T. C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

SELİM ERASLAN

ŞUBAT 2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünün onayı

Bu Tezin Yüksek Lisans Tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Anabilim Dalı Başkanı

Bu Tezi Okuduğumuzu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

<u>Tez Jürisi Üyeleri</u>

Prof.Dr. Kerim KOCA

Prof.Dr. Binali MUSAYEV

Yard.Doç.Dr. Ali FİLİZ

ÖZET

LİNEER OLMAYAN DİFÜZYON DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

ERASLAN, Selim

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Binali MUSAYEV

Şubat 2005, 96 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde bir sonraki bölümde kullanılacak temel kavramlar ele alınmıştır. Üçüncü bölümde öncelikle bir boyutlu difüzyon (yayılım) denklem teorisi incelendi. Başlangıç ve sınır koşullarına bağlı çözümler elde edildi. Ayrıca bir elemanın (ısı veya nem gibi) difüzyonda bulunduğu ve difüzyon katsayısının da sabit olmayıp bu elemana bağlı olduğu lineer olmayan özel bir difüzyon ele alınarak bir yaklaşım serisi elde edildi. Buna bağlı olarak, lineer olmayan difüzyon denklemi için periyodik üç farklı sınır koşulu ele alındı ve bu sınır koşulları için sıcaklık ortalamalarındaki değişimler açık olarak hesaplandı. Ayrıca, lineer olmayan difüzyon için sıcaklık ortalamasındaki değişim, basamak ve impuls fonksiyonları kullanılarak da incelendi. Yöntem, doğrudan Dirac-δ fonksiyonunun kullanımını içermekte olup, yaklaşımın doğruluğu, basamak fonksiyonları dizisinin ortalamalarıyla da karşılaştırıldı. Daha sonra, iki elemanın difüzyonda bulunduğu (aynı anda ısı ve nemin toprağa akması gibi) ve katsayısının da sabit olarak alındığı lineer çift difüzyon olan ikinci ek çalışma yapıldı. Bu denklem, her bir çift değişken için $\boldsymbol{\Lambda}$ matrisinin spektral analizi yardımıyla çözüldü ve bu çözüm, matris ve vektör metotlarının kullanımıyla daha da basitleştirildi.

Anahtar Kelimeler: Isı veya difüzyon denklemi, lineer difüzyon, lineer olmayan difüzyon, çift difüzyon

ABSTRACT

THE SOLUTION METHODS IN NON LINEAR DIFFUSION EQUATIONS

ERASLAN, Selim

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Binali MUSAYEV

February 2005, 96 Pages

This thesis consist of four sections. The first section is reserved for introduction. In the second section, we give basic concepts that we use in the following sections. In the third section, initially we outline the theory of the one-dimensional diffusion equation. The solutions are derived under initial and boundary conditions. We deal with non-linear individual diffusion, in which only one agent diffuses but the diffusion coefficient is no longer constant but depends on the diffusing agent and find a series approximation solution for non-linear individual diffusion. It is taken three different boundary conditions for the non-linear diffusion equation and then we calculate explicitly the increase in means for these different forms of periodic boundary conditions. It is investigated the increase in means under a step function and an impulse function for non-linear diffusion. The approach is to use Dirac-δ function directly and also to confirm this approach by means of a sequence of step functions. It is discussed the second extension which is linear coupled diffusion, that is, the diffusion coefficients are now taken as constant. The main application of this type of equation is in the simultaneous flow of heat and moisture in soil. It is solved for each of the two coupled variables with the aid of spectral decomposition of the matrix $\mathbf{\Lambda}$ and simplified by the use of matrix and vector methods.

Key Words: Heat or diffusion equation, linear diffusion, non-linear diffusion, coupled diffusion.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bana zaman ayırıp her türlü yakın ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Binali MUSAYEV'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam esnasında beni her durumda destekleyen eşime ve çocuklarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Kaynak Özetleri

Temel Kavramlar için Arpaci, V. S., "*Conduction of Heat Transfer*", Bayley, F. J. ve diğerleri, "*Heat Transfer*", Carslaw", H. S. ve Jaeger, J. C., "*Conduction of Heat in Solids*", Cary, J.W. ve Taylor, "T*he Simultaneous Diffusions of Heat and Water Vapor*", Crank, J., "*Mathematics of Diffusion*", De Varies, D. A., "*Simultaneous Transfer of Heat and Moisture in Porous Media*", Eckert, E. R. G. ve Drake, R. M., "*Analysis of Heat and Mass Transfer*", Ozisik, M. N., "*Basic Heat Transfer*", Ozisik, M. N., "*Heat Conduction*, Williams", W.E., "*Partial Differential Equations*", Wardbrown, J. ve Churchill, R.V., "*Fourier Series and Boundary Value Problems*", Kovach, L.D., "*Boundary-Value Problems*", Kato, T., "*Perturbation Theory for Linear Operators*" kitaplarından faydalanılmıştır. Ayrıca temel olarak Shepherd, R. ve Wiltshire, R. J., "*A Periodic Solution to a Non-linear Diffusion Equation*" ve "*Spectral Decompositions in Non-linear Diffusion*", Wiltshire, R. J., "*An Example of Coupled Diffusion*" adlı makaleleriden ve Shepherd, R., "*Coupled Non-linear Diffusion under Periodic Boundary Conditions*" adlı doktora tezinden yararlanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Isı transferi geniş kapsamlı bir konu olduğundan çalışmamızda öncelikli olarak bir boyutlu temel ısı difüzyon denklemini farklı başlangıç ve sınır koşullarında çözmeyi; bu temel teori yardımıyla difüzyon katsayısının difüzyonda bulunan elemana bağlı olduğu lineer olmayan difüzyonu incelemeyi; lineer olmayan difüzyon için periyodik farklı sınır koşulları altında sıcaklık ortalamalarındaki değişimi ve son olarak da iki elemanın eş zamanlı olarak difüzyonda bulunduğu difüzyon çiftini incelemeyi amaçladık.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Temel Teori

Bu bölümde bir boyutlu difüzyon denklem teorisi ele alındı. Bölüm, temel teori ve onun ekleri olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Bu tezde, temel teori ile çözülemeyen iki yeni ek çalışma olan *lineer olmayan difüzyon katsayısı* ve *çift yayılım altındaki difüzyon problemlerinin çözümü* üzerinde odaklanılmaktadır. Bu bölümün amacı, ek çalışmaların temel teori ile ilgisini açıklamak ve kullanılacak yöntemleri belirlemektir.

2.1.1. Difüzyon Denkleminin Fiziksel Oluşumu

Isı veya difüzyon denklemi uygulamalı fizik ve matematikte kısmi diferensiyel denklemlerin çok önemli konularından biri olup, ısı iletimi, nem yayılımı, genetik problemleri ve transistör teorisinde kullanılmaktadır(4,19,22). Bu tezde ısı ve nem yayılımı ayrı ayrı ve eş zamanlı olarak ele alınmıştır.

2.1.1a Isı Transferi

Isı transferi sıcaklık değişimi yoluyla gerçekleşir. Isı transferinin fiziksel ve matematiksel teorisi ilk defa bir Fransız matematik ve fizikçisi olan Joseph Fourier tarafından 1803 yılında ortaya konmuştur(19). Bu teori daha sonra detaylı olarak Ozisik(28), Schneider(32), Carslaw ve Jaeger(8), Arpaci(2), ve Eckert ve Drake(14) tarafından çalışıldı. Özellikle Carslaw ve Jaeger konuyu soyut olarak incelerken, Arpaci gibi diğer yazarlar ise, ısı yayılımının daha çok mühendislikte fiziksel sonuçlar veren alanları üzerinde yoğunlaştılar. Aşağıda ısı iletim denkleminin üç boyuttaki elde edilişi verilmektedir. Isı iletimindeki Fourier kuralına [28] göre ısı akışı ve sıcaklık arasındaki ilişki

$$\vec{q}(r,t) = -k\nabla T(r,t) \tag{2.1}$$

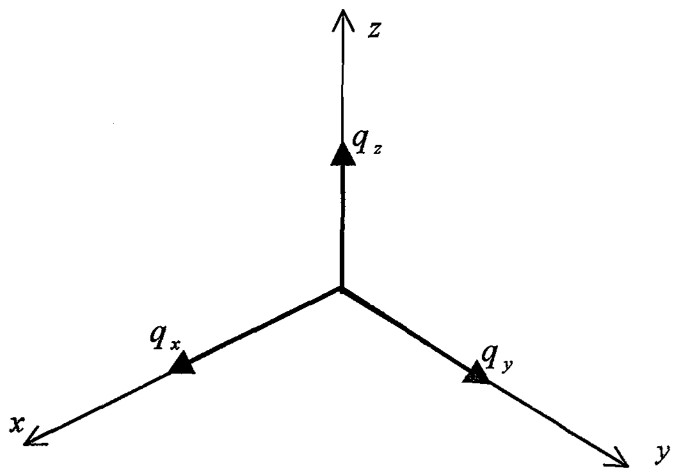
denklemiyle ifade edilmektedir. Burada, $\vec{q}(r,t)$ ısı akış vektörüdür. Bu vektör, azalan ısı yönünde izotermal yüzeyin birim alanındaki birim zamanda geçen ısı akışını ve k maddenin ısıyla ilgili öz iletkenliğini ifade etmektedir. (2.1) denklemi dik koordinat sisteminde

$$\vec{q}(x,y,z,t) = -\vec{i}\,k\frac{\partial T}{\partial x} - \vec{j}\,k\frac{\partial T}{\partial y} - \vec{k}\,k\frac{\partial T}{\partial z} \tag{2.2}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $\vec{i}, \vec{j}$ *ve* $\vec{k}$ sırasıyla x, y *ve* z yönlerindeki birim doğrultu vektörleridir. Aşağıda, Şekil 2.1'de görüldüğü gibi doğrultuya bağlı ısı akış vektörünün üç bileşeni

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{ve} \quad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z} \tag{2.3}$$

biçiminde ifade edilir.

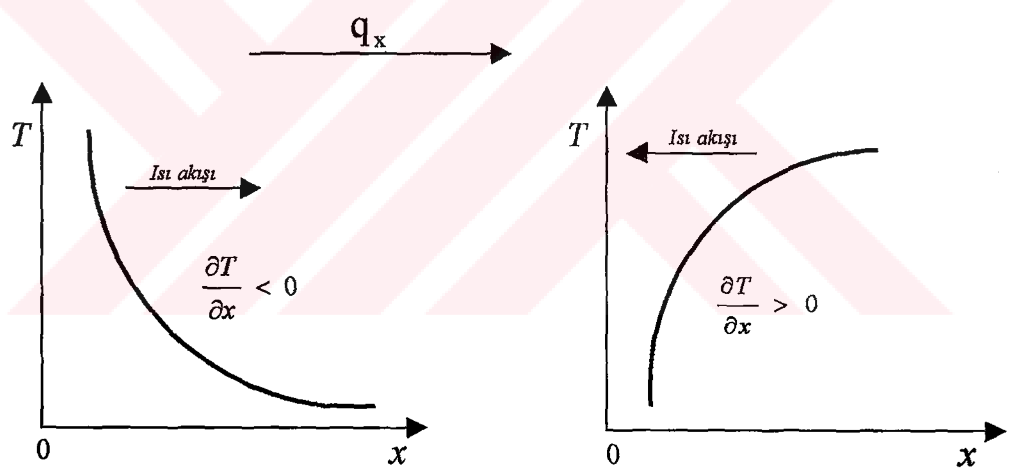


Şekil 2.1. Isı akış vektörünün doğrultuya bağlı olarak bileşenleri q_x , q_y ve q_z.

Bu çalışmada sadece bir boyutlu ısı akışı incelenmektedir. Isının üç boyutlu uygulama yöntemleri literatürde hiçbir yerde görülmedi. Yapılan çalışmanın bu yönde genişletilmesi faydalı olacaktır. x doğrultusunda bir boyutlu ısı difüzyon denklemi

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.4}$$

biçimindedir. (2.4) denklemi Şekil 2.2'de görüldüğü gibi doğrudan doğruya ısı akış vektörünün birinci bileşeni q_x sıcaklık düşümü $\frac{\partial T}{\partial x}$ ile doğru orantılıdır. Denklemdeki eksi işareti, ısının daha yüksek sıcaklık bölgesinden daha alçak sıcaklık bölgesine taşındığını göstermektedir.



Şekil 2.2. Bir boyutlu ısı iletimi

Yüzeydeki bir x noktasından geçip hacimli bir ortama doğru ısı akış miktarı

$$q_x \Delta y\, \Delta z \equiv Q_X, \tag{2.5a}$$

bir hacim elemanından yüzeyi geçip $(x+\Delta x)$ noktasından dışarı ısı akış miktarı ise

$$Q_X + \frac{\partial Q_X}{\partial x}\Delta x \tag{2.5b}$$

ile ifade edilmektedir. Bir hacim elemanına giriş yapan net ısı miktarı ise

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x = -\frac{\partial q_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{2.6}$$

ile ifade edilmiştir. Burada $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, son derece küçük hacimli bir ortamdır. Eğer ortamda enerji yayan kaynaklar varsa ortamdaki enerji üretiminin miktarı

$$g(x,t)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{2.7}$$

dır. Burada $g(x,t)$, birim zaman ve birim hacimdeki ısı üretim miktarını ifade etmektedir. Katı ve sıvılarda, sabit basınç ve sabit hacim altındaki özel ısılar, $c_p \cong c_v \equiv c$ ile verilmiştir[27]. Eğer ρ ve c_p zamanla değişmiyorsa iç enerji miktarındaki artış, hacim elemanında depolanmış enerji miktarında yansıtılmıştır ve

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{2.8}$$

şeklinde ifade ediliyor. Burada ρ ısının yayıldığı ortamın yoğunluğunu göstermektedir. Şimdi çalışılan hacim elemanı için enerji denge denklemi

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z + g(x,t)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \tag{2.9}$$

dır. Eşitliğin bütün terimleri $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ e bölünürse,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + g \tag{2.10}$$

elde edilir. (2.4) ifadesi, (2.10) da yerine yazılırsa,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + g \tag{2.11}$$

bir boyutlu ısı denklemi bulunur. Burada $T \equiv T(x,t)$ ve $g \equiv g(x,t)$ şeklindedir. (2.11) ifadesi düzenlenirse

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{g}{k} \tag{2.12}$$

elde edilir. Burada $\alpha = \dfrac{k}{\rho c_p}$ termal yayılım katsayısıdır. Eğer ısı kaynakları yoksa $g = 0$ olarak alınır ve (2.12) ifadesi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.13}$$

şekline gelir ki bu denklem, *Fourier ısı yayılımı* veya *difüzyon denklemi* olarak isimlendirilir.

2.1.1b Nem Transferi

Philip[30]; Philip ve De Vries[29]; De Vries ve Afgan[13]; Jury ve Miller[23]; Smith[37]; Jones ve Kohnke[21]; Gurr ve diğerleri[16]; Hadley ve Eisenstadt[18] gibi birçok araştırmacı, fizikte sıcaklık değişimi altında gözenekli (süngerimsi) ortamda nem transferiyle ilgilendiler. Philip ve De Vries, birleştirilmiş ısı ve su içeren değişimlerin etkisi altında buhar ve sıvının süngerimsi ortamdaki hareketi için genelleştirilmiş iletim denklemlerini elde ettiler.

Şaşırtıcıdır ki, nem transferi iki aşamada gerçekleşmektedir. Gözenekli bir ortamdaki basınç, sıvıyı buhara çevirmek için yeterli büyüklükte olabilir ve böylece nem, sıvı ve buhar gibi tutularak transfer edilir. Bu alanda en eski bildiriler yüzyılın sonunda Buckingham[7] tarafından sunulmuştur. Sıvı akış teorisi ilk olarak Darcy[11] tarafından formülleştirildi. Sıvı akış denklemi Philip tarafından

$$\frac{q_{liq}}{\rho_{liq}} = -D_{\theta_{liq}} \nabla\theta - D_{T_{liq}} \nabla T - Ki \tag{2.14}$$

denklemi ile verilmiştir. Burada,

q_{liq} : Sıvı akışı, miktarının birimi ise $gcm^{-2}sn^{-1}$,

ρ_{liq} : Sıvı akış yoğunluğu, g/cm^3,

$D_{\theta_{liq}}$: Sıvı nem yayılımı, cm^2/sn ($D_{\theta_{liq}} = K\dfrac{d\psi}{d\theta}$, ψ, nem potansiyeli, cm),

θ : Toplam hacimsel nem muhtevası,

$D_{T_{liq}}$: Termal sıvı yayılımı, $cm^2 sn^{-1}\ {}^0C^{-1}$ ($D_{T_{liq}} = K\gamma\psi$, γ, yüzey geriliminin sıcaklık katsayısı ${}^0C^{-1}$),

T : Sıcaklık, ${}^0C$,

K : Doymamış hidrolik öz iletkenlik (θ nın fonksiyonu), cm/sn,

i : Pozitif düşey doğrultuda birim vektör.

Benzer olarak *buhar akış* denklemi de

$$\frac{q_{vap}}{\rho_{liq}} = -D_{\theta_{vap}}\nabla\theta - D_{T_{vap}}\nabla T \tag{2.15}$$

olarak ifade edilmiştir. Burada,

q_{vap}: Buhar akışı, miktarının birimi ise $gcm^{-2}sn^{-1}$,

$D_{\theta_{vap}}$: Buhar nem yayılımı, cm^2/sn,

$D_{T_{vap}}$: Termal buhar yayılımı, $cm^2 sn^{-1}\ {}^0C^{-1}$

(2.14) ve (2.15) birleştirilirse

$$\frac{q_m}{\rho} = -D_\theta\nabla\theta - D_T\nabla T - Ki \tag{2.16}$$

elde edilir. Burada,

$$q_m = q_{liq} + q_{vap}\,;\ (\ D_\theta = D_{\theta_{liq}} + D_{\theta_{vap}}\ \ ;\ \ D_T = D_{T_{liq}} + D_{T_{vap}}\ ) \tag{2.17}$$

dır. (2.16) ifadesinden birleştirilmiş nem ve sıcaklık değişimleri altında, gözenekli ortamdaki nem hareketinin

$$-\nabla.\left(\frac{q_m}{\rho}\right)=\frac{\partial\theta}{\partial t}=\nabla.\left(D_\theta\nabla\theta\right)+\nabla.\left(D_T\nabla T\right)+\nabla.(Ki) \tag{2.18}$$

biçimindeki genel denklemine ve sıcaklık değişimleri çok küçük ve ihmal edilebilir olduğu zaman ise (2.18) ifadesi

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(D_\theta\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)+\frac{\partial K}{\partial z} \tag{2.19}$$

şeklinde basit bir forma indirgenir. Bu denkleme, *bir boyutlu kısmi diferensiyel nem difüzyon denklemi* denir. Şimdi genel bir tekrar olarak sırasıyla, bir boyutlu ısı denklemini, bir boyutlu nem denklemini ve de (2.19) daki son terim küçük olduğunda çift elemanın akış denklemini birlikte verebiliriz. Bunlar,

i) $\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial T}{\partial t}$,

ii) $\dfrac{\partial\theta}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(D_\theta\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)+\dfrac{\partial K}{\partial z}$,

iii) $\dfrac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}T\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ r & s\end{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix}T\\ \theta\end{bmatrix}$ $\qquad (a, b, r, s \in IR)$.

2.1.2. Başlangıç ve Sınır Koşulları

Şimdi, Cauchy, yarı-Cauchy ve periyodik yarı-Cauchy koşullarını göz önünde bulundurulacaktır. Bu terimler başlangıç ve sınır şartlarının birleşimleriyle ilişkili olup aşağıda tanımlanacaktır. Green fonksiyonlarının kullanılmasıyla her biri için tam bir çözüm mevcuttur. Burada konu ile ilgili Green fonksiyonlarından yararlanılacaktır. Ayrıca, yeterli zaman geçtiğinde periyodik başlangıç şartının tesirini yitirmesi sonucu ortaya çıkan periyodik durumlar da göz önünde bulundurulacaktır.

2.1.2a Cauchy Koşulları

Matematiksel olarak (2.13) ün çözümü, hiçbir sınır şartı olmaksızın tüm $-\infty < z < +\infty$ reel ekseninde sadece başlangıç sıcaklığının belirtilmesiyle mümkündür. Cauchy koşulları, fiziksel uygulamalar açısından çok büyük öneme sahiptir. Kuantum mekaniğindeki Schrodinger denklemi, biçimsel olarak difüzyon denklemine benzer. Doğal olarak Cauchy koşulları bir atomun fiziksel boyutuyla atomlar arası mesafelerin geniş olarak karşılaştırılmasına kadar kullanılan bir konudur.

