T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ NO:MAT.YL.003

DÜZLEMDE KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER VE BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

MURAT DÜZ

TEMMUZ 2001

Fen Bilimleri Enstitüsünce Yüksek Lisans Tezi Olarak Uygun Bulunmuştur.

18./07./2001

Yüksek Lisans Derecesini Tamamlamak İçin Tezin Yeterli Olduğunu Onaylarım.

Bu Tezi Okuduk. Bizim Açımızdan Tezin Kapsamı ve Kalitesi, Yüksek Lisans Derecesini Tamamlamak İçin Yeterli ve Uygundur.

Yardımcı Danışman

Tez Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Prof. Dr. Kerim KOCA

Doç. Dr. Ertan İBİKLİ

ÖZET

DÜZLEMDE KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER VE BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

DÜZ, Murat

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA

Temmuz 2001, 95 sayfa

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; tezin genel amacından ve yapılan çalışmalardan bahsedilmektedir. İkinci bölümde kompleks kısmi türevlerin özellikleri, reel kısmi türevli denklem sisteminden kompleks kısmi türevli denklem elde edilmesi verilmiştir. Üçüncü bölümde Sobolev türevi kavramı ve diferensiyel denklemlerin Sobolev anlamında çözümlerine ait çeşitli örnekler incelenmiştir. Dördüncü bölümde düzgünleştirme teoremleri, beşinci bölümde kismi türevli denklemlerin çözümlerinin bir bölgedeki türetilebilirlik özelliği, altıncı bölümde Π_G, T_G operatörleri ve özellikleri yedinci bölümde ise genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar için bir sınır değer problemi ve dirichlet probleminin bir genelleştirilmesi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kompleks Türev, Sobolev Türevi, Dirichlet Problemi, T_G, Π_G Operatörleri

ABSTRACT

COMPLEX PARTİAL DİFFERENTIAL EQUATIONS ON PLANE AND SOME BAUNDARY VALUE PROBLEMS

DÜZ,Murat

Kırıkkale University

Graduate Schoolof Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics M. Sc. Thesis

Supervisor:Prof. Dr. Kerim KOCA

July 2001,95 pages

The thesis consists of seven chapters. The aim of the study and the works carried out have been considered in the first chapter. In the second chapter the properties of the complex partial derivatives and the derivation of partial complex differential equations from systems of partial differential equations have been given. In Chapter 3 the concept of Sobolev derivative and various examples of solutions of differential equations in the sense of Sobolev have been investigated. The regularity theorems have been given in Chapter 4. Derivatibility properties of the solutions of partial differential equations in a region have been given in Chapter 5. The operators Π_G and T_G and their properties have been given in Chapter 6, while a boundary value problem for generalized holomorphic (analytic) functions and a generalization of Dirichlet problem have been given in Chapter 7.

Key Words: Complex Derivative, Sobolev Derivative, Dirichlet Problem, T_G, Π_G Operators

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1:

KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ORTAYA ÇIKIŞI VE TEZİN GENEL AMACI.

1.1. Giriş: Kompleks Kısmi Türevli Denklemlerin ortaya çıkışı 1900 yılının başına dayanır. Bu alanda ciddi çalışma yapan ve isim bırakan en önemli Matematikçi D.POMPEIU olup 1912 de kendi adı ile anılan ve bugün bile kompleks diferensiyel denklemler teorisinin temelini oluşturan POMPEIU integral operatörü

$$T_G : C_\lambda(\overline{G}) \to C_\lambda(\overline{G})$$
$$f \to T_G(f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $C_\lambda(\overline{G}), \overline{G}$ da Hölder sürekli fonksiyonların sınıfıdır. Bilindiği gibi bu operatör,

$$w_{\bar{z}} = F(z, w, w_z)$$

formundaki kompleks diferensiyel denklemlerin çözümleri için verilen Cauchy problemlerinin varlığı ve tekliği için çok önemli rol oynamaktadır. Bu teoride önemli kompleks operatörlerden biri de

$$\frac{\partial}{\partial z} T_G(f)(z) = \Pi_G(f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

şeklinde tanımlanan Π_G operatörüdür. Bu operatörün özellikleri ve bazı uygulamaları ***Bölüm 6*** da incelenecektir.

Kompleks Kısmî Türevli Denklemlerin esas uygulamaları 1942 yılında Kanada'da yapılan bir Mekanik Kongresinde ortaya çıkmıştır. Reel uzayda bazı problemlerin zorlukları, kompleks diferensiyel denklemlerin çözüm yöntemleri ile aşılmıştır. Örneğin, eliptik bir diferensiyel denklem olan $\Delta u = 0$ Laplace Denkleminin reel uzayda genel çözümü mevcut olmadığı halde kompleks uzayda bu denklemin genel çözümü vardır.

L.BERS' in 1953 yılında yazdığı ***"Theory of Pseudo – Analytic Functions"*** isimli kitap, Kompleks Diferensiyel Denklemler Teorisinde ilk ve en temel kaynaktır. Daha sonra 1959 yılında Gürcü Matematikçi I.N.VEKUA' nın yazdığı ***"Generalized Analytic Functions"*** isimli kitap, bazı konularda BERS'in kitabından daha geneldir, fakat inceleme metodları farklıdır. Örneğin, $w_{\bar{z}} = Aw + B\overline{w}$ formundaki kompleks kısmi türevli denklemi BERS, "belirleyici çift" adını verdiği ve belirli özellikleri sağlayan (F, G) fonksiyon ilişkisi yardımıyla incelemiş ve elemanter çözümler ortaya konmuştur. VEKUA ise aynı denklemin çözümlerini POMPEIU integral operatörünü kullanarak

$$w = \phi(z) + T_G(Aw + B\overline{w})(z)$$

şeklinde integral denklem olarak vermiştir.

Reel kısmi türevli denklemlerle, kompleks diferensiyel denklemler arasında bazı bağıntılar elde etmek her zaman kolay olmayabilir. Bu zorlukların başında uzayın boyutunun çift olma zorunluluğu gelmektedir. Örneğin basit irtibatlı bir $G \subset C$ bölgesinde $2n$ bilinmeyenli ve 2 bağımsız değişkenli birinci basamaktan bir reel kısmi türevli denklem sistemi

$$H_k(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u_{2n}}{\partial x}, \frac{\partial u_{2n}}{\partial y}) = 0, \quad k = 1,2,\ldots 2n$$

şeklinde verelim. $w_j = u_j + iu_{n+j}$, $j = 1,2,..n$ kompleks değerli fonksiyonları tanımlayalım. Bu durumda $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ olmak üzere kompleks türev operatörleri yardımıyla verilen reel sistemden

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F(z, w, w_z)$$

bir tek kompleks denklemine ulaşılır. Bu kompleks denklem belirli koşullar altında T_G operatörü yardımıyla incelenebilir. Bunun üzerinde ***Bölüm 7*** de durulacaktır.

Buradan da görüldüğü gibi kompleks kısmi türevli denklemler teorisinin temel amaçlarından birisi de reel diferensiyel denklem sistemlerini kompleks denklemlere dönüştürüp incelemektir.

1.2. TEZİN AMACI: Uygulama alanı olarak kompleks diferensiyel denklemlerin karşılaşıldığı konuların başında elastisite Teorisi, gazlar dinamiği, potansiyel teori, mekanik v.s. gelmektedir. Bilindiği gibi $w_{\bar{z}} = Aw + B\overline{w}$ formundaki kompleks diferensiyel denklemin çözümlerine ***"genelleştirilmiş analitik veya Pseudo-Analitik fonksiyon"*** denir. Bu tip denklemlerin çözümlerinin Kabuk Teorisindeki(Schalentheorie) Uygulamaları (Vekua'nın kitabı) çok geniş olarak incelenmiştir. Ayrıca kompleks diferensiyel denklemler için çok önemli sınır-değer problemleri tanımlanmıştır. Dirichlet ve Riemann Hilbert Sınır-Değer Problemleri bunların en önemlileridir. BERS'in kitabında analitik fonksiyonlarla, genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar arasında birebir ilişki kurulmuş ve bu ilişki sayesinde analitik fonksiyonların bilinen birçok özellikleri benzerlik prensibi yardımıyla genelleştirilmiş analitik fonksiyonlara taşınmıştır. Özellikle analitik fonksiyonlar için bilinen Dirichlet Problemi, benzer metodla genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar içinde incelenmiş ve bu alanda W.TUTSCHKE dikkate değer çalışmalar ve sonuçlar ortaya koymuştur. Aynı şekilde analitik fonksiyonlar için bilinen seri açılımlar, türev kavramı genelleştirilmek suretiyle genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar için BERS tarafından verilmiştir. Dünyada bu alanda çalışan ve önemli sonuçlar ortaya koyan ünlü matematikçilerin başlıcaları VEKUA, BERS, TUTSCHKE, HABETHA FLORIAN, BERGLEZ, HEERSINK, GILBERT, USMANOV, BAUER, BOJARSKİ, MİCHAİLOV vs. dir.

Şu ana kadar yapılan çalışmalarda sınırı düzgün bölgelerde çeşitli sınır-değer problemleri incelenmiştir. Ancak sınırı düzgün olmayan bölgelerde sınır-değer problemi incelemesine Literatürde pek rastlanmamaktadır. Düzgün sınırlı bölgelerde tanımlanan bir Dirichlet Problemi bu tez de incelenmiştir. Bu tezin ileri bir aşaması olarak sınırı düzgün olmayan bölgelerde Dirichlet Sınır-Değer Problemi tanımlanıp tanımlanamayacağı araştırılacaktır. Tezin esas amacı, düzgün sınıra sahip olmayan bölgelerde bu tip sınır-değer problemi tanımlayabilmek için gerekli alt yapının oluşturulmasıdır.

2.BÖLÜM:

DÜZLEMDE KOMPLEKS KISMİ TÜREVLER VE ÖZELLİKLERİ

2.1 Kompleks Kısmî Türevlerin Ortaya Çıkışı ve Kompleks Türev Operatörleri

G, *z*-düzleminde bir bölge ve $z = x + iy$ olsun. *G'* de $f = u + iv$ şeklinde kompleks değerli bir fonksiyon tanımlayalım. $f \in C^1(G)$ ve $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ sabit bir nokta olsun.Bilindiği gibi u ve v nin lineerleştirilmesi

$$\tilde{u}(x,y) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x\text{-}x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y\text{-}y_0)$$

$$\tilde{v}(x,y) = v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x\text{-}x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y\text{-}y_0)$$

şeklindedir. Böylece $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ olduğuda göz önüne alınırsa $f = u + iv$ nin $\tilde{f} = \tilde{u} + i\tilde{v}$ lineerleştirmesi

$$\tilde{f}(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x\text{-}x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y\text{-}y_0) \qquad (2.1.1)$$

olacaktır. Diğer taraftan

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$$

$$\overline{z - z_0} = (x - x_0) - i(y - y_0)$$

dır. Son denklemlerin birbirleriyle toplanması ve çıkarılmasıyla

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left[(z - z_0) + (\overline{z - z_0})\right]$$

$$y - y_0 = -\frac{i}{2}\left[(z - z_0) - (\overline{z - z_0})\right]$$

yazılabilir. Bu değerler f in $\tilde{f}$ lineerleştirilmesinde yerine yazılırsa

$$\tilde{f}(z)=f(z_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right](z-z_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]\overline{(z-z_0)}$$

(2.1.2)

elde edilir. (2.1.1) de $x-x_0$ ve $y-y_0$ ın katsayıları f in sırasıyla x ve y ye göre türevleri olduğuna dikkat edilirse benzer olarak (2.1.2) de $(z-z_0)$ ve $(\overline{z-z_0})$ ın katsayıları sırasıyla f in z ve $\bar{z}$' e göre kompleks kısmî türevleri olarak isimlendirilebilir. Yani

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2.1.3}$$

bulunur.

Tanım 2.1.1: $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ operatörlerine 1. basamaktan kompleks türev operatörleri denir.

2.2 Holomorf Fonksiyonların Kompleks Türev Operatörleri İle İlişkisi

f, G'de holomorf olsun. Bu durumda her $z_0 \in G$ noktasında f fonksiyonunun kompleks türevlere sahip yani

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{df}{dz}(z_0) \tag{2.2.1}$$

limiti mevcuttur. z_0 noktasından geçen ve x-eksenine paralel bir doğru üzerindeki z noktaları

$$z=x+iy_0$$

formundadır. Böyle noktalar için (2.2.1) türev tanımında kullandığımız oran

$$\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \qquad (2.2.2)$$

şeklini alır. Bu durumda z nin z_0'a , z_0 dan geçen ve x eksenine paralel doğru boyunca yaklaşması halinde (2.2.2) oranın limiti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{df}{dz}(z_0) \qquad (2.2.3)$$

olacaktır. Benzer şekilde z_0 noktasından geçen ve y eksenine paralel bir doğru üzerindeki z noktaları $z=x_0+iy$ formunda olur. Bu tür noktalar için (2.2.1) türev tanımında kullandığımız oran

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{iy-iy_0} \qquad (2.2.4)$$

olacaktır. O halde z' nin z_0'a ; z_0 dan geçen ve y eksenine paralel doğru boyunca yaklaşması halinde (2.2.4) oranının limitinden

$$-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{df}{dz}(z_0) \qquad (2.2.5)$$

elde edilir. f in

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

kompleks türevlerinde, (2.2.3) ve (2.2.5) de elde ettiklerimizi yerine yazarsak

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)=\frac{df}{dz}(z_0)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0$$

sonucuna ulaşırız.

SONUÇ 2.2.1: f in bir holomorf fonksiyon olması halinde $\frac{\partial f}{\partial z}$ kompleks kısmî türevi kompleks adi türevle çakışır ve

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

olur.

2.3 Yüksek Basamaktan Kompleks Kısmi Türevler ve Laplace Denkleminin Kompleks Formu

Bir f kompleks fonksiyonunun $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ kompleks kısmi türevleri, f' in x ve y reel değişkenlerine göre türevleriyle ilgilidir. Eğer $f \in C^k(G)$ ise o zaman x ve y' ye göre türevlerle ortaya konulan $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \in C^{k-1}(G)$ dir.Yani $k \geq 2$ için $\frac{\partial f}{\partial z}$ ve $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ ifadelerinin tekrar kompleks türevleri hesaplanabilir.

Şimdi $f \in C^2(G)$ olduğunu kabul edelim ve

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ifadesinde $g = \frac{\partial f}{\partial z}$ alalım. Bu durumda kompleks kısmî türev tanımından

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

ve buradan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta f \qquad (2.3.1)$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

bulunur.

Reel f için Δf de reel olacağından reel f için $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ ifadesi de reel olmak zorundadır. Kompleks Kısmi türevler için de eğer $f_{z\bar{z}}$ ve $f_{\bar{z}z}$ türevleri sürekli iseler

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$$

eşitliğinin geçerli olduğu kolayca görülebilir. Bunun için $g = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ alıp $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ 'yi hesaplayalım.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right), \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

olması nedeniyle buradan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{1}{4}\Delta f \qquad (2.3.2)$$

olur. (2.3.1) ve (2.3.2) den

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$$

ve

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \Delta$$

elde edilir.

2.4 Reel Kısmî Türevli Denklem Sisteminin Kompleks Kısmî Türevli Denklemlere Dönüştürülmesi.

u ve v; x, y'nin fonksiyonları olmak üzere

$$a_{j1}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{j2}\frac{\partial u}{\partial y} + a_{j3}\frac{\partial v}{\partial x} + a_{j4}\frac{\partial v}{\partial y} + b_{j1}u + b_{j2}v = d_j \quad (j=1,2) \qquad (2.4.1)$$

birinci basamaktan lineer sistemini göz önüne alalım. (2.4.1) deki u ve v nin kendisi ve kismi türevlerinin katsayıları ile d_j ler, x ve y bağımsız değişkenlerinin önceden verilen fonksiyonlarıdır. j=1 için elde edilen denklem ile j=2 için elde edilen denklemi 'i' ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$(a_{11}+ia_{21})\frac{\partial u}{\partial x}+(a_{12}+ia_{22})\frac{\partial u}{\partial y}+(a_{13}+ia_{23})\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$(a_{14}+ia_{24})\frac{\partial v}{\partial y}+(b_{11}+ib_{21})u+(b_{12}+ib_{22})v=d_1+id_2 \tag{2.4.2}$$

elde edilir.

u ve v reel değerli fonksiyonları bir w kompleks fonksiyonunun sırasıyla reel ve sanal kısımları, yani

$$w=u+iv\,,\quad \overline{w}=u-iv$$

olsun. Bu iki eşitlikten

$$u=\frac{1}{2}(w+\overline{w})\qquad v=\frac{i}{2}(\overline{w}-w)$$

yazılabilir. Bu yazılış, (2.4.2) denkleminin tek kompleks denklem türünden yazılışını sağlar.

$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ türevlerini ; $\frac{\partial w}{\partial z}$ ve $\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}$ cinsinden yazarsak .

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right)}\right]\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{i}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}-\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right)}\right]\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{i}{2}\left[-\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right)}\right]\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}+\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)}-\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right)}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.3}$$

bulunur. (2.4.3) ü (2.4.2) de yerine yazarsak

$$A_1 \frac{\partial w}{\partial z} + A_2 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A_3 \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)} + A_4 \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right)} + B_1 w + B_2 \bar{w} = D \tag{2.4.4}$$

elde edilir. Verilen (2.4.1) denkleminde $b_{jk}=0$, $d_j=0$ seçilirse o zaman $B_1=B_2=D=0$ olup en son elde ettiğimiz (2.4.4) denklemi de

$$A_1 \frac{\partial W}{\partial z} + A_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + A_3 \overline{\left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)} + A_4 \overline{\left(\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)} = 0$$

haline gelir.

3. BÖLÜM:

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SOBOLEV ANLAMINDA ÇÖZÜMLERİ

3.1 Sobolev Anlamında Türev Kavramı

Şimdiye kadar ele alınan diferensiyel. denklemlerdeki türevler klasik anlamlardaki türevlerdi. Bu ise (2.2.1) deki farklar oranı limitinin mevcut olup olmamasıyla ilgili bir kavramdır. Klasik anlamda bir diferensiyel denklemin çözümlerinden bahsedebilmek için bu söylediğimiz anlamda türevlerin mevcut olduğunu ve diferensiyel denklemi sağladığını kabul etmekteyiz.

Bazen denklemlerin klasik çözümleri yeterli olmayabilir. Bu nedenle çeşitli türev kavramları geliştirilmiştir. Bu durumda diferensiyel denklemlerin çözümü kavramı genişletilmiş olmaktadır. Bunların içinde en yaygın olanı Sobolev ve Schwarz anlamında türev kavramlarıdır.

Şimdi Sobolev türevi kavramını verelim:

Tanım 3.1.1: φ, $C^k(G)$ sınıfına ait reel değerli bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu tamamen G'nin içinde bulunan bir kompakt alt bölgenin dışında özdeş olarak sıfır ise φ ye "Test Fonksiyonu" denir. Böyle tanımlanan test fonksiyonlarının sınıfı $C_0^k(G)$ ile gösterilir.

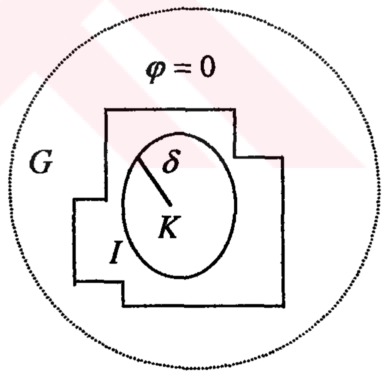
G, R^n de bir bölge ve f de; G' de tanımlı, G' nin tamamında $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ türevlerine sahip bir fonksiyon olsun.

K, G' nin kompakt bir alt bölgesi ve $C_0^{(k)}(G)$ nın elemanları K nın dışında sıfır olsun. Bu özelliklere sahip sonsuz çoklukta fonksiyon bulunabilir. Şimdi tespit edilmiş bir $\varphi \in C_0^{(1)}$ test fonksiyonu için $f\varphi$ çarpımını göz önüne alalım. Bu $f\varphi$ nin x_j ye göre kısmi türevi

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi) = f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

olur. Bu çarpımın türevi de G tarafından kapsanan kompakt K bölgesinin dışında özdeş olarak sıfır olur. Şimdi G de bir I aralıklar ağını göz önüne alalım. I' nın K kompakt bölgesini kapsadığını varsayalım. Böylece φ test fonksiyonu I' nın içinde ve K' nın dışında özdeş olarak sıfır olacaktır (Bakınız Şekil 3.1.1). Bu durumda φ ve $f\varphi$, ∂I sınırı üzerinde sıfır olur. φ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, I' nın dışında ve G' nin içinde kalan bölgede özdeş olarak sıfır olacağından

$$\int_G \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx = \int_I \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx$$



yazılabilir. Genelde $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ dir.

Şekil 3.1.1

Sağdaki integralin integrantının $\frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)$ ye eşit olması nedeniyle "Ostrogradski-Gauss" formulünden sağ taraf

$$\int_{\partial I} f\varphi d\mu$$

ifadesine eşittir. Burada $d\mu$ ∂I' nın yüzey elemanını göstermektedir. ∂I üzerinde $f\varphi$ =0 olduğundan en son elde ettiğimiz yüzey integralinin sonucu sıfırdır. Böylece her

$\varphi \in C_0^{(1)}(G)$ test fonksiyonu için

$$\int_G \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) dx = 0 \qquad (3.1.1)$$

olur. Eğer $f \in C^1(G)$ olduğunu kabul edersek (3.1.1) bağıntısı daima mevcuttur.

Tanım:3.1.2: Eğer verilen bir f fonksiyonuna karşılık her $\varphi \in C_0^{\,1}(G)$ için

$$\int_G \left(f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + g\varphi \right) dx = 0 \qquad (3.1.2)$$

olacak şekilde G' de tanımlı bir g fonksiyonu varsa g fonksiyonuna f in x_j' ye göre **"Sobolev Türevi"** denir.

(3.1.1) ve (3.1.2) bağıntılarını karşılaştırırsak görürüz ki klasik anlamda $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ kısmî türevinin mevcut olması halinde f Sobolev anlamında da kısmî türeve sahiptir. Fakat Sobolev anlamında türeve sahip olan bir fonksiyon , klasik anlamda türeve sahip olmayabilir. Çünkü Sobolev türevi , parçalı sürekli fonksiyonlar için de geçerlidir.

Örnek 3.1.1: $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bunların her ikisi de R de tanımlı ve f sürekli, g parçalı süreklidir. $\varphi \in C_0^{\,1}(R)$ herhangi bir test fonksiyonu olsun. O zaman her $x \geq r$

için $\varphi(x) = 0$, $\frac{d\varphi}{dx}=0$ olacak şekilde en az bir $r>0$ sayısı vardır. Bunu sağlayan sonsuz çoklukta test fonksiyonu bulabiliriz. Kısmî integrasyonla

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = \int_{0}^{r} x\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = x\varphi(x)\Big|_0^r - \int_0^r 1.\varphi dx$$
$$= -\int_0^r \varphi dx$$

olur. Diğer taraftan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\varphi dx = \int_0^r \varphi dx$$

dir. Böylece bütün φ test fonksiyonları için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g\varphi\right)dx = 0$$

olur. O halde tanım nedeniyle $g = \frac{df}{dx}$, R nin tamamında f in Sobolev anlamındaki türevi olur. Halbuki klâsik anlamda bu sadece $x\neq 0$ için geçerlidir.

3.2. Sobolev Anlamında Kompleks Kısmî Türevler

G, C de bir bölge ve $z = x + iy \in G$ olsun. Bu durumda $f\in C^1(G)$, $\varphi\in C_0^{\,1}(G)$ için

$$\iint_G\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)dxdy = 0,\quad \iint_G\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy = 0 \qquad (3.2.1)$$

bağıntıları yazılabilir. Eğer f ve φ reel değerli fonksiyonlar ise (3.2.1) daima doğrudur. f kompleks değerli, φ reel değerli ise f i reel ve sanal kısımlarına ayırarak aynı eşitliklerin geçerli olduğunu görebiliriz. Şimdi f ve φ nin her ikisinin de kompleks olduğunu varsayalım. O zaman φ nin reel ve sanal kısımları da ayrı ayrı

(3.2.1) eşitliklerini sağlar. Sonuç olarak f ve φ nin her ikisinin de kompleks olması halinde (3.2.1) eşitlikleri yine geçerlidir. (3.2.1) deki denklemlerden ikincisi "i" ile çarpılıp birinci ile toplanırsa ve $\frac{\partial}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ operatörlerinin tanımları da göz önüne alınırsa

$$\iint_G \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \varphi \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dxdy = 0$$

yazılabilir.

Tanım 3.2.1: Her $\varphi \in C_0^1(G)$ test fonksiyonu için

$$\iint_G \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + g\varphi \right) dxdy = 0 \qquad (3.2.2)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna karşılık bir g fonksiyonu mevcutsa g ye f in $\bar{z}$' e göre Sobolev anlamındaki türevi denir ve klasik anlamda olduğu gibi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ şeklinde gösterilir.

(3.2.1) deki ikinci eşitlik "i" ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa benzer olarak

$$\iint_G \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \varphi \frac{\partial f}{\partial z} \right) dxdy = 0$$

yazılabilir.

Tanım 3.2.2: Her $\varphi \in C_0^1(G)$ test fonksiyonu için

$$\iint_G \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial z} + g\varphi \right) dxdy = 0 \qquad (3.2.3)$$

olacak şekilde f fonksiyonuna karşılık bir g fonksiyonu mevcutsa g ye f in z' ye göre Sobolev anlamındaki türevi denir ve $\frac{\partial f}{\partial z} = g$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.2.1: Eğer c_1, c_2 sabitler f_1, f_2 de Sobolev anlamında kompleks türevlere sahip fonksiyonlar ise o zaman Sobolev anlamında

$$i)\ \frac{\partial}{\partial z}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + c_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}$$

$$ii)\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} + c_2 \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}}$$

türev bağıntıları geçerlidir.

3.3. Diferensiyel Denklemlerin Sobolev Anlamında Çözümleri ve Çeşitli Örnekler

Bir fonksiyon klasik anlamda diferensiyellenebilir ve klasik anlamdaki türevleri bir denklemde yerine yazıldığında denklemde sağlanıyorsa o zaman bu fonksiyona denklemin klasik çözümü denir.

Eğer bir fonksiyon Sobolev anlamında türevlere sahip, kendi ve Sobolev türevleri de denklemde yerine yazıldığında denklem gerçekleniyorsa o zaman bu fonksiyona denklemin Sobolev anlamındaki bir çözümü denir.

Sobolev türevine sahip bir fonksiyonun bütün test fonksiyonları için bir integral bağıntısını sağladığı bilinmektedir. Böyle bağıntılar denklemlerin Sobolev anlamındaki çözümleri için de verilebilir. Bunu örneklerle gösterelim:

Örnek 3.3.1: $y = y(x)$ fonksiyonu, $I = \{x \mid a < x < b\}$ aralığında $\frac{dy}{dx}$ Sobolev türevine sahip olsun. O zaman her $\varphi \in C_0^1(G)$ test fonksiyonu için

$$\int_I \left(y\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\frac{dy}{dx} \right) dx = 0$$

eşitliği gerçeklenir.

Eğer $y = y(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.3.1}$$

denkleminin Sobolev anlamındaki bir çözümü ise o zaman her $\varphi \in C_0^{\,1}(I)$

$$\int_I y\frac{d\varphi}{dx}dx = 0\,, \tag{3.3.2}$$

eşitliği gerçeklenir. Böylece her φ test fonksiyonu (3.3.2) bağıntısını gerçekliyorsa bu durumda $y(x)$ fonksiyonu , (3.3.1) denkleminin Sobolev çözümü olur.

Örnek 3.3.2: $w = w\,(z)$, z-düzleminin bir G bölgesinde Sobolev anlamında $\dfrac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ türevine sahip olsun. Bu durumda her $\varphi \in C_0^1(G)$

$$\int_G \left(w\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \varphi\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) dxdy = 0$$

olur. Benzer şekilde

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

denkleminin Sobolev çözümü , her $\varphi \in C_0^1(G)$

$$\int_G w\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}dxdy = 0$$

integral bağıntısını sağlar.

Örnek 3.3.3: Bir G bölgesinde tanımlanan u fonksiyonu Sobolev anlamında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

türevlerine sahip olsun. O zaman her $\varphi \in C^2(G)$ test fonksiyonu için

$$\left.\begin{aligned} \iint_G \left(u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dxdy = 0 \\ \iint_G \left(u\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy = 0 \end{aligned}\right\}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Bu denklemlerin taraf tarafa toplanmasıyla

$$\iint_G (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u) dxdy = 0$$

eşitliği elde edilir ve bu her $\varphi \in C_0^2$ (G) için geçerlidir.

Tanım 3.3.1: Bir u fonksiyonun Sobolev anlamındaki $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ türevlerinin mevcut olup olmadığına bakılmaksızın her $\varphi \in C_0^2$ (G) test fonksiyonu için

$$\iint_G u\Delta\varphi \, dxdy = 0$$

eşitliği gerçekleniyorsa o zaman u fonksiyonuna $\Delta u = 0$ denkleminin Sobolev anlamındaki çözümü denir. $\Delta u = 0$ denkleminin her u Sobolev çözümü için Sobolev anlamında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

türevleri mevcuttur. Hatta klasik anlamda da mevcuttur.

Örnek 3.3.4: Örnek 3.3.3 de verilen $\Delta u = 0$ Laplace Denkleminin Sobolev çözümünün tanımı, Green integral formulü yardımıyla

$$L[u] = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

denklemine de uygulanabilir. u klasik anlamda sürekli türetilebilir fonksiyon ve L^* da L nin adjoint' i ise o zaman

$$\iint_G \left(vL[u] - uL^*[v]\right)dxdy$$

ifadesi sınır integraline dönüştürülebilir. Burada

$$L^*[v] = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv$$

dir. $\varphi \in C_0^2(G)$ herhangi bir test fonksiyonu olmak üzere $v=\varphi$ ve u da $L[u]=0$ denkleminin klasik anlamda bir çözümü olarak alınırsa bu durumda

$$\iint_G uL^*[\varphi]dxdy = 0 \qquad (3.3.1)$$

olur. Çünkü ∂G sınırında φ ve türevleri özdeş olarak sıfırdır. Dolayısıyla sınır integrali sıfır değerini alır. Böylece her φ test fonksiyonu için (3.3.1) bağıntısı sağlanıyorsa o zaman u $L[u] = 0$ denkleminin Sobolev anlamında çözümü olur.

Örnek 3.3.5: Örnek 3.3.4'e benzer şekilde u fonksiyonu

$$L[u]=f$$

denkleminin klasik anlamda bir çözümü ise her φ test fonksiyonu için

$$\iint_G uL^*[\varphi]dxdy = \iint_G \varphi f dxdy \qquad (3.3.2)$$

yazılabilir.

Tersine , her φ test fonksiyonu için (3.3.2) eşitligini sağlayan her u fonksiyonu

$$L[u]=f$$

denkleminin Sobolev anlamındaki çözümü olur.

3.4. Cauchy Tipi Singüler İntegrallerin Sınırlandırılması ve Homogen Olmayan Cauchy - Riemann Sisteminin Bir Çözümü.

Holomorf fonksiyonlar teorisinden de bilinen

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

formundaki kompleks eğrisel integrali göz önüne alalım. İntegrant, Cauchy singülerligi denilen $\frac{1}{\zeta - z}$ terimini içermektedir.

Kompleks kısmî türevli denklemler teorisinde, sınır noktalarında holomorf olmayan fonksiyonlar verildiğinde ve sınır değer problemini incelediğimizde $\frac{1}{\zeta - z}$ ve $\frac{1}{(\zeta - z)^2}$ şeklinde Cauchy singülerliği karşımıza çıkar. Bunlar da çoğu zaman katlı integrallerde kendini gösterir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe genel olarak integraller ζ - düzleminin bir G bölgesi üzerinden hesaplanacaktır. Burada integrant ζ nın dışında bir z parametresine de bağlıdır. Yani $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$\iint_G f(\zeta,z)\, d\xi\, d\eta = F(z) \tag{3.4.1}$$

dir. $f(\zeta,z)$ integrantı herhangi bir $\zeta \in G$ ve z' nin her değeri için tanımlanmış olmalıdır. $f(\zeta,z)$, $\zeta \neq z$ için sürekli, fakat $z \in G$ ise $\zeta = z$ için singülerlige sahiptir. Böyle bir singülerlik mevcut oldugunda $f(\zeta,z)$

$$|f(\zeta,z)| \le \frac{c}{|\zeta - z|^{\alpha}} \tag{3.4.2}$$

şeklinde sınırlanabilir. Burada c önceden verilen bir sabit ve α negatif olmayan bir reel sayıdır.

Lemma 3.4.1: $0 \leq \alpha < 2$ ise o zaman (3.4.1) integralinin değeri her z için mevcuttur (z, G ye ait olsa bile bu sonuç geçerlidir.).

İspat: Önce $\zeta = z$ singüler noktayı dışarıda tutan bir çevre belirleyelim. Bu çevreyi yeteri kadar küçük seçersek integral G' nin tamamında mevcut olur. Şimdi $\delta_1 < \delta_2$ olmak üzere z merkezli δ_1 ve δ_2 yarıçaplı disklerini göz önüne alalım. z singüler noktasını dışarıda tutan halkasal bölge üzerinden integrali hesaplarsak δ_1 ve δ_2 yi yeterince küçük seçtiğimizde integral değeri de yeterince küçük kalır.

Şimdi (3.4.1) integralini, ele alınan halkasal bölge için kutupsal koordinatlarda yazarsak o zaman

$$\left| \iint_{\delta_1 \leq |\zeta| \leq \delta_2} f(\zeta, z) d\xi \, d\eta \right| \leq \iint_{\delta_1 \leq |\zeta| \leq \delta_2} |f(\zeta, z)| d\xi \, d\eta$$

$$\leq \int_{\theta=0}^{2\Pi} \int_{r=\delta_1}^{\delta_2} \frac{c}{r^{\alpha}} r dr d\theta \leq \frac{2\pi}{2\text{-}\alpha}\left(\delta_2^{\,2-\alpha} - \delta_1^{\,2-\alpha}\right) < \frac{2\pi}{2\text{-}\alpha} \delta_2^{\,2-\alpha}$$

olur. $0 \leq \alpha < 2$ ise o zaman δ_2 yeterince küçük seçilmek kaydıyla halkasal bölge üzerinden hesaplanan integral yeterince küçük yapılabilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Bu lemma, singülerliğe sahip (3.4.2) ifadesinin katlı integralinin mevcut olduğunu gösterir.

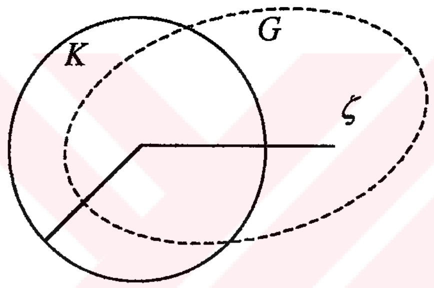
Şimdi G bölgesinin ölçüsünün sonlu olduğunu varsayalım. $0 \leq \alpha < 2$ eşitsizligini sağlayan her α için aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 3.4.1: Kompleks düzlemin her z noktası için

$$\iint_G \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} \leq \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(\frac{mG}{\pi}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

dir.

İspat: $z \in G$ olmak üzere z merkezli R yarıçaplı bir K diskini; diskin alanı ile G bölgesinin alanı aynı olacak şekilde seçelim. Yani $\pi R^2 = mG$ olsun.(Bakınız Şekil 3.4.1) O zaman



Şekil.3.4.1

$$R = \left(\frac{mG}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. $\zeta \in G \setminus K$ için $|\zeta - z| \geq R$ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{\alpha}} \leq \frac{1}{R^{\alpha}}$$

yazılabilir. G ve K bölgeleri aynı ölçüye sahiptir. Diğer taraftan G \ K ve K \ G bölgeleri de aynı ölçüye sahiptir. Böylece

$$\iint_G \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} = \iint_{G\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} + \iint_{G-K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} \le \iint_{G\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} + \frac{1}{R^\alpha} \iint_{G-K} d\xi\, d\eta$$

$$= \iint_{G\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} + \frac{1}{R^\alpha} \iint_{K-G} d\xi\, d\eta$$

$$\le \iint_{G\cap K} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} + \iint_{K-G} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha}$$

$$= \iint_K \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z|^\alpha} = \int_0^{2\Pi} \int_{r=0}^{R} \frac{1}{r^\alpha} r dr d\theta$$

$$\le \frac{2\pi}{2-\alpha} R^{2-\alpha} = \frac{2\pi}{2-\alpha} \left(\frac{mG}{\pi} \right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

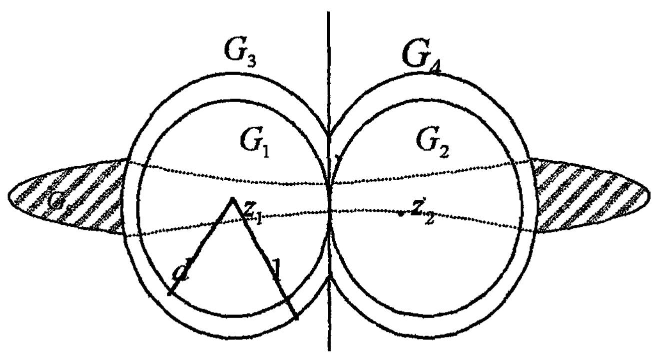
olur. Burada r, θ; $\zeta = z$ merkezli dairesel bölge için kutupsal koordinatlardır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi α, β reel sayılar ve $0 \le \alpha < 2$, $0 \le \beta < 2$ olmak üzere

$$J = \iint_G \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^\alpha |\zeta - z_2|^\beta}$$

integrali için bir üst sınır bulmaya çalışalım. z_1 ve z_2 kompleks düzlemin farklı iki noktası olur. $|z_1 - z_2| = 2d > 0$ olsun. $d<1$ alalım.

G bölgesini, aşağıdaki gibi beş parçaya ayıralım:



Şekil 3.4.2

$$G_1 = \{\zeta |\ |\zeta - z_1| \le d\}$$

$$G_2 = \{\zeta |\ |\zeta - z_2| \le d\}$$

$$G_3 = \{\zeta |\ d \le |\zeta - z_1| \le 1\} \cap \{\zeta |\ |\zeta - z_1| \le |\zeta - z_2|\}$$
$$G_4 = \{\zeta |\ d \le |\zeta - z_2| \le 1\} \cap \{\zeta |\ |\zeta - z_2| \le |\zeta - z_1|\}$$
$$G_5 = \{\zeta |\ |\zeta - z_1| \ge 1\} \cap \{\zeta |\ |\zeta - z_2| \ge 1\}$$

G_1 den G_5 e kadar $\zeta \in G$ olması gerekmemektedir.(Bakınız şekil (3.4.2)) Şimdi

$$J_i = \iint_{G_i} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\beta}}$$

integrallerini gözönüne alalım. Eğer J_i integrallerini sınırlayabilir ve

$$J \le J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$$

olduğunu gösterirsek istenileni elde etmiş oluruz. Bu sınırlandırma sırasında (r, θ); J_1 ve J_3 ün hesabında z_1 merkezli disk, J_2 ve J_4 ün hesabında, z_2 merkezli dairesel disk için kutupsal koordinatlar olsun.

Böyle belirlenen bölge üzerinden ilgili integraller hesaplanırsa J_1 için

$$J_1 = \iint_{G_1} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\beta}} \le \frac{1}{d^{\beta}} \iint_{|\zeta - z_1| \le d} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha}}$$
$$= \frac{1}{d^{\beta}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{d} \frac{r dr d\theta}{r^{\alpha}} = \frac{2\pi}{2-\alpha} d^{2-\alpha-\beta}$$

olur ve benzer yolla

$$J_2 = \iint_{G_2} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\beta}} \le \frac{1}{d^{\alpha}} \iint_{|\zeta - z_2| \le d} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta - z_2|^{\beta}}$$
$$= \frac{1}{d^{\alpha}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{d} \frac{r dr d\theta}{r^{\beta}} = \frac{2\pi}{2-\beta} d^{2-\alpha-\beta}$$

elde edilir. J_3 için G_3 bölgesinde

$$\frac{1}{|\zeta - z_1|^{\alpha} |\zeta - z_2|^{\beta}} \le \frac{1}{|\zeta - z_1|^{\alpha+\beta}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Halkasal bölge üzerinden integral hesaplarken

$$\{\zeta|,\quad |\zeta\text{-}z_1| = |\zeta\text{-}z_2|\}$$

doğrusunu hariç tutarsak

$$J_3 \leq \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=d}^{1} \frac{rdrd\theta}{r^{\alpha+\beta}} = \begin{cases} -2\pi \ln d & , \quad \alpha+\beta=2 \\ \dfrac{2\pi}{2\text{-}\alpha-\beta}\left(1-d^{2\text{-}\alpha-\beta}\right), & \alpha+\beta\neq 2 \end{cases}$$

elde edilir. Bu sınır J_4 için de geçerlidir. G_5 bölgesinde $|\zeta - z_1| \geq 1$ ve $|\zeta - z_2| \geq 1$ olduğundan

$$J_5 = \iint_{G_5} \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta\text{-}z_1|^{\alpha}|\zeta\text{-}z_2|^{\beta}} \leq \iint_{G_5} d\zeta\, d\eta = mG_5 \leq mG$$

elde edilir. Böylece $J \leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$ olur.

$|z_1 - z_2| \geq 2$ yani $d \geq 1$ olduğunda J_3 ve J_4 integralleri ihmal edilebileceğine dikkat edilirse genel bir durum olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem:3.4.2:

a) Eğer $2d = |z_2 - z_1| < 2$ ve $\alpha+\beta\neq 2$ ise

$$J \leq 2\pi\left(\frac{1}{2\text{-}\alpha}+\frac{1}{2-\beta}-\frac{2}{2-\alpha-\beta}\right)\left(\frac{|z_2-z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta}+\frac{4\pi}{2-\alpha-\beta}+mG$$

eşitsizliği geçerlidir.

b) $|z_1 - z_2| < 2$ ve $\alpha+\beta = 2$ ise

$$J \leq 2\pi\left(\frac{1}{2\text{-}\alpha}+\frac{1}{2-\beta}\right)-4\pi\ln\left(\frac{|z_2-z_1|}{2}\right)+mG$$

eşitsizliği geçerlidir.

c) $|z_2 - z_1| \geq 2$ ise

$$J \le 2\pi\left(\frac{1}{2\text{-}\alpha}+\frac{1}{2-\beta}\right)\left(\frac{|z_2-z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta}+mG$$

eşitsizligi daima geçerlidir.

Not: $\alpha+\beta>2$ ise o zaman $\frac{4}{2-\alpha-\beta}<0$ olup bu durumda $|z_2-z_1|<2$ için $\left(\frac{|z_2-z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta}>1$ eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$-\frac{4\pi}{2-\alpha-\beta}\left(\frac{|z_2-z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta}+\frac{4\pi}{2-\alpha-\beta}>0$$

olur. Bu durumda J nin sınırlandırılmasındaki $\frac{4\pi}{2-\alpha-\beta}$ negatif terimi diğer bir terimle sınırlandırılmalıdır.

3.5 Homogen olmayan Cauchy Riemann Denkleminin Çözümleri.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$$

denklemini sağlayan bir w fonksiyonunun reel ve sanal kısımları homogen Cauchy - Riemann denklemini sağlar. Yani $w = u + iv$ olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0\,,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

sistemi gerçeklenir. Şimdi g, önceden verilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=g \tag{3.5.1}$$

formundaki kompleks denklemi göz önüne alalım. (3.5.1) ile verilen denkleme homogen olmayan Cauchy – Riemann Denklemi denir.

$$w_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\,, \quad \zeta = \xi + i\eta \tag{3.5.2}$$

ile tanımlanan fonksiyon, (3.5.1) kompleks diferensiyel denkleminin G' de bir özel çözümüdür. G sınırlı bir bölge, g de G de tanımlı, sürekli ve $|g| \le c$ yani sınırlı ise o zaman her z için (3.5.2) integralinin mevcut olduğu söylenebilir. (3.5.2) için

$$-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = T_G g(z)$$

gösterilimi kullanılırsa o zaman T_G operatörünün tanım kümesindeki g fonksiyonları G de tanımlanmış fonksiyonlar olmasına rağmen bütün düzleme bu fonksiyonlar genişletilebilir. Bu tip fonksiyonlar aynı zamanda

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_G g = g$$

kompleks diferansiyel denkleminin çözümleri olacaktır. Bu durumda $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ kompleks türev operatörü T_G kompleks diferansiyel denkleminin çözümleri olacaktır. Bu durumda operatörünün tersi olarak da düşünülebilir.

Teorem 3.5.1: $w_0 = T_G g$ fonksiyonu kompleks düzlemin tamamında düzgün süreklidir.

İspat: z_1 ve z_2 kompleks düzlemde herhangi iki nokta olsun. O zaman

$$|w_0(z_2) - w_0(z_1)| = \frac{1}{\pi}\left|\iint_G g(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1}\right) d\xi d\eta\right|$$
$$\le \frac{c}{\pi}|z_2 - z_1| \iint_G \frac{1}{|\zeta - z_2||\zeta - z_1|} d\xi d\eta$$

yazılabilir.

Önce $|z_2 - z_1| < 2$ ve $\alpha = \beta = 1$ olmak üzere için teorem 3.4.2 gözönüne alınırsa

$$|w_0(z_2) - w_0(z_1)| \leq \frac{4\pi + mG}{\pi} c|z_2 - z_1| - 4c|z_2 - z_1| \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2}$$

yazılabilir. Ayrıca $z_2 \to z_1$ için $|z_2 - z_1| \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2}$ ifadesinin limiti mevcuttur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(3.5.2) ile tanımlanan fonksiyonun (3.5.1) homogen olmayan Cauchy – Riemann denklemini sağladığını göstermek için aşağıdaki üç lemmaya ihtiyacımız vardır.

Lemma 3.5.1: G düzgün sınırlı bir bölge ve $f \in C^1(\mathrm{G})$ olsun. Bu takdirde

$$\iint_G \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dxdy = \frac{1}{2i} \int_{\partial G} f(z) dz, \quad \iint_G \frac{\partial f}{\partial z} dxdy = -\frac{1}{2i} \int_{\partial G} f(z) d\bar{z}$$

dır. (Ostrogradski – Gauss formulünün kompleks formu)

İspat: $G \subset C$ düzgün sınırlı bir bölge ve $P, Q \in C^1(G)$ reel degerli fonksiyonlar olmak üzere reeldeki Green formülünden

$$\int_{\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

olduğunu biliyoruz. Bu bağıntı $f \in C^1(G)$ kompleks degerli fonksiyonu içinde geçerlidir. Yani

$$\iint_G \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \int_{\partial G} fdy, \quad -\iint_G \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \int_{\partial G} fdx \tag{3.4.5}$$

dir. (3.4.5) deki denklemlerden ilki "i" çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$i\iint_G\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\int_{\partial G}f(dx+idy)=\int_{\partial G}fdz$$

veya

$$\iint_G\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}dxdy=\frac{1}{2i}\int_{\partial G}fdz$$

bulunur. Birinci denklemi "i" ile çarptıktan sonra ikinciyi birinciden çıkarırsak

$$i\iint_G\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=-\int_{\partial G}f(dx\text{-}idy)=-\int_{\partial G}fd\bar{z}$$

veya

$$\iint_G\frac{\partial f}{\partial z}dxdy=-\frac{1}{2i}\int_{\partial G}fd\bar{z}$$

elde edilir ve bunlar da Lemmada iddia edilen eşitliklerdir.

Lemma 3.5.2: $\varphi\in C_0^1(G)$ olsun. O zaman her $\zeta\in G$ için

$$-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}}dxdy=\varphi(\zeta)$$

dır.

İspat: $\varphi\in C_0^1(G)$ herhangi bir test fonksiyonu olsun. Tamamen G nin içinde bulunan bir I kapalı aralıklar ağı seçelim. $\zeta\in I\subset G$ herhangi bir nokta olmak üzere φ test fonksiyonu I' da sıfırdan farklı olsun. Ayrıca ζ nın bir δ komşuluğunu I dan çıkaralım ve geri kalan kısma I_δ diyelim. Diğer taraftan

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\varphi(z)$$

olacaktır. Lemma 3.5.1 i tanımladığımız bu f fonksiyonu için kullanırsak o zaman

$$\iint_{I_\delta} \frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}} dxdy = -\frac{1}{2i}\int_{|z-\zeta|=\delta} \frac{\varphi}{z-\zeta} dz$$

elde edilir. φ, ∂I da sıfır olduğundan ∂I üzerinden sınır integrali atılabilir. φ ve $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}$ I nın dışında sıfır olduğundan soldaki integralde I_δ yerine G_δ üzerinden integral alınabilir. Burada G_δ, G nin içinde fakat ζ ın δ komşulugu dışındaki halkasal bölgedir. Ostrogradski -Gauss formülünden

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta} \frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}} dxdy = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\zeta|=\delta} \frac{\varphi(z)}{z-\zeta} dz$$

yazılabilir. Soldaki integralde $\delta \to 0$ yaklaşımını yaparsak $G_\delta \to G$ olur. Sağdaki integralde $z\text{-}\zeta = \delta e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ dönüşümünü yaparsak $dz = i\delta e^{i\theta} d\theta$ veya $\frac{dz}{z\text{-}\delta} = id\theta$ olup ayrıca φ sürekli olduğundan $\varphi(z) - \varphi(\zeta)$ da süreklidir. Böylece

$$\int_{|z-\zeta|=\delta} \frac{\varphi(z)}{z-\zeta} dz = i\int_{\theta=0}^{2\pi} [\varphi(z) - \varphi(\zeta)] d\theta + i\varphi(\zeta)\int_{\theta=0}^{2\pi} 1 d\theta$$

olup $\delta \to 0$ yaklaşımı için sağdaki ilk integral sıfır olur. O halde

$$\int_{|z-\zeta|=\delta} \frac{\varphi(z)}{z-\zeta} dz = 2\pi i \varphi(\zeta)$$

veya buradan

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{G} \frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}} dxdy = \varphi(\zeta)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.5.2 için

$$T_G\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right]=\varphi(z), \quad \varphi \in C_0^1(G)$$

yazılabilir.

$g=g(\zeta)$, G de sınırlı bir fonksiyon olsun.O zaman aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 3.5.3: Eğer U, G nin yeterince küçük ölçüye sahip bir alt bölgesi ise $\left|\iint\limits_U \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\right|$ integrali de her z için yeterince küçük yapılabilir.

İspat: $\alpha=1$ için Teorem 3.4.1 i kullanırsak $|g(\zeta)|\leq c$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left|\iint\limits_U \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\right| &\leq \iint\limits_U \left|\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\right| d\xi d\eta \\ &\leq c\iint\limits_U \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} \\ &\leq c.2\pi\left(\frac{mU}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

yazılabilir. U, yeterince küçük bir alt bölge olduğundan (3.5.3) yeterince küçük yapılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

G' yi z düzleminin veya ζ düzleminin bir alt bölgesi olarak düşünelim. Ancak bunu anlamlı olarak belirtmek için G yerine G_z veya G_ζ gösterilimlerini kullanalım.

Teorem 3.5.2: $w_0(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$

olarak tanımlanan fonksiyon

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = g$$

homogen olmayan Cauchy - Riemann denkleminin G_z bölgesinde Sobolev anlamında bir çözümüdür.

İspat: $\varphi \in C_0^1(G_z)$ herhangi bir test fonksiyonu olsun. O zaman $w_0(z)$ fonksiyonun tanımından

$$\iint_{G_z} w_0(z)\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}}dxdy = -\frac{1}{\pi}\iint_{G_z}\frac{\partial \varphi(z)}{\partial \bar{z}}\left(\iint_{G_\zeta}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta\right)dxdy \tag{3.5.4}$$

yazılabilir.

G_ζ üzerinden hesaplanan integral için Lemma 3.5.3 ü kullanalım. δ yeterince küçük bir sayı olmak üzere G_ζ üzerinden integral yerine $G_\zeta \backslash U_\delta(z)$ üzerinden integral hesaplarsak o zaman her z için integral sonuçları birbirinden çok az farklı olacaktır. Yani yeterince küçük δ sayısı için (3.5.4) integralinin büyüklüğünde çok küçük bir fark ortaya çıkacaktır.

$G_z x G_\zeta$ dan $\{(z,\zeta) \mid |\zeta - z| < \delta\}$ silindirik bölgesini çıkaralım ve (3.5.4) nin sağ tarafındaki integrali yeni ortaya çıkan bölge üzerinden hesaplayalım. Bu bölgede integrant singülerlige sahip değildir. Bu durumda Fubini teoreminden integrasyon sırası yer değiştirebilir. Böylece (3.5.4) nin sağ tarafındaki integral, yeni bölge üzerinden

$$\frac{1}{\pi}\iint_{G_\zeta} g(\zeta)\left(\iint_{G_z - U_\delta(z)}\frac{1}{\zeta - z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}dxdy\right)d\xi d\eta$$

olarak yazılabilir. $G_\zeta \setminus U_\delta(z)$ üzerinden hesaplanan integralde $\delta \to 0$ için limit alınırsa içteki integral, G_z üzerinden integrale dönüşür. Bu integral için Lemma 3.5.3 ü kullanırsak (3.5.4) integrali

$$\frac{1}{\pi}\iint_{G_\zeta} g(\zeta)\left(\iint_{G_z}\frac{1}{z-\zeta}\frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}}dxdy\right)d\xi d\eta$$

haline gelir. Parantez içindeki integral için Lemma 3.5.2 kullanılırsa (3.5.4) bağıntısı

$$-\iint_{G_z} g(z)\varphi(z)dxdy$$

ifadesine eşit olur. Bu, her φ test fonksiyonu için geçerli olduğundan $w_0(z)$ fonksiyonu $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = g$ denkleminin Sobolev anlamındaki çözümü olur. Çünkü

$$\begin{aligned}\iint_{G_z} w_0(z)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}dxdy &= -\frac{1}{\pi}\iint_{G_z}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\left(\iint_{G_\zeta}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta\right)dxdy \\ &= \iint_{G_z} g(z)\varphi(z)dxdy\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\iint_{G_z}\left[w_0(z)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} + g(z)\varphi(z)\right]dxdy = 0$$

elde edilir. Bu ise G_z de $w_0(z)$ fonksiyonunun $\bar{z}$ e göre Sobolev türevinin g, yani $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = g$ olduğunu gösterir.

4. BÖLÜM:

DÜZGÜNLEŞTİRME TEOREMLERİ

4.1 Reel Tek Değişkenli Fonksiyonlar İçin Bir Düzgünleştirme Teoremi

Teorem 4.1.1: $y = y(x)$ fonksiyonu $\frac{dy}{dx} = 0$ denkleminin Sobolev çözümü olsun. Bu takdirde y sabit olmak zorundadır.

İspat: $I = \{x \mid a < x < b\}$ aralığını gözönüne alalım ve $y = y(x)$; $\frac{dy}{dx} = 0$ denkleminin Sobolev anlamındaki çözümü olsun. O zaman her $\varphi \in C_0^1(I)$ test fonksiyonu için

$$\int_I y \frac{d\varphi}{dx} dx = 0 \tag{4.1.1}$$

olur. Diğer taraftan

$$\eta(\zeta) = \frac{1}{4}\left(-\zeta^3 + 3\zeta + 2\right)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\eta'(\zeta) = \frac{1}{4}\left(-3\zeta^2 + 3\right)$$

olduğundan fonksiyon $\zeta = 1$ ve $\zeta = -1$ noktalarında yerel ekstreme sahiptir ve $\eta(-1) = 0, \eta(1) = 1$ dir. Şimdi

$$\eta(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta \le -1 \\ \frac{1}{4}\left(-\zeta^3 + 3\zeta + 2\right), & -1 \le \zeta \le 1 \\ 1, & \zeta \ge 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu fonksiyon sürekli türevlenebilen bir fonksiyondur. $\zeta=-1$ ve $\zeta=1$ noktalarındaki türevi de sıfırdır. Grafik, -1 ile 1 arasında sıfırdan bire doğru yükselir.

Öte yandan $c<d$ olmak üzere $\zeta=-1+2\dfrac{x-c}{d-c}$ alalım. $\dfrac{d\zeta}{dx}=\dfrac{2}{d-c}$ olur. $x=c$ de $\zeta=-1$, $x=d$ de $\zeta=1$ olur. Böylece x e bağlı bir fonksiyon elde ettik. Bu fonksiyonun c ile d arasında türevi pozitif, $x=c$ ve $x=d$ noktalarında sıfırdır. Çünkü

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dx}=\frac{d\eta}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dx}&=\frac{1}{4}\left(-3\zeta^2+3\right)\frac{2}{d-c}\\&=\frac{6}{4(d-c)}\left(1-\zeta^2\right)\\&=\frac{3}{2(d-c)}\left[1-\left(-1+2\frac{x-c}{d-c}\right)^2\right]\\&=\frac{3}{2(d-c)}\left[2-2\frac{x-c}{d-c}\right]2\frac{x-c}{d-c}\\&=\frac{6}{d-c}\left(1-\frac{x-c}{d-c}\right)\frac{x-c}{d-c}\end{aligned}$$

$c<x<d$ olduğundan $0<\dfrac{x-c}{d-c}<1$ dir. Bu işlemleri özel bir $\varphi\in C_0^1(I)$ test fonksiyonu seçmek için yaptık.

x_1, x_2 bir I aralığının iki noktası olsun. $j=1,2$ olmak üzere U_j, x_j nin komşuluğu ve $\overline{U_j}$ tamamen I da bulunsun. Ayrıca U_1 ve U_2 nin ortak noktası bulunmasın. $x_1<x_2$ ise φ test fonksiyonunu şöyle seçelim: φ, U_1 de sürekli türetilebilir olsun ve sıfırdan bire doğru yükselsin. Aynı φ fonksiyonu U_2 de birden sıfıra doğru azalsın. U_1 ve U_2 nin dışında türevi sıfır olsun. Bundan başka $j=1,2$ olmak üzere U_j lerin başlangıç ve bitim noktalarında φ fonksiyonun türevi sıfır

olsun. O zaman $\varphi \in C_0^1(I)$ olur. Diğer taraftan I da tanımlanan sürekli $y= y(x)$ fonksiyonu

$$\int_I y \frac{d\varphi}{dx} dx = 0$$

bağıntısını sağlasın. Yani $y = y(x)$, $\frac{dy}{dx} = 0$ denkleminin Sobolev çözümü olsun.Bu durumda y sabit olmak zorundadır. $y=y(x)$ in sabit olmadığını kabul edelim. O zaman $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ $y(x_1) \neq y(x_2)$ olacak şekilde en az iki nokta vardır. $x_1 < x_2$ için $y(x_1) > y(x_2)$ olduğunu kabul edelim. ($x_1 < x_2$ için $y(x_1) < y(x_2)$ olması aynı yolla incelenir). $y(x_1)$ ile $y(x_2)$ arasında bir k sabiti seçelim. O zaman $y = y(x)$ in sürekliliğinden dolayı x_1 in, $y(x) > k$ olacak şekilde bir U_1; x_2 nin $y(x)<k$ olacak şekilde bir U_2 komşuluğu bulunabilir. φ yukarıda oluşturulan test fonksiyonu olmak üzere

U_1 de $\frac{d\varphi}{dx} > 0$, U_2 de $\frac{d\varphi}{dx} < 0$ olur. O zaman

U_1 de $y\frac{d\varphi}{dx} > k\frac{d\varphi}{dx}$

ve

U_2 de $y\frac{d\varphi}{dx} > k\frac{d\varphi}{dx}$

dır.

φ, U_1 de sıfırdan bire doğru yükseldiğinden

$$\int_{U_1} y\frac{d\varphi}{dx}dx > k\int_{U_1}\frac{d\varphi}{dx}dx = k$$

φ, U_2 de birden sıfıra doğru azaldığından

$$\int_{U_2} y\frac{d\varphi}{dx}dx > k\int_{U_2}\frac{d\varphi}{dx}dx = -k$$

yazılabilir. U_1 ve U_2 nin dışında φ sabit olduğundan $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ dır. Böylece

$$\int_I y\frac{d\varphi}{dx} = \int_{U_1} y\frac{d\varphi}{dx} + \int_{U_2} y\frac{d\varphi}{dx} > k\text{-}k = 0$$

olur. Bu ise $\int_I y\frac{d\varphi}{dx}dx = 0$ varsayımına aykırıdır. Böylece y, I nın bütün noktalarında aynı sabit değere sahip olmak zorundadır.

4.2. Harmonik Fonksiyonlar, Harmonik Fonksiyonlar İçin Maksimum Minimum Prensibi.

Tanım 4.2.1: Düzlemin bir bölgesinde tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon u olsun. z_0, G de bulunan sabit bir nokta ve $\delta > 0$ bir sayı olsun. z_0 ın $U_\delta(z_0)$ komşuluğu tamamen G nin içinde kalacak şekilde olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi\delta}\int_{\partial U_\delta(z_0)} u(z)ds$$

sayısına gözönüne alınan z_0 ın δ komşuluğunun sınırı üzerinden u nun ortalama değeri denir. Burada ds, $\partial U_\delta(z_0)$ üzerindeki yay elemanıdır.

Tanım 4.2.2: z_0 ve δ nın her seçimi için u nun; z_0 ın δ komşuluğunun sınırı üzerinden ortalama değeri , komşuluğun merkezi olan $u(z_0)$ fonksiyon değerine eşitse u ya G de harmoniktir denir.

Tanım 4.2.3: $u(z_0)$ fonksiyon değeri ortalama değerden küçük veya en fazla ortalama değere eşit oluyorsa o zaman u ya subharmonik (altharmonik) denir.

Harmonik fonksiyon kavramını açıklığa kavuşturmak için önce tek reel değişkenli $y = y(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$I = \{x |\ x_0 - \delta \le x_0 \le x_0 + \delta\}$$

aralığı ya da x_0 ın δ komşuluğu $y = y(x)$ in tanım kümesine ait olsun. I nın ∂I sınırı sadece $x_1 = x_0 - \delta$ ve $x_2 = x_0 + \delta$ noktalarından ibarettir. Bu durumda y nin ∂I üzerindeki ortalama değeri

$$\frac{1}{2}\left(y(x_0 - \delta) + y(x_0 + \delta)\right)$$

aritmetik ortalama olacaktır. Eğer $y = y(x)$ lineer bir fonksiyon ise bu ortalama değer fonksiyonun aralığın orta noktası olan x_0 noktasında alınan $y(x_0)$ değerine eşit olacaktır. O halde tek reel değişkenli lineer fonksiyonlar harmonik fonksiyon olarak değerlendirilebilir. Halbuki $y = \alpha x + \beta$ formundaki fonksiyonlar $y'' = 0$ diferensiyel denklemini sağlar. Böylece $y'' = 0$ diferensiyel denkleminin çözümleri harmonik fonksiyonlardır. $u \in C^2(G)$ olmak üzere aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1: u, $\Delta u = 0$ Laplace Denkleminin bir çözümü ise u harmoniktir.

İspat: $\Delta u = 0$ Laplace Denkleminin bir çözümü, sınırı tamamen G nin içinde bulunan bir disk içinde

$$u(y) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial U_R(x_0)} u(x) \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} ds$$

yazılabilir. $y = x_0$ alınırsa $\rho = 0$ ve x ler sınır üzerinde değişeceğinden $r = R$ olur. O halde

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial U_R(x_0)} u(x)ds$$

elde edilir. Bu da u fonksiyonunun G de harmonik olduğunu gösterir.

Tersine harmonik bir fonksiyonun Laplace Denklemini sağlaması gerektiğini gösterebilmek için birkaç lemma verelim.

Lemma 4.2.1: u sürekli harmonik olsun ve $\partial U_\delta(z_0)$ da $u(z) \le c$ eşitsizliği gerçeklensin. $\partial U_\delta(z_0)$ ın bir z_1 noktası için de $u(z_1) < c$ olsun. Bu takdirde $u(z_0) < c$ dir.

İspat: *k*, $u(z_1)$ ile c arasında bir sayı yani $u(z_1) < k < c$ olsun. O zaman u nun sürekliliğinden dolayı z_1 in öyle bir komşuluğu vardır ki bu komşuluktaki her z için $u(z) < k$ eşitsizliği gerçeklenir. $\partial U_\delta(z_0)$ çember eğrisini ν_1 ve ν_2 gibi iki parçaya ayıralım. ν_1, z_1 i içersin ve ν_1 üzerinde de $u(z) \le k$ eşitsizliği gerçeklensin. $j=1,2$ olmak üzere ν_j nin uzunluğunu $I(\nu_j)$ ile gösterirsek

$$I(\nu_1) + I(\nu_2) = 2\pi\delta$$

olur. γ_1 tek noktadan meydana gelmediğinden $I(\nu_1) > 0$ dır. Buradan

$$\int_{\partial U_\delta(z_0)} u(z)ds = \int_{\nu_1} u(z)ds + \int_{\nu_2} u(z)ds \le kI(\nu_1) + c(2\pi\delta - I(\nu_1))$$

$$= 2\pi c\delta - (c-k)I(\nu_1) < 2\pi c\delta$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar. Çünkü

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi\delta} \int_{\partial U_\delta(z_0)} u(z)ds < c$$

bulunur.

Lemma 4.2.2: G sınırlı bir bölge olmak üzere u; $\overline{G}$ da sürekli, G de harmonik ise u maksimum ve minimum değerlerini ∂G sınırı üzerinde alır.

İspat: u fonksiyonu $\overline{G}$ da sürekli ve G de harmonik olsun. z_1, G nin içinde bir nokta ve u nun maksimum değerini z_1 noktasında aldığını varsayalım. z_1 in ∂G ye uzaklığını R ile gösterelim. ∂G üzerinde z_1 e uzaklığı yine R olan bir z_2 noktasını gözönüne alalım. Bu durumda $U_R(z_1)$ açık diski tamamen G bölgesinin içinde bulunur. u nun maksimum değerini hiçbir sınır noktasında almadığını varsayalım. Bu durumda u fonksiyonunun z_2 noktasında süreklilikten dolayı da z_2 nin bir komşuluğunda aldığı değerler maksimum değerden daha küçük kalacaktır. δ yarıçapı yeterince büyük seçersek yani δ yı R ye yaklaştırırsak $\partial U_\delta(z_1)$ ile $U_R(z_2)$ ortak noktalara sahip hale getirilebilir. Bu durumda Lemma 4.2.1 den $u(z_1)$, u nun maksimum değerinden küçük olmak zorundadır. Bu ise z_1 in seçiliş şekline aykırıdır.

$\Delta u = 0$ denkleminin her çözümü harmonik olduğundan Lemma 4.2.2 $\Delta u = 0$ denkleminin her çözümünün maksimum minimum prensibini sağladığını gösterir. Yani

$$\inf_{\partial G} u(z) \le u(z) \le \sup_{\partial G} u(z)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Teorem 4.2.1 in karşıtını ifade etmek istediğimizde G nin sınırlı olmasına ihtiyacımız olmayabilir.

Teorem 4.2.2: u fonksiyonu G de sürekli ve harmonik olsun. O zaman u, $\Delta u = 0$ ın klasik anlamdaki çözümüdür.

İspat: $z_0 \in G$ herhangi bir nokta olsun. δ sayısını, $\overline{U_\delta(z_0)}$ bölgesi tamamen G nin içinde kalacak şekilde seçelim. u nun yerine $U_\delta(z_0)$ da $\Delta\widetilde{u} = 0$ ın $\widetilde{u}$ çözümünü gözönüne alalım. Dolayısıyla $U_\delta(z_0)$ da $\Delta\widetilde{u} = 0$ olsun. Bu $\widetilde{u}$ çözümü, G nin tamamında harmonik ve önceden verilen u fonksiyonu ile $\partial U_\delta(z_0)$ üzerinde aynı sınır değerine sahip olsun. Bu fonksiyon Poisson İntegral Formulü yardımıyla belirlenebilir.

$\overline{U_\delta(z_0)}$ bölgesinde $u_0 = u - \widetilde{u}$ fonksiyonuna dikkat edelim. Teorem 4.2.1 e göre $\widetilde{u}$ harmonik olduğundan iki harmonik fonksiyonun farkı olarak u_0 da harmoniktir. Lemma 4.2.2 ye göre u_0 maksimum ve minimum değerini $\partial U_\delta(z_0)$ sınırı üzerinde alır. Fakat $\partial U_\delta(z_0)$ üzerinde u_0 özdeş olarak sıfır olduğundan $U_\delta(z_0)$ bölgesinin tamamında $u = \widetilