\partial x_i}{\partial y_j}"] \arrow[d, "y_j"'] & IR \arrow[d, "id"] \\
IR \arrow[r, "\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ y_j^{-1}"] & IR
\end{tikzcd} \qquad i, j = 1,2$$

Şekil 3.1.8

Şekil 3.1.7 ve Şekil 3.1.8 göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \circ y_j = \frac{\partial (x_i \circ y_j^{-1})}{\partial u_i} \circ y_j$$

dır. Buradan

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}=\frac{u_1^2+u_2^2-2u_1^2}{(u_1^2+u_2^2)^2}=\frac{u_2^2-u_1^2}{(u_1^2+u_2^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial u_2}=\frac{u_1^2+u_2^2-2u_2^2}{(u_1^2+u_2^2)^2}=\frac{u_1^2-u_2^2}{(u_1^2+u_2^2)^2}$$

eşitliklerinden

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1}=-\frac{\partial F_2}{\partial u_2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}=-\frac{\partial x_2}{\partial y_2}=\frac{y_2^2-y_1^2}{(y_1^2+y_2^2)^2}$$

dır.

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_2}=-\frac{2u_1u_2}{(u_1^2+u_2^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial u_1}=-\frac{2u_1u_2}{(u_1^2+u_2^2)^2}$$

eşitliklerinden

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_2}=\frac{\partial F_2}{\partial u_1}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_2}=\frac{\partial x_2}{\partial y_1}=-\frac{2y_1y_2}{(y_1^2+y_2^2)^2}$$

dır. Ayrıca (*) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial y_1}=\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{y_2^2-y_1^2}{(y_1^2+y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{2y_1y_2}{(y_1^2+y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y_2}=\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial x_2}{\partial y_2}\frac{\partial}{\partial x_2}=-\frac{2y_1y_2}{(y_1^2+y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{y_1^2-y_2^2}{(y_1^2+y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

dir.

U ve *V* üzerinde sırasıyla *X* ve *Y* vektör alanları

$$X = (x_1 - x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y = (-y_1 - y_2)\frac{\partial}{y_1} + (y_1 - y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}$$

şeklinde tanımlansın. $U \cap V$ üzerinde bu vektör alanları çakışırlar. Gerçekten;

$$Y = (-y_2 - y_1)\left(\frac{y_2^2 - y_1^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{2y_1 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + (y_1 - y_2)\left(-\frac{2y_1 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

ifadesi $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ve $\frac{\partial}{\partial x_2}$'in parantezinde yazılacak olursa

$$Y = \frac{y_1 - y_2}{y_1^2 + y_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{y_1 + y_2}{y_1^2 + y_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

elde edilir. $\forall p \in U \cap V \subset S^2$ için

$$\begin{aligned} Y_p &= \frac{y_1 - y_2}{y_1^2 + y_2^2}|_p \frac{\partial}{\partial x_1}|_p + \frac{y_1 + y_2}{y_1^2 + y_2^2}|_p \frac{\partial}{\partial x_2}|_p = \frac{p_1 - p_2}{1 + p_3}\frac{\partial}{\partial x_1}|_p + \frac{p_1 + p_2}{1 + p_3}\frac{\partial}{\partial x_2}|_p \\ &= (x_1 - x_2)|_p \frac{\partial}{\partial x_1}|_p + (x_1 + x_2)|_p \frac{\partial}{\partial x_2}|_p \\ &= X_p \end{aligned}$$

bulunur.

3.2. Diferensiyel Operatör

***Tanım 3.2.1*:**

$$\begin{aligned} \chi : \Im_U &\xrightarrow{difbilir} \Im_U \\ f &\to \chi(f) \end{aligned}$$

global IR -lineer fonksiyonu için

$i)$ $Dom(\chi f) = U \cap Domf$

$ii)$ $\chi(fg) = f \cdot \chi(p) + g \cdot \chi(g)$

ise χ 'e U üzerinde diferensiyel operatör denir.

***Örnek 3.2.1*: χ, U üzerinde bir vektör alanı ise U üzerinde bir diferensiyel operatördür.Yani her vektör alanı bir diferensiyel operatördür.Tersi için aşağıdaki teorem verilebilir:

***Teorem 3.2.1*: Bir M manifoldunun bir U açığı üzerinde tanımlı herhangi bir χ diferensiyel operatörü U üzerinde bir tek vektör alanından elde edilir [1]

***Örnek 3.2.2*: X, Y tanım cümleleri M 'in bir U açığıyla kesişecek şekilde M 'de iki vektör alanı olsun.

$$\begin{aligned} L : \Im_U &\to \Im_U \\ f &\to L(f) = X(Yf) - Y(Xf) \end{aligned}$$

global fonksiyonu bir diferensiyel operatördür.

Bunu göstermek için tanımdaki (*i*) ve (*ii*) aksiyomlarının sağlandığını göstereceğiz.

i) $Dom(Lf) = U \cap Domf$

$$\begin{aligned} Dom(X(Yf)) &= U \cap (Dom(Yf)) \\ &= U \cap (U \cap Domf) \\ &= U \cap Domf \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$Dom(Y(Xf) = U \cap Domf$

dir. O halde

$$Dom(Lf) = Dom(X(Yf) - Y(Xf)) = U \cap Domf$$

dir.

ii) $L(fg) = L(f)g + fL(g)$

$U \cap Domf \neq \emptyset \quad , \quad U \cap Domg \neq \emptyset \Rightarrow Domf \cap Domg \neq \emptyset$

$$
\begin{aligned}
X(Y(fg)) &= X(fY(g)+gY(f)) \\
&= X(fy(g))+X(gY(f)) \\
&= Y(g)X(f)+fX(Yg)+Y(f)X(g)+gX(Yf)
\end{aligned}
$$

dır. Benzer şekle

$$Y(X(fg)) = X(g)Y(f)+fY(Xg)+X(f)Y(g)+gY(Xf)$$

dır.

$$
\begin{aligned}
L(fg) &= X(Y(fg))-Y(X(fg)) \\
&= f\left[X(Yg)-Y(Xg)\right]+g\left[X(Yf)-Y(Xf)\right] \\
&= fL(g)+gL(f)
\end{aligned}
$$

Ayrıca $\forall a,b \in IR, \forall f,g \in \Im_U$ için

$$L(af+bg) = aL(f)+bL(g)$$

dır. Yani L, IR lineerdir.

O halde $L : \Im_U \to \Im_U$ diferensiyel operatördür.

L, U üzerinde bir diferensiyel operatör olduğundan yukarıdaki teorem gereğince U üzerinde bir tek vektör alanı tarafından elde edilir. L, $XY-YX$ vektör alanı ile elde edilir. Bu vektör alanı $\left[X,Y\right]$ ile gösterilir ve X,Y 'nin Lie parantezi olarak adlandırılır.

M üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi ${\Im_M}^1$ ile gösterilir.

$$
\begin{aligned}
{\Im_M}^1 \times {\Im_M}^1 &\to {\Im_M}^1 \\
(X,Y) &\to \left[X,Y\right] : \Im_U \to \Im_U
\end{aligned}
$$

dönüşümü IR -bilineerdir ve $Dom\left[X,Y\right] = DomX \cap DomY$ dır.

Bilineerlik: $\forall a,b \in IR$ ve $\forall X,Y,Z \in {\Im_M}^1$ için

$$
\begin{aligned}
\left[aX+bY,Z\right] &= a\left[X,Y\right]+b\left[Y,Z\right] \\
\left[X,aY+bZ\right] &= a\left[X,Y\right]+b\left[X,Z\right]
\end{aligned}
$$

olduğunu göstereceğiz. $\forall f \in \Im_U$ için

$$\begin{aligned}[aX+bY,Z](f) &= (aX+bY)(Zf)-Z(aX+bY)(f)\\ &= aX(Zf)+bY(Zf)-Z(aX(f)+bY(f))\\ &= aX(Zf)+bY(Zf)-aZ(Xf)-bZ(Yf)\\ &= a(X(Zf)-Z(Xf))+b(Y(Zf)-Z(Yf))\\ &= (a[X,Z]+b[Y,Z])(f)\end{aligned}$$

Eşitlik $\forall f \in \Im_U$ için doğru olduğundan fonksiyon eşitliği tanımından

$$[aX+bY,Z]=a[X,Z]+b[Y,Z]$$

dır. Diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

$[\ ,\ ]$'nin IR-bilineerliği ve $Dom[X,Y]=DomX\cap DomY$ özelliklerinden dolayı aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2: M bir dif.bilir manifold, $U\subset M$ (M'nin C^∞ yapısından indirgenen topolojiye göre açık) $X,Y\in \Im_M^{\ 1}$ için

$$[X|_U, Y|_U]=[X,Y]|_U$$

dır.

İspat: $DomX=V$, $DomY=W$ olsun. $U\cap V$ üzerinde $X|_U - X=0$ dır. $U\cap V\cap W$ üzerinde de $[X|_U - X, Y]=0$ dır. Öyleyse $U\cap V\cap W$ üzerinde Lie parantezinin bilineerliğini kullanırsak

$$[X|_U, Y]-[X,Y]=0$$

$$[X|_U, Y]=[X,Y]$$

dır. Buradan

$$[X|_U, Y]=[X,Y]|_U$$

yazılabilir. $DomX\cap DomY=V\cap W$ olduğundan eşitliğin her iki yanı da $U\cap V\cap W$ de tanımlıdır.

Benzer şekilde $U\cap V\cap W$ üzerinde

$$\left[X, Y|_U\right] = \left[X, Y\right]|_U$$

dur.

$$\left[X|_U - X, Y|_U - Y\right] = 0$$

$$\left[X|_U, Y|_U\right] - \left[X|_U, Y\right] - \left[X, Y|_U\right] + \left[X, Y\right] = 0$$

$$\left[X|_U, Y|_U\right] - \left[X, Y\right]|_U = 0$$

$$\left[X|_U, Y|_U\right] = \left[X, Y\right]|_U$$

$\Im_M^{\ 1}$ bir vektör uzayıdır. $\Im_M^{\ 1}$ üzerinde $(X, Y) \rightarrow \left[X, Y\right]$ işlemi *IR*-bilineerdir.

$$\begin{aligned} \left[\, , \,\right] : \Im_M^{\ 1} \times \Im_M^{\ 1} &\rightarrow \Im_M^{\ 1} \\ (X, Y) &\rightarrow \left[X, Y\right] \end{aligned}$$

Ayrıca bu dönüşüm bir iç işlemdir. Anti-simetriktir. Dolayısıyla değişme özelliği yoktur. Yani

$$\forall X, Y \in \Im_M^{\ 1} \text{ için } \left[X, Y\right] = -\left[Y, X\right]$$

dır. Gerçekten, $\forall f \in \Im_U$ için

$$\begin{aligned} \left[X, Y\right](f) &= X(Yf) - Y(Xf) \\ &= -(Y(Xf) - X(Yf)) \\ &= -\left[Y, X\right](f) \\ \Rightarrow \left[X, Y\right] &= -\left[Y, X\right] \end{aligned}$$

Ayrıca Jacobi özdeşliğini sağlar. Bunu aşağıdaki teoremde vereceğiz.

***Teorem 3.2.3*:** $\forall X, Y, Z \in \Im_M^{\ 1}$ için

$$\left[X, \left[Y, Z\right]\right] + \left[Y, \left[Z, X\right]\right] + \left[Z, \left[X, Y\right]\right] = 0$$

dır [1].

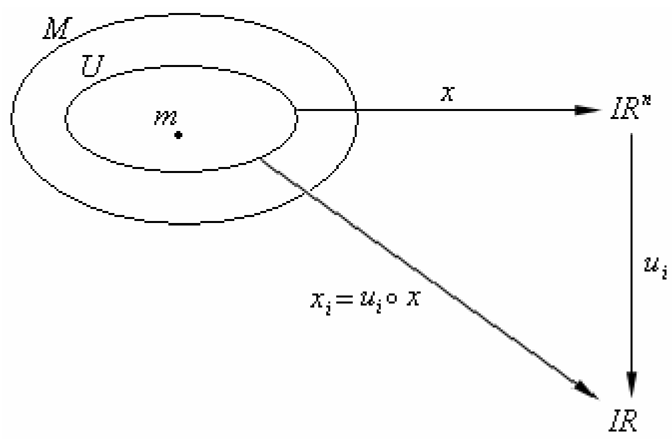
***Tanım 3.2.2*:** $(V, +, (IR, +, .), .)$ bir vektör uzayı $x : V \times V \rightarrow V$ bir işlem olsun.Eğer çarpma işlemi bilineer, anti-simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlarsa bu işlemle birlikte bu vektör uzayına Lie Cebiri denir [1].

Buna göre $\Im_M{}^1$ bir Lie cebiridir.

$$(\Im_M{}^1, +, (IR, +, .), [\ ,\ ])$$

3.3. Tanjant Demeti

M bir dif.bilir bir manifold olsun. *M*'nin tanjant demeti üzerinde bir C^∞ yapı tanımlayacağız. $m \in U \subset M$ ve (U, x) *M'*de bir harita olsun. $Sp\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} |_m \right\}_{1 \le i \le n} = T_m M$ ve $Sp\{e_i\}_{1 \le i \le n} = IR^n$ dir.



, $1 \le i \le n$

Şekil 3.3.1

$$\varphi_m : T_m M \to IR^n$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1} |_m \to \varphi_m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_m \right) = e_i \ , \ 1 \le i \le n$$

$\{(T_m M, \varphi_m)\}$, $T_m M$ 'nin tek haritalı bir C^∞ atlasıdır.

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

üzerinde bir C^{∞} yapı tanımlayacağız.

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ V_m &\to m \end{aligned}$$

$m \in U$ olmak üzere $(U, x), M$ 'de bir harita olsun.

$$\pi^{-1}(m) = V_m \in T_m M$$

$\forall V \in \pi^{-1}(U) \in$ vektörü $a = (a_1, a_2, ... a_n) \in IR^n$ olmak üzere

$$V_m = \sum_{i=1}^{n} a_i . \frac{\partial}{\partial x_i} |_m$$

olarak tek türlü yazılabilir.

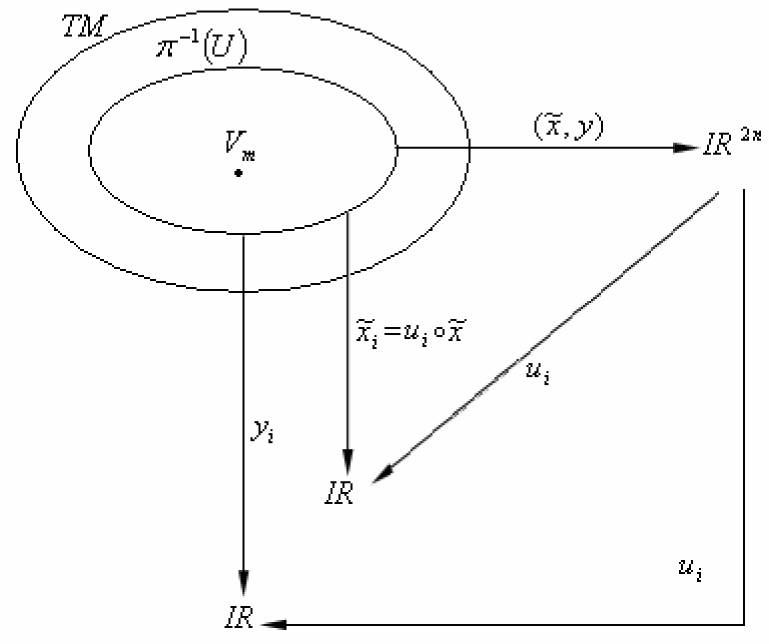
$$\begin{aligned} (\widetilde{x}, y) : \pi^{-1}(U) \subset TM &\to IR^{2n} \\ V_m &\to (x(m), a) \end{aligned}$$

H1) x,1:1 ve $V_m = \sum_{i=1}^{n} a_i . \frac{\partial}{\partial x_i} |_m$ yazılışı tek olduğundan $(\widetilde{x}, y)$ dönüşümü 1:1 dir.

H2) $(\widetilde{x}, y)(\pi^{-1}(U)) = \underbrace{x(U)}_{\subset IR^n} \times IR^n \subset IR^{2n}$ açık

$(\pi^{-1}(U), (\widetilde{x}, y)), TM$ 'de bir haritadır.

Bu haritaya TM 'nin M 'deki (U, x) haritasına karşılık gelen standart haritası denir.



Şekil 3.3.2

TM 'nin $(\pi^{-1}(U), (\tilde{x}, y))$ haritasına göre koordinat fonksiyonlarını elde edelim.

$$x_i = u_i \circ x$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i(V_m) &= (u_i \circ \tilde{x})(V_m) \\
&= u_i \circ (\tilde{x}(V_m)) \\
&= u_i \circ (x(m)) \\
&= x_i(m) \\
&= (x_i \circ \pi)(V_m)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\forall V_m \in T_m M$ için eşitlik sağlandığından fonksiyon eşitliği tanımı gereğince

$$\tilde{x}_i = x_i \circ \pi$$

dır.

$$V_m = \sum_{i=1}^{n} a_i . \frac{\partial}{\partial x_i}|_m \ , y_i(V_m) = a_i$$

dir. Ayrıca $V_m(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_i . \frac{\partial x_i}{\partial x_j}|_m = a_i$ olduğundan $y_i(V_m) = V_m(x_i)$

$$(\widetilde{x}, y)(V_m) = (x_1(m), x_2(m), ..., x_n(m), a_1, a_2, ..., a_n) \in IR^{2n}$$

dir.

$$\widetilde{x}_i(V_m) = x_i(m)$$

$$y_i(V_m) = a_i$$

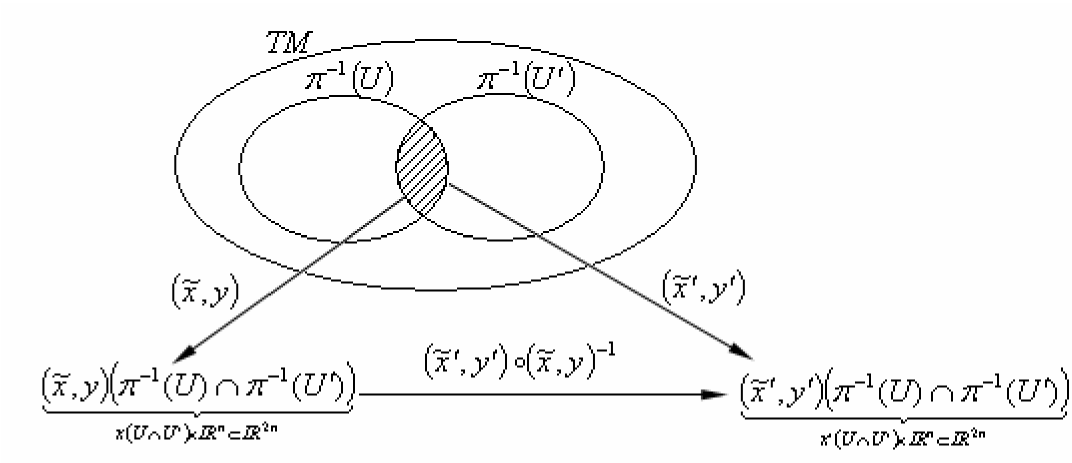
Burada $(\widetilde{x}_i, y_i)$, $(\pi^{-1}(U), (\widetilde{x}, y)$ haritasına göre TM 'nin i.nci koordinat fonksiyonudur.

A1) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ olmak üzere

$$\bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i) = TM$$

dir.

A2) $V_m \in TM$ noktasında TM 'nin bir diğer haritası $(\pi^{-1}(U'), (\widetilde{x}', y'))$ olsun $\ni \pi^{-1}(U') \cap \pi^{-1}(U) \neq \varnothing$ dır.



Şekil 3.3.3

$$(\widetilde{x},y)(V_m)=(x(m),y(V_m))=(z,a)\rightarrow((\widetilde{x}',y')\circ(\widetilde{x},y)^{-1})(z,a)$$

$$(\widetilde{x}',y')((\widetilde{x},y)^{-1}(z,a))=(\widetilde{x}',y')(V_m)=(x'(m),y'(V_m))$$

$$=(x'(x^{-1}(z),y'(y^{-1}(a)))$$

$$=((x'\circ x^{-1})(z),(y'\circ y^{-1})(a)))$$

$$(\widetilde{x}',y')((\widetilde{x},y)^{-1}(z,a))=((x'\circ x^{-1})(z),(y'\circ y^{-1})(a)))\ \ldots(*)$$

Şimdi (*) ifadesindeki, $(y'\circ y^{-1})(a)$ 'yı ele alalım.

$$(y'\circ y^{-1})(a)=y'(y^{-1}(a))$$

$$y^{-1}(a)=V_m=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\Big|_m\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_m\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\Big|_m.a_i\right]\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_m$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(J(x'\circ x^{-1},z)\cdot a)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_m$$

$$(y'\circ y^{-1})(a)=J(x'\circ x^{-1},z)\cdot a$$

olur.

$$(\widetilde{x}',y')((\widetilde{x},y)^{-1}(z,a))=((x'\circ x^{-1})(z),J(x'\circ x^{-1},z)\cdot a)$$

$(\widetilde{x}',y')\circ(\widetilde{x},y)^{-1}$ dönüşümü dif.bilirdir. Çünkü $x'\circ x^{-1}$, (U,x) ve (U',x') haritalarının uyumlu olduğundan dif.bilirdir ve Jakobiyen matris dif.bilirdir. Ayrıca $(\widetilde{x}',y')\circ(\widetilde{x},y)^{-1}$, 1:1 dir. Benzer şekilde $(\widetilde{x},y)\circ(\widetilde{x}',y')^{-1}$ de dif.bilirdir. Buradan $(\widetilde{x}',y')\circ(\widetilde{x},y)^{-1}$ dönüşümü diffeomorfizmdir. O halde $(\pi^{-1}(U),(\widetilde{x},y))$ ve $(\pi^{-1}(U'),(\widetilde{x}',y'))$ haritaları uyumludur.

Sonuç olarak $\{(\pi^{-1}(U),(\widetilde{x},y))\,|\,(U,x)\in A\}$ *TM*'de bir C^∞ yapıdır (Burada *A*, *M*'nin C^∞ atlasıdır). Buna göre *TM*, 2*n*-boyutlu bir dif.bilir manifolddur.

Teorem 3.3.1: M bir Hausdorff manifoldu ise TM 'de bir Hausdorff manifoldudur [1].

Teorem 3.3.2: M ile M' dif.bilir manifoldlar olmak üzere $\phi : M \to M'$ dif.bilir bir fonksiyon olsun.Bu durumda ϕ 'nin türev dönüşümü olan $\phi_* : TM \to TM'$ dönüşümü de dif.bilirdir [1].

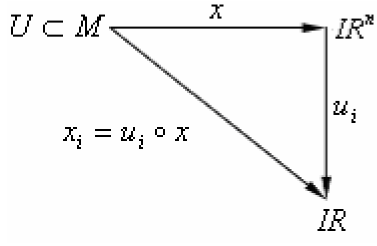
Teorem 3.3.3: M bir dif.bilir manifold olmak üzere $\pi : TM \to M$ dönüşümünün bir kesiti $X : M \to TM$ olsun.

X , bir vektör alanıdır $\Leftrightarrow$ X, dif.bilirdir [1].

Tanım 3.3.1: M bir dif.bilir manifold $U \subset M$ açık ve (U, x) bir harita olsun. $\forall m \in U$ için $X_1 |_m , X_2 |_m ,..., X_n |_m \in T_m M$ tanjant vektörlerinin oluşturduğu cümle lineer bağımsız ise $\{X_1, X_2,..., X_n\}$ cümlesine bağımsızdır denir. Burada $\forall X_i$, $1 \le i \le n$ bir vektör alanıdır. $\forall X_i \in \Im_U^1$ dır [1].

Sonuç 3.3.1: $\forall X \in \Im_U^1$ için $\{X\}$ bağımsızdır $\Leftrightarrow$ $\forall m \in U \subset M$ için $X_m \ne 0$ dır

Örnek 3.3.1: $boyM = n$, (U, x) haritasına göre koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olmak üzere $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, $U \subset M$ üzerinde bağımsızdır.



Şekil 3.3.4

*M'*nin $\forall (U, x)$ haritası için bağımsız vektör alanlarından bahsedilebilir. Fakat bu vektör alanları *M'*nin tamamında bağımsız olmak zorunda değildir. Eğer *M* tek haritalı bir atlasla tanımlanırsa *M*'nin tamamında bağımsız vektör alanlarından bahsedilebilir.

Aşağıdaki örnek, bir haritasına göre verilen bağımsız vektör alanının diğer haritasına göre de bağımsız vektör alanı olduğunu ifade eder.

***Örnek 3.3.2*:** $S^1 = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid s \in IR\}$

$$U = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) | 0 < s < 1\} \subset S^1$$

$$\begin{aligned} x : U &\to IR \\ p = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) &\to x(p) = s \end{aligned}$$

$$U' = \left\{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \middle| -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}\right\} \subset S^1$$

$$\begin{aligned} x' : U' &\to IR \\ q = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) &\to x'(q) = s \end{aligned}$$

$\{(U, x), (U', x')\}$ cümlesi S^1'in bir C^∞ atlasıdır.

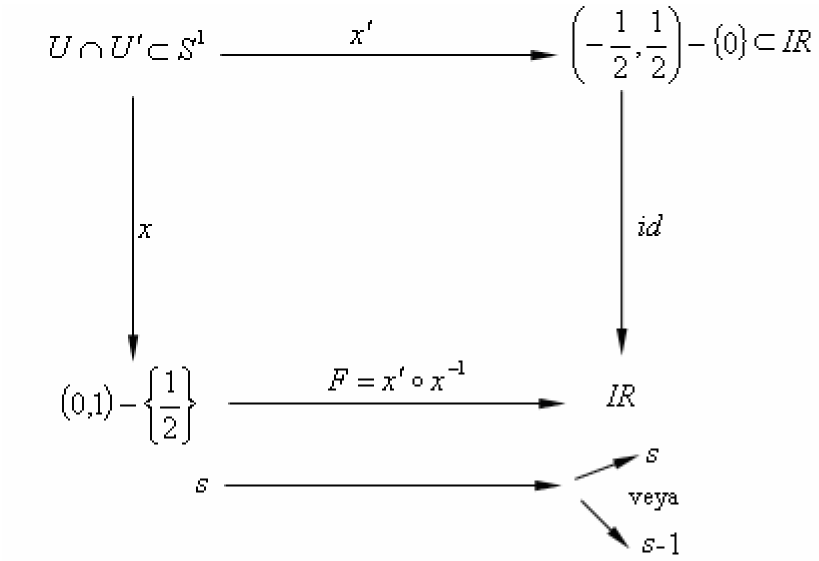
$$U \cap U' = S^1 - \{(0,1), (0,-1)\}$$

$$x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') = (0,1) - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to x'(U \cap U') = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \{0\}$$

$$s \to (x' \circ x^{-1})(s) = x'(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s)$$

$$= \begin{cases} s \ , \ 0 < s < \dfrac{1}{2} \\ s - 1 \ , \ \dfrac{1}{2} < s < 1 \end{cases}$$

olduğundan $x' \circ x^{-1}$ polinom fonksiyonu olup diffeomorfizimdir.



Şekil 3.3.5

O halde F, x' fonksiyonunun (U, x) haritasına göre koordinat temsilcisidir.

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial s} = 1$$

dir. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

olduğundan $U \cap U'$ de $\frac{\partial}{\partial x}$ ile $\frac{\partial}{\partial x'}$ çakışır. S^1'de aynı vektör alanını tanımlarlar.

Tanım 3.3.2: M, M' dif.bilir manifoldlar olmak üzere $\phi : M \to M'$ bir global dif.bilir fonksiyon ve X, X' sırasıyla M, M' üzerinde vektör alanları olsun. Eğer $\phi_* \circ X = X' \circ \phi$ ise X, X' vektör alanlarına ϕ-bağlı vektör alanları denir [1].

Tanım 3.3.3**:** *M* dif.bilir bir manifold olsun. *M*'de kendi üzerine bir diffeomorfizme *M*'nin bir transformasyonu denir [1].

Tanım 3.3.4**:** ϕ**,** *M*'nin bir transformasyonu ve *X*, *M* üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer *X* kendine ϕ**-**bağlı ise *X*'e ϕ altında invaryanttır denir [1].

3.4. Birinci Mertebeden Diferensiyel Denklemler

Tanım 3.4.1**:** Türev yada diferensiyel kapsayan denklemlere diferensiyel denklem denir.

M bir dif.bilir manifold ,$U \subset M$ açık bir cümle olsun.

$\Im_U = \left\{ f \middle| f : U \subset M \xrightarrow{dif.bilir} IR \right\}$ cümlesini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} X : \Im_U &\to \Im_U \\ f &\to Xf \end{aligned}$$

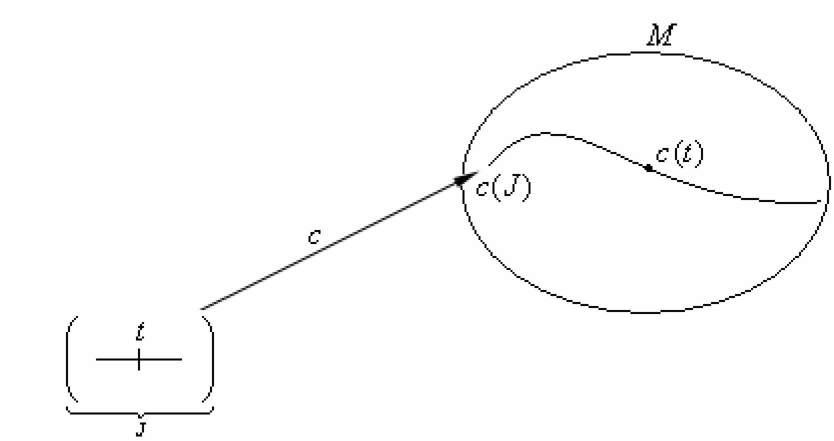
vektör alanı bir diferensiyel operatördür.

Bir $f : M \to IR$ dif.bilir fonksiyon için

$$Xf = 0$$

şartı *M* manifoldu üzerinde bir kısmi diferensiyel denklemdir. Böyle bir vektör alanın bir adi diferensiyel denklem tanımladığını göstereceğiz.

Tanım 3.4.2**:** *M* bir dif.bilir.manifold ve $J \subset IR$ bir açık aralık olmak üzere $c : J \subset IR \to M$ dif.bilir fonksiyonuna *M* üzerinde bir eğri denir [1].



Şekil 3.4.1

IR üzerinde $\{(IR, t = id)\}$ C^∞ atlasını ele alalım. IR'nin bu haritasına karşılık gelen vektör alanı $\dfrac{d}{dt}$ dir. Teorem 3.3.2'den $c : J \to M$ dif.bilir ise $c_* : T(J) \to TM$ de dif.bilirdir. $m \in M$ olmak üzere $T_m(J) \subset T_{c(m)}(IR) = IR$

$$c' = c_* \circ \frac{d}{dt} : J \subset IR \to TM$$

dönüşümü de dif.bilirdir. Gerçekten,

$$c : J \subset IR \to M \ , \ m \in J \ , \ c(m) = m'$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& c_{*m} : T_m(J) \to T_{m'}M \\
& \quad \frac{d}{dt}|_m \to c_{*m}\left(\frac{d}{dt}|_m\right) = \left(c_{*m} \circ \frac{d}{dt}\right)|_m : \Im(m') \to IR \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad t = id \to \left(c_{*m} \circ \frac{d}{dt}\right)|_m (t) = \frac{d}{dt}|_m (t \circ c) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{d}{dt}|_m (c) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{dc}{dt}|_m = c'(m)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$c' = c_* \circ \frac{d}{dt}$$

dir. $\frac{d}{dt}$ ve c dif.bilir olduğundan c_* da dif.bilirdir. Buradan $c' = c_* \circ \frac{d}{dt}$ da dif.bilirdir. O halde c', TM üzerinde bir eğridir.

$$\pi : TM \to M$$

olmak üzere

$$c = \pi \circ c'$$

dır. c' 'ye c 'nin TM içine kanonik lifti denir.

X , M üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$c' = X \circ c$$

M üzerinde I. mertebeden bir diferensiyel denklemdir.

***Tanım 3.4.3*:** X , M üzerinde bir vektör alanı olmak üzere

$$\begin{cases} c' = X \circ c \\ c(0) = m \end{cases}$$

şartını sağlayan c eğrisine X vektör alanının m'den geçen bir integral eğrisi ya da m başlangıç şartlı bir çözümü denir.

$c : J \to M$ bir eğri olsun. $U \subset M$ açık $\ni$ $U \cap c(J) \neq \varnothing$ olacak şekilde M de bir (U, x) haritası ele alalım.

$x : U \subset M \to IR$ olmak üzere

$$C = x \circ c$$

dir. Burada C, c'nin koordinat temsilcisidir. $s \in c^{-1}(U)$ ise

$$c'(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i}{dt} . \frac{\partial}{\partial x_i} |_{c(s)}$$

dir. Gerçekten,

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "x"'] & M' \arrow[d, "y"] \\
IR^{n} \arrow[r, "\Phi = y \circ \phi \circ x^{-1}"'] & IR^{n'}
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.4.2

x , $m \in M$ ve y, $\phi(m) = m'$ 'de haritalar olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\phi_{*_m} &: T_m M \to T_{m'} M' \\
& X \to \phi_{*_m}(X) = Y
\end{aligned}
$$

diyelim.

$$
Y(y_i) = \left(\phi_{*_m}(X)\right)(y_i) = X(y_i \circ \phi)|_m
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}|_m \to \phi_{*_m}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_m\right) &= \sum_{j=1}^{n'} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(y_j \circ \phi\right)_m \frac{\partial}{\partial y_j}|_{\phi(m)} \\
&= \sum_{j=1}^{n'} \underbrace{\frac{\partial\left(y_j \circ \phi\right)}{\partial x_i}|_m}_{\left[\frac{\partial\left(y_j \circ \phi\right)}{\partial x_i}|_m\right] = J(\phi, m) \in IR_n^{n'}} \frac{\partial}{\partial y_j}|_{m'}
\end{aligned}
$$

dır. Buna göre

$$
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, "c"] \arrow[d, "id = t"'] & M \arrow[d, "x"] \\
IR \arrow[r, "C = x \circ c"'] & IR^{n}
\end{tikzcd}
$$

Şekil 3.4.3

$$c_{*_s} : T_s J \to T_{c(s)} M$$
$$X_s \to c_{*_s}(X_s)$$

$$\frac{d}{dt}|_s \to c_{*_m}\left(\frac{d}{dt}|_s\right) = \underbrace{\left(c_* \circ \frac{d}{dt}\right)}_{c'}(s) = c'(s) \in T_{c(s)} M$$

$T_{c(s)} M = Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_{c(s)}\right\}$ olduğundan

$$c_{*_m}\left(\frac{d}{dt}|_s\right) = \frac{d}{dt}|_s \underbrace{(x_i \circ c)}_{C_i} = \frac{dC_i}{dt}|_s$$

$$\frac{d}{dt}|_s \to \underbrace{c_{*_m}\left(\frac{d}{dt}|_s\right)}_{c'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i}{dt}|_s \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}|_{c(s)}$$

dır. Buradan

$$c'(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{dC_i}{dt} . \frac{\partial}{\partial x_i}|_{c(s)}$$

elde edilir.

U üzerinde

$$X = \sum_{i}^{n} f_i(x_1, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı bir X vektör alanının integral eğrisi c ise

$$\begin{cases} c' = X \circ c \\ c(0) = m \end{cases}$$

dir. Ayrıca yukarıdaki eşitliklerden

$$\frac{dC_i}{dt} = f_i(C_i, ..., C_n) \text{ , } 1 \le i \le n$$

elde edilir. Bu denklemler çözülerek U üzerindeki integral eğrisi bulunur.

***Örnek 3.4.1*:** IR^2 **'**de $\{(IR^2, id = x)\}$ atlası ile tanımlı

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

vektör alanını ele alalım. IR^2'de

$$\begin{aligned} c : IR &\to IR^2 \\ t &\to c(t) = \left(c_1(t), c_2(t)\right) \end{aligned}$$

eğrisinin X vektör alanının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{dc_1}{dt} = c_1 \ , \ \frac{dc_2}{dt} = c_2$$

olmalıdır.

$$c'(t) = X \circ c$$

ise,

$$\frac{dc_i}{dt} = c_i \ , i = 1{,}2$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{dc_i}{c_i} = dt &\Rightarrow \ln c_i + \ln k = t \\ &\Rightarrow \ln(c_i \cdot k) = t \\ &\Rightarrow c_i \cdot k = e^t \\ &\Rightarrow c_i = \frac{1}{k} e^t \end{aligned}$$

olur. O halde

$$i = 1 \text{ için } \frac{1}{k} = A \text{ ve } i = 2 \text{ için } \frac{1}{k} = B$$

denirse

$$c_1 = Ae^t \text{ ve } c_2 = Be^t$$

olur.

$$c(t) = (Ae^t, Be^t) \text{''12}$$

bulunur. IR^2'de verilen bir (a,b) noktasından geçen $\left(c(0)=(a,b)\right)$ integral eğrisi

$$\begin{aligned} c &: IR \to IR^2 \\ & t \to c(t) = (ae^t, be^t) \end{aligned}$$

elde edilir. (0,0) dan geçen integral eğrisi sabittir. Çünkü

$$X\,|_0 = 0 = (0,0)$$

dır. Buradan

$$c' = (c_1', c_2') = (0,0)$$

$$c_1' = 0 \;\wedge\; c_2' = 0$$

$$c_1 = \text{sabit},\; c_2 = \text{sabit}$$

İntegral eğrisi sabit olduğundan bu şekildeki sabit noktalara vektör alanının bir kritik noktası denir.

Örnekte X'in kritik noktası (0,0) dır.

***Tanım 3.4.4*:** Bir vektör alanının IR'nin her noktasından geçen ve tanım bölgesi IR olan bir integral eğrisi varsa, bu vektör alanı tamdır denir [1].

Örnek 3.4.2: IR^2'de $\left\{(IR^2, id = x)\right\}$ atlasına göre tanımlı

$$X = (e^{x_1})^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} + 0\frac{\partial}{\partial x_2}$$

vektör alanını alalım

$c = (c_1, c_2)$ 'nin X'in bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{dc_1}{dt} = e^{-c_1}, \frac{dc_1}{dt} = 0$$

olmasıdır.

$\dfrac{dc_1}{dt} = e^{-c_1}$ ise

$$e^{c_1} = t + A \quad , A \text{ sabit}$$

$$c_1 = \ln(t + A)$$

$\dfrac{dc_2}{dt} = 0$ ise

$$c_2 = B \text{ , } B \text{ sabit}$$

olduğundan

$$c(t) = (\ln(t + A), B)$$

elde edilir.

$$c(0) = (a,b) \Rightarrow c(0) = (\ln A, B)$$

$$\Rightarrow \ln A = a, \ B = b$$

$$\Rightarrow A = e^a, \ B = b$$

$$c(t) = (\ln(t + e^a), b)$$

şeklinde elde edilen eğri *X*'in (*a,b*) noktasından geçen bir integral eğrisidir.

$\log : IR^+ \to IR$ olduğundan $c : (-e^a, \infty) \to IR^2$ dır. *c*, *IR*'nin tamamında tanımlı olmadığından *X*, tam değildir. Ayrıca (0,0)'da

$$X|_0 = (e^{-x_1}, 0)|_{(0,0)} = (1,0) \neq (0,0)$$

olduğundan *X*'in kritik noktası yoktur.

***Örnek 3.4.3*:** S^2'yi Örnek 3.1.3'te verilen $\{(U,x),(V,y)\}$ stereografik atlası ile ele alalım. Örnek 3.1.3'te verilen S^2 üzerinde bir *X* vektör alanını

U üzerinde $(x_1 - x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_2}$

V üzerinde $(-y_1 - y_2)\dfrac{\partial}{\partial y_1} + (y_1 - y_2)\dfrac{\partial}{\partial y_2}$

vektör alanları yardımıyla tanımlayalım. Bu durumda X'in kritik noktaları IR^3'ün $(0,0,\mp1)$ noktalarıdır.Öyleyse X'in sabit olmayan herbir integral eğrisi $U \cap V$'de yatar. Ayrıca, X'in herbir integral eğrisi IR'de tanımlı olduğundan X tamdır. Gerçekten, c bir integral eğrisi ise

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "c"] \arrow[d, "id"'] & U \cap V \subset S^2 - (0,0,\mp1) \arrow[d, "x"] \\ IR \arrow[r, "C = x \circ c"] & IR^2 - \{(0,0)\} \end{tikzcd}$$

Şekil 3.4.4

$$C = x \circ c = (C_1, C_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = C_1 - C_2 \\ \dfrac{dC_2}{dt} = C_1 + C_2 \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemi çözülürse

$$C(t) = (C_1(t), C_2(t)) = \left(e^t (A\cos t + B\sin t), e^t (A\sin t - B\cos t)\right),\ A, B \in IR$$

elde edilir. $c(0) = m = (m_1, m_2, m_3) \neq (0,0,\mp1)$ başlangıç şartı için

$$C(0) = (A, -B) = x(m) = \left(\frac{m_1}{1+m_3}, \frac{m_2}{1+m_3}\right)$$

olup

$$C(t) = \left(e^t\left(\frac{m_1}{1+m_3}\cos t - \frac{m_2}{1+m_3}\sin t\right), e^t\left(\frac{m_1}{1+m_3}\sin t + \frac{m_2}{1+m_3}\cos t\right)\right)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{m_1}{1+m_3} = a\cos b \ \text{ ve } \ \frac{m_2}{1+m_3} = a\sin b$$

denirse

$$(x \circ c)(t) = \left(a\cos(t+b)e^{t}, a\sin(t+b)e^{t}\right)$$

dir. Burada $a, b \in IR$ sayıları $U \cap V$ üzerinde $c(0)$ değeri ile bellidir ve

$$x \circ c : IR \to IR^{2}$$

dir.

S^2 üzerinde sabit olmayan bir c integral eğrisinin $x \circ c$ izdüşüm eğrisi $(0,0,1)$ noktasından $z_3 = 0$ düzlemi üzerine bir eş açılı spiraldir. Bu eğri $(0,0,0)$ orijin noktasından geçen düzlemin doğruları ile eşit açı altında kesişir. Stereografik dönüşüm bir konformal dönüşüm yani açı koruyan bir dönüşüm olduğundan c eğrisi de S^2'nin $(0,0,\mp 1)$ noktasından geçen büyük çemberleri ile sabit açı yaparlar.

3.5. Maximal İntegral Eğrileri

Maksimal integral eğrilerinin varlığını gösterebilmek için diferensiyellenebilir denklemler teorisinden aşağıdaki teoremlere ihtiyaç vardır.

Teorem 3.5.1: $f : IR^n \to IR^n$ dif.bilir bir fonksiyon ve $a \in Domf$ olsun. Bu durumda $\exists\, V \subset IR^n \in N(a)$ ve $J \subset IR$ açığı vardır öyle ki verilen $\forall z \in V$ için z'den geçecek ve

$$\frac{dC_i}{dt} = f_i(C_1, ..., C_n) = f_i \circ C \;\; , 1 \leq i \leq n$$

olacak şekilde bir tek

$$C_z : J \to IR^n$$

eğrisi vardır. Üstelik

$$\begin{aligned} &\phi : J \times V \to IR^n \\ &\quad (s,z) \to \phi(s,z) = C_z(s) \end{aligned}$$

dönüşümü dif.bilirdir.

***Teorem 3.5.2*:** *M*, dif.bilir bir manifold, $m_0 \in M$ ve *X*, *M* üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda , bir $V_0 \in N(m_0)$ ve $J \subset IR$ açık aralığı vardır öyle ki *X*'in J_0 'da tanımlı olan ve verilen bir $m \in V_0$ 'dan başlayan bir integral eğrisi vardır. *X*'in *m*'den başlayan herhangi bir integral eğrisi $0 \in J_0$ 'ın bir komşuluğunda bu eğri ile çakışır.

İspat: $m_0 \in U$ olmak üzere (U,x), *M*'de bir harita olsun. $f : IR^n \to IR^n$, $x(U)$ üzerinde dif.bilir bir fonksiyon olmak üzere

$$X|_U = \sum_{i=1}^n f_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (f_i \circ x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

olsun. $a = x(m_0)$ alınıp Teorem 3.5.2 kullanılırsa, $\exists V_0 = x^{-1}(V) \in N(m_0)$,

$\exists J_0 = J \subset IR$ (açık aralık) $\ni$ $c = x^{-1} \circ C : J_0 \to M$, *X*'in bir tek integral eğrisidir ve $m \in V_0$ ' dan başlar.

***Lemma.3.5.1*:** $Domc = J$ olmak üzere *c*, *X*'in bir integral eğrisi olsun. $s \in J$ ve $\lambda_s : IR \to IR$, $\lambda_s(a) = a + s$, *IR* üzerinde öteleme dönüşümü olmak üzere, $\alpha = c \circ \lambda_s$ *X*'in *c(s)*'den başlayan ve $Dom\alpha = \lambda_{-s}(J) = J'$ olan bir integral eğrisidir.

İspat:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_* \circ \frac{d}{dt} = c_* \circ \lambda_{s*} \circ \frac{d}{dt} \\ &= c_* \circ \frac{d}{dt} \circ \lambda_s \\ &= c' \circ \lambda_s \\ &= (X \circ c) \circ \lambda_s \\ &= X \circ \alpha \end{aligned}$$

O halde α, X'in bir integral eğrisidir. Burada $\frac{d}{dt}$, λ_s altında invaryanttır.

***Teorem 3.5.3*:** *M*, bir Hausdorff manifoldu ve *X*, *M* üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer $c_1 : J_1 \to M$ ve $c_2 : J_2 \to M$, *M*'nin aynı noktasından geçen iki integral eğrisi ise bu iki eğri $J_1 \cap J_2$'de çakışırlar.

İspat: $S = \{s \mid c_1(s) = c_2(s)\}$ olsun $J_1 \cap J_2 \subset IR$ olduğunda $J_1 \cap J_2$'de alt cümle topolojisini göz önüne alalım. $J_1 \cap J_2$ irtibatlı olduğundan $S \neq \varnothing$ ve *S*'nin $J_1 \cap J_2$'de hem açık hem de kapalı olduğunu gösterirsek $S = J_1 \cap J_2$ olduğunu yani c_1 ile c_2'nin $J_1 \cap J_2$'de çakıştığını göstermiş oluruz.

$s \in S$ olsun. Lemma.3.5.1'den *X*'in $c_1(s) = c_2(s) = m$'den geçen $\alpha_1 = c_1 \circ \lambda_s$ ve $\alpha_2 = c_2 \circ \lambda_s$ integral eğrileri vardır. Teorem 3.5.2'den α_1 ve α_2 integral eğrileri 0'ın bir komşuluğunda çakışır. Dolayısıyla c_1 ve c_2, *s*'nin bir komşuluğunda çakışır. Buna göre $\forall s \in S$'nin $J_1 \cap J_2$'de bir komşuluğu vardır. O halde *S*, $J_1 \cap J_2$'de açıktır.

Şimdi *S*'in, $J_1 \cap J_2$'de kapalı olduğunu göstereceğiz. Bunun için *S*'in, $J_1 \cap J_2$'deki tümleyeninin $J_1 \cap J_2$'de açık olduğunu göstereceğiz. Eğer *S*'nin tümleyeni $\varnothing$ ise ispat tamamdır. Aksi halde $\exists r \in J_1 \cap J_2 \ni c_1(r) \neq c_2(r)$ dır. *M*, Hausdorff manifoldu olduğundan $c_1(r)$ ve $c_2(r)$'nin *M*'de ayrık açık komşulukları vardır. Burada c_1 ve c_2 sürekli olduğundan *IR*'de *r*'nin bir komşuluğunda $c_1 \neq c_2$ dir ve *S*'nin tanımından bu komşuluk $J_1 \cap J_2$'de *S*'nin tümleyenine aittir. Dolayısıyla *S*'nin tümleyeni açıktır. Böylece *S*, kapalıdır. Ayrıca c_1 ile c_2 aynı noktadan geçtiğinden $\exists 0 \in S$ dır. Böylece $S \neq \emptyset$ dır. S,irtibatlı $J_1 \cap J_2$ uzayında hem açık hem de kapalı ve $S \neq \emptyset$ olduğundan $S = J_1 \cap J_2$ dir.

$S = \{s | c_1(s) = c_2(s)\} = J_1 \cap J_2$ olduğundan c_1 ve c_2 integral eğrileri $J_1 \cap J_2$ 'de çakışırlar.

Teorem 3.5.3 Hausdorff olmayan manifoldlar için geçerli değildir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

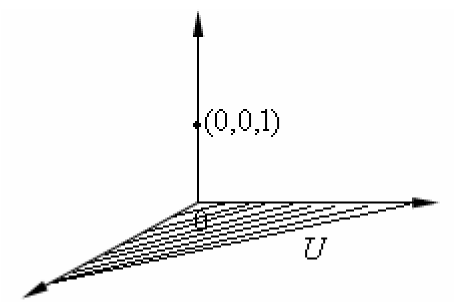
***Örnek.3.5.1*:** Bir M manifoldunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$U = \{(z_1, z_2, 0) | z_1, z_2 \in IR\}$$

olmak üzere

$$M = U \cup \{(0,0,1)\} \subset IR^3$$

olsun.



Şekil 3.5.1

$$V = (U - \{(0,0,0,)\}) \cup \{(0,0,1)\}$$

cümlesini ve

$$
\begin{aligned}
& x : U \to IR^2 \\
& \quad (z_1, z_2, 0) \to x(z_1, z_2, 0) = (z_1, z_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& y : V \to IR^2 \\
& (z_1, z_2, 0) \to y(z_1, z_2, 0) = (z_1, z_2) \neq (0,0) \\
& (0,0,1) \to x(0,0,1) = (0,0)
\end{aligned}
$$

dönüşümlerini göz önüne alırsak $\{(U,x),(V,y)\}$, M'de bir C^∞ yapı tanımlar. Dikkat edilirse koordinat değişimi $IR^2 - \{(0,0)\}$'da id dir. U üzerinde $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ve V üzerinde $\frac{\partial}{\partial y_1}$ vektör alanları $U \cap V$ üzerinde çakıştıklarından M'de bir X vektör alanı tanımlar.

$$
\begin{aligned}
& c_1 : IR \to M \\
& \quad s \to c_1(s) = (s-1,0,0)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& c_2 : IR \to M \\
& \quad s \to c_2(s) = \begin{cases} (s-1,0,0) & , s \neq 1 \\ (0,0,1) & , s = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

eğrileri X'in $(-1,0,0)$ noktasından geçen birer integral eğrisidir ve $c_1(1) \neq c_2(1)$ olduğundan $IR \cap IR$ üzerinde $c_1 \neq c_2$ dir.

Teorem 3.5.3 gereğince bir Hausdorff manifoldunun, bir vektör alanının verilen bir m noktasından geçen bütün integral eğrilerinin tanım bölgelerinin birleşimi *IR*'nin *J(m)* açık aralığı ile gösterilsin. Buna göre *m*'den geçen bir maksimal integral eğrisi

$$\gamma_m : J(m) \to M$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.5.1'deki integral eğrisi maksimal integral eğrisi olarak alındığında bu lemma aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

***Teorem 3.5.4*:** γ_m, bir Hausdorff manifoldunun bir vektör alanının bir m noktasından geçen maximal integral eğrisi olsun. Eğer $s \in J(m)$ ise $\gamma_m \circ \lambda_s$ eğrisi tanım bölgesi $\lambda_{-s}(J(m))$ olan ve $\gamma_m(s)$ 'den geçen bir maximal integral eğrisidir.

İspat: Lemma 3.5.1'den $\gamma_m \circ \lambda_s$, tanım bölgesi $\lambda_{-s}(J(m))$ olan ve $m' = \gamma_m(s)$'den geçen bir integral eğrisidir. $\gamma_m \circ \lambda_s$ integral eğrisinin maksimal olduğunu göstereceğiz. m''den geçen integral eğrisi $\gamma_{m'}$ olsun. $\gamma_m \circ \lambda_s$, integral eğrisi $\lambda_{-s}(J(m)) \subset J(m')$'de $\gamma_{m'}$ ile çakışır. Buna göre $0 \in J(m)$ olmak üzere $\lambda_{-s}(0) = -s$ olduğundan $-s \in J(m')$ dır. Lemma 3.5.1 gereğince $\gamma_{m'} \circ \lambda_{-s}$, tanım cümlesi $\lambda_s(J(m'))$ olan ve $m = \gamma_{m'}(-s)$ 2den geçen bir integral eğrisidir. Dolayısıyla

$$\lambda_s(J(m')) \subset J(m)$$

dir. O halde

$$\gamma_m \circ \lambda_s : J(m') \to M$$

dir. Yani $\gamma_m \circ \lambda_s = \gamma_{m'}$ dir. Buna göre $\gamma_m \circ \lambda_s$, maksimal integral eğrisidir.

Tanım 3.5.1: *M*, bir Hausdorff manifoldu ve *X*, *M* üzerinde bir vektör alanı olsun. $\forall m \in M$ için $J(m) = IR$ ise *X*'e tamdır denir.

Bir vektör alanının tam olmasıyla ilgili bir kriter aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.5.5: Bir *M*, Hausdorff manifoldu üzerinde bir vektör alanının tam olması için gerek ve yeter şart $0 \in IR$'nin *IR*'de bir *I* komşuluğu vardır öyle ki, herbir maksimal integral eğrisi *I* üzerinde tanımlıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: Tam vektör alanı *IR*'de tanımlı olduğundan ispat aşikardır.

$(\Leftarrow)$: $0 \in IR$'nin *IR*'deki bir *I* komşuluğunda herbir maksimal eğrisi tanımlı olsun. Bu durumda, bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı vardır öyle ki herbir maksimal integral eğrisinin tanım cümlesi $[-\varepsilon, \varepsilon]$ kapalı aralığını kapsar. Kabul edelim ki *X* tam olmasın. Yani $J(m) \neq IR$ olsun. Bir çelişki elde edeceğiz.

i) $J(m)$ bir en küçük üst sınıra sahip olsun. Bu sınırı *b* ile gösterelim ve $m' = \gamma_m(b-\varepsilon)$ diyelim. Teorem 3.5.4 gereğince $J(m') = \lambda_{-b+\varepsilon}(J(m))$ dir. $J(m')$'nin herbir elemanı ε'dan küçüktür. O halde $[-\varepsilon, \varepsilon] \not\subset J(m')$ dir. Bu hipotezle çelişir.

ii) $J(m)$ bir en büyük alt sınıra sahip olsun. Bu sınırı *a* ile gösterelim ve $m'' = \gamma_m(a+\varepsilon)$ diyelim. (*i*)'ye benzer şekilde $[-\varepsilon, \varepsilon] \not\subset J(m'')$ dir. Bu da hipotezle çelişir.

(*i*) ve (*ii*)'den dolayı kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla $J(m) = IR$, yani *X* tam olmak zorundadır.

Teorem 3.5.6: Bir *M*, kompakt Hausdorff manifoldu üzerindeki her vektör alanı tamdır.

İspat: Teorem 3.5.2 gereğince *M*'nin herbir m_0 noktasına *M*'de V_0 komşuluğunu ve *IR*'de 0'ı kapsayan bir J_0 açık aralığını karşılık tutabiliriz öyle ki V_0'ın verilen herhangi bir noktasından geçen ve tanım cümlesi J_0 olan bir integral eğrisi vardır. *M*, kompakt olduğundan bu şekildeki sonlu sayıda V_0'lar ile örtülebilir. Bu durumda bunlara karşılık gelen J_0'ların arakesiti 0'ın bir komşuluğudur ve *M*'nin her bir *m* noktası için $J(m)$ tarafından kapsanır. Teorem 3.5.5 gereğince M üzerindeki her bir vektör alanı tamdır.

Örnek 3.5.2: S^2 bir kompakt Hausdorff manifoldu olduğundan Teorem 3.5.6 gereğince S^2 üzerindeki vektör alanları tamdır. Örneğin, Örnek 3.4.3'te verilen vektör alanları tamdır.

3.6. Bir Alan Vektörünün Akışı

Tanım 3.6.1: Bir *M*, Hausdorff manifoldu üzerinde verilen bir *X* vektör alanının *M*'nin verilen herhangi bir *m* noktasından geçen ve tanım cümlesi $J(m)$ olan bir γ_m maksimal integral eğrisi vardır.

$$D = \{(s,m) \mid s \in J(m)\} \subset IR \times M$$

olmak üzere tanım cümlesi *D* olan

$$\begin{aligned} \phi : IR \times M &\to M \\ (s,m) &\to \phi(s,m) = \gamma_m(s) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. ϕ, fonksiyonuna *X*'in akışı denir [1].

Teorem 3.5.4 gereğince

$$\phi(r+s,m)=\phi(r,\phi(s,m))$$

dir. Bunu aşağıdaki şekilde görebiliriz:

ϕ 'nin tanımından $\phi(r+s,m)=\gamma_m(r+s)$ dir...(I)

Ayrıca

$$\phi(r,\phi(s,m))=\gamma_{\phi(s,m)}(r)=\gamma_{\gamma_m(s)}(r)$$

dir. Teorem 3.5.4 gereğince

$$\gamma_m : J(m)\to M$$

m'den geçen bir integral eğrisi ise $s\in J(m)$ için

$$\gamma_m\circ\lambda_s : \lambda_{-s}(J(m))\to M$$

de $\gamma_m(s)$ 'den geçen bir integral eğrisidir. Yani $\gamma_m(s)=m'$ ise $\gamma_{m'}=\gamma_m\circ\lambda_s$ dir. Buradan

$$\gamma_{\gamma_m(s)}=\gamma_m\circ\lambda_s$$
$$\gamma_{\gamma_m(s)}(r)=(\gamma_m\circ\lambda_s)(r)=\gamma_m(s+r)$$

olup $\phi(r,\phi(s,m))=\gamma_m(s+r)$ dir…(II)

(I) ve (II) den

$$\phi(r+s,m)=\phi(r,\phi(s,m))$$

elde edilir.

Bir akışın aşağıdaki lokal özelliği Teorem 3.5.1'in ikinci kısmının bir sonucudur.

Lemma 3.6.1: Bir *M*, Hausdorff manifoldu üzerinde bir vektör alanının akışı; *m*, *M*'nin verilen herhangi bir noktası olmak üzere $(0, m)$'nin bir komşuluğu üzerinde dif.bilirdir.

Bu lemma aşağıdaki global teoreme genişletilebilir.

Teorem 3.6.1: Bir *M*, Hausdorff manifoldu üzerinde bir vektör alanının akışı bir dif.bilir bir fonksiyondur.

İspat: $m_0 \in M$ ve

$$S = \{s \in J(m_0) \mid \phi, (s, m_0)\text{'da dif.bilir}\}$$

olsun. Lemma 3.6.1 gereğince en azından $0 \in S$ olduğunda $S \neq \emptyset$ dir. $J(m_0) \subset IR$ olduğundan $J(m_0)$'ı, *IR*'nin alt cümle topolojisiyle ele alalım. İspat için *S*'in $J(m_0)$'da hem açık hem de kapalı olduğunu gösterelim.

Önce *S*'nin açık olduğunu gösterelim. Lemma 3.6.1 gereğince $s \in S$ olmak üzere $(0, \phi(s, m))$'nin bir komşuluğunda ϕ,dif.bilirdir. 0'ın V_1, $\phi(s, m) = \gamma_m(s)$'in U_1 komşulukları $V_1 \times U_1$'de ϕ dif.bilir olacak şekilde seçilsin.

$$\phi(0, \phi(s, m)) = \phi(0 + s, m) = \phi(s, m)$$

ve $s \in V_1$ dir. Yani V_1, $s \in S$'nin de bir komşuluğudur. Benzer şekilde $\phi(s, m) \in U_1$ dir. O halde *S* açıktır.

Şimdi S'nin kapalı olduğunu gösterelim. S'nin kapanışı $\overline{S}$ olmak üzere, $\overline{S}$'de herhangi bir $\overline{s}$ noktasını alalım. $m_1 = \phi(\overline{s}, m_0)$ olmak üzere $(0, m_1)$ noktasına Lemma 3.6.1'i uygulayalım. ϕ, $J \times V$ üzerinde dif.bilir olacak şekilde 0'ın bir J komşuluğu ve m_1'in bir V komşuluğu vardır.

$$s \to \phi(s, m_0)$$

integral eğrisi sürekli olduğundan $\overline{s}$'nin bir N komşuluğu eğer $s' \in N$ ise $\phi(s', m_0) \in V$ olacak şekilde vardır. s' noktasını $\overline{s} - s' \in J$ olacak şekilde seçelim ($\overline{s} \in \overline{S}$ olduğundan bu seçim yapılabilir). Böylece $s' \in S$ dir.

$s' \in S$ olduğundan $Domf = D = J \times V$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f &: IR \times M \to IR \times M \\ &(s, m) \to f(s, m) = (s - s', \phi(s', m_0)) \end{aligned}$$

fonksiyonu $(\overline{s}, m_0)$'da dif.bilirdir. Buna göre $\overline{s} - s' \in J$ ve $\phi(s', m_0) \in V$ olduğundan ϕ, $(s - s', \phi(s', m_0))$'da dif.bilirdir. Ayrıca, $\phi(r + s, m) = \phi(r, \phi(s, m))$ olduğundan

$$\phi(\overline{s} - s', \phi(s', m_0)) = \phi(\overline{s}, m_0)$$

dir. Buradan $\phi \circ f = \phi$ ve ϕ, $(\overline{s}, m_0)$'da dif.bilirdir. O halde $\overline{s} \in S$ dir. Öyleyse $\overline{S} \subset S$ olup $\overline{S} = S$ dir. Yani S, kapalıdır.

Sonuç olarak S, $J(m_0)$'ın hem açık hem de kapalı alt cümlesi olduğundan $S = J(m_0)$ dır.

***Teorem 3.6.2*:** X, bir M manifoldunda bir vektör alanı ve $X_m \neq 0$ ise m'de $X = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ olacak şekilde bir x haritası vardır.

***İspat*:** Teorem 3.6.1'i kullanılabilmek için M'yi bir Hausdorff manifoldu kabul edelim. X, M üzerinde bir vektör alanı olsun.

$$y(m) = 0 \text{ ve } \left\{ X_m, \frac{\partial}{\partial y_2}|_m, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}|_m \right\}$$

$T_m M$ 'nin bir bazı olacak şekilde M'nin bir y haritasını seçelim. ϕ, X vektör alanının akışı olsun.

$$f : IR^n \to M$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \to f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \phi(a_1, y^{-1}(0, a_2, \ldots, a_n))$$

fonksiyonu $0 \in IR^n$'in bir komşuluğunda dif.bilirdir ve $f(0) = m$ dir. Şimdi invers fonksiyon teoremini kullanarak f'in $0 \in IR^n$'in bir komşuluğunda diffeomorfizm olduğunu göstereceğiz.

IR^n'de $w = id$ haritasını kullanalım. c_1 verilen bir $a \in IR^n$ noktasından geçen w_1-koordinat eğrisi (w_1-parametre eğrisi) olsun.

$$c_1 : IR \to IR^n$$
$$t \to c_1(t) = w^{-1}(t + a, 0, \ldots, 0) = (t + a, 0, \ldots, 0)$$

dır.

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial w_1}|_a\right) = f_*\left(c_1'(0)\right) = \frac{dk_1}{dt}|_0$$

dır. Burada $k_1 = f \circ c_1$ dir. k_1, X'in $f(a)$'dan geçen bir integral eğrisidir. Gerçekten, X'in akışı

$$\phi : J \times V \to M$$

olsun (Burada $0 \in J$ ve $m \in V$ dir). Biliyoruz ki

$$\phi(t + a, m) = \phi(t, \phi(a, m)) = \gamma_{\phi(a,m)}(t)$$

dir. Buna göre

$$\gamma_m : J \to M$$
$$t \to \gamma_m(t) = \phi(t, m)$$

X'in m'den geçen bir integral eğrisidir. O halde

$$\gamma_m \circ \lambda_a : \lambda_{-a}(J) \to M$$

X'in $\phi(a,m)$'den geçen bir integral eğrisidir. Buna göre

$$\begin{aligned}(\gamma_m \circ \lambda_a)(t) &= \gamma_m(t+a) = \phi(t+a,m) \\ &= f\left(t+a, y^{-1}(0,\ldots,0)\right) \\ &= f(t+a,0,\ldots,0) \\ &= f(c_1(t)) \\ &= k_1(t)\end{aligned}$$

dir. O halde k_1, X'in $\phi(a,m) = \phi\left(a, y^{-1}(0,\ldots,0)\right) = f(a,0,\ldots,0)$'dan geçen integral eğrisidir. Bu durumda

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial w_1}|_a\right) = X(f(a))$$

dır ve özellikle

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial w_1}|_0\right) = X_m$$

dir. Eğer $c_i\ (i = 2,3,\ldots,n)$, 0'dan geçen w_i-koordinat eğrisi (w_i-parametre eğrisi) ise

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial w_i}|_0\right) = \frac{dk_i}{dt}|_0 \ , \ (i = 2,3,\ldots,n)$$

dır. Burada $k_i = f \circ c_i$ dir. Bu durumda k_i, m'den geçen y_i-koordinat eğrisidir ve

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial w_i}|_0\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}|_m \ , \ (i = 2,3,\ldots,n)$$

dir. Öyleyse f_*, bazı baza dönüştüren bir izomorfizmdir. Buna göre invers fonksiyon teoremi gereğince

$$f|_V : V \subset IR^n \to U \subset M$$

bir diffeomorfizmdir. Sonuç olarak $\left(U, x = (f|_V)^{-1}\right)$, M'nin bir haritasıdır.

Verilen bir p noktası için $x(p)=a$ olmak üzere p'den geçen x_1 – parametre eğrisidir. Burada

$$\begin{aligned} s \to f(a_1+s,a_2,\ldots,a_n) &= \phi(a_1+s,y^{-1}(0,a_2,\ldots,a_n)) \\ &= \phi(s,\phi(a_1,y^{-1}(0,a_2,\ldots,a_n))) \\ &= \phi(s,f(a_1,a_2,\ldots,a_n)) \\ &= \phi(s,p) \end{aligned}$$

dir (Burada $x(p)=(f\,|_V)^{-1}(p)=a$ dır). Buna göre $s \to f(a_1+s,a_2,\ldots,a_n)$, X'in p'den geçen bir integral eğrisidir. Böylece,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p = X_p$$

dir. Yani x, M'nin istenilen özellikteki bir haritasıdır.

Şimdi bu sonucu ,Hausdorff olmayan bir M manifolduna genişletelim. Öncelikle , m'nin X'in tanım cümlesinde yatan bir U koordinat komşuluğunu seçelim. $j:U \to M$ doğal 1:1 dönüşüm olmak üzere U, standart açık altmanifold yapısıyla bir Hausdorff manifoldudur ve U üzerinde X'e j-bağlı olan bir Y vektör alanı vardır. m'de U'nun bir y haritasını y'nin V tanım cümlesi üzerinde $Y=\dfrac{\partial}{\partial y_1}$ olacak şekilde seçebiliriz ((V,y), U'nun m'de bir haritasıdır). U, Hausdorff manifoldu olduğundan bu durum yukarıda ispat edildi. Buna göre $x \circ j = y$ olmak üzere (V,x), M'nin bir haritasıdır ve V üzerinde $X=\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ dir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, diferensiyellenebilir manifold kavramı ele alınarak manifoldun topolojik yapısı incelenmiştir. Ayrıca manifold üzerinde türev ve vektör alanları kullanılarak I. mertebeden diferensiyel denklemler ele alınmış ve örneklerle somutlaştırılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Clark, R. S. and Brickell F., Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

2. Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri I. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1995.

3. Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1982.

4. Yıldız, C., Topoloji, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Ankara 1999.