Bununla birlikte burada genellikle fiziksel problemlerin $\pm\infty$ daki genel durumları göz önünde bulunduruldu. Çok basit durumda, $f(z)$ nin başlangıç sıcaklık değişimi $z \to \pm\infty$ için sıfıra yaklaştığı kabul edilecektir. Bu, başlangıçta tüm z ler için yeterince büyük ve sıcaklık için yaklaşık olarak sıfır oluyor demektir. Fiziksel olarak sıcaklık, $z \to \pm\infty$ için tüm zamanlarda sıfıra yaklaşır. Bu durumda, $t > 0$ için ortam sıcaklığının belirlenmesi ile ilgileniyoruz. $-\infty < z < +\infty$ ve $t > 0$ için ısı difüzyon denkleminin matematiksel formülü

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.20a}$$

ile veriliyor. Başlangıç ve sınır koşulları ise

$$T(z,0) = f(z), \qquad -\infty < z < +\infty \text{ için} \tag{2.20b}$$

$$T(-\infty,t) = 0 \quad \text{ve} \quad T(+\infty,t) = 0$$

dır. Sonsuz ortamın $f(z)$ başlangıç sıcaklığı z ye bağlı olup sabit değildir. (2.20a) nın

$$T(z,t) = F(z)G(t) \tag{2.21}$$

formunda çözümünü arayalım. Burada $F(z)$ değişken uzaklık fonksiyonudur. (2.21), (2.20a) da yerine yazılır ve her iki taraf $\kappa G(t)F(z)$ ile bölünürse

$$\frac{\dot{G}(t)}{\kappa G(t)} = \frac{F''(z)}{F(z)} = -p^2 \tag{2.22a}$$

elde edilir. Burada p ayırma sabitidir. Buradan

$$\frac{dG(t)}{dt} + \kappa p^2 G(t) = 0, \qquad \frac{d^2F(z)}{dz^2} + p^2 F(z) = 0 \tag{2.22b}$$

yazılabilir. Bu denklemin çözümleri sırasıyla

$$G_p(t) = e^{-\kappa p^2 t} \tag{2.23a}$$

ve

$$F_p(z) = A(p)\cos(pz) + B(p)\sin(pz) \tag{2.23b}$$

dır. Burada A ve B bilinmeyen keyfi parametreler olup ve p ye bağlıdır. Eğer (2.23a) ve (2.23b) ifadeleri (2.21) de yerine yazılırsa

$$T_p(z,t) = e^{-\kappa p^2 t}\left[A(p)\cos(pz) + B(p)\sin(pz)\right] \tag{2.24}$$

elde edilir ki bu denklem, (2.20a) nın p parametresinin her bir değeri için bir özel çözümüdür. O halde (2.24) ün sağ tarafının IR reel sayılar üzerinden p parametresine göre integrali alınırsa elde edilen sonuç (2.20a) nın çözümü olacaktır. Buradan

$$T(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_p(z,t)\,dp = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\kappa p^2 t}\left[A(p)\cos(pz) + B(p)\sin(pz)\right]dp \tag{2.25}$$

çözümü elde edilir. (2.25) eşitliğine (2.20b) başlangıç koşulu uygulanırsa

$$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[A(p)\cos(pz)+B(p)\sin(pz)\right]dp \tag{2.26}$$

olur. Eğer $f(z)$ nin Fourier ve Ters Fourier Dönüşümleri mevcut ise bu durumda (2.26) daki integralin Fourier integrali ile karşılaştırılması sonunda

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\cos p(z-v)\,dv\,dp$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos(pz)\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\cos(pv)\,dv+\sin(pz)\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\sin(pv)\,dv\right]dp \tag{2.27}$$

yazılabilir. Bu formül, (2.26) ile karşılaştırılırsa $A(p)$ ve $B(p)$ parametreye bağlı katsayıları için

$$A(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\cos(pv)\,dv\ , \qquad B(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\sin(pv)\,dv \tag{2.28}$$

eşitlikleri bulunur. (2.28) ifadeleri (2.24) de yerine yazıldıktan sonra elde edilen ifade (2.25) de yerine yazılırsa

$$T(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\kappa p^2 t}\,f(v)\cos p(z-v)\,dv\,dp$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\kappa p^2 t}\,f(v)\cos p(z-v)\,dv\,dp \tag{2.29a}$$

veya

$$T(z,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\int_{0}^{+\infty}e^{-\kappa p^2 t}\cos p(z-v)\,dp\,dv \tag{2.29b}$$

elde edilir. Ayrıca iyi bilinen

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-\kappa p^2 t}\cos p(z-v)\,dp=\sqrt{\frac{\pi}{4\kappa t}}\;e^{-\frac{(z-v)^2}{4\kappa t}}$$

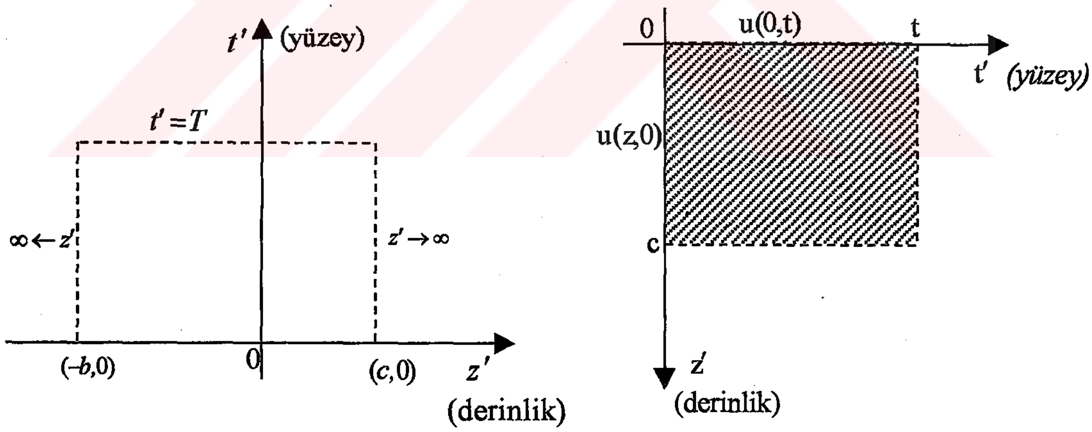
eşitliği (2.29b) de kullanılırsa

$$T(z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, e^{-\frac{(z-v)^2}{4\kappa t}}\, dv \tag{2.30}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\; e^{-\frac{(z-v)^2}{4\kappa t}}$ çekirdeği Cauchy koşulları için Green çekirdeğidir yani Green fonksiyonudur.

2.1.2b Yarı Cauchy Koşulları

Bu bölümde $0<z<+\infty$ aralığında yarı sonsuz bir ortam için bir boyutlu ısı iletimini göz önünde bulundurarak, $t>0$ için ortamın sıcaklığını belirlemeye çalışıyoruz. Burada başlangıç ve sınır koşulları belirli olduğuna göre $u_t=\kappa\, u_{zz}$ ısı difüzyon denklemi $u(z,0)=f(z)$ ve $u(0,t)=g(t)$ keyfi başlangıç ve sınır şartlarıyla veriliyor.



Şekil 2.3.

Bu problemin çözümünü Green fonksiyonu yardımıyla elde etmeye çalışalım. Aşağıda ***u*** çözüm, **v** Green fonksiyon olacaktır. Şimdi $u(z,t)$ çözümünü bulalım.

$$\mathrm{v}\, p_2 u - u\, p_3 \mathrm{v} = \left(\mathrm{v} u_{z'} - u\, \mathrm{v}_{z'}\right)_{z'} - \left(u\, \mathrm{v}\right)_{t'} \tag{2.31a}$$

olduğundan

$$v(z,t,z',t')\left(\frac{\partial^2 u(z',t')}{\partial z'^2}-\frac{\partial u(z',t')}{\partial t'}\right)-u(z',t')\left(\frac{\partial^2 v(z,t,z',t')}{\partial z'^2}+\frac{\partial v(z,t,z',t')}{\partial t'}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial z'}\left(v\frac{\partial u}{\partial z'}-u\frac{\partial v}{\partial z'}\right)-\frac{\partial}{\partial t'}(uv) \qquad (2.31b)$$

yazılabilir. Burada

$$p_2 u = u_{z'z'} - u_{t'}, \qquad p_3 v = v_{z'z'} + v_{t'}, \qquad v(z,t,z',t') = G(z,t,z',t')$$

dir ve p_3, p_2 ye eşlenik operatördür. (2.31b) denkleminin Şekil 2.3'de gösterilen bölge boyunca integral alınır ve yüzey için Green teoremi uygulanırsa

$$\iint\left\{v(z,t,z',t')\left(\frac{\partial^2 u(z',t')}{\partial z'^2}-\frac{\partial u(z',t')}{\partial t'}\right)-u(z',t')\left(\frac{\partial^2 v(z,t,z',t')}{\partial z'^2}+\frac{\partial v(z,t,z',t')}{\partial t'}\right)\right\}dz'dt'=$$

$$\int_0^t\left(v\frac{\partial u}{\partial z'}-u\frac{\partial v}{\partial z'}\right)_{z'=c}dt'-\int_0^t\left(v\frac{\partial u}{\partial z'}-u\frac{\partial v}{\partial z'}\right)_{z'=0}dt'+\int_0^c(uv)_{t'=0}\,dz'-\int_0^c(uv)_{t'=t}\,dz' \qquad (2.32)$$

elde edilir. Williams[39] tarafından verilen

$$G(z,t,z',t')=\frac{-1}{2\sqrt{\pi(t-t')}}\left\{e^{\frac{-(z-z')^2}{4(t-t')}}-e^{\frac{-(z+z')^2}{4(t-t')}}\right\}$$

fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $G(z,t,0,t')=0$,

ii) $\lim\limits_{c\to+\infty} G(z,t,c,t')=0$,

iii) $\lim\limits_{c\to+\infty}\dfrac{\partial G(z,t,c,t')}{\partial c}=0$,

iv) $\dfrac{\partial^2 G}{\partial z'^2}+\dfrac{\partial G}{\partial t'}=\delta(z'-z)\ \delta(t'-t)$. Bu özellikte sağ taraf

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(z',t')\delta(z'-z)\delta(t'-t)dz'dt'=u(z,t)$ özelliğine sahiptir.

Şimdi, (2.32) denkleminin sol tarafında $v(z,t,z',t') = G(z,t,z',t')$ yazılır ve $c \to +\infty$ için limit alınırsa

$$u(z,t) = -\int_0^t u(0,t') \frac{\partial G(z,t,0,t')}{\partial z'} dt' - \int_0^{+\infty} u(z',0)\, G(z,t,z',0)\, dz' \qquad (2.33)$$

elde edilir. Buradan

$$u(z,t) = \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-t')^{3/2}}\, z\, e^{\frac{-z^2}{4(t-t')}} u(0,t')\, dt' + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ e^{\frac{-(z-z')^2}{4t}} - e^{\frac{-(z+z')^2}{4t}} \right\} u(z',0)\, dz'$$

$$(2.34)$$

elde edilir. (2.34) deki integrallere sırasıyla $v^2 = \frac{z^2}{4(t-t')}$, $v^2 = \frac{(z-z')^2}{4t}$ ve $v^2 = \frac{(z+z')^2}{4t}$ dönüşümleri uygulanırsa,

$$u(z,t) = \int_{\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} u(0, t - \frac{z^2}{4v^2})\, dv + \int_{\frac{-z}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} u(2v\sqrt{t} + z, 0)\, dv$$

$$- \int_{\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} u(2v\sqrt{t} - z, 0)\, dv$$

$$\equiv I_1 + I_2 - I_3 \qquad (2.35)$$

bulunur. Bu ifade yarı-Cauchy koşulu altında lineer yayılımın çözümüdür. Bu çözüm literatürde bu konu ile ilgili verilen çözümlerin hiçbirine apaçık benzemiyor. Bu çözümde hareketin çeşitli özellikleri açıktır, özellikle, $t \to \infty$ için $I_2 \to I_3$ olduğunda başlangıç durumunun etkisi derece derece azalıyor (sönüyor).

2.1.2c Periyodik Durum

Bu bölümde lineer difüzyon denklemi için periyodik sınır koşuluna bağlı olarak periyodik sonuç bulmak istiyoruz. Burada, başlangıç koşulu verilmiyor. Bu bölüm, t yeterince büyük seçildiğinde sınırdaki sinüzoid için (2.35) in çözümü bir sonraki bölümde elde edilen çözüme yaklaşması nedeniyle eklenmiştir. Şimdi

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{2.36}$$

denklemini

$$T(0,t)=T_A\cos(nt) \tag{2.37}$$

sınır koşulu altında çözelim. Bu denklemin

$$T=\boldsymbol{Re}\left[F(z)\,e^{\mathrm{int}}\right] \tag{2.38}$$

Phasor formda bir çözümünü araştıralım. Bu çözüm (2.36) da yerine yazılırsa

$$in\,F(z)=\kappa\,F''(z)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde

$$F(z)=T_A\;e^{-z\sqrt{\frac{in}{\kappa}}}=T_A\;e^{-(1+i)z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}}}$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$T(z,t)=T_A\;e^{-z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}}}\cos\left(nt-z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}}\right) \tag{2.39}$$

çözümü elde edilir. Benzer şekilde (2.37) sınır koşulu $T(0,t)=T_A\sin(nt)$ olarak verilse

$$T(z,t)=T_A\;e^{-z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}}}\sin\left(nt-z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}}\right) \tag{2.40}$$

çözümü elde edilirdi. Böylece (2.39) ve (2.40) ın birlikte kullanılmasıyla (2.36) nın

$$T(0,t)=g(t) \tag{2.41}$$

sınır koşulu altında çözümü

$$T(z,t) = T_M + T_A \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \, e^{-z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}}} \cos\left(nt - z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}} \right) + b_n \, e^{-z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}}} \sin\left(nt - z\sqrt{\frac{n}{2\kappa}} \right) \right] \tag{2.42}$$

dır. Burada $g(t)$, 2π periyotlu periyodik keyfi bir fonksiyon olup

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right)$$

şeklinde bir Fourier serisi açılımına sahiptir ve a_0, a_n, b_n bildiğimiz Fourier katsayılarıdır yani

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt\,; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt)\, dt \;; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt)\, dt$$

biçimindedir.

2.1.2d Periyodik Yarı Cauchy Koşulları

Genellikle periyodik durum yukarıdaki gibi değişkenlerin ayrımı metodu yardımıyla elde edilir. Bu yaklaşım biçimi başlangıç durumunun periyodik davranışla bağdaştığını (uyumlu olduğunu) kabul eder. (2.35) ifadesi keyfi başlangıç durumları için değişimi verir. Bununla birlikte (2.35), yeterli zaman geçtiğinde periyodik duruma yönelen davranışı bulmada kullanılabilir. Bu periyodik durum (2.42) de verildiği gibi olmalıdır. $t \to \infty$ için $I_2 \to I_3$ olması halinde (2.35) ifadesi

$$u(z,t) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \, e^{-v^2} u(0, t - \frac{z^2}{4v^2})\, dv \tag{2.43}$$

şekline gelir. Eğer sınır koşulu $u(0,t) = \sin t$ gibi periyodik biçimde verilirse (2.43)

$$u(z,t) = (\sin t) \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} \cos(\frac{z^2}{4v^2})\, dv - (\cos t) \int_0^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \, e^{-v^2} \sin(\frac{z^2}{4v^2})\, dv \tag{2.44}$$

olarak yazılabilir. Bu ifade aşağıdaki kısaltmalar kullanılarak hesaplanır.

$$S=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\sin(\frac{z^2}{4v^2})\,dv,\qquad C=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\cos(\frac{z^2}{4v^2})\,dv \tag{2.45}$$

olsun. (2.45) kompleks formda yazılırsa

$$C+iS=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\cos(\frac{z^2}{4v^2})\,dv+i\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}\sin\left(\frac{z^2}{4v^2}\right)dv \tag{2.46a}$$

veya

$$C+iS=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\left(v^2-i\frac{z^2}{4v^2}\right)}\,dv \tag{2.46b}$$

ifadesi elde edilir.

Lemma

Aşağıdaki eşitlik geçerlidir

$$\int_0^{+\infty}e^{-\left(v^2+\frac{a^2}{v^2}\right)}\,dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cosh(2a) \tag{2.47a}$$

İspat

$$V=\int_0^{+\infty}e^{-\left(v^2+\frac{a^2}{v^2}\right)}\,dv=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}a^{2n}\,v^{-2n}\,e^{-v^2}\,dv \tag{2.47b}$$

bulunur. $v^2=y$ dersek $dv=\frac{y^{\frac{-1}{2}}}{2}dy$ olur. Bu ifadeler (2.47b) nin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{a^{2n}}{2}y^{-n-\frac{1}{2}}e^{-y}\,dy=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{a^{2n}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}{\Gamma(1+n)} \tag{2.47c}$$

bulunur. Burada $\Gamma(n)$ literatürden iyi bilinen Gama fonksiyonudur. Şimdi Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=(-1)^n\pi\,, \tag{2.48a}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}\;\Gamma(n+1)}, \qquad (n\in Z) \tag{2.48b}$$

standart özellikleri (2.47c) denkleminde yerine yazılırsa

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{a^{2n}\,2^{2n}}{(2n)!}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2a)^{2n}}{(2n)!}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(v^2+\frac{a^2}{v^2}\right)}\,dv=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cosh(2a)$$

olduğu gösterilmiş oldu. İspat bitti. Şimdi bu lemmadan yararlanılarak (2.46b) ifadesi

$$C+iS=\int_0^{\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(v^2-\frac{iz^2}{4v^2}\right)}\,dv=\cosh(\sqrt{-i}z)=\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z\right)$$

$$=\cosh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\cosh\left(\frac{iz}{\sqrt{2}}\right)-\sinh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\sinh\left(\frac{iz}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\cosh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)-i\sinh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

şeklinde farklı bir biçime dönüşür. Buradan $C=\cosh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$ ve

$S=-\sinh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$ olduğu görülür. Tekrar ifade (2.44) e döner, C ve S değerleri

(2.44) de yerine yazılırsa

$$u(z,t)=C\sin t-S\cos t=\cosh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)(\sin t)+\sinh\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)(\cos t)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{\sqrt{2}}}+e^{\frac{-z}{\sqrt{2}}}\right)\cos\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\sin t+\frac{1}{2}\left(e^{\frac{z}{\sqrt{2}}}-e^{\frac{-z}{\sqrt{2}}}\right)\sin\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\cos t$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{\sqrt{2}}}\left(\cos(\frac{z}{\sqrt{2}})\sin t+\sin(\frac{z}{\sqrt{2}})\cos t\right)+\frac{1}{2}e^{\frac{-z}{\sqrt{2}}}\left(\cos(\frac{z}{\sqrt{2}})\sin t-\sin(\frac{z}{\sqrt{2}})\cos t\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{\sqrt{2}}}\sin\left(t+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}e^{\frac{-z}{\sqrt{2}}}\sin\left(t-\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \tag{2.49}$$

sonucu elde edilir. Bu sonucun difüzyon denklemi için $u(0,t)=\sin t$ sınır koşulunu sağladığı ve denklem (2.35) e yönelen periyodik durumu verdiği görülür. Bu metodun lineer olmayan difüzyon katsayısı κ ile bir uygulaması Shepherd[33] tarafından verilmiştir.

2.2. Temel Teorinin Genişletilmesi

Bu bölümde, bu tezin de konusu olan mevcut teorinin genişletilmesi şeklinde iki ek çalışma verilecektir. Bunlar lineer olmayan özel difüzyon ve lineer çift difüzyondur. Her iki çalışma da bir periyodik durum için ele alınacaktır.

2.2.1. Lineer Olmayan Özel Difüzyon

Difüzyon problemleri ile ilgili genel bir çalışma, 1960 dan önceki difüzyon bilgilerinin bir özeti şeklinde Crank[10] tarafından verilmiştir. Bununla birlikte bu çalışma, sadece lineer olmayan difüzyona bir örnek olarak verilmektedir. Bu tezde basit sinüzoid veya periyodik fonksiyon olan sınır koşulu altında lineer olmayan özel difüzyon denklemi göz önünde bulundurulmaktadır. Burada sadece difüzyon katsayısının, difüzyonda bulunan elemanının yoğunluğuna bağlı olduğu durum söz konusudur. Lineer olmayan bu difüzyon denklemi

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad 0<z<+\infty, \quad t>0 \tag{2.50a}$$

şeklinde olup $t>0$ için sınır koşulu ise

$$T(0,t)=T_M+T_A\sin(\omega t) \tag{2.50b}$$

biçimindedir. Burada

$T\,(z,t)$: t zamanında z derinliğinde sıcaklık,

$\kappa(T)$: Difüzyon katsayısıdır ve kendisi de sıcaklığın bir fonksiyonudur,

ω: Açısal frekans ve $\omega = 2\pi/\tau$, τ devirin periyodu,

$T_{Mean}(T_M)$: Sınır salınımının (titreşiminin) ortalaması,

$T_{Amplitude}(T_A)$: Sınır salınımının genliği.

Difüzyon katsayısının bir özel formu $\kappa(T) = cT^n$ biçimindedir. Burada c sabittir ve bu özel ifade birçok fizik probleminde kullanılmaktadır. Burada difüzyon katsayısı, difüzyon elemanın yoğunluğunun kuvvetine bağlıdır. Shepherd ve Wiltshire[34] tarafından verilen ve daha önceden lineer olmayan difüzyon için kullanılan örnekler tekrar burada da aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

(1) Gözenekli ortamda, doymamış zayıf bölgelerde akış; $n = 1$ durumu,

(2) Gazın gözenekli ortamdan süzülerek geçmesi, $n = \dfrac{c_p}{c_v} \geq 1$ durumu,

(3) Bir plazmada elektronlar yardımıyla ısı iletimi, $n = 2.5$ durumu,

(4) Akışkan çekimli akımlar, $n = 3$ durumu,

(5) İyonları artırılmış gazda radyasyon yardımıyla ısı iletimi, $n = 4.5 - 5.5$ durumu,

(6) Marshak yolları yardımıyla radyoaktif ısı transferi, $n = 6.5$ durumu.

Difüzyon katsayısı $\kappa(T)$ nin bu özel durumu için (2.50a) denklemi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = cT^n \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + cnT^{n-1}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 \tag{2.51}$$

şekline dönüşür. (2.50a) ve (2.51) denklemlerinin her birinin çözümlerinin serilerle yaklaşımı

$$T(z,t) = T_M + T_V(z,t) \quad (2.52)$$

biçiminde yazılarak ve de T_V fonksiyonu için

$$T_V(z,t) = T_0(z,t) + T_1(z,t) + T_2(z,t) + \cdots \quad (2.53)$$

şeklinde bir pertübasyon serisi oluşturularak elde edilebilir. $T_V(z,t)$ tedirginlik fonksiyonudur ve $\forall t$ için $T_V(0,t) << T_M$ dir. Bu seriler derinlikle üstel olarak yok olan (sönen) fonksiyonlar üretir. Bu konu ile ilgili ayrıntı Bölüm 3.1'de verilmektedir. Bundan başka lineer durumda görülmeyen kendine özgü bazı lineer olmayan davranışlar görülür. Bu tür davranışlar farklı sınır koşulları altında Bölüm 3.3'de incelenerek bu davranışlar için bazı yeni nicel tahminler çıkarılmıştır.

2.2.2. Lineer Çift Difüzyon

İkinci ek çalışmamız, birden fazla elemanın aynı anda yayıldığı çift difüzyondur. Burada difüzyon katsayıları sabit olarak alınıyor. Bu tip denklemin temel uygulamasına örnek olarak toprağa ısı ve nemin eş zamanlı akışı ve eş zamanlı iki farklı katkının verildiği yarı-iletken teorisi verilebilir. Isı ve nemin eş zamanlı toprağa çift akışının önemi Philip ve De Vries[29]; De Vries[12] ; Jackson[20]; Jury ve Miller[23] gibi birçok toprak bilimci tarafından tartışılmıştır. Bu alanda en eski çalışma Cary ve Taylor[9] tarafından yapılmıştır. Isı ve nemin birlikte dikey olarak transferinde kullanılan çift difüzyon denklem sistemi Jury[24] ve diğer araştırmacılar tarafından en sade biçimiyle aşağıdaki gibi verilmiştir;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\kappa_T(T,\theta)\frac{\partial T}{\partial z} + \kappa_\theta(T,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right] \quad (2.54a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D_T(T,\theta)\frac{\partial T}{\partial z} + D_\theta(T,\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]. \quad (2.54b)$$

Burada farklı biçimde ifade edilen terimler Wiltshire[40] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$T(z,t)$: z derinliği ve t zamanında toprak sıcaklığı,

$\theta(z,t)$: z derinliği ve t zamanında nem muhtevası,

$D_T(T,\theta)$: Isıyla ilgili makroskopik difüzyon katsayısı,

$D_\theta(T,\theta)$: Isıyla ilgili makroskopik nem katsayısı,

$\kappa_T(T,\theta)$: Termal yayılım (difüzyon),

$\kappa_\theta(T,\theta)$: Nem yayılımı (difüzyon).

(2.54a) ve (2.54b) ile verilen denklem sistemi Philip ve De Vries[29], ve De Vries[12] tarafından matris formunda

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\begin{bmatrix} \kappa_T(T,\theta) & \kappa_\theta(T,\theta) \\ D_T(T,\theta) & D_\theta(T,\theta) \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix}\right\} \tag{2.55}$$

olarak verilmiştir. T ve θ daki küçük değişimler için, difüzyon katsayıları sabit gibi alınabilir ve böylece (2.55) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\begin{bmatrix} \kappa_T & \kappa_\theta \\ D_T & D_\theta \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix}\right\} \tag{2.56}$$

biçimindeki en sade şeklini alır. Bu sistemin periyodik durumunun bir analizi Shepherd ve Wiltshire[35] tarafından

$$\begin{bmatrix} T(0,t) \\ \theta(0,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_M \\ \theta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_A \\ \theta_A \end{bmatrix} \sin(\omega t), \tag{2.57}$$

periyodik yarı-Cauchy koşulları ve

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} T(z,t) \\ \\ \theta(z,t) \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \\ V_2 \end{bmatrix} \sin(\omega t), \tag{2.58}$$

periyodik Neumann koşulları altında incelenmiştir. Shepherd ve Wiltshire(35) 'ın makalesinde kullanılan yöntem, bu tezde ana kaynaklar kullanılarak çıkarıldı ve konu ile ilgili ifadelerin hesaplanmasında yeni bir metot verilmiş olup bu konu ile ilgili ayrıntılı çalışma Bölüm 3.4'de ele alınmıştır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Lineer Olmayan Özel Difüzyon Denklemi ve Yaklaşık Çözümü

Bu bölümde, yalnızca bir elemanın difüzyonda bulunduğu ve difüzyon katsayısının sabit olmayıp difüzyonda bulunan elemana bağlı olduğu lineer olmayan difüzyon inceleniyor. Burada yalnızca periyodik durum ele alınarak bir yaklaşım serisi elde ediliyor. Bulunan seri, lineer olmayan difüzyonda görülen ancak lineer difüzyonda olmayan bir çok özelliği içerdiğinden bu bölümde böyle farklı özelliklerin bir özeti verilerek, genel bir yorum yapılacak.

3.1.1. Pertübasyon Analizinin Elde Edilmesi

Periyodik yarı-Cauchy koşulları altında bir boyutlu lineer olmayan ısı difüzyonu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \qquad 0 < z < \infty, \qquad t > 0 \qquad (3.1.1)$$

standart diferensiyel denklemi ile

$$T(0,t) = T_M + T_A \cos(\omega t), \qquad t > 0 \qquad (3.1.2)$$

biçimindeki sinüzoidal sınır koşuluyla veriliyor. Burada $\kappa(T)$ difüzyon katsayısı sıcaklığa bağlı bir fonksiyondur. Bu bölümde, (3.1.1) ve (3.1.2) problemi pertübasyon açılımı kullanılarak incelenecektir. İlk önce bir çözüm elde edilecek daha sonra da bu çözüm üzerinde yorum yapılacak. (3.1.1) denklemi için bir seri yaklaşımı

$$T(z,t) = T_M + T_V(z,t) \qquad (3.1.3a)$$

biçiminde verilebilir. Burada

$$T_V(z,t) = T_0(z,t) + T_1(z,t) + T_2(z,t) + \cdots \qquad (3.1.3b)$$

pertübasyon fonksiyonudur ve $\forall t$ için $T_V(0,t) << T_M$ dır. (3.1.3a), (3.1.1) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial\big(T_M + T_V(z,t)\big)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\big(T_M + T_V(z,t)\big)\ \frac{\partial\big(T_M + T_V(z,t)\big)}{\partial z}\right) \qquad (3.1.4a)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\frac{\partial T_M}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial T_M}{\partial z} = 0$ olduğundan

$$\frac{\partial T_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\big(T_M + T_V\big)\frac{\partial T_V}{\partial z}\right) \qquad (3.1.4b)$$

bulunur. Tek değişkenli fonksiyonların Taylor Açılımından

$$\kappa\big(T\big) = \kappa(T_M + T_V) \cong \kappa(T_M) + T_V\,\kappa'(T_M) + \frac{1}{2!}T_V^2\kappa''(T_M) + \cdots \qquad (3.1.5)$$

yazılabilir. (3.1.5), (3.1.4b) de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial T_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\kappa(T_M) + T_V\,\kappa'(T_M) + \frac{1}{2!}T_V^2\kappa''(T_M) + \cdots\right)\frac{\partial T_V}{\partial z}\right\} \qquad (3.1.6a)$$

veya kısaca

$$\dot{T}_V = \Big(\big(\kappa(T_M) + T_V\kappa'(T_M + \xi)\big)T_V'\Big)' \qquad (3.1.6b)$$

denklemi elde edilir. Burada ξ genel olarak z ve t ye bağlı bir fonksiyon olup $0 < |\xi| < |T_V|$ dir. (3.1.3b) pertübasyon serisi kısaca

$$T_V = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} T_i \qquad (3.1.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer (3.1.7), (3.1.6a) da yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(T_0 + T_1 + \cdots\big) = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\big(\kappa(T_M) + (T_0 + T_1 + \cdots)\kappa'(T_M) + \cdots\big)\frac{\partial}{\partial z}\big(T_0 + T_1 + \cdots\big)\right\} \qquad (3.1.8a)$$

veya

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}+\frac{\partial T_1}{\partial t}+\cdots=\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\kappa(T_M)+(T_0+T_1+\cdots)\kappa'(T_M)+\cdots\right)\left(\frac{\partial T_0}{\partial t}+\frac{\partial T_1}{\partial t}+\cdots\right)\right\} \quad (3.1.8b)$$

denklemi elde edilir. Burada (3.1.8b) nin sol tarafındaki terimler sağ tarafındaki uygun terimlere eşitlenirse elde edilen denklemlerin lineer difüzyonda görülmeyen daha kuvvetli harmonikler ürettiği görülecektir. Bu harmonikler aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\dot{T}_0=\kappa(T_M)T_0'' \qquad \text{(Birinci harmonik),}$$

$$\dot{T}_1=\kappa(T_M)T_1''+\frac{\kappa'(T_M)}{2}(T_0^2)'' \qquad \text{(İkinci harmonik),}$$

$$\dot{T}_2=\kappa(T_M)T_2''+\kappa'(T_M)(T_0T_1)'' \qquad \text{(Üçüncü harmonik),}$$

$$\cdots$$

$$\dot{T}_i=\kappa(T_M)T_i''+\frac{\kappa'(T_M)}{2}\left(\sum_{r=0}^{i-1}T_r\,T_{i-1-r}\right)'',\ (i>0) \quad \text{(Yüksek dereceli harmonik).} \qquad (3.1.9)$$

Burada sınır koşulu $T(0,t)=T_M+T_A\cos(\omega t)$ dir. (3.1.9) harmonikleri için sınır koşulları $T_0(0,t)=T_A\cos(\omega t)$ ve $T_i(0,t)=0,\quad i>0$ biçiminde yazılmalıdır. Bu denklemler çözüldüğünde görülecektir ki (3.1.9) da verilen denklemler bu sınır koşulları altında üstel olarak sönen fonksiyonlara neden olmaktadır. Bu hareketler, harmonik hareket arasında, daha kuvvetli olmaktadır. Ayrıca, sınır koşulları harmonikler için sınırda sıfır olacağından yalnızca T_0 lineer çözümler üretecek, ancak T_1 dikkate değer duruma gelecektir. Demek ki, (3.1.3a) açılımı T_0 lineer ifadesinden ve T_1 pertübasyonundan oluşmaktadır.

3.1.2. Sönümlü Denklemlerin Çözümleri

3.1.2a. Birinci Harmonik

Birinci denklemin, her zaman olduğu gibi üstel sönümlü sinüzoid biçimde bir çözümü vardır. Yani

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T_M)\frac{\partial T_0}{\partial z}\right) \tag{3.1.10}$$

denklemi $T_0(0,t) = T_A \cos(\omega t)$ sınır koşulu altında Bölüm 3.1.1'de olduğu gibi çözüldüğünde

$$T_0(z,t) = T_A\, e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa(T_M)}}} \cos\left(\omega t - z\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa(T_M)}}\right) \tag{3.1.11a}$$

çözümü elde edilir. Eğer $\alpha = \sqrt{\dfrac{\omega}{2\kappa(T_M)}}$ dersek, (3.1.11a) eşitliği kısaca

$$T_0 = T_A\, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z) \tag{3.1.11b}$$

şekline gelir.

3.1.2b. İkinci Harmonik

İkinci denklem

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T_M)\frac{\partial T_1}{\partial z} + T_0\,\kappa'(T_M)\frac{\partial T_0}{\partial z}\right)$$

veya

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa(T_M)\,\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\kappa'(T_M)}{2}\,\frac{\partial^2 (T_0^{\,2})}{\partial z^2} \tag{3.1.12}$$

şeklinde yazılarak, $\forall t$ için $T_1(0,t) = 0$ koşulu altında çözelim. (3.1.11b) den

$$T_0^2 = \frac{1}{2} T_A^2 \, e^{-2\alpha z} \left(1 + \cos(2\omega t - 2\alpha z) \right)$$

olur. $T_0^{\,2}$ değeri (3.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \left(T_0^{\,2}\right)}{\partial z^2} = 2\alpha^2 T_A^2 \, e^{-2\alpha z} \left(1 - 2\sin\left(2\omega t - 2\alpha z\right)\right)$$

sonucu elde edilir. İkinci harmonik, (3.1.9) denklem sisteminde

$$T_1(z,t) = T_1^*(z,t) + T_1^{**}(z,t) \qquad (3.1.13)$$

şeklinde yazılarak çözülecek. Burada T_1^* homojen olmayan kısım, T_1^{**} homojen kısım. Homojen olmayan fonksiyonun

$$T_1^* = A\, e^{-2\alpha z} \cos(2\omega t - 2\alpha z) + B\, e^{-2\alpha z} \sin(2\omega t - 2\alpha z) + C\, e^{-2\alpha z} \qquad (3.1.14)$$

şeklinde yazılabildiği kabul edilir ve (3.1.12) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \left(T_1^*\right)}{\partial z^2} = 4\alpha^2 e^{-2\alpha z} \left\{2B\cos\left(2\omega t - 2\alpha z\right) - 2A\sin\left(2\omega t - 2\alpha z\right) + C\right\},$$

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial t} = 2\omega e^{-2\alpha z} \left(-A\sin(2\omega t - 2\alpha z) + B\cos(2\omega t - 2\alpha z)\right)$$

sonuçları elde edilir. Burada A, B ve C reel katsayılardır ve değerleri bulunabilir. Benzer şekilde homojen fonksiyonun

$$T_1^{**} = D\, e^{-\sqrt{n}\alpha z} \cos(n\omega t - \sqrt{n}\alpha z) + E \qquad (3.1.15)$$

şeklinde yazılabildiği kabul edilir ve (3.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \left(T_1^{**}\right)}{\partial z^2} = -2Dn\alpha^2 e^{-\sqrt{n}\alpha z} \sin\left(n\omega t - \sqrt{n}\alpha z\right),$$

$$\frac{\partial T_1^{**}}{\partial t} = -Dn\omega\, e^{-\sqrt{n}\alpha z} \sin(n\omega t - \sqrt{n}\alpha z)$$

sonuçları elde edilir. Burada D ve E aşağıda hesaplayacağımız reel katsayılardır. (3.1.13) denklemi (3.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(T_1^* + T_1^{**}\right) = \kappa(T_M)\frac{\partial^2\left(T_1^* + T_1^{**}\right)}{\partial z^2} + \frac{\kappa'(T_M)}{2}\,\frac{\partial^2 (T_0{}^2)}{\partial z^2} \tag{3.1.16}$$

bulunur. Böylece yukarıda bulunan sonuçlar (3.1.16) da yerlerine yazılır ve katsayılar eşitlenirse

$$-2A\omega = -8A\kappa(T_M)\alpha^2 - 2\kappa'(T_M)\alpha^2 T_A^2$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $A = -\frac{1}{2}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}$ bulunur. Burada $\alpha^2 = \frac{\omega}{2\kappa(T_M)}$ dir. Benzer şekilde

$$2B\omega = 8B\kappa(T_M)\alpha^2$$

eşitliğinden $B = 0$,

$$4C\kappa(T_M)\alpha^2 + \kappa'(T_M)\alpha^2 T_A^2 = 0$$

eşitliğinden ise $C = -\frac{1}{4}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}$ bulunur. (3.1.2) sınır koşulu $T_1(0,t) = T_1^*(0,t) + T_1^{**}(0,t)$ dan da $D = -A$, $B = 0$ ve $E = -C$ olarak bulunur. T_1^* için A, B ve C değerleri (3.1.14) de, T_1^{**} için D ve E değerleri (3.1.15) de yerlerine yazılırsa

$$T_1^{**} = \left(\frac{1}{2}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right)e^{-\sqrt{2}\alpha z}\cos\left(2\omega t - \sqrt{2}\alpha z\right) + \left(\frac{1}{4}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right),$$

$$T_1^* = \left(-\frac{1}{2}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right)e^{-2\alpha z}\cos\left(2\omega t - 2\alpha z\right) + \left(-\frac{1}{4}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right)e^{-2\alpha z}$$

sonuçları elde edilir. Böylece

$$T_1(z,t) = T_1^{**}(z,t) + T_1^*(z,t)$$

$$= \left(\frac{1}{2}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right)e^{-\sqrt{2}\alpha z}\cos\left(2\omega t - \sqrt{2}\alpha z\right) + \left(\frac{1}{4}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{2}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right)e^{-2\alpha z}\cos(2\omega t-2\alpha z)+\left(-\frac{1}{4}T_A^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\right)e^{-2\alpha z}$$

olarak bulunur. Böylece (3.1.1) denkleminin yaklaşık bir çözümü

$$T(z,t)=T_M+T_V(z,t)=T_M+(T_0+T_1+\cdots)$$

veya daha açık olarak

$$T(z,t)=T_M+T_A\ e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\alpha z)$$

$$+\frac{1}{2}T_A{}^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\left\{e^{-\sqrt{2}\alpha z}\cos(2\omega t-\sqrt{2}\alpha z)-e^{-2\alpha z}\cos(2\omega t-2\alpha z)\right\}$$

$$+\frac{1}{4}T_A{}^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\left\{1-e^{-2\alpha z}\right\}+\cdots \tag{3.1.17a}$$

biçiminde elde edilir. Burada difüzyon katsayısının $\kappa(T)=c\ T^n$ özel biçimi kullanılırsa, c sabit bir sayı olmak üzere, (3.1.17a) nın yaklaşık bir çözümü

$$T(z,t)=T_M+T_A\ e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\alpha z)$$

$$+\frac{1}{2}T_A{}^2\frac{n}{T_M}\left\{e^{-\sqrt{2}\alpha z}\cos(2\omega t-\sqrt{2}\alpha z)-e^{-2\alpha z}\cos(2\omega t-2\alpha z)\right\}$$

$$+\frac{1}{4}T_A{}^2\frac{n}{T_M}\left\{1-e^{-2\alpha z}\right\}+\cdots \tag{3.1.17b}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.17a) ve (3.1.17b) denklemleri lineer olmayan difüzyonun temel davranışını ifade eder[34,36].

3.1.3. Lineer Olmayan Özel Difüzyonun Özellikleri

3.1.3a Genel Yorumlar

(3.1.17a) ve (3.1.17b) çözümleri lineer olmayan difüzyon hakkında verilen genel bilgileri içerir. Bu çözümleri

$$T=A+B+C-D+E-F \tag{3.1.18}$$

şeklinde ifade edelim. Burada

$$A = T_M, \qquad D = \frac{1}{2} T_A^2 \frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)} e^{-2\alpha z} \cos(2\omega t - 2\alpha z),$$

$$B = T_A \, e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \alpha z), \qquad E = \frac{1}{4} T_A^2 \frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)},$$

$$C = \frac{1}{2} T_A^2 \frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)} e^{-\sqrt{2}\alpha z} \cos\left(2\omega t - \sqrt{2}\alpha z\right), \qquad F = \frac{1}{4} T_A^2 \frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)} e^{-2\alpha z}.$$

dır. Yukarıda verilen altı terimden her biri lineer olmayan difüzyondaki terimlerin davranışlarında etkili olmaktadır. Aşağıda konu ile ilgili yorumlar verilecek ve bunlardan ikisi ayrıntılı olarak incelenecektir.

(1) Öncelikle, aynı sınır koşulunda ve aynı periyotla bütün derinliklerde hareket periyodiktir. Yayılımın lineer olmayan biçimi açık değildir ve periyodun korunup korunmayacağı kestirilemez. Örneğin, $\frac{d^2 x}{dt^2} + x - x^3 = \cos(\omega t)$ Duffing denkleminde eşitliğin sağ tarafı periyodik olmasına rağmen, denklem periyodik olmayan hareket meydana getirir.

(2) Eğer çözüm

$$T = A + B \tag{3.1.19}$$

olsa idi, o davranış sınır hareketinin iniş çıkış ortalamasında difüzyon katsayısının sabit olarak alındığı lineer difüzyon denkleminin çözümü olurdu. Böylece aşağıdaki dört terim

$$T - A - B = C - D + E - F \tag{3.1.20}$$

lineer difüzyonda bahsedilmeyen lineer olmayan difüzyona ait farklı özellikleri verir.

(3) $z = 0$ iken $C = D$ olduğu açıktır. Ayrıca $z \to \infty$ için $C \to 0$ ve $D \to 0$ olur.

Böylece sinüzoid pertübasyon sadece ortamın orta derecedeki derinliklerindeki z değerleri için gerçekleşir. $z \to 0$ yani yüzeye çok yakın olunduğunda lineer difüzyona göre çok küçük farkın olduğu fark edilir. Aynı davranışlar büyük derinlikler için de doğrudur.

(4) Yüzeyde $E = F$ olduğu açıktır. Fakat z büyüdüğünde $F \to 0$ ve $E \not\to 0$ olur. Böylece, büyük z için pertübasyon sinüzoid olmamasına rağmen, E, lineer difüzyonda görülmeyen bir etki meydana getirir. Gerçekte

$$T|_{z\to\infty} = (A + E)|_{z\to\infty} \qquad (3.1.21a)$$

iken lineer difüzyonda

$$T|_{z\to\infty} = A|_{z\to\infty} \qquad (3.1.21b)$$

dır.

(5) $$E|_{z\to\infty} = \frac{1}{4} T_A^2 \frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)} \qquad (3.1.22)$$

dır. Bu terim, derinlik artarken dalga formlarının ortalama değerindeki artışları verir. Bu konu sonraki bölümlerde ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

3.2. Lineer olmayan Difüzyona Özgü Olan Özelliklerin İncelenmesi

Bir önceki bölümde, lineer olmayan difüzyon katsayısı için bir pertübasyon serisi elde edildi. Araştırmada, sadece lineer olmayan difüzyonda meydana gelen birkaç farklı özellik bulundu. Özellikle burada sınır salınım ortalamasının derinlikle artmakta olduğu gösterildi. Bununla birlikte çalışma sadece sınır koşulunun sinüzoid olduğu basit durum için uygulandı. Bu bölümde sınır koşullarının periyodik fakat artık basit sinüzoid olmadığı durumlar ele alınacaktır.

Bu bölümde, önce sınır koşulunun Fourier serisi gibi ifade edilebildiğinde sıcaklık ortalamasındaki yükseliş için bir açılım elde edilecektir. Pertübasyon analizinden yararlanılarak elde edilen bu ifade önceki bölümde verilenleri sağlamaktadır. Ayrıca Parseval ilişkisi kullanılarak bu ifadenin farklı bir biçimi elde edilecek. Bu ifade biçimi gerçekten şaşırtıcı olarak gösteriyor ki, ortalamalardaki artışlar (istatistiksel anlamda) başlangıçta girilen değişimdeki değişiklikle çok yakından ilgilidir. Ortalama değerlerdeki yükseliş, derece derece çok düzensiz olan periyodik sınır koşulunun farklı üç durumu için anlaşılır biçimde hesaplanacaktır. Buradan elde edilen sonuç, difüzyon katsayısının açıkça belirtilmediği yani $\kappa(T) = cT^n$ olarak ifade edilen durumu için genel biçime taşınacak.

3.2.1. Derinlik ile Ortalama Değerdeki Yükseliş Arasındaki Bağıntı

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.2.1}$$

Lineer olmayan özel difüzyon denklemini

$$T(0,t) = T_M + T_A \cos(\omega t) \tag{3.2.2}$$

sınır koşuluyla göz önüne alalım. (3.2.1) denkleminin yaklaşık çözümü Bölüm 3.1'de bir pertürbasyon serisi kullanılarak bulunmuş ve bu açılım aşağıdaki gibi ifade edilmişti:

$$\begin{aligned} T(z,t) &= T_M + T_A\, e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \alpha z) \\ &+ \frac{1}{2}T_A{}^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\left\{e^{-\sqrt{2}\alpha z}\cos(2\omega t - \sqrt{2}\alpha z) - e^{-2\alpha z}\cos(2\omega t - 2\alpha z)\right\} \\ &+ \frac{1}{4}T_A{}^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)}\left\{1 - e^{-2\alpha z}\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Aynı açılım difüzyon katsayısının $\kappa(T) = cT^n$ şeklindeki özel durumu için de

$$T(z,t) = T_M + T_A\, e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \alpha z)$$

$$+\frac{1}{2}T_A^{\,2}\frac{n}{T_M}\left\{e^{-\sqrt{2}\alpha z}\cos(2\omega t - \sqrt{2}\alpha z) - e^{-2\alpha z}\cos(2\omega t - 2\alpha z)\right\}$$

$$+\frac{1}{4}T_A^{\,2}\frac{n}{T_M}\left\{1 - e^{-2\alpha z}\right\} + \cdots \tag{3.2.4}$$

idi. (3.2.4) denklemi, $z = 0$ olduğunda

$$T_{mean}\big|_{z=0} = T_M, \tag{3.2.5a}$$

$z \to +\infty$ olduğunda ise

$$T_{mean}\big|_{z\to+\infty} = T_M + \frac{1}{4}T_A^2\frac{n}{T_M} \tag{3.2.5b}$$

bulunur. O halde sınır koşulunun basit sinüzoid olduğu durumda derinliğe bağlı olarak sıcaklık salınım ortalamasındaki artış,

$$\text{Ortalama Değerdeki Artış (O.D.A.)} = T_{mean}\big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\big|_{z=0} = \frac{nT_A^2}{4T_M} \tag{3.2.6}$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.2. Genel Periyodik Sınır Koşulu Altında Ortalamalardaki Yükseliş İçin Formül [34,36]

Bu bölümde Fourier serisinden yararlanılarak sınır koşulunun genel olarak periyodik fonksiyon olduğu durumlar için ortalamalardaki yükselişi hesaplamada denklem (3.2.6) daki gibi yeni bir ifadenin çıkarılışı verilecek. Şimdi

$$S(p,n) = e^{-pz}\ \sin(n\omega t - pz) \tag{3.2.7a}$$

$$C(q,m) = e^{-qz}\ \cos(m\omega t - qz) \tag{3.2.7b}$$

olsun. Burada z derinlik, t zaman, $n\omega$ frekans ve $\dfrac{1}{p}$ nem derinliğidir. Yine (3.2.7a) ve (3.2.7b) yardımıyla verilen

$$S(p,n)\,S(q,m)=\frac{1}{2}\left\{\ e^{-2qz}\ C(p-q,n-m)-C(p+q,n+m)\ \right\}, \quad (3.2.8a)$$

$$S(p,n)\,C(q,m)=\frac{1}{2}\left\{\ S(p+q,n+m)+e^{-2qz}\ S(p-q,n-m)\ \right\}, \quad (3.2.8b)$$

$$C(p,n)\,C(q,m)=\frac{1}{2}\left\{\ C(p+q,n+m)+e^{-2qz}\ C(p-q,n-m)\ \right\}, \quad (3.2.8c)$$

$$C(p,n)\,S(q,m)=\frac{1}{2}\left\{\ S(p+q,n+m)-e^{-2qz}\ S(p-q,n-m)\ \right\}, \quad (3.2.8d)$$

ifadelerini göz önüne alalım. Böylece bu gösterimlerin kullanımıyla bir $f(t)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$T(0,t)=f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\,a_n C(0,n)+b_n S(0,n)\,\right) \quad (3.2.9)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\,dt\,,\quad a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\cos(n\omega t)\,dt\,,\quad b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

dır. (3.2.7) denkleminin tanımından

$$C(0,n)=e^{0}\cos(n\omega t-0)=\cos(n\omega t)$$

$$S(0,n)=e^{0}\sin(n\omega t-0)=\sin(n\omega t)$$

sonuçları açıktır. Lineer olmayan difüzyon denklemi

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \quad (3.2.10a)$$

$$T(0,t)=f(t) \quad (3.2.10b)$$

sınır koşuluyla verilsin. Burada $f(t)$ periyodik bir fonksiyondur. (3.2.10a) denklemi için bir seri yaklaşımı

$$T(z,t) = T_M + T_V(z,t) \tag{3.2.11a}$$

biçiminde yazılabilir. T_V'nin pertübasyon serisi olarak açılımı

$$T_V(z,t) = T_0(z,t) + T_1(z,t) + T_2(z,t) + \cdots \tag{3.2.11b}$$

şeklindedir. Burada $T_V(z,t)$ pertübasyon fonksiyon ve $\forall t$ için $T_V\ (0,t) << T_M$ dir. (3.2.11a), (3.2.10a) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial(T_M + T_V(z,t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T_M + T_V(z,t))\frac{\partial(T_M + T_V(z,t))}{\partial z}\right) \tag{3.2.12a}$$

veya burada $\frac{\partial T_M}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial T_M}{\partial z} = 0$ olması nedeniyle

$$\frac{\partial T_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T_M + T_V)\frac{\partial T_V}{\partial z}\right) \tag{3.2.12b}$$

eşitliği elde edilir. Tek değişkenli fonksiyonların Taylor açılımından

$$\kappa(T) \cong \kappa(T_M) + T_V\kappa'(T_M) + \frac{1}{2!}T_V^2\kappa''(T_M) + \ \cdots \tag{3.2.13}$$

yazılabilir. (3.2.13), (3.2.12b) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial T_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{ \left(\kappa(T_M) + T_V\kappa'(T_M) + \frac{1}{2!}T_V^2\kappa''(T_M) + \cdots \right)\frac{\partial T_V}{\partial z}\right\} \tag{3.2.14}$$

elde edilir. Pertübasyon serisi (3.2.11b) kısaca

$$T_V = T_0 + T_1 + T_2 + \ \dots\ = \sum_{i=0}^{\infty} T_i \tag{3.2.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer (3.2.15), (3.2.14) de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_0 + T_1 + \cdots) = \frac{\partial}{\partial z}\left\{ (\kappa(T_M) + (T_0 + T_1 + \cdots)\kappa'(T_M) + \cdots)\frac{\partial}{\partial z}(T_0 + T_1 + \cdots)\right\} \tag{3.2.16}$$

denklemi elde edilir. Burada (3.2.16) nın sol tarafındaki terimler sağ tarafındaki uygun terimlere eşitlenirse elde edilen denklemlerin lineer difüzyonda görülmeyen çok yüksek harmonikler ürettiği görülecektir. Bu harmonikler,

$$\dot{T}_0 = \kappa(T_M)T_0'' \qquad \text{(Birinci harmonik)}$$

$$\dot{T}_1 = \kappa(T_M)T_1'' + \frac{\kappa'(T_M)}{2}(T_0^2)'' \qquad \text{(İkinci harmonik)}$$

$$\dot{T}_2 = \kappa(T_M)T_2'' + \kappa'(T_M)(T_0T_1)'' \qquad \text{(Üçüncü harmonik)}$$

$$\cdots$$

$$\dot{T}_i = \kappa(T_M)T_i'' + \frac{\kappa'(T_M)}{2}\left(\sum_{r=0}^{i-1} T_r T_{i-1-r}\right)'', \ (i > 0) \quad \text{(Yüksek dereceli harmonik)} \qquad (3.2.17)$$

şeklindedir. Burada (3.2.17) denklemindeki pertübasyon ayrışmasının ilk iki harmoniği kullanılacak. Çözüm için T fonksiyonu, $T = T_0 + T_1$ şeklinde yazılırsa T_0 için,

$$\dot{T}_0 = \kappa(T_M)T_0''$$

birinci harmonik denklemi $T_0(0,t) = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\{a_n C(0,n) + b_n S(0,n)$ sınır koşulu altında ve Bölüm 3.1'de kullanılan çözüm yöntemi uygulanarak

$$T_0(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n C(D_n,n) + b_n S(D_n,n) \qquad (3.2.18)$$

olarak bulunur. Burada, $D_n = \sqrt{\dfrac{\omega n}{2\kappa(T_M)}}$ genelleştirilmiş nem derinliğidir. T_1 için,

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \kappa(T_M)\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} + \frac{\kappa'(T_M)}{2}\frac{\partial^2(T_0^2)}{\partial z^2} \qquad (3.2.19)$$

ikinci harmonik denklemi

$$T_1(0,t) = 0 \qquad (3.2.20)$$

sınır koşulu altında çözülecek. (3.2.18) denkleminden

$$T_0^{\,2}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nC(D_n,n)+b_nS(D_n,n)\right)\right)^2 \tag{3.2.21}$$

olur. Bu eşitliğin sağ tarafında Cauchy-yeniden düzenlenmesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}T_0^{\,2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{s=n-1}\Big\{\; & a_{s+1}\,a_{n-s}\,C(D_{s+1},s+1)\,C(D_{n-s},n-s)\\ & +a_{s+1}\,b_{n-s}\,C(D_{s+1},s+1)\,S(D_{n-s},n-s)\\ & +b_{s+1}\,a_{n-s}\,S(D_{s+1},s+1)\,C(D_{n-s},n-s)\\ & +b_{s+1}\,b_{n-s}\,S(D_{s+1},s+1)\,S(D_{n-s},n-s)\;\Big\}\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

elde edilir. (3.2.8a-d) denkleminde verilen bilgilere göre (3.2.22) nin

$$\begin{aligned}T_0^{\,2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n-1}\Big\{\; & (a_{s+1}\,a_{n-s}-b_{s+1}\,b_{n-s})\,C(D_{s+1}+D_{n-s}\,,\,n+1)\\ & +(a_{s+1}\,a_{n-s}+b_{s+1}\,b_{n-s})\,e^{-2zD_{n-s}}\,C(D_{s+1}-D_{n-s}\,,\,2s+1-n)\\ & +(a_{s+1}\,b_{n-s}+b_{s+1}\,a_{n-s})\,S(D_{s+1}+D_{n-s}\,,\,n+1)\\ & +(b_{s+1}\,a_{n-s}-a_{s+1}\,b_{n-s})\,e^{-2zD_{n-s}}\,S(D_{s+1}-D_{n-s}\,,\,2s+1-n)\;\Big\}\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

şeklinde en sade durumu elde edilir. Şimdi ortalamaların davranışı (3.2.23) deki $(2s+1-n)$ terimine bağlı olarak iki bölümde incelenecektir.

Eğer bu denklem sıfıra eşit değilse, yani $2s+1-n\neq 0$ iken, ortalamaların değişmediği söylenebilir. (3.2.19) denkleminin sağ tarafındaki bu terimlerin her biri üstel olarak yok olan sinüzoid hareketler meydana getiriyor. Eğer (3.2.19) daki terimler sınır koşulunun sıfır olduğu durum için çözülürse sınırda ($z=0$) ve büyük derinliklerde ($z\to\infty$) çözümlerin sıfır olduğu ve böylece bunlardan artan sonuçlar olmadığı görülür.

Aksine, yani $2s+1-n=0$ iken, aşağıda yapılacak işlemlerden de görüleceği üzere (3.1.18) denklemindeki beş ve altıncı terimlerin davranışlarındakine benzer ortalamalar değişiyor. (3.2.23) ün $2s+1-n=0$ durumuna uygun terimlerini $\widetilde{T}_0^{\,2}$ ile ifade edelim. Burada $\widetilde{T}_0^{\,2}$, T_0^2 nin bir alt kümesi $\left(\widetilde{T}_0^2 \subset T_0^2\right)$ olsun. $2s+1-n=0$ ise $s=\dfrac{n-1}{2}$ olur. Bu değer (3.2.23) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}_0^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1,\, n\, tek}^{\infty} \Bigg\{ & \left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\, a_{n-\frac{n-1}{2}} - b_{\frac{n-1}{2}+1}\, b_{n-\frac{n-1}{2}} \right) C\left(D_{\frac{n-1}{2}+1} + D_{n-\frac{n-1}{2}} \,,\, n+1 \right) \\
& + \left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\, a_{n-\frac{n-1}{2}} + b_{\frac{n-1}{2}+1}\, b_{n-\frac{n-1}{2}} \right) e^{-2z D_{n-\frac{n-1}{2}}}\, C(0,0) \\
& + \left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\, b_{n-\frac{n-1}{2}} + b_{\frac{n-1}{2}+1}\, a_{n-\frac{n-1}{2}} \right) S\left(D_{\frac{n-1}{2}+1} + D_{n-\frac{n-1}{2}} \,,\, n+1 \right) \\
& + 0 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}_0^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1,\, n\, tek}^{\infty} \Bigg\{ & \left(a_{\frac{n+1}{2}}^2 - b_{\frac{n+1}{2}}^2 \right) C\left(2D_{\frac{n+1}{2}} \,,\, n+1 \right) \\
& + \left(a_{\frac{n+1}{2}}^2 + b_{\frac{n+1}{2}}^2 \right) e^{-2zD_{\frac{n+1}{2}}}\, C(0,0) \\
& + \left(2a_{\frac{n+1}{2}} . b_{\frac{n+1}{2}} \right) S\left(2D_{\frac{n+1}{2}} \,,\, n+1 \right) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.2.24}
$$

bulunur. Daha fazla ayrıntı için, (3.2.24) denkleminin sadece üç terimi göz önünde bulunduruluyor. Yine burada birinci ve üçüncü terimler üstel olarak yok olan sinüzoidlerdir. İki defa diferensiyeli alınır ve (3.2.19) un sağ tarafında yerine yazılırsa, sıfır sınır koşulu altında sınırda ve derinlikle sıfır olan terimler üretirler.

Dolayısıyla, sadece (3.2.24) denkleminin ikinci terimi ortalama değerde bir değişime sebep olmaktadır. Bu durumda (3.2.19) denklemi bahsi geçen terim için çözülecek. Buradan

$$\widetilde{T}_0^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1,\ n\ tek}^{\infty} \left(a_{\frac{n+1}{2}}^2 + b_{\frac{n+1}{2}}^2 \right) e^{-2zD_{\frac{n+1}{2}}} C(0,0) \tag{3.2.25}$$

eşitliği bulunur. Şimdi $\frac{n+1}{2} = m$ olsun ve $C(0,0) = 1$ olduğundan

$$\widetilde{T}_0^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m^2 + b_m^2 \right) e^{-2zD_m} \tag{3.2.26}$$

biçimine dönüşür. Bu eşitlik iki defa diferensiyellenirse

$$\frac{\partial^2 \widetilde{T}_0^{\,2}}{\partial z^2} = 2D_m^2 \left(a_m^2 + b_m^2 \right) e^{-2zD_m} \tag{3.2.27}$$

sonucu elde edilir. Böylece, Bölüm 3.1'deki yöntem yardımıyla denklem (3.2.19) un çözümünde $\widetilde{T}_1$ in genel bir ifadesi

$$\widetilde{T}_1(z,t) = \widetilde{T}_1^{*}(z,t) + \widetilde{T}_1^{**}(z,t) \tag{3.2.28}$$

biçiminde yazılarak çözülecek. Burada $\widetilde{T}_1^{*}$ homojen olmayan kısım, $\widetilde{T}_1^{**}$ ise homojen kısımdır. Homojen olmayan kısmın

$$\widetilde{T}_1^{*} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \, e^{-2zD_m} \tag{3.2.29}$$

şeklinde yazılabildiği kabul edilir ve (3.2.19) da yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial^2 \widetilde{T}_1^{*}}{\partial z^2} = 4C_m \, D_m^2 \, e^{-2zD_m} \tag{3.2.30a}$$

$$\frac{\partial \widetilde{T}_1^{*}}{\partial t} = 0 \tag{3.2.30b}$$

sonuçları elde edilir. Burada C_m'ler reel fonksiyonlardır ve hesaplanabilirler (çünkü terimler zamana bağlı değil). Benzer şekilde homojen kısmın

$$\widetilde{T}_1^{**} = Bz + A \tag{3.2.31}$$

şeklinde yazılabildiği kabul edilir ve denklem (3.2.19) da yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 \widetilde{T}_1^{**}}{\partial z^2} = 0 \tag{3.2.32a}$$

$$\frac{\partial \widetilde{T}_1^{**}}{\partial t} = 0 \tag{3.2.32b}$$

sonuçları elde edilir. Burada A ve B keyfi reel katsayılardır ve değerleri bulunabilir. Şimdi (3.2.28), (3.2.19) da yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{T}_1^{*} + \widetilde{T}_1^{**}\right) = \kappa(T_M)\frac{\partial^2\left(\widetilde{T}_1^{*} + \widetilde{T}_1^{**}\right)}{\partial z^2} + \frac{\kappa'(T_M)}{2}\frac{\partial^2(\widetilde{T}_0^{2})}{\partial z^2} \tag{3.2.33}$$

bulunur. Böylece yukarıda bulunan sonuçlar (3.2.30a-b, 3.2.32a-b), denklem (3.2.33) de yerlerine yazılırsa

$$4\,\kappa\, C_m\, D_m^2\, e^{-2zD_m} + D_m^2\, \kappa'\left(a_m^2 + b_m^2\right)e^{-2zD_m} = 0$$

eşitliği ve katsayıların eşitliğinden de $C_m = -\frac{\kappa'}{4\kappa}\left(a_m^2 + b_m^2\right)$ bulunur.

$$\widetilde{T}_1(0,t) = \widetilde{T}_1^{**}(0,t) + \widetilde{T}_1^{*}(0,t) \tag{3.2.34}$$

sınır koşulu altında $A + C_m = 0$ ve buradan $A = -C_m$ bulunur. Tekrar denklem (3.2.28) e dönersek

$$\widetilde{T}_1 = \widetilde{T}_1^{**} + \widetilde{T}_1^{*} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2 + b_m^2\right) - \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2 + b_m^2\right)e^{-2zD_m}$$

$$= \frac{\kappa'}{4\kappa}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2 + b_m^2\right)\left(1 - e^{-2zD_m}\right)\right) \tag{3.2.35}$$

elde edilir. $z \to +\infty$ iken e^{-2zD_m} sıfır olur. Dolayısıyla (3.2.35) den

$$\widetilde{T}_1\Big|_{z\to+\infty} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2 + b_m^2\right) \tag{3.2.36a}$$

elde edilir. $z = 0$ iken $e^{-2zD_m} = 1$ olacağından (3.2.35)

$$\widetilde{T}_1\big|_{z=0} = 0 \tag{3.2.36b}$$

şekline dönüşür. Buradan da ortalamalardaki artışın

$$T_{mean}\big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2 + b_m^2\right) \tag{3.2.36c}$$

olduğu görülür. Burada a_m, sınır koşulundaki fonksiyonun Fourier serisinin kosinüs terimlerinin katsayısı, b_m, sınır koşulundaki fonksiyonun Fourier serisinin sinüs terimlerinin katsayısı, $\kappa(T)$ ise difüzyon katsayısıdır. Şimdi bu teori bir örnekle açıklanacak.

Örnek1

Eğer sınır koşulu $T(0,t) = T_M + T_A\,\cos(\omega t)$ ise sinüs terimleri, b_m, olmayacak, sadece kosinüs terimleri, a_m, olacak. Bu durumda

$$\text{O.D.A.} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m^2 + b_m^2\right) = \frac{\kappa'}{4\kappa}a_m^2\,\big|_{m=1} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\left((T_A)^2 + 0\right) = \frac{\kappa'}{4\kappa}T_A^2$$

olarak elde edilir.

3.2.3. Parseval Özdeşliğinin Kullanılması ile Bulunacak Alternatif Biçim

Bu bölümde Parseval özdeşliği kullanılarak formül (3.2.6) ya alternatif farklı bir ifade biçimi elde edilecek. Parseval özdeşliğinin [2,4] genel bir ifadesi aşağıdaki gibidir.

"Eğer verilmiş bir f fonksiyonunun türevi $-\pi \le x \le \pi$ aralığında mevcut ve sürekli ise ve $f(-\pi) = f(\pi)$ eşitliği sağlanırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{a_0^{\,2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2}+b_n^{\,2}\right)\right] \tag{3.2.37}$$

eşitliği sağlanır." Şimdi (3.2.37) eşitliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2}+b_n^{\,2}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx-\frac{a_0^2}{2} \tag{3.2.38}$$

ve Fourier serisine göre $2L=\dfrac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow L=\dfrac{\pi}{\omega}$ periyoduyla da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2}+b_n^{\,2}\right)=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2 dt-\frac{a_0^2}{2} \tag{3.2.39}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.39), (3.2.36c) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T_{mean}\big|_{z\to+\infty}-T_{mean}\big|_{z=0}=\frac{\kappa'}{4\kappa}\left(\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2 dt-\frac{a_0^2}{2}\right) \tag{3.2.40}$$

bulunur. Burada, $a_0=\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(t)\ dt$ değeri denklem (3.2.40) da yerine yazılırsa

$$T\big|_{z\to+\infty}-T\big|_{z=0}=\frac{\kappa'}{4\kappa}\left\{\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2 dt-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(t)\ dt\right)^2\right\} \tag{3.2.41a}$$

veya

$$T\big|_{z\to+\infty}-T\big|_{z=0}=\frac{\kappa'}{2\kappa}\left\{\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2 dt-\left(\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(t)\ dt\right)^2\right\} \tag{3.2.41b}$$

eşitliği elde edilir ki bunun anlamı, sıcaklık ortalamalarındaki yer değiştirmeler başlangıçtaki inip çıkmaların değişikliği ile alakalıdır. Elde edilen bu denklem tamamen denklem (3.2.6) nın aynıdır.

3.2.3a Denklem (3.2.41)'in Örneklendirilmesi

$f(t)$ basit sinüzoid olduğunda ve $\kappa(T_M) = cT_M^n$ iken, denklem (3.2.41b) nin sağ tarafı (3.2.6) ya eşit yani

$$\frac{nT_A^2}{4T_M} = \frac{\kappa'}{2\kappa}\left\{\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2\,dt - \left(\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\ dt\right)^2\right\} \qquad (*)$$

olmalıdır.

i) (3.2.41b) eşitliğinin sol tarafı için,

$$\text{Sol taraf} = T_M + \frac{1}{4}T_A{}^2\frac{\kappa'(T_M)}{\kappa(T_M)} - T_M = \frac{1}{4}T_A{}^2\frac{ncT_M^{n-1}}{cT_M^n} = \frac{1}{4}T_A^2\frac{n}{T_M}$$

ii) (3.2.41b) eşitliğinin sağ tarafı için,

$$\text{Sağ taraf} = \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(T_M + T_A\,cos\,t)^2\ dt - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(T_M + T_A\,cos\,t)\ dt\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}T_A^2\frac{n}{T_M}$$

elde edilir. Burada $\omega = 1$ alındı. Böylece, $f(t)$ basit sinüzoid ve $\kappa(T_M) = cT_M^n$ olduğunda (*) eşitliğinin sağlandığı görülür.

Örnek 2

Sınır koşulunun Fourier serisi olduğu durum için (3.2.3) deki açılımın sadece iki terimi için ortalama değerdeki artışı bulabiliriz. Burada (3.2.1) denklemi

$$T(0,t) = f(t) = T_M + T_A\ cos(\omega t) + \frac{1}{10}T_A\,cos(2\omega t)$$

sınır koşuluyla birlikte incelenecek. Yine burada $\omega = 1$ ve $\kappa(T_M) = cT_M{}^n$ alınacak. Bu durumda

$$\text{O.D.A.} = \frac{ncT_M^{n-1}}{2cT_M^n}\left\{\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\left(T_M + T_A\cos(\omega t) + \frac{1}{10}\cos(2\omega t)\right)^2 dt\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\left(T_M + T_A\cos(\omega t) + \frac{1}{10}\cos(2\omega t)\right) dt\right)^2\right\}$$

$$= \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + T_A\, cos\, t + \frac{1}{10} cos\, 2t\right)^2 dt\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + T_A\cos t + \frac{1}{10}\cos 2t\right) dt\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}T_A^2\frac{n}{T_M} + \frac{1}{400}\frac{n}{T_M}$$

elde edilir. Bu örnek de gösteriyor ki, ortalama değerdeki artışı belirtmesi açısından birinci harmonik de ikinci harmonikten çok uzak değildir.

3.2.4. Farklı Üç Sınır Koşulu Altında Ortalama Değerlerdeki Artış

Bu bölümde

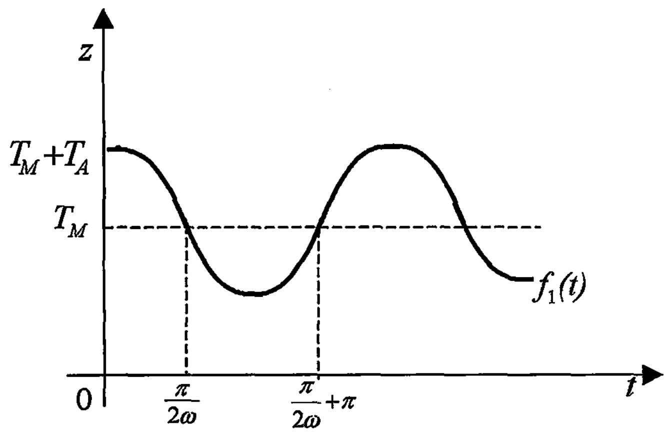
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{3.2.42}$$

lineer olmayan özel difüzyon denklemi

$$T(0,t) = T_M + T_A\ \cos(\omega t) \tag{3.2.43}$$

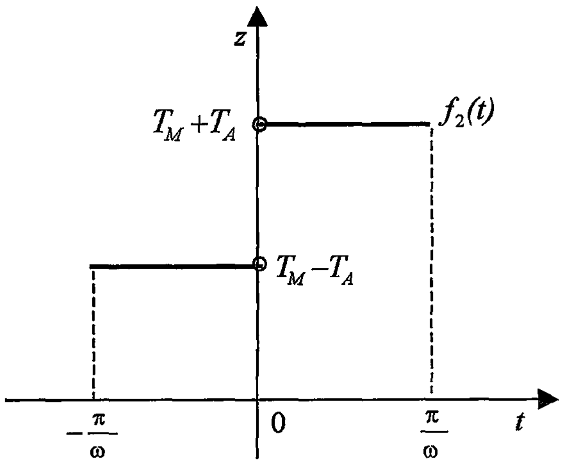
periyodik sınır koşuluyla birlikte incelenecek. Burada yapılan çalışmanın temel amacı, sıcaklık ortalamalarındaki yer değiştirmenin farklı üç sınır koşuluna göre hesaplanması ve de sınır koşulları arasındaki ilişkinin araştırılmasıdır. Öncelikle bu farklı sınır koşulları genel ifadeleriyle aşağıdaki gibi özetleniyor.

1) $T(0,t) = f_1(t) = T_M + T_A \cos(\omega t)$



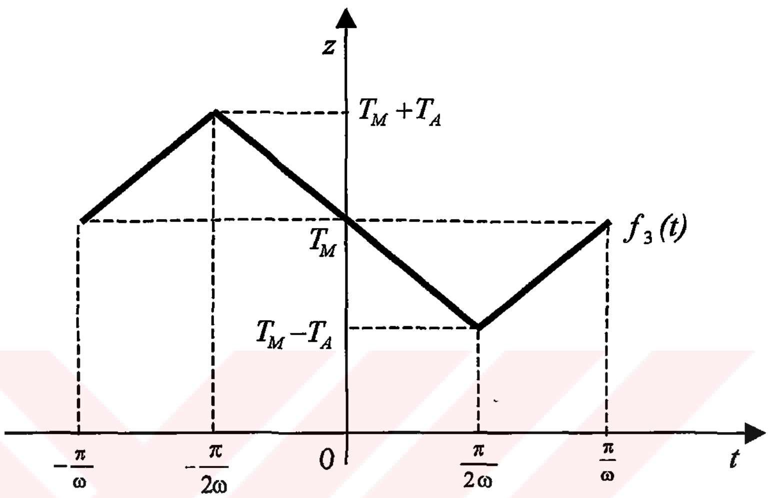
Şekil 3.1. Diferensiyellenebilir, sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon.

$$(2)\ T(0,t) = f_2(t) = \begin{cases} T_M - T_A & ; \quad -\dfrac{\pi}{\omega} < t < 0 \quad ise, \\ T_M + T_A & ; \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{\omega} \quad ise \end{cases}$$



Şekil 3.2. Diferensiyellenemez, sürekli olmayan ancak integrallenebilir fonksiyon.

$$3)\ T(0,t)=f_3(t)=\begin{cases} \dfrac{2\omega T_A}{\pi}t+T_M+2T_A & ; \quad -\dfrac{\pi}{\omega}<t<-\dfrac{\pi}{2\omega} \quad ise, \\ -\dfrac{2\omega T_A}{\pi}t+T_M & ; \quad -\dfrac{\pi}{2\omega}<t<\dfrac{\pi}{2\omega} \quad ise, \\ \dfrac{2\omega T_A}{\pi}t+T_M-2T_A & ; \quad \dfrac{\pi}{2\omega}<t<\dfrac{\pi}{\omega} \quad ise \end{cases}$$



Şekil 3.3. Sürekli, integrallenebilir ve diferensiyellenemez bir fonksiyon

Sıcaklık ortalamalarındaki değişimlerin formülü (3.2.41b),

$$T\big|_{z\to+\infty}-T\big|_{z=0}=\frac{\kappa'}{2\kappa}\left\{\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2\,dt-\left(\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(t)dt\right)^2\right\}$$

şeklinde ifade edilmişti. Şimdi bu formülü kullanarak yukarıda özetlenen farklı üç sınır koşulunun her biri için ortalama değerdeki artış, $\omega=1$ ve $\kappa(T_M)=cT_M^n$ iken hesaplanacak.

3.2.4a İlk Durum

Bu bölümde, sınır koşulu Şekil 3.1'den de görüleceği üzere Fourier serisi yani

$$T(0,t) = f_1(t) = T_M + T_A\cos(\omega t)$$

gibi basit bir sinüzoid olduğu durum için ortalama değerdeki artış hesaplanacak. Burada Fourier serisinin sadece bir terimi var. Bu koşul (3.2.41b) de yerine yazılırsa

$$O.D.A. = \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(T_M + T_A\cos t)^2\,dt - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(T_M + T_A\cos t)\,dt\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{4}T_A^2\frac{n}{T_M}$$

sonucu elde edilir.

3.2.4b İkinci Durum

Bu bölümde ise sınır koşulu Şekil 3.2'den de görüleceği üzere

$$f_2(t) = \begin{cases} T_M - T_A & ; \quad -\dfrac{\pi}{\omega} < t < 0 \quad ise, \\[2ex] T_M + T_A & ; \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{\omega} \quad ise \end{cases}$$

gibi olduğu durum için ortalama değerdeki artış hesaplanacak. Bu koşul (3.2.41b) de yerine yazılırsa

$$O.D.A. = \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(T_M - T_A)^2\,dt + \int_{0}^{\pi}(T_M + T_A)^2\,dt\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(T_M - T_A)dt + \int_{0}^{\pi}(T_M + T_A)dt\right)\right)^2\right\} = \frac{1}{2}T_A^2\frac{n}{T_M}$$

sonucu elde edilir.

3.2.4c Üçüncü Durum

Bu bölümde de sınır koşulu Şekil 3.3'den de görüleceği üzere

$$f_3(t)=\begin{cases} \dfrac{2\omega T_A}{\pi}t+T_M+2T_A & ; \quad -\dfrac{\pi}{\omega}<t<-\dfrac{\pi}{2\omega} \quad ise, \\ -\dfrac{2\omega T_A}{\pi}t+T_M & ; \quad -\dfrac{\pi}{2\omega}<t<\dfrac{\pi}{2\omega} \quad ise, \\ \dfrac{2\omega T_A}{\pi}t+T_M-2T_A & ; \quad \dfrac{\pi}{2\omega}<t<\dfrac{\pi}{\omega} \quad ise \end{cases}$$

şeklinde olduğu durum için ortalama değerdeki artış hesaplanacak ve işlem kolaylığı açısından da özel nümerik değerler kullanılacak. $T_M=5$ ve $T_A=3$ olsun. Bu durumda

$$O.D.A.=\frac{n}{20\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2}\left(\frac{6}{\pi}t+11\right)^2dt+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\frac{6}{\pi}t+5\right)^2dt+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{6}{\pi}t-1\right)^2dt\right)-$$

$$\frac{1}{40\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2}\left(\frac{6}{\pi}t+11\right)dt+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\frac{6}{\pi}t+5\right)dt+\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{6}{\pi}t-1\right)dt\right)^2$$

$$=\frac{3n}{10}=\frac{1}{2}T_A\frac{n}{T_M}$$

bulunur.

Şimdi ek bir çalışma olarak, bu bölümde bulunan sonuç bir de Fourier katsayılarının kullanıldığı (3.2.36c) formülü kullanılarak kontrol edilecek. 2L periyotlu bir $f(x)$ fonksiyonu için Fourier serisi,

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

olarak verilmişti. Burada,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

dır. Şimdi, periyot $2L = 2\pi$ ise $L = \pi$, $f(x) = f_3(t)$, $\omega = 1$, $T_M = 5$ ve $T_A = 3$ durumunda

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2}\left(\frac{6}{\pi}t + 11\right)\cos(nt)\, dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\frac{6}{\pi}t + 5\right)\cos(nt)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{6}{\pi}t - 1\right)\cos(nt)\, dt\right) = 0$$

ve

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2}\left(\frac{6}{\pi}t + 11\right)\sin(nt)dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\frac{6}{\pi}t + 5\right)\sin(nt)dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{6}{\pi}t - 1\right)\sin(nt)dt\right)$$

$$= \frac{-24}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (3.2.36c) de yerine yazılırsa

$$T_{mean}\big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{n}{20}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{576}{n^4\pi^4}\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{20}\frac{576}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) = \frac{n}{20}\frac{576}{\pi^4}\frac{\pi^4}{96} = \frac{3n}{10}$$

elde edilir ki bu tamamen $\frac{1}{2}T_A\frac{n}{T_M}$ demektir.

3.2.4d Bölüm (3.2.4)'ün Sonucunun Kısa Bir Özeti

Isı difüzyon denkleminin farklı üç sınır koşulu, (3.2.41b) formülü kullanılarak karşılaştırıldı. Bu sınır koşullarına bağlı olarak ortalama değerlerde ne ölçüde bir artışın olduğu hesaplandı. İlk iki sınır koşulu arasında iyi bir ilişkinin olduğu görüldü. Ayrıca ilk duruma göre ikinci durumda ortalama değerdeki artış iki kat daha fazla elde edildi.

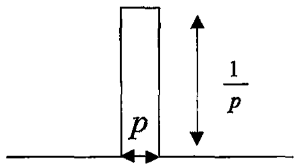
3.3. Sınır Koşulunun Basamak ve Impuls Fonksiyonlar Olması Durumunda Difüzyon

Bölüm 3.2'de lineer olmayan üç farklı sınır koşulu verilerek bu sınır koşulları için ortalama değerdeki artışlar hesaplandı. Bu bölüm ise, sınır koşulunun çok düzensiz davrandığı durumları içerecek. Bu şekildeki davranışlar en iyi şekilde impuls fonksiyonuyla ifade edilir. Dolayısıyla yöntem olarak doğrudan Dirac-δ fonksiyonu kullanılacak ve ayrıca bu yöntem basamak fonksiyonun bir serisinin ortalaması yardımıyla da doğrulatılacaktır.

Bu bölümde, Şekil 3.4'deki gibi sınırda meydana gelen ani değişimler incelenecek. Bu tür değişimler ısı difüzyonundan çok nemde ortaya çıkıyor. Örneğin, çok kurak bir ortama ani nem akışında olduğu gibi. Bu olayın incelenmesinde şu yöntem izlenecek: **İlk olarak,** Fourier serisi kullanılarak sınır koşullarının basamak ve impuls fonksiyonlar olduğu durumlar için sınırdaki iniş çıkışlar için formüller elde edilecek. **Sonra,** bu sınır koşulları altında lineer difüzyon formülleri çözülecek. **Üçüncü** adımda ise, bir grafik programı yardımıyla sonuçlar grafik olarak sunulacak (Bak s.71, Şekil 3.7-11). Bu yolla lineer difüzyon için tam bir çözüm elde edilmektedir. Benzer şekilde lineer olmayan difüzyon için basamak ve impuls sınır koşulları altında ortalama değerdeki artış için ifadeler elde edilecek.

3.3.1. Basamak ve Impuls Fonksiyonlar Altında Lineer Difüzyon

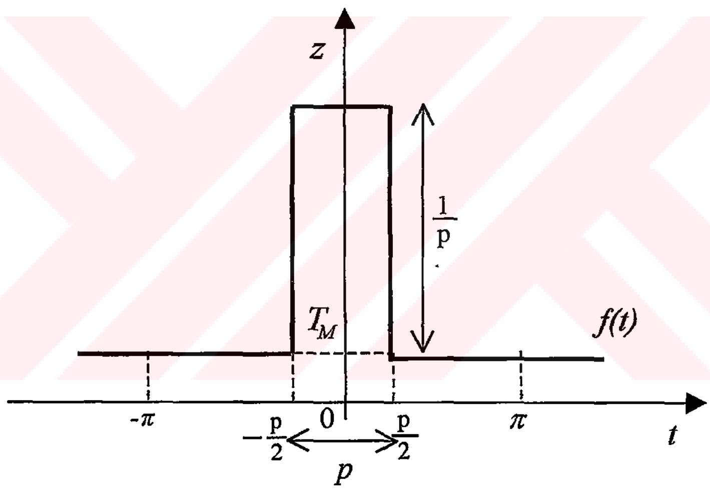
Şekil 3.4'den de görüldüğü gibi bu bölümde sınır koşulunun ani (keskin) değişimler yaptığı lineer difüzyon incelenecek. Burada Impuls (Dirac-δ) fonksiyonu göz önünde bulunduruluyor. Çünkü $p \to 0$ iken basamak fonksiyonu için elde edilen en küçük hareket (davranış) impuls fonksiyonunda görülenin aynıdır.



Şekil 3.4

3.3.2. Basamak ve Impuls Fonksiyonların Fourier Serisi ile Gösterimi

3.3.2a. Basamak Fonksiyonu



Şekil 3.5

Periyodik bir $f(t)$ fonksiyonu için Fourier serisi

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{n\pi t}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi t}{L})\right) \tag{3.3.1}$$

şeklinde verilmişti. Burada

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

ve periyot $2L = 2\pi$ ise $L = \pi$ dir. Açıkça görüleceği üzere $f(t)$ bir çift fonksiyondur. Verilen bir çift fonksiyon için bu formüller kullanılırsa

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{p/2} \left(T_M + \frac{1}{p} \right) dt + \int_{p/2}^{\pi} (T_M)\, dt \right) = 2\left(\frac{1}{2\pi} + T_M \right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{p/2} \left(T_M + \frac{1}{p} \right) \cos(nt)\, dt + \int_{p/2}^{\pi} T_M \cos(nt)\, dt \right) = \frac{2}{np\pi} \sin\left(\frac{np}{2} \right)$$

ve

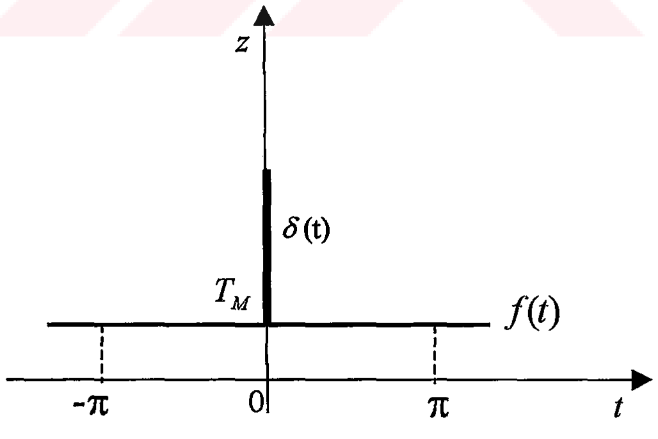
$$b_n = 0$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (3.3.1) de yerine yazılırsa

$$T(0,t) = f(t) = \frac{1}{2}\left(2T_M + \frac{1}{\pi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{np\pi} \sin(\frac{np}{2}) \cos(nt) \qquad (3.3.2)$$

basamak fonksiyonun Fourier serisi ile ifadesi elde edilir.

3.3.2b. Impuls (Dirac-δ) Fonksiyonu



Şekil 3.6

Benzer şekilde $f(t)$ fonksiyonu için formül (3.3.1) ve Dirac-δ fonksiyonunun temel özellikleri kullanılırsa

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \delta(t) \right)dt = T_M + \frac{1}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \delta(t)\right)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}$$

ve

$$b_n = 0$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (3.3.1) de yerine yazılırsa

$$f(t) = \left(T_M + \frac{1}{2\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\cos(nt) \qquad (3.3.3)$$

impuls fonksiyonun Fourier serisi ile ifadesi elde edilir. $p \to 0$ iken ve $\lim\limits_{p\to 0}\frac{\sin \alpha p}{p} = \alpha$ için basamak fonksiyonun Fourier serisi ile ifadesi olan (3.3.2) nin formül (3.3.3) e dönüştüğü görülecektir. Yani (3.3.3) ifadesi basamak fonksiyonun Fourier serisi ile ifadesinin bir limitidir.

3.3.3. İkinci Aşama

$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ lineer difüzyon denklemi yukarıda elde edilen iki sınır koşulu için çözülecek. Yine burada $p \to 0$ iken her iki çözümün de aynı olduğu görülecektir.

3.3.3a Basamak Fonksiyonu

$$T(0,t)=f(t)=\frac{1}{2}\left(2T_M+\frac{1}{\pi}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{np\pi}\sin(\frac{np}{2})\cos(nt)$$ sınır koşulu altında

lineer difüzyon denkleminin genel çözümü

$$T(z,t)=\left(T_M+\frac{1}{2\pi}\right)+\frac{2}{p\pi}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin(\frac{pr}{2})e^{-r\alpha z}\cos(r\omega t-r\alpha z)\right) \qquad (3.3.4)$$

dır.

3.3.3b. Impuls (Dirac-δ) Fonksiyonu

$$T(0,t)=f(t)=\left(T_M+\frac{1}{2\pi}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cos(nt)$$ sınır koşulu altında lineer

difüzyon denkleminin genel çözümü

$$T(z,t)=\left(T_M+\frac{1}{2\pi}\right)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}e^{-r\alpha z}\cos(r\omega t-r\alpha z) \qquad (3.3.5)$$

dır. Basamak fonksiyonun Fourier serisi ile ifadesi olan (3.3.4) limit durumunda, $p\rightarrow 0$ iken (3.3.5) e dönüştüğü görülür. Yani (3.3.5) impuls fonksiyonun sınırdaki bir çözümü iken basamak fonksiyonu için sınırdaki çözümünün bir limitidir.

3.3.4. Üçüncü Aşama

Bu aşamada bir grafik programı kullanılarak her iki çözümün de grafikle gösterimleri verilerek (Bak s.71, Şekil 3.7-11), derinliğin geniş, orta veya küçük olduğu durumlar için grafiklerde meydana gelebilecek değişimler gözlemlenecek.

3.3.4a Basamak ve Impuls Fonksiyonları Altında Lineer Isı Difüzyonu için Grafik Gösterimleri

Bu bölümde (3.3.4) çözümü bir grafik programı yardımıyla serinin seksen terimi için ve $\omega = 1$, $T_M = 5$, $\kappa = 4$, $p = \left(\frac{1}{10}\right).\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$ değerleri alınarak değerlendiriliyor. z değeri için ortaya çıkan dört farklı katmandaki davranış biçimi Şekil 3.7'de (Bak s.71) ve aynı davranışın daha ayrıntılı bir gösterimi de Şekil 3.8'de (Bak s.72) verilmiştir. Burada aşağıdaki özellikler söylenebilir:

(1) Sınırdaki süreksizlik orta bölgelere ilerlememektedir. Bu durum difüzyonun sürekli olmayan fonksiyonları düzleştirdiği gerçeğini yansıtmaktadır.

(2) Sinüzoidal difüzyonun bir çok özelliği yine de gözlenebilmektedir: dalganın ortamda ilerlemesi geciktirilmiş, derin tabakalarda, yüzeye daha yakın olan tabakalara göre daha maksimum değer alıyor.

(3) Dalga genliği ortamı geçiş sırasında azalıyor.

(4) Lineer olmayan difüzyonun hiç bir özelliği görülmemektedir. Örneğin ortalama değerlerde hiç bir artış yoktur.

(5) Davranıştaki lineer difüzyona, bu benzerliklere rağmen hareket sinüzoidal değildir. Hareket, s nin değiştiği ve z nin büyümesiyle büyüdüğü $e^{-(t-s)^2}$ formundadır. Bu elbette Bölüm 2.1'deki denklem (2.34) ün ikinci terimini izliyor.

Benzer şekilde impuls sınır koşulu için, (3.3.5) çözümü bir grafik programı yardımıyla serinin seksen terimi için ve $\omega = 1$, $T_M = 5$, $\kappa = 4$ değerleri alınarak değerlendiriliyor. Şekil 3.9'da (Bak s.73) derinlik için dört farklı katmandaki sonuç davranışı ve Şekil 3.10'da (Bak s.74) ise aynı davranış daha detaylı olarak verilmektedir. Ayrıca Bölüm 3.3.3b'nin önemli bir kesiti (Şekil 3.10) ile Bölüm 3.3.3a'nın önemli bir kesiti (Şekil 3.11) sınır koşulsuz karşılaştırılmaktadır.

3.3.5. Lineer Olmayan Difüzyon

Tekrar lineer olmayan difüzyona dönelim. Bölüm 3.1'de difüzyonun derin ortama geçerken ortalama değerde artış olduğu görülmüştü. Bölüm 3.2'de ise periyodik bir sınır koşulunda, $T(0,t) = f(t)$, ortalama değerlerdeki artış için

$$T_{mean}\big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\left\{\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2\,dt - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\,dt\right)^2\right\} \tag{3.3.6}$$

ve

$$T_{mean}\big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r^2 + b_r^2\right) \tag{3.3.7}$$

eşdeğer ifadeleri verilmişti. Şimdi her iki ifade sınır koşulunun basamak fonksiyonu ve impuls (Dirac-δ) fonksiyonu olduğu iki durum için değerlendirilecektir. Limit durumunda $p \to 0$ iken dört sonucun da aynı olacağı, fakat sonuçtaki serilerin ıraksak olacağı görülecektir.

3.3.5a. Basamak Fonksiyonu için Ortalama Değerdeki Yükselişin Hesaplanması

Burada basamak fonksiyonun

$$T(z,t)=\left(T_M+\frac{1}{2\pi}\right)+\frac{2}{p\pi}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha z}\cos(r\omega t-r\alpha z)\right)$$

genel ifadesi, (3.3.2) sınır koşulu altında (3.3.6) denklemi kullanılarak ortalamalardaki artış hesaplanacak. Şimdi (3.3.6) denklemini

$$T_{mean}\Big|_{z\to+\infty}-T_{mean}\Big|_{z=0}=\frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}I_1-\left(\frac{1}{2\pi}I_2\right)^2\right\} \tag{3.3.8}$$

şeklinde ifade edelim. Burada

$$I_1=\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M+\frac{1}{2\pi}+\left(\frac{2}{p\pi}\right)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)\cos(rt)\right)^2 dt$$

ve

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M+\frac{1}{2\pi}+\frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)\cos(rt)\right)dt$$

olsun. Önce I_1 i hesaplayalım. I_1 için verilen eşitliğin karesi alınır ve kısaltmalar kullanılırsa

$$I_1=A+\left(\frac{4T_M\pi+2}{p\pi^2}\right)B+\left(\frac{4}{p^2\pi^2}\right)C \tag{3.3.9}$$

elde edilir. Burada

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M+\frac{1}{2\pi}\right)^2 dt=2T_M^2\pi+2T_M+\frac{1}{2\pi}$$

$$B=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)\cos(rt)\,dt=0$$

$$C=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)\cos(rt)\right)^2 dt$$

dır. Cauchy-yeniden düzenlenmesine göre C

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{r} \frac{1}{m\,(r-m+1)} \sin\left(\frac{pm}{2}\right) \sin\left(\frac{p(r-m+1)}{2}\right) \cos(mt)\, \cos\big((r-m+1)t\big)\, dt$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\mathrm{C} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4\pi}{r^2} \sin^2\left(\frac{pr}{2}\right)$$

bulunur. A, B, ve C değerleri (3.3.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$I_1 = 2T_M^2\pi + 2T_M + \frac{1}{2\pi} + \left(\frac{4}{p^2\pi^2}\right) \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4\pi}{r^2} \sin^2\left(\frac{pr}{2}\right)$$

sonucu elde edilir. Şimdi de I_2 yi hesaplayacak olursak

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{pr}{2}\right) \cos(rt) \right) dt = 2T_M\pi + 1$$

bulunur. Böylece I_1 ve I_2 değerleri de (3.3.8) da yerine yazılırsa

$$T\,|_{z\to+\infty} - T\,|_{z=0} = \frac{n}{2T_M} \left\{ \frac{1}{2\pi} I_1 - \left(\frac{1}{2\pi} I_2 \right)^2 \right\} = \frac{n}{2T_M} \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{8}{p^2 r^2 \pi^2} \sin^2\left(\frac{pr}{2}\right) \right)$$

veya daha genel ifadesiyle

$$T\,|_{z\to+\infty} - T\,|_{z=0} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4n}{T_M r^2 \pi^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p} \right)^2 \qquad (3.3.10)$$

bulunur. Elde edilen bu formül lineer olmayan difüzyon için ortalama değerdeki artışı vermesi açısından difüzyon teorisinde önemli bir yere sahipdir.

Şimdi de (3.3.7) ifadesinden yararlanarak sınır koşulu $T(0,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{pr}{2}\right) \cos(r\omega t)$ iken sonuç (3.3.10) un sağlaması yapılacak. Bu sınır koşuluna göre sinüs terimleri b_r olmayacak, sadece kosinüs terimleri a_r kalacak. Bu durumda $b_r = 0$ ve $a_r = \left(\frac{2}{rp\pi} \sin\left(\frac{pr}{2}\right)\right)$ için

$$\text{O.D.A.} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r^2 + b_r^2\right) = \frac{n}{4T_M}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{2}{rp\pi}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)\right)^2 = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{n}{T_M r^2 \pi^2}\left(\frac{\sin\left(\frac{r}{2}p\right)}{p}\right)^2$$

bulunur. Bu sonuçtan (3.3.6) ile (3.3.7) ifadelerinin aynı olduğu görülür.

3.3.5b. Impuls Fonksiyonu için Ortalama Değerdeki Yükselişin Hesaplanması

Burada ise Impuls (Dirac-δ) fonksiyonunun

$$T(z,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\alpha z}\cos(r\omega t - r\alpha z)$$

genel ifadesi, (3.3.3) sınır koşulu altında (3.3.6) denklemi kullanılarak ortalamalardaki artış hesaplanacak. Şimdi (3.3.6) denklemini

$$T_{mean}\Big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\Big|_{z=0} = \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}I_1 - \left(\frac{1}{2\pi}I_2\right)^2\right\} \tag{3.3.11}$$

şeklinde ifade edelim. Burada

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\cos(rt)\right)^2 dt \quad \text{ve} \quad I_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\cos(rt)\right) dt$$

olsun. Önce I_1 i hesaplayalım. I_1 için verilen eşitliğin karesi alınır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$I_1 = A + \left(\frac{2T_M\pi + 1}{\pi^2}\right)B + \left(\frac{1}{\pi^2}\right)C \tag{3.3.12}$$

elde edilir. Burada

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M+\frac{1}{2\pi}\right)^2 dt=2T_M^2\pi+2T_M+\frac{1}{2\pi}$$

$$B=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\cos(rt)\,dt=0$$

$$C=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\cos(rt)\right)^2 dt$$

dır. Cauchy-yeniden düzenlenmesine göre C

$$C=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{r}\cos(mt)\cos\big((r-m+1)\,t\,\big)\,dt$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\mathrm{C}=\sum_{r=2}^{\infty}\pi$$

bulunur. $A, B,$ ve C değerleri (3.3.12) de yerine yazılırsa

$$I_1=2T_M^2\pi+2T_M+\frac{1}{2\pi}+\left(\frac{1}{\pi^2}\right)\sum_{r=2}^{\infty}\pi$$

sonucu elde edilir. Şimdi de I_2 yi hesaplayacak olursak

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\cos(rt)\right)dt=2T_M\pi+1$$

bulunur. Böylece I_1 ve I_2 değerleri de (3.3.11) de yerine yazılırsa

$$T\,|_{z\to+\infty}-T\,|_{z=0}=\frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}I_1-\left(\frac{1}{2\pi}I_2\right)^2\right\}=\frac{n}{2T_M}\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{2\pi^2}\right)=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{n}{4T_M\pi^2}$$

(3.3.13)

elde edilir.

Şimdi de (3.3.7) ifadesinden yararlanarak Sınır koşulu $T(0,t)=T_M+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\cos(r\omega t)$ iken sonuç (3.3.13) ün sağlaması yapılacak. Bu sınır koşuluna göre sinüs terimleri b_r olmayacak, sadece kosinüs terimleri a_r kalacak. Bu durumda $b_r=0$ ve $a_r=\frac{1}{\pi}$ için

$$\text{O.D.A.}=\frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r^2+b_r^2\right)=\frac{n}{4T_M}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^2=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{n}{4T_M\pi^2}$$

bulunur. Bu durumda her iki formülün de aynı olduğu görülmüş olur. Limit durumunda basamak fonksiyonun Dirac-δ (Impuls) fonksiyonuna dönüştüğü görülmektedir. Yani bu ifade

$$\lim_{p\to 0}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{4n}{T_M r^2\pi^2}\left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p}\right)^2=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{n}{T_M\pi^2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ne yazık ki impuls fonksiyon, basamak fonksiyonun limiti olarak tanımlandığındaki gibi ıraksak bir seri veriyor. Elde edilen her iki seri de sonsuza yakınsar. Bulunan bu ifadeler Bölüm 3.1'de pertürbasyon metodu kullanılarak elde edilmişti. Dolayısıyla burada sınır koşulunun yeni bir durumu ortaya çıkmaktadır.

3.3.6. Sınır Koşullarının Değiştirilmesi

Ne yazık ki lineer olmayan difüzyon için sınır koşulu impuls fonksiyonu iken kullanışlı sonuçlar elde edilemedi. Dolayısıyla kullanışlı sonuçlara ulaşabilmek için yöntem değiştirilerek lineer olmayan difüzyon başlamadan önce impuls fonksiyonunun değiştirildiği, kalınlığı ε olan dar bir tabakanın var olduğu varsayılan yeni bir sınır koşulu tanımlanacak. Değiştirilen serilerin yakınsak olduğu ve gözenekli ortamlardan beklenen artış derecesinde artış verdiği görülecektir.

Bu yaklaşım iki nedenden dolayı uygundur. Bunlardan **ilki** hiçbir fiziksel davranışın impuls fonksiyonu kullanılarak modellenememesinin açık olması; **diğeri** ise, çoğu gözenekli ortamın "tabaka oluşumu" üretmesidir. Bu ortam dar bir tabakadır ve içeride ortam gerçekte gözenekli değildir, ancak lineer difüzyon tarafından başarılı şekilde modellendiği gibi davranır. Bu ifadeler özellikle difüzyonda bulunan elemanın yoğunluğunun düşük olduğu durumlarda doğrudur.

Aşağıda ε kalınlığında dar bir kabuk olduğu ve lineer olmayan difüzyon başlamadan önce difüzyonun lineer olduğu kabul edilecek. Bu yaklaşım, basamak ve impuls fonksiyonu için bir dizi verecektir.

3.3.6a Basamak Fonksiyonu için Sınır Koşulunun Değiştirilmesi

Lineer difüzyonun

$$T(0,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)\cos(r\omega t)$$

sınır koşulu altında genel ifadesi

$$T(z,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha z}\cos(r\omega t - r\alpha z)$$

olarak verilmişti. Burada $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}$. ε derinliğinde bu ifade

$$T(\varepsilon,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha\varepsilon}\cos(r\omega t - r\alpha\varepsilon) \qquad (3.3.14)$$

olur. Yine benzer şekilde burada (3.3.6) ifadesi kullanılarak basamak fonksiyonu için (3.3.14), lineer olmayan difüzyon için yeni bir sınır koşulu gibi alınarak ortalamalardaki artış hesaplanacak. Böylece (3.3.6) denklemini

$$T_{mean}\big|_{\varepsilon\to+\infty} - T_{mean}\big|_{\varepsilon=0} = \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}I_1 - \left(\frac{1}{2\pi}I_2\right)^2\right\} \qquad (3.3.15)$$

şeklinde ifade edelim. Burada

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha a}\cos(rt - r\alpha\varepsilon)\right)^2 dt$$

ve

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha\varepsilon}\cos(rt - r\alpha\varepsilon)\right)dt$$

olsun. Önce I_1 i hesaplayalım. I_1 için verilen eşitliğin karesi alınır ve gerekli kısaltmalar kullanılırsa

$$I_1 = A + \left(\frac{4T_M\pi + 2}{p\pi^2}\right)B + \left(\frac{4}{p^2\pi^2}\right)C \qquad (3.3.16)$$

elde edilir. Burada

$$A = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi}\right)^2 dt = 2T_M^2\pi + 2T_M + \frac{1}{2\pi}$$

$$B = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha\varepsilon}\cos(rt - r\alpha\varepsilon)\,dt = 0$$

$$C = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha\varepsilon}\cos(rt - r\alpha\varepsilon)\right)^2 dt$$

dır. Cauchy-yeniden düzenlenmesine göre C

$$C = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m\,(r-m+1)}\,e^{-(r+1)\alpha\varepsilon}\sin\left(\frac{pm}{2}\right)\sin\left(\frac{p(r-m+1)}{2}\right).$$

$$\cos(mt - m\alpha\varepsilon)\cos(\,(r-m+1)\,(t-\alpha\varepsilon)\,)dt$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\mathrm{C} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4\pi}{r^2} e^{-r\alpha\varepsilon} \sin^2\left(\frac{pr}{2}\right)$$

bulunur. Burada sinüs integralinin ortanormalleştirilmesi kullanıldı. A, B ve C değerleri (3.3.16) da yerine yazılırsa

$$I_1 = 2T_M^2\pi + 2T_M + \frac{1}{2\pi} + \left(\frac{4}{p^2\pi^2}\right)\sum_{r=2}^{\infty} \frac{4\pi}{r^2} e^{-r\alpha\varepsilon} \sin^2\left(\frac{pr}{2}\right)$$

bulunur. Benzer şekilde I_2 yi hesaplayacak olursak

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right) e^{-r\alpha\varepsilon} \cos(rt - r\alpha\varepsilon)\right) dt = 2T_M\pi + 1$$

bulunur. Böylece I_1 ve I_2 değerleri de (3.3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$T\,|_{\varepsilon\to+\infty} - T\,|_{\varepsilon=0} = \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}I_1 - \left(\frac{1}{2\pi}I_2\right)^2\right\} = \frac{n}{2T_M}\left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{8}{p^2r^2\pi^2} e^{-r\alpha\varepsilon} \sin^2\left(\frac{pr}{2}\right)\right)$$

$$= \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4n}{T_M r^2\pi^2} e^{-r\alpha\varepsilon} \left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p}\right)^2 \qquad (3.3.17)$$

sonucu bulunur.

Şimdi de (3.3.7) ifadesinden yararlanarak sınır koşulu $T(\varepsilon,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{2}{p\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)e^{-r\alpha\varepsilon}\cos(r\omega t - r\alpha\varepsilon)$ iken sonuç (3.3.17) nin sağlaması yapılacak. Bu sınır koşuluna göre sinüs terimleri b_r olmayacak, sadece kosinüs terimleri a_r kalacak. Bu durumda $b_r = 0$ ve $a_r = \frac{2}{rp\pi}e^{-r\alpha\varepsilon} sin\left(\frac{pr}{2}\right)$ için

$$O.\,D.\,A. = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r^2 + b_r^2\right) = \frac{n}{4T_M}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{2}{rp\pi}e^{-r\alpha\varepsilon}\sin\left(\frac{pr}{2}\right)\right)^2$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{n}{T_M r^2 \pi^2} e^{-2r\alpha\varepsilon} \left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p} \right)^2 \qquad (*)$$

bulunur. Bu sonuç (3.3.17) ile aynıdır. (*) ifadesi alınır, $e^{-2\alpha\varepsilon} = \beta$ yazılır ve p sıfıra yaklaştırılırsa

$$O.D.A. = \frac{n}{T_M \pi^2} \left\{ \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}p\right)}{p} \right)^2 e^{-2\alpha\varepsilon} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(p)}{p} \right)^2 e^{-2\alpha\varepsilon 2} + \frac{1}{9}\left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}p\right)}{p} \right)^2 e^{-2\alpha\varepsilon 3} + \cdots \right\}$$

$$= \frac{n}{T_M \pi^2} \left\{ \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta^3 + \frac{1}{4}\beta^4 + \cdots \right\}$$

$$= \frac{n\beta}{4T_M \pi^2} \left\{ 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots \right\}$$

$$= \frac{n e^{-2\alpha\varepsilon}}{4T_M \pi^2 \left(1 - e^{-2\alpha\varepsilon}\right)}$$

bulunur. Böylece basamak fonksiyonu için ortalamalardaki artışı veren bir formül elde edildi.

3.3.6b Impuls Fonksiyonu için Sınır Koşulunun Değiştirilmesi

Lineer difüzyonun

$$T(0,t) = \left(T_M + \frac{1}{2\pi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos(rt)$$

sınır koşulu altında genel ifadesi

$$T(z,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\alpha z} \cos(r\omega t - r\alpha z)$$

olarak verilmişti. ε derinliğinde bu ifade

$$T(\varepsilon,t) = T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\alpha\varepsilon} \cos(r\omega t - r\alpha\varepsilon) \qquad (3.3.18)$$

olur. Impuls fonksiyonu için (3.3.18) denklemi lineer olmayan difüzyon için bir sınır koşulu gibi alarak (3.3.6) denklemini

$$T_{mean}|_{\varepsilon\to+\infty} - T_{mean}|_{\varepsilon=0} = \frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}I_1 - \left(\frac{1}{2\pi}I_2\right)^2\right\} \qquad (3.3.19)$$

şeklinde ifade edelim. Burada

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\alpha\varepsilon} \cos(r\omega t - r\alpha\varepsilon)\right)^2 dt$$

ve

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\alpha\varepsilon} \cos(r\omega t - r\alpha\varepsilon)\right) dt$$

olsun. Önce I_1 i hesaplayalım. I_1 için verilen eşitliğin karesi alınır ve gerekli kısaltmalar kullanılırsa

$$I_1 = A + \left(\frac{1+2T_M\pi}{\pi^2}\right)B + \left(\frac{1}{\pi^2}\right)C \qquad (3.3.20)$$

elde edilir. Burada

$$A = \int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M + \frac{1}{2\pi}\right)^2 dt = 2T_M^2\pi + 2T_M + \frac{1}{2\pi}$$

$$B = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\alpha\varepsilon} \cos(rt - r\alpha\varepsilon)\, dt = 0$$

$$C = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{r=1}^{\infty} e^{-r\alpha\varepsilon} \cos(rt - r\alpha\varepsilon)\right)^2 dt$$

şeklinde bulunur. Cauchy-yeniden düzenlenmesine göre C

$$C=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{r}e^{-(r+1)\alpha\varepsilon}\cos(mt-m\alpha\varepsilon)\cos\big((r-m+1)(t-\alpha\varepsilon)\big)dt$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\mathrm{C}=\sum_{r=2}^{\infty}\pi\, e^{-r\alpha\varepsilon}$$

bulunur. Burada kosinüs fonksiyonların ortanormalleştirilmesi kullanıldı. A, B ve C değerleri (3.3.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$I_1=2\,T_M^2\,\pi+2T_M+\frac{1}{2\pi}+\left(\frac{1}{\pi^2}\right)\sum_{r=2}^{\infty}\pi\, e^{-r\alpha\varepsilon}$$

olur. Benzer şekilde I_2 yi hesaplayacak olursak

$$I_2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(T_M+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}e^{-r\alpha\varepsilon}\cos(r\omega t-r\alpha\varepsilon)\right)dt=2T_M\pi+1$$

bulunur. Böylece I_1 ve I_2 değerleri de denklem (3.3.19) da yerine yazılırsa

$$T\,|_{\varepsilon\to+\infty}-T\,|_{\varepsilon=0}=\frac{n}{2T_M}\left\{\frac{1}{2\pi}I_1-\left(\frac{1}{2\pi}I_2\right)^2\right\}=\frac{n}{2T_M}\left(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{2\pi^2}e^{-r\alpha\varepsilon}\right)=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{n}{4T_M\pi^2}e^{-r\alpha\varepsilon}$$

(3.3.21)

sonucu elde edilir. Şimdi de (3.3.7) ifadesinden yararlanarak sınır koşulu $T(\varepsilon,t)=T_M+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}e^{-r\alpha\varepsilon}\cos(r\omega t-r\alpha\varepsilon)$ iken sonuç (3.3.21) in sağlaması yapılacak. Bu sınır koşuluna göre sinüs terimleri b_r olmayacak, sadece kosinüs terimleri a_r kalacak. Bu durumda $b_r=0$ ve $a_r=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-r\alpha\varepsilon}$ için

$$O.\,D.\,A.=\frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r^2+b_r^2\right)=\frac{n}{4T_M}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}e^{-r\alpha\varepsilon}\right)^2=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{n}{4T_M\pi^2}e^{-2r\alpha\varepsilon}\qquad(**)$$

bulunur. Elbette bu sonuç (3.3.21) ile aynıdır. Limit durumunda $p\to 0$ iken basamak fonksiyonun impuls fonksiyona dönüştüğü görülür. Yani bu ifade

$$\lim_{p\to 0}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{4n}{T_M r^2\pi^2}e^{-ra\varepsilon}\left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p}\right)^2=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{n}{T_M\pi^2}e^{-ra\varepsilon} \tag{3.3.22}$$

şeklinde ifade edilebilir. (**) ifadesi alınır ve $e^{-2a\varepsilon}=\beta$ yazılırsa

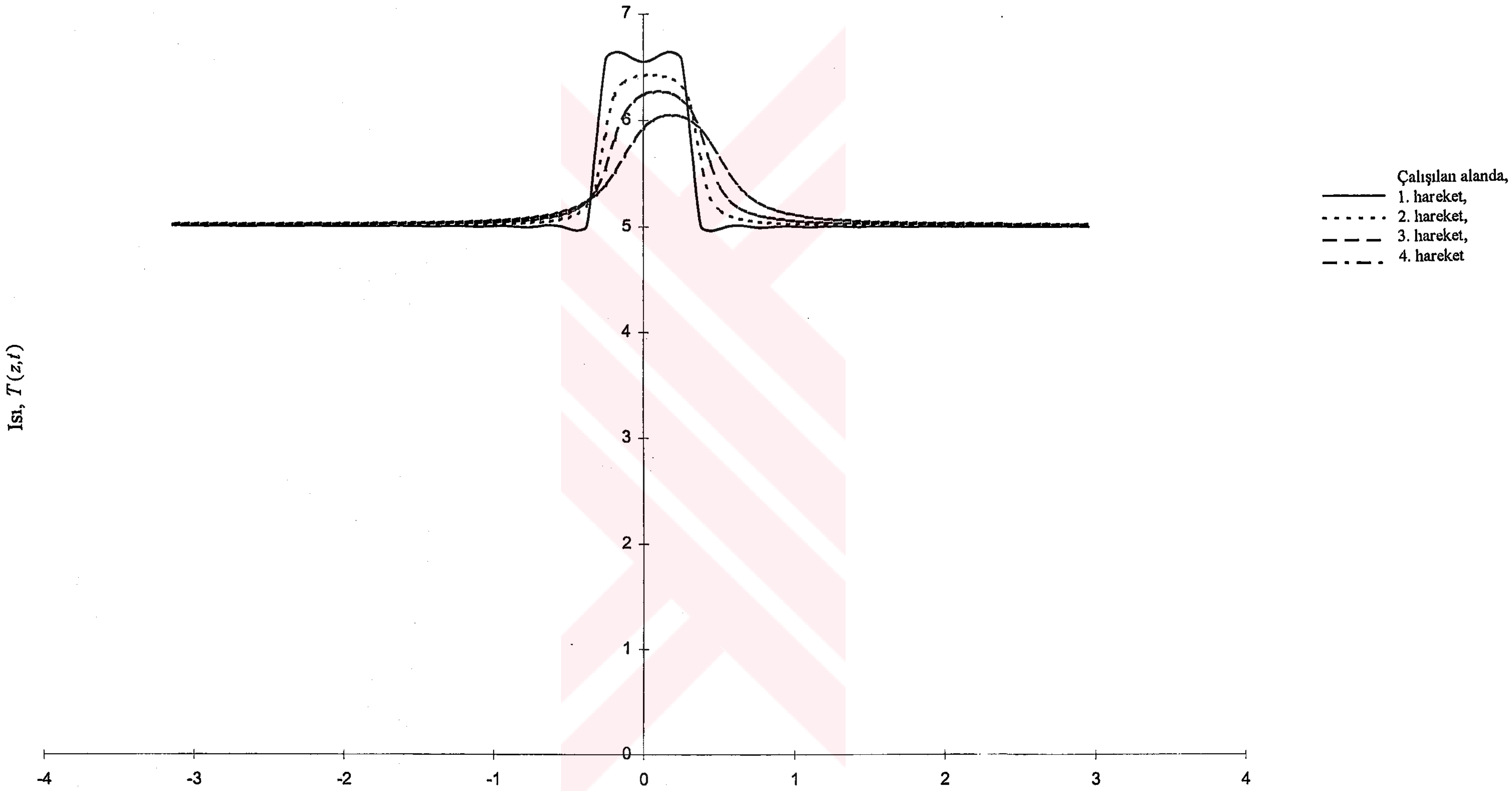
$$O.D.A.=\frac{n}{4T_M\pi^2}\left\{e^{-2a\varepsilon}+e^{-2a\varepsilon 2}+e^{-2a\varepsilon 3}+e^{-2a\varepsilon 4}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{n}{4T_M\pi^2}\left\{\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\cdots\right\}$$

$$=\frac{n\beta}{4T_M\pi^2}\left\{1+\beta+\beta^2+\beta^3+\cdots\right\}=\frac{ne^{-2a\varepsilon}}{4T_M\pi^2\left(1-e^{-2a\varepsilon}\right)}$$

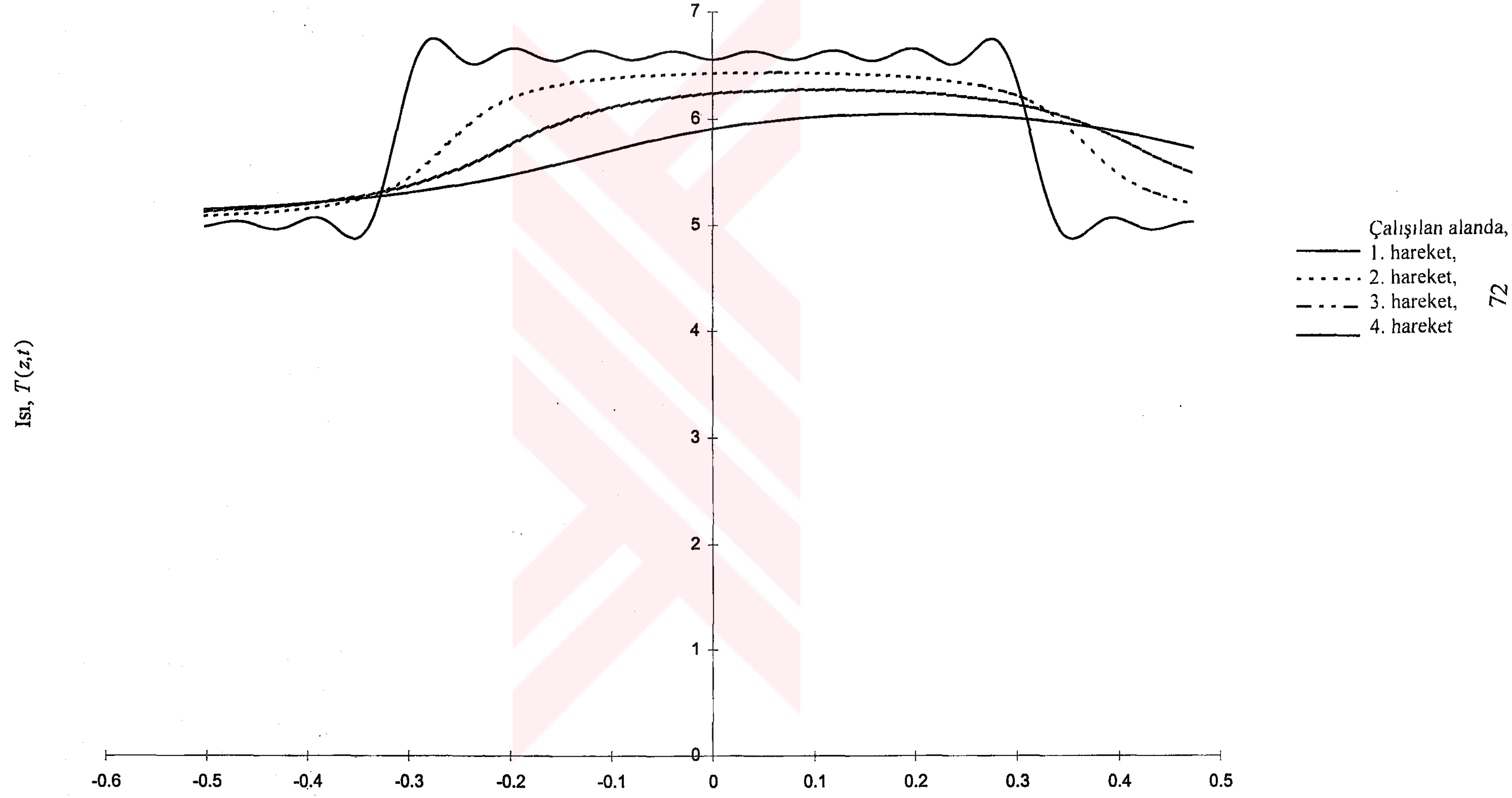
elde edilir. Böylece, lineer olmayan difüzyon altında impuls fonksiyondan lineer difüzyonun dar bir tabakaya modellenmesi sonucu ortalamalardaki artış için bir formül elde edildi. (Kullanılan modelleme yöntemlerinin gösterdiği gibi) Orijinal tahmindeki sınırsız artış doğru olsaydı bu artış tümüyle ε derinliğindeki tabakada ortaya çıkardı.

Lineer ısı denkleminin sınır koşulu basamak fonksiyonu olduğu durum için grafik gösterimi.



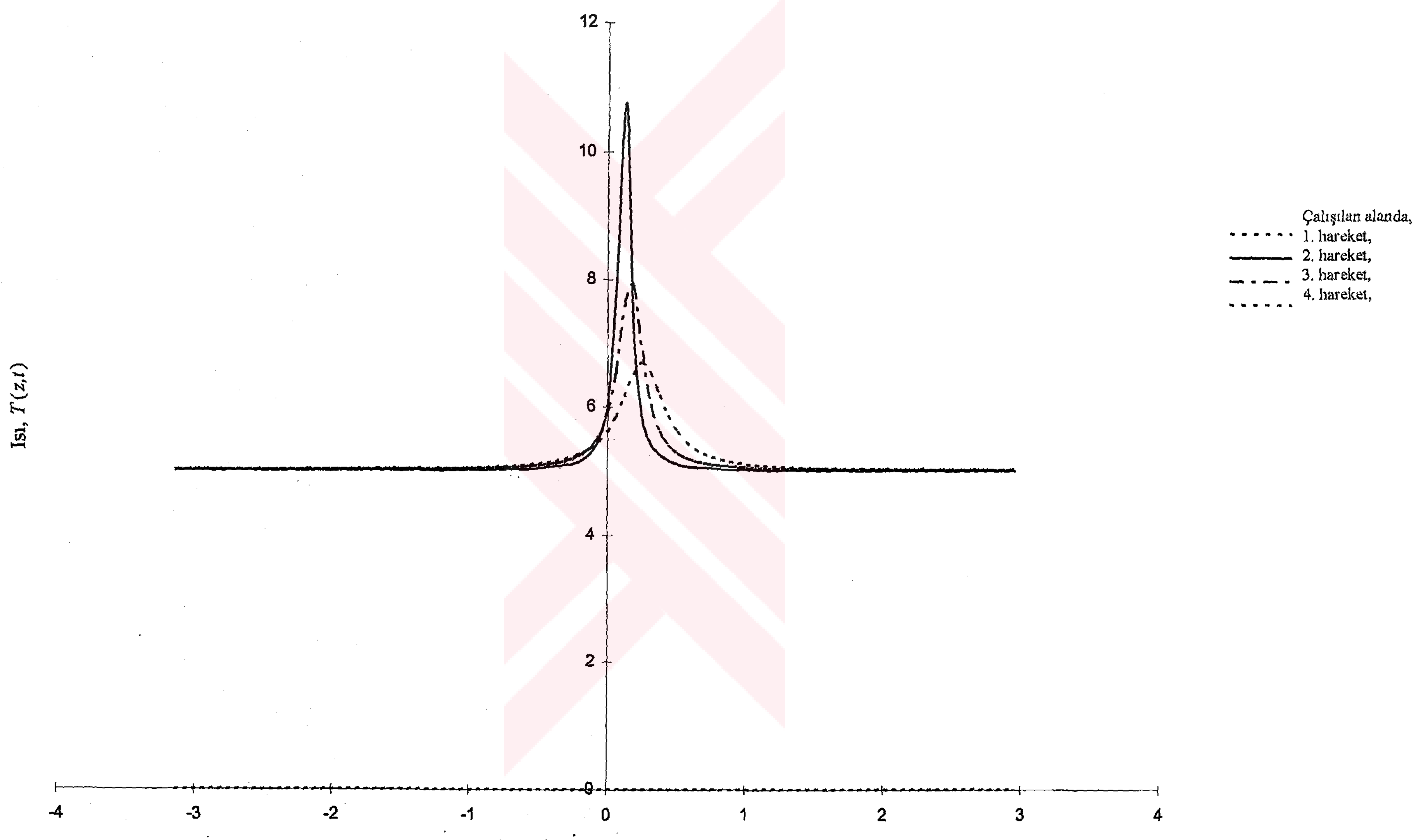
Şekil 3.7. Lineer ısı yayılımının boyutsuz, zaman ve derinliğe bağlı analizi (Denklem 3.3.4).

Lineer ısı denkleminin sınır koşulu basamak fonksiyonu iken önemli bir bölümünün grafik gösterimi.



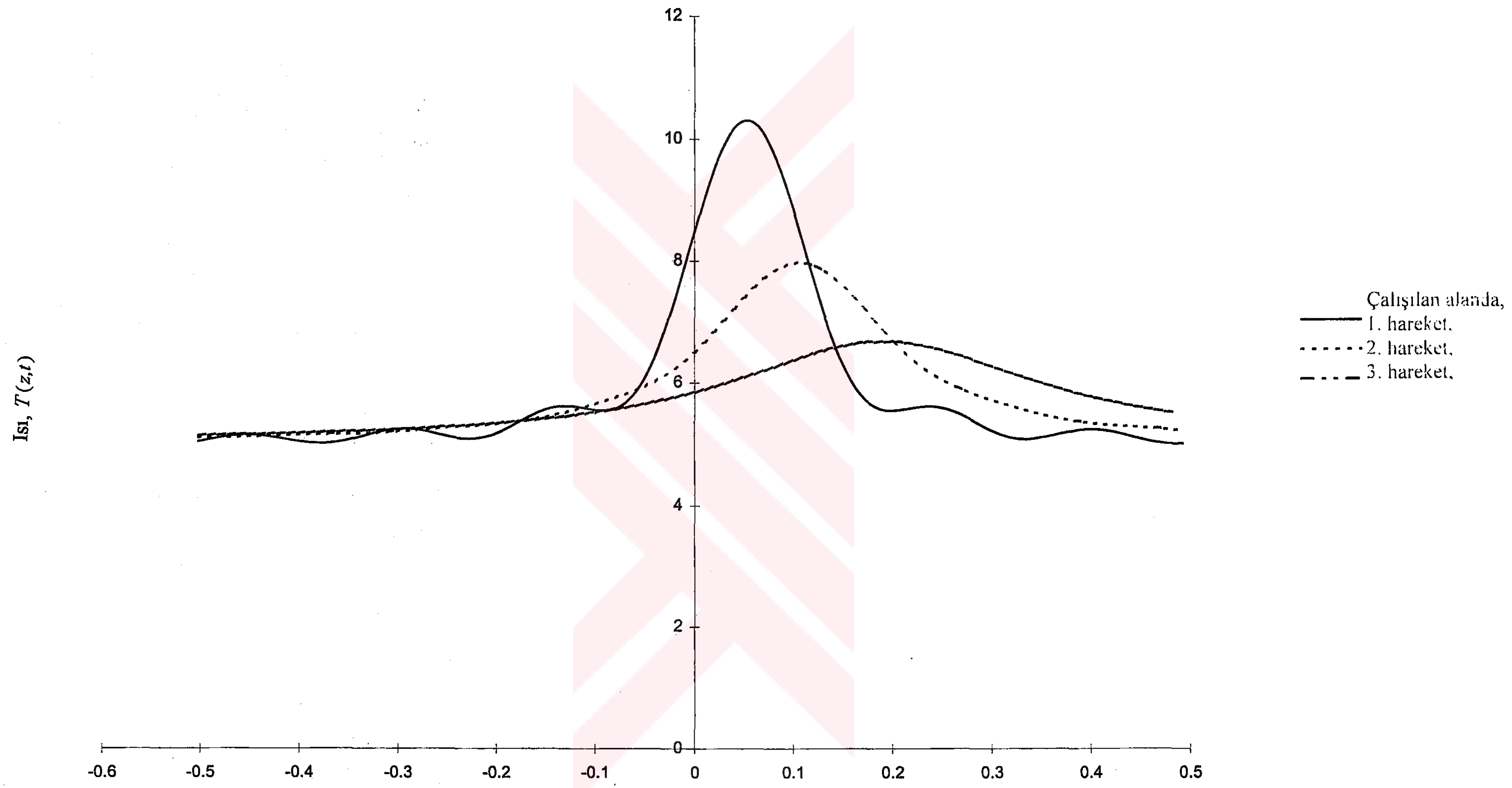
Şekil 3.8. Lineer ısı yayılımının boyutsuz, zaman ve derinliğe bağlı analizi (Denklem 3.3.4).

Lineer ısı denkleminin sınır koşulu impuls fonksiyonu olduğu durum için grafik gösterimi.



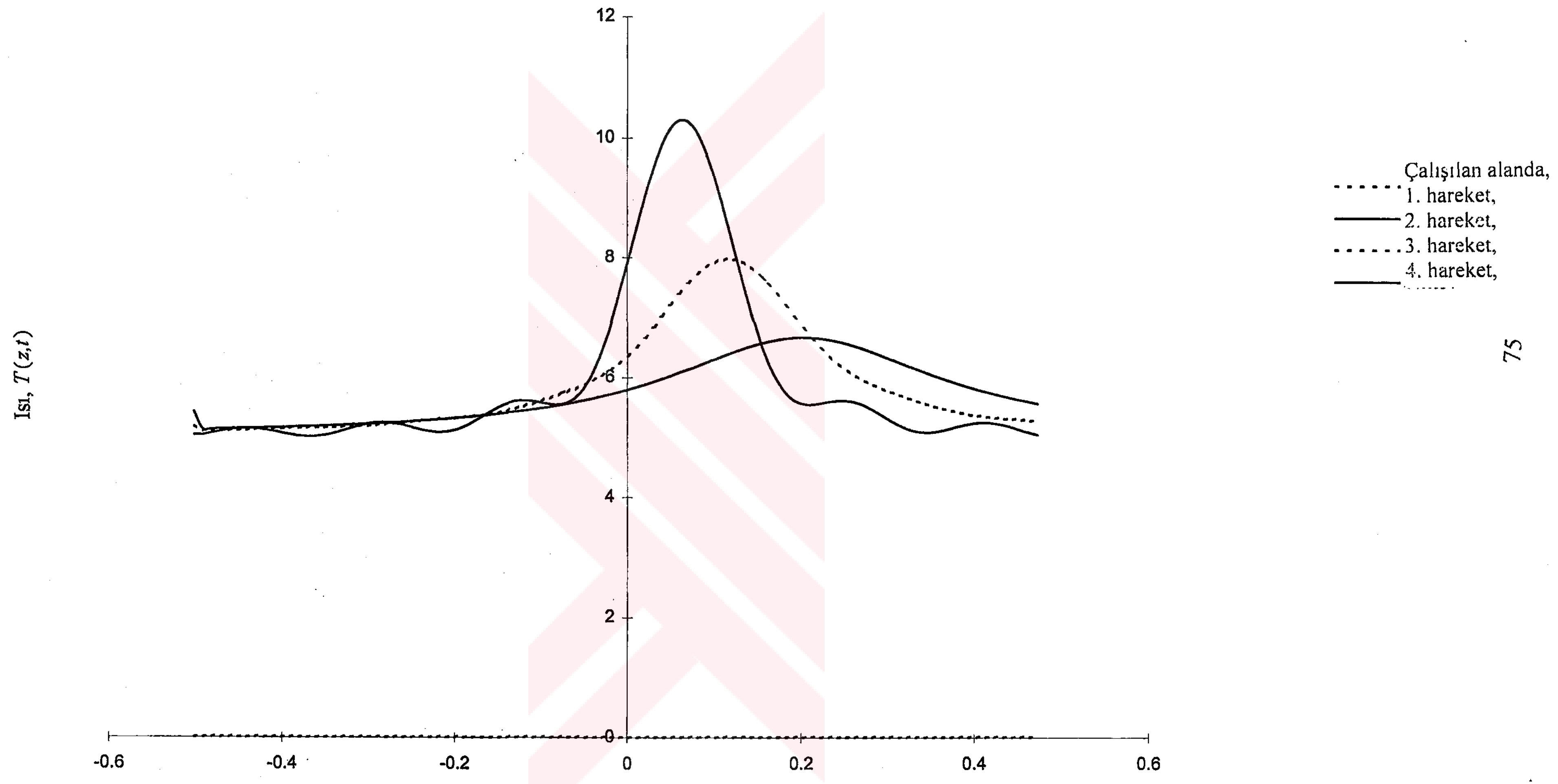
Şekil 3.9. Lineer ısı yayılımının boyutsuz, zaman ve derinliğe bağlı analizi (Denklem 3.3.5).

Sınır koşulları basamak ve impuls fonksiyonları iken önemli bölümlerinin grafik gösterimi ile karşılaştırılması.



Şekil 3.11. Sınır koşulları altında lineer ısı yayılımının boyutsuz, yüzey dışında zaman ve derinliğe bağlı analizi (Denklem 3.3.4).

Lineer ısı denkleminin sınır koşulu impuls fonksiyonu iken önemli bir bölümünün grafik gösterimi.



Şekil 3.10. Lineer ısı yayılımının boyutsuz, zaman ve derinliğe bağlı analizi (Denklem 3.3.5).

3.4. Lineer Difüzyon Çifti

Literatürde difüzyon çifti birçok farklı uygulama alanlarında çalışıldı. Örneğin, toprak gibi gözenekli (süngerimsi) ortamda aynı anda ısı ve nem hareketi(12,23,35,36), su ve tuz akışı(1), su ve ısı nakli(9,5,17), sıvı ve ısı akışı(6), ısı ve kütle transferi(3) vb. Bu konu ilk defa Philip ve De Vries ve diğerleri(12,29) tarafından çalışılmıştır. Jury, Letey ve Stolzy(24), son zamanlarda ise Wiltshire(40), Shepherd ve Wiltshire(35) gibi birçok araştırmacı tarafından da incelendi. Bu bölümde difüzyon katsayısının sabit olarak alındığı birden fazla elemanın difüzyonda bulunduğu lineer difüzyon çifti incelenecek. Bu çeşit denklemin temel uygulama alanına örnek olarak ısı ve nemin eş zamanlı olarak toprağa akması verilebilir. Bu durum

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial y}{\partial z}\right),$$

denklemi ile ifade edilir. Burada $y=[y_1 \quad y_2]^T$ sıcaklık ve nem konsantrasyonunu ifade eden bir vektör ve $\mathbf{\Lambda}$, 2×2 türünde sabit değerlerin oluşturduğu bir matrisi ifade etmektedir.

Bu denklem iki çift değişkenin her biri için $\mathbf{\Lambda}$ matrisinin spektral ayrışımı yöntemi yardımıyla çözülecek. Matris ve vektör metotları kullanıldığında lineer diferansiyel denklem sistemlerinin analizinin basitleştiği görülecektir.

3.4.1. Özdeğerler ve Özvektörler

Bu bölümde $\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial y}{\partial z}\right)$ denkleminin çözümünde kullanılacak özdeğerler ve özvektörlerin tanımı verilmektedir. V, n-boyutlu vektör uzayı ve $\mathbf{\Lambda}$

matrisi V alanında, V den V ye lineer bir dönüşüm olsun. Eğer herhangi bir λ için (reel veya kompleks)

$$\Lambda\, y = \lambda\, y \tag{3.4.1}$$

denkleminin en az bir $y \neq 0$ çözümü varsa, y ye *özvektör*, λ ya ise bu özvektöre uygun *özdeğer* denir[31].

3.4.2. Bir Matrisin Spektral Ayrıştırılması

$\mathbf{\Lambda}$, $n \mathrm{x} n$ boyutlu, özdeğeri λ_i olan köşegenleştirilebilir bir matris olsun. $n \mathrm{x} n$ boyutlu H_{ij} matrisleri

$$H_{ij} = P I_{ij} P^{-1} \tag{3.4.2}$$

şeklinde tanımlansın. Burada P, $\mathbf{\Lambda}$ matrisinin bir özvektör matrisi, I_{ij} ise (i, j) elemanı **1** diğer elemanları **0** olan bir matristir. Ayrıca burada

$$I_{ij}\, I_{kl} = \delta_{jk} I_{il}, \qquad \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ 1 & j = k \end{cases} \tag{3.4.3}$$

olduğu için H_{ij} matrisleri aşağıdaki özelliklere sahiptir

i) $H_{ij}\, H_{kl} = \delta_{jk} H_{il}$, (3.4.4a)

ii) $\sum_{i=1}^{n} H_{ii} = I$, (3.4.4b)

iii) $\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) H_{ii} = f(\Lambda)$. (3.4.4c)

(Polinomlar dizisinin düzgün limiti olan tüm f fonksiyonları için.)

Bu bölümde, ilk önce H_{ij} matrisi genel yolla oluşturulduğunda (P özvektör matrisinden yararlanılarak) Λ özel matrisinin yukarıda verilen özelliklerinden bazıları gösterilecektir. Daha sonra, $\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda \frac{\partial y}{\partial z}\right)$ denkleminin davranışında spektral ayrışımların nasıl olduğu incelenecek.

Örnek1

Şimdi yukarıda sözü edilen düşünceleri örneklendirelim. Λ matrisi $\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$ dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektör matrisi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dir ve tersi de $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ bulunur. Bu durumda Λ nın köşegen matrisi

$$H = P^{-1}\Lambda P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olur. Λ matrisinin spektral ayrışımları aşağıdaki gibi verilebilir

$$H_{11} = PI_{11}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H_{12} = PI_{12}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H_{21} = PI_{21}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{22} = PI_{22}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Şimdi de (3.4.4a,b,c) özellikleri için bazı örnekler verilebilir.

1) $H_{ij}\ H_{kl} = \delta_{jk}\ H_{il}$

i) $H_{11}\ H_{12} = \delta_{11}\ H_{12} = H_{12}$

$$H_{11}\ H_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

ii) $H_{22}\ H_{21} = \delta_{22}\ H_{21} = H_{21}$

$$H_{22}\ H_{21} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) $H_{11}\ H_{21} = \delta_{12}\ H_{11} = 0$

$$H_{11}\ H_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $\sum_{i=1}^{n} H_{ii} = I$

$$H_{11} + H_{22} = I$$

$$H_{11}+H_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

3) $f(\Lambda)=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\,H_{ii}$

veya daha açık ifadesiyle

$$f(\Lambda)=f(\lambda_1)H_{11}+f(\lambda_2)H_{22}+f(\lambda_3)H_{33}+\;\ldots\;+f(\lambda_n)H_{nn}$$

dir. $H_{11}^2=H_{11}$, $H_{22}^2=H_{22}$ ve $H_{11}\,H_{22}=H_{22}\,H_{11}=0$ olduğu için

$$\Lambda=\lambda_1\,H_{11}+\lambda_2\,H_{22}$$

$$\Lambda^2=\lambda_1^2\,H_{11}+\lambda_2^2\,H_{22}$$

$$\Lambda^3=\lambda_1^3\,H_{11}+\lambda_2^3\,H_{22}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi üçüncü özellik keyfi bir matris ifadesinin değerlendirilmesi yardımıyla örneklendirilecek. 3. özellikten $f(\Lambda)=\Lambda-\left(\Lambda^2\right)^{-1}$ alınırsa

$$\Lambda-\left(\Lambda^2\right)^{-1}=f(\Lambda)=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)H_{ii}=\left(\lambda_1-\frac{1}{\lambda_1^2}\right)H_{11}+\left(\lambda_2-\frac{1}{\lambda_2^2}\right)H_{22} \qquad (*)$$

elde edilmeli.

$$\Lambda=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\quad \text{olduğundan}\quad \Lambda^2=\begin{bmatrix}14 & -5\\ 10 & -1\end{bmatrix}\quad \text{ve}\quad \left(\Lambda^2\right)^{-1}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -10 & 14\end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda (*) denkleminin sol tarafı

$$\Lambda-\left(\Lambda^2\right)^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{36}\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -10 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}145/36 & -41/36\\ 41/18 & 11/18\end{bmatrix}$$

ve sağ tarafı ise

$$\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^2}\right)H_{11} + \left(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^2}\right)H_{22} = \frac{7}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + \frac{26}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 145/36 & -41/36 \\ 41/18 & 11/18 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece 3. özelliğin doğruluğu görülür.

3.4.3. Lineer Difüzyon Çifti

Bu bölümde difüzyon katsayısının sabit olarak alındığı difüzyon çifti incelenecek. Önceki bölümlerde de söylendiği gibi bu şekildeki denklemin temel uygulaması olarak toprağa ısı ve nemin eş zamanlı olarak akması verilebilir. Periyodik sınır koşulu altında lineer difüzyon çifti

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda \frac{\partial y}{\partial z}\right) \tag{3.4.5}$$

biçiminde ifade edilmişti. Burada $y(z,t) = [y_1(z,t) \quad y_2(z,t) \quad . \quad . \quad . \quad y_n(z,t)]^T$, $z \in IR^+$ derinliğinde ve $t \in IR^+$ zamanında difüzyonda bulunan n tane eleman, $\mathbf{\Lambda}$ ise $n \times n$ türünde sabit bir matris. Isı ve nemin çift difüzyonu durumunda (3.4.5) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ r & s \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix} T \\ \theta \end{bmatrix}$$

(3.4.6)

şeklinde yazılır. Burada $T\,(z,t)$, t zamanında ve z derinliğinde sıcaklık, $\theta(z,t)$ ise hacimsel nem içeriğini (doygunluğunu) ifade eder.

3.4.4. Sabit Difüzyon Çifti Denkleminin Çözümü

Burada difüzyon katsayısının sabit olduğu difüzyon çifti denklemi (3.4.5)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda \frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

sinüssel sınır koşulu

$$\begin{bmatrix} T(0,t) \\ \theta(0,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_M \\ \theta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_A \\ \theta_A \end{bmatrix} \cos(\omega t) \qquad (3.4.7a)$$

veya

$$y(0,t) = y_M + y_A \ \cos(\omega t) \qquad (3.4.7b)$$

altında alınıyor. Burada y_M, sabit vektör formunda sınır ortalamaları, sınır salınımı, y_A ise sabit vektör formunda sınır genliğidir. Şimdi bir çözüm elde edilecek. Bu metot n elemanın difüzyonu için uygulanabilmesine rağmen aşağıda denklem (3.4.6) nın uygulaması daha çok iki elemanın difüzyonda bulunduğu duruma uygulandı. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, periyodik çözümleri ayırmaktır. Bir $\vec{Y}$ vektörü Phasor formda

$$\vec{\mathrm{Y}} = \boldsymbol{Re}\left\{\vec{X} e^{i\omega t}\right\} \qquad (3.4.8)$$

şeklinde ifade edilir. Burada ω, periyodik çözümün bir frekansı, $\vec{X}$ ise sabit vektördür. (3.4.8), (3.4.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial^2 \vec{Y}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} = \boldsymbol{Re}\left\{i\omega \ e^{i\omega t} \ \vec{X}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{Y}}{\partial z^2} = \mathbf{Re}\left\{ e^{i\omega t} \frac{d^2 \vec{X}}{dz^2} \right\}$$

elde edilir. Böylece (3.4.5) denklemi

$$i\omega \vec{X} = \mathbf{\Lambda} \vec{X}'' \qquad (3.4.9)$$

şekline dönüşür. Şimdi denklem (3.4.9) aşağıda yerine yazma yöntemi yardımıyla özdeğer ayrışımının standart teknikleri kullanılarak çözülecek. Burada $\vec{X}$ fonksiyonu

$$\vec{X} = P\vec{U} \qquad (3.4.10)$$

biçiminde yazılır. Burada P, $\mathbf{\Lambda}$ matrisinin özvektör matrisi, $\vec{U}(z) = \begin{bmatrix} u_1(z) \\ \\ u_2(z) \end{bmatrix}$ dir.

Böylece denklem (3.4.9)

$$i\omega P\vec{U} = \Lambda P\vec{U}''$$

$$i\omega P^{-1} P\vec{U} = P^{-1}\Lambda P\vec{U}''$$

$$i\omega \vec{U} = H\vec{U}'' \qquad (3.4.11a)$$

şekline dönüşür. Burada $H = P^{-1}\Lambda P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, λ_1 ve λ_2, $\mathbf{\Lambda}$ matrisinin konu ile ilgili özdeğerleridir. Diğer bir ifadesiyle denklem (3.4.11a)

$$i\omega \begin{bmatrix} u_1 \\ \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'' \\ \\ u_2'' \end{bmatrix} \qquad (3.4.11b)$$

formundadır. Bu ifade, $u_n(z)$ denklemi için n tane çift olmayan denklemlerin bir kümesini

$$u_n = A_n \, e^{-(1+i)\frac{z}{D_n}} \qquad (3.4.12)$$

şeklindeki çözümleriyle verir. Burada $D_n = \sqrt{\frac{2\lambda_n}{\omega}}$, ıslaklık (nem) derinliği, A_n sabittir. Böylece (3.4.12) kullanılarak $\vec{U}$,

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} A_1 e^{-(1+i)\frac{z}{D_1}} \\ \\ A_2 e^{-(1+i)\frac{z}{D_2}} \end{bmatrix} \tag{3.4.13}$$

biçiminde yazılabilir. (3.4.13), (3.4.10) da ve $\vec{X}$ denkleminin sonucu da (3.4.8) de yerine yazılırsa

$$\vec{Y}(z,t) = \vec{Y}_M + \boldsymbol{Re}\left\{ e^{i\omega t}\ P \begin{bmatrix} A_1\ e^{-(1+i)\frac{z}{D_1}} \\ \\ A_2\ e^{-(1+i)\frac{z}{D_2}} \end{bmatrix} \right\} \tag{3.4.14}$$

ifadesi elde edilir. Burada sınır koşulları

$$\vec{Y}(0,t) = y_M + y_A \cos(\omega t) = y_M + \boldsymbol{Re}\left\{ y_A\, e^{i\omega t} \right\} \tag{3.4.15a}$$

$$\vec{Y}(0,t) = y_M + \boldsymbol{Re}\left\{ e^{i\omega t}\ P\, \vec{U}(0) \right\} = y_M + \boldsymbol{Re}\left\{ e^{i\omega t}\ P \begin{bmatrix} A_1 \\ \\ A_2 \end{bmatrix} \right\} \tag{3.4.15b}$$

dir. Burada (3.4.15a) ve (3.4.15b) eşitlenirse

$$\boldsymbol{Re}\left\{ \mathrm{e}^{i\omega t}\ \mathrm{P} \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \\ \mathrm{A}_2 \end{bmatrix} \right\} = \boldsymbol{Re}\left\{ y_A\, e^{i\omega t} \right\}$$

elde edilir. Burada $y_A = \begin{bmatrix} T_A \\ \\ \theta_A \end{bmatrix}$ dır. Böylece

$$P\begin{bmatrix} A_1 \\ \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_A \\ \\ \theta_A \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ \\ A_2 \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} T_A \\ \\ \theta_A \end{bmatrix} \tag{3.4.16}$$

olur. Yukarıda elde edilen sonuçlara göre (3.4.5) denkleminin genel çözümü

$$\vec{Y}(z,t) = \vec{Y}_M + P\begin{bmatrix} A_1 e^{-\frac{z}{D_1}} \cos(\omega t - \frac{z}{D_1}) \\ \\ A_2 e^{-\frac{z}{D_2}} \cos(\omega t - \frac{z}{D_2}) \end{bmatrix} \tag{3.4.17}$$

olarak bulunur. A_n in bulunmasında denklem (3.4.16) dan ve D_n için de denklem (3.4.12) den yararlanılmıştır.

3.4.5. Difüzyon Çiftinde Özdeğer ve Özvektörler

Bir $\boldsymbol{\Lambda}$ matrisi genel ifadesiyle $\Lambda = \begin{bmatrix} a & b \\ \\ r & s \end{bmatrix}$ şeklinde verilsin. Burada $a, b, r, s \in IR$. $|\Lambda - \lambda\ I| = 0$ karakteristik denklemi yardımıyla özdeğerler

$$(a-\lambda)\ (s-\lambda) - br = 0$$

denkleminin çözümünden

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+s) \pm \sqrt{(a-s)^2 + 4br}}{2} \tag{3.4.18}$$

şeklinde genel ifadesi elde edilir. Özdeğerlerin hiçbir zaman eşit olmayacağına dikkat edilmelidir. Eğer eşit olursa (yani karakteristik denklem için $\Delta = 0$ olursa) yukarıda verilen yöntem denklem (3.4.17) yi elde etmede kullanılamaz. Normalde

$\Delta = 0$ olduğunda çift difüzyon için bir çözüm vardır fakat farklı biçimdedir.

Özvektörler ise $\begin{bmatrix} a-\lambda_1 & b \\ r & s-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ denkleminden yararlanılarak

$$(\lambda_1 - a)\,x_1 = b\,x_2 \qquad \text{ve} \qquad (\lambda_2 - s)\,x_2 = r\,x_1$$

olarak bulunur. Böylece, genel ifadesiyle özvektör matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\lambda_2 - s}{r} \\ \dfrac{\lambda_1 - a}{b} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.4.19a)$$

olur ve tersi de

$$P^{-1} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\lambda_1 - a}{b}\right)\left(\dfrac{\lambda_2 - s}{r}\right)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{s - \lambda_2}{r} \\ \dfrac{a - \lambda_1}{b} & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.4.19b)$$

olur. Burada $\left(\dfrac{\lambda_2 - s}{r}\right) = m$ ve $\left(\dfrac{\lambda_1 - a}{b}\right) = n$ olsun. $\boldsymbol{\Lambda}$ matrisinin spektral ayrışımının

genel ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H_{11} = \left(\frac{1}{1-mn}\right)\begin{bmatrix} 1 & -m \\ n & -mn \end{bmatrix}, \qquad H_{22} = \left(\frac{1}{1-mn}\right)\begin{bmatrix} -mn & m \\ -n & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_{12} = \left(\frac{1}{1-mn}\right)\begin{bmatrix} -n & 1 \\ -n^2 & n \end{bmatrix}, \qquad H_{21} = \left(\frac{1}{1-mn}\right)\begin{bmatrix} m & -m^2 \\ 1 & -m \end{bmatrix}.$$

Örnek2

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

difüzyonu çifti

$$\begin{bmatrix} y_1(0,t) \\ y_2(0,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}\cos(\omega t) \tag{2}$$

sınır koşuluyla verildiğini kabul edelim. Buradan difüzyon katsayı matrisinin

$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ olduğu görülecektir. $\mathbf{\Lambda}$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$

tür. Bu durumda özvektör matrisi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ve tersi de $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

olur. Phasor formunda $\vec{Y}$ vektörü

$$\vec{Y}(z,t) = \boldsymbol{Re}\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ \vec{X} \right\} \tag{3}$$

şeklinde olur. Burada

$$\vec{X} = P\vec{U} \tag{4}$$

dir. (4), (3) de yerine yazılırsa

$$\vec{Y}(z,t) = \boldsymbol{Re}\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\ P\vec{U} \right\} \tag{5}$$

elde edilir. Burada $\vec{U}$

$$\vec{U}(z) = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{D}_1}} \\ \mathrm{A}_2 \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{D}_2}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

dir. (2) ve (3) denklemleri için sınır koşulları ve phasor formları aşağıdaki gibidir.

$$\vec{Y}(0,t)=\begin{bmatrix}3\\ \\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\ \\6\end{bmatrix}\cos(\omega t)=\begin{bmatrix}3\\ \\4\end{bmatrix}+\boldsymbol{Re}\left\{\begin{bmatrix}5\\ \\6\end{bmatrix}e^{i\omega t}\right\} \tag{7}$$

$$\vec{Y}(0,t)=\begin{bmatrix}3\\ \\4\end{bmatrix}+\boldsymbol{Re}\left\{e^{i\omega t}\,P\,\vec{U}(0,t)\right\} \tag{8}$$

Bu nedenle $\vec{Y}$ ye ait iki olguya sahip oluyoruz. Bunlardan birincisi (7) denklemi diğeri ise $\vec{U}$ ile ilgili olarak (8) denklemidir. Böylece (7) ve (8) in eşitliğinden

$$\boldsymbol{Re}\left\{e^{i\omega t}\,P\vec{U}(0,t)\right\}=\boldsymbol{Re}\left\{\begin{bmatrix}5\\ \\6\end{bmatrix}e^{i\omega t}\right\}$$

ve $\vec{U}(0,t)=P^{-1}\begin{bmatrix}5\\ \\6\end{bmatrix}$ bulunur. Bu sınır koşulu (6) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{bmatrix}A_1\\ \\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ & \\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ \\6\end{bmatrix}$$

eşitliği ve buradan da $\begin{bmatrix}A_1\\ \\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ \\4\end{bmatrix}$ bulunur. Bulunan A_1 ve A_2 değerleri (6) da yerine yazılırsa

$$\vec{U}=\begin{bmatrix}e^{-(1+i)\frac{z}{D_1}}\\ \\ \\4e^{-(1+i)\frac{z}{D_2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-(1+i)\frac{z\sqrt{\omega}}{2}}\\ \\ \\4e^{-(1+i)\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}}\end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $D_1=\dfrac{2}{\sqrt{\omega}}$, $D_2=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{\omega}}$ dir. Şimdi (4) denklemi kullanılarak $\vec{X}$

$$\vec{X} = P\vec{U} = \begin{bmatrix} e^{-(1+i)\frac{z\sqrt{\omega}}{2}} + 4e^{-(1+i)\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}} \\ \\ 2e^{-(1+i)\frac{z\sqrt{\omega}}{2}} + 4e^{-(1+i)\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $\vec{X}$ için elde edilen bu genel ifade (3) de yerine yazılırsa

$$\vec{Y}(z,t) = \begin{bmatrix} y_1(z,t) \\ \\ y_2(z,t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Re}\left\{ e^{i\omega t}\vec{X} \right\} = \boldsymbol{Re}\left\{ \begin{bmatrix} e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{2}+i(\omega t-\frac{z\sqrt{\omega}}{2})} + 4e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}+i(\omega t-\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}})} \\ \\ 2e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{2}+i(\omega t-\frac{z\sqrt{\omega}}{2})} + 4e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}+i(\omega t-\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}})} \end{bmatrix} \right\}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\vec{Y}(z,t) = \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{2}} \cos(\omega t - \frac{z\sqrt{\omega}}{2}) + 4e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}} \cos(\omega t - \frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}) \\ \\ 2e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{2}} \cos(\omega t - \frac{z\sqrt{\omega}}{2}) + 4e^{-\frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}} \cos(\omega t - \frac{z\sqrt{\omega}}{\sqrt{6}}) \end{bmatrix}$$

genel çözümü elde edilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Isı transferi genel olarak ele alındığında geniş kapsamlı bir konudur. Bu nedenle çalışmamızda sadece bir boyutlu ısı denklemi üzerine yoğunlaştık. Öncelikle bir boyutlu difüzyon denklem teorisi özet olarak verildi. Sonra temel teori yardımıyla çözülemeyen iki ek çalışma yapıldı. Bu ek çalışma, difüzyon katsayısının lineer olmadığı durumda difüzyon ve iki elemanın eş zamanlı difüzyonda bulunduğu difüzyon çifti durumlarını içermektedir. Her iki çalışmada da periyodik durumlar göz önünde bulunduruldu.

Lineer difüzyon denkleminin Cauchy, yarı-Cauchy ve periyodik yarı-Cauchy koşulları altında çözümleri yapıldı. Konu ile ilgili Green fonksiyonlarından yararlanıldı. Lineer difüzyonun yarı-Cauchy koşulu altında çözümü

$$u(z,t)=\int_{\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}u(0,t-\frac{z^2}{4v^2})\;dv+\int_{\frac{-z}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\;e^{-v^2}u(2v\sqrt{t}+z,0)\;dv$$

$$-\int_{\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-v^2}u(2v\sqrt{t}-z,0)\;dv$$

şeklinde, $u(0,t)=\sin t$ periyodik yarı-Cauchy koşulu altında çözümü de

$$u(z,t)=\frac{1}{2}e^{\frac{z}{\sqrt{2}}}\sin\left(t+\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}e^{\frac{-z}{\sqrt{2}}}\sin\left(t-\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak bulundu. Ayrıca sınır koşulunun basit periyodik fonksiyon olduğu, difüzyon katsayısının sabit olmayıp difüzyonda bulunan elemana bağlı olduğu ve sadece bir elemanın difüzyonda bulunduğu lineer olmayan özel difüzyon için bir seri çözümü elde edildi. Bu seri, lineer difüzyonda görülmeyen ve üstel olarak derinlikle yok olan (sönen) yüksek dereceden harmonik fonksiyonlar üretmektedir.

Ayrıca lineer olmayan difüzyon denklemi için üç farklı periyodik sınır koşulu altında sıcaklık ortalamalarındaki değişimler hesaplanarak sınır koşulları arasındaki ilişki karşılaştırıldı.

Lineer olmayan difüzyonda sınır koşulunun Fourier serisiyle ifade edildiği durumlarda ortalamalardaki değişim için

$$T_{mean}\Big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\Big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r^2 + b_r^2\right)$$

ifadesi ve bu yeni ifadenin Parseval denkleminde kullanılmasıyla da

$$T_{mean}\Big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\Big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{2\kappa}\left\{\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2\,dt - \left(\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\,dt\right)^2\right\}$$

alternatif denklem elde edildi. Bu denklem, ortalamalardaki değişimin başlangıçta girilen dalgalanma ile ilgili olduğu anlamındadır ve tamamen

$$T_{mean}\Big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\Big|_{z=0} = \frac{nT_A^2}{4T_M}$$

denklemi ile aynıdır.

Dirac-δ fonksiyonu kullanılarak lineer difüzyon için sınır koşulunun ani (keskin) değişimler yani çok düzensiz davranışlar sergilediği durumlar üç aşamada ele alındı. İlk olarak, Fourier serisi kullanılarak basamak ve impuls fonksiyonlarının sınırdaki iniş çıkışları için formüller elde edildi. Sonra, bu sınır koşulları altında lineer difüzyon denklemi çözüldü. Üçüncü adımda ise bir grafik programı yardımıyla sonuçlar grafik olarak sunuldu.

Basamak ve impuls sınır koşulları altında lineer olmayan difüzyon için

$$T_{mean}\Big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\Big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\left\{\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}[f(t)]^2\,dt - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\,dt\right)^2\right\}$$

ve $T_{mean}\big|_{z\to+\infty} - T_{mean}\big|_{z=0} = \frac{\kappa'}{4\kappa}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_r^2 + b_r^2\right)$ eşdeğer ifadeleri kullanılarak sıcaklık ortalamalarındaki değişimler incelendi. Sınır koşulu basamak fonksiyonu olduğunda ortalamalardaki artış için

$T\,|_{z\to+\infty} - T\,|_{z=0} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4n}{T_M r^2 \pi^2}\left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p}\right)^2$ ve impuls fonksiyonu için

$T_{mean}\,|_{z\to+\infty} - T_{Mean}\,|_{z=0} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{n}{4T_M \pi^2}$ sonuçları bulundu. Limit durumunda, $p \to 0$ iken, basamak fonksiyonu impuls fonksiyonuna dönüşmekte ve her iki seri de ıraksak olmaktadır. Yani

$$\lim_{p\to 0} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4n}{T_M r^2 \pi^2}\left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p}\right)^2 = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{n}{T_M \pi^2}$$

dır. Ne yazık ki lineer olmayan difüzyon için sınır koşulunun impuls fonksiyonu ile verildiği durumda kullanışlı sonuçlar elde edilemediğinden kullanışlı sonuçlara ulaşabilmek için yöntem değiştirildi. Yani, lineer olmayan difüzyon başlamadan önce kalınlığı ε olan dar bir tabakanın var olduğu varsayıldı ve böylece sınır koşulu basamak fonksiyonu olduğunda ortalamalardaki artış için

$T_{mean}\,|_{\varepsilon\to+\infty} - T_{mean}\,|_{\varepsilon=0} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{4n}{T_M r^2 \pi^2} e^{-r\alpha\varepsilon}\left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p}\right)^2$, impuls fonksiyonu için de

$T_{mean}\,|_{\varepsilon\to+\infty} - T_{mean}\,|_{\varepsilon=0} = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{n}{4T_M \pi^2} e^{-r\alpha\varepsilon}$ sonucu elde edildi. Ayrıca limit durumunda,

$p \to 0$ iken,

$$\lim_{p\to 0}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{4n}{T_M r^2\pi^2}e^{-ra\varepsilon}\left(\frac{\sin\left(\frac{pr}{2}\right)}{p}\right)^2=\sum_{r=2}^{\infty}\frac{n}{T_M\pi^2}e^{-ra\varepsilon}$$

olduğu görüldü.

Ayrıca birden fazla elemanın difüzyonda bulunduğu ve difüzyon katsayısının sabit olarak alındığı lineer difüzyon çifti ile ilgili ikinci ek çalışma yapıldı. Bu çalışmada matris ve vektör metotları kullanılarak lineer diferensiyel denklem sisteminin analizi basitleştirildi.

Sonuç olarak, bu tezde yalnızca bir boyutlu ısı akışı incelenmiştir. Kullanılan yöntemlerin iki ve üç boyutlu akışı incelemek için geliştirilmesi yararlı olacaktır.

KAYNAKLAR

1. ABD-El-Aziz, Mahmoud, H. ve Taylor, S.A. , Simultaneous Flow of Water and Salt through Unsaturated Porous Media. I. Rate Equations, Soil Sci. Am. Proc. Vol.29, pp. 141-43, part 2, (1965).

2. Arpaci, V. S., Conduction of Heat Transfer, Addition-Wesley, Reading, Mass., (1966).

3. Basu, A. ve Islam, M.R. , Instability in a Combined Heat and Mass-Transfer Problem in Porous-Media, Vol.7, pp. 109-123, part 1, (1996).

4. Bayley, F. J. ve diğerleri, Heat Transfer, Thomas, (1972).

5. Benjamin, J.G. ve Ghaffarzadeh, M.R. , Coupled Water and Heat Transport in Ridged Soils, Soil Sci. Am J. , 54, 963-968, (1990).

6. Berge, T. ve Bolt, Coupling between Liquid Flow and Heat Flow in Porous Media: A Connection between two Classical Approaches, pp. 35-49, (1988).

7. Buckingham, Studies in the Movement of Soil Moisture. U.S. Dept. Bur. Soils. Bull. 38, (1915).

8. Carslaw, H. S. ve Jaeger, J. C. , Conduction of Heat in Solids, 2nd ed. , Clarondon Press, Oxford, (1959).

9. Cary, J.W. ve Taylor, The Simultaneous Diffusions of Heat and Water Vapour, (1962).

10. Crank, J. , Mathematics of Diffusion, Oxford University Press, (1956).

11. Darcy, M. , Les Fontaines Publiques de la villa de Dijon. Belmont, Paris, (1834).

12. De Varies, D. A. , Simultaneous Transfer of Heat and Moisture in Porous Media. Trans. Amer. Geophys. Union. Vol. 32(5), pp. 909-916, (1958).

13. De Vries, D. A. ve Afgan, N. H. , Transfer Processes in the Plant Environment in " Heat and Mass Transfer in the Biosphere ", Ed. De Vries & Afgan, John Wiley and Sons, (1975).

14. Eckert, E. R. G. ve Drake, R. M. , Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, (1972).

15. Fourier, J. B. J. , Theorie analytique de la chaleur. Paris, 1822; translated by A. Freeman, Strechart, New York, (1878).

16. Gurr, C. G. ve diğerleri, Movement of Water in Soil Due to a Temperature Gradient. Soil Sci. 74, pp. 335-345. (1952).
17. Hadas, A. , Simultaneous Flow of Water and Heat Under Periodic Heat Fluctuations. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 32, pp. 297-301, (1953).
18. Hadley, W. A. , ve Eisenstadt, R. , Thermally Actuated Moisture Migration in Granular Media, Trans. Am. Geophys. Un 36, pp. 615-623, (1955).
19. Hill, J. M. ve Dewynne, J. N. , Heat Conduction, Blackwell Pub., (1987).
20. Jackson, R. D. , Diurnal Soil Water Time-Depth-Flux Patterns. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 37, pp. 505-509, (1973).
21. Jones, H. E. ve Kohnke, H. , The Influence of Soil Moisture Tension on Vapour Movement of Soil Water, Soil Sci. Soc. Amer. Proc., 16, pp. 245-248, (1952).
22. Juncosa, M.L. ve Young, D.M. , On the Order of Convergence of Solutions of a Difference Equation to a Solution of the Diffusion Equation, J.Soc.Industrial and App.Math. , Vol.1, pp.11-135, (1953).
23. Jury, W. A. ve Miller, E. E. , Measurement of the Transport Coefficients for Coupled Flow of Heat and Moisture in a Medium Sand, Soil Sci. Amer. Proc., Vol.38, (1974).
24. Jury, W. A. , Letey, J. ve Stolzy, L. H. , Flow of Water and Energy under Desert Conditions, in Water in Desert Ecosystems. Ed. Thames & Evans, Dowden, Hutchinson, & Ross, Inc. , (1981).
25. Kato, T. , Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, (1980).
26. Kovach, L.D. , Boundary-Value Problems, Addison-Wesley Publishing Company, (1984).
27. Ozisik, M. N. , Basic Heat Transfer, McGraw-Hill, Inc., (1977).
28. Ozisik, M. N. , Heat Conduction, Wiley Interscience , New York, (1980).
29. Philip, J. R. ve De Vries, D. A. , Moisture Movement in Porous Materials Under a Temperature Gradients. Trans. Am. Geophys. Un 38, pp. 222-32. (1957).
30. Philip, J. R. , Evaporation, and Moisture and Heat Fields in the Soil. J. Meteor. 14, pp. 354-66. , (1957).
31. Roach,G.F. , Green's Functions, Van Nostrand Reinhold Company, New York, (1970).
32. Schneider, P. J. , Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, Reading, MA, (1955).

33. Shepherd, R. , Behaviour of Transients in Quasi-linear Diffusion(in Preparation)
34. Shepherd, R. ve Wiltshire, R.J. , A Periodic Solution to a Non-linear Diffusion Equation, Transport in Porous Media (to appear), 15, pp.175-182, (1994).
35. Shepherd, R. ve Wiltshire, R.J. , Spectral Decompositions in Non-linear Diffusion, IMA Journal of Applied Mathematics, (1996).
36. Shepherd, R. , Coupled Non-linear Diffusion under Periodic Boundary Conditions Ph.D. Thesis, (1994).
37. Smith, W. O. , Thermal Transfer of Moisture in Soils, Trans. Amer. Geophys. Union, 24, pp. 511-523, (1943).
38. Wardbrown, J. ve Churchill, R.V. , Fourier Series and Boundary Value Problems McGraw-Hill Book Company, (1987).
39. Williams, W.E. , Partial Differential Equations, Oxford: Clarendon press, (1980).
40. Wiltshire, R.J. , An Example of Coupled Diffusion. IMA Bull, Vol.29, pp. 87-90, (1992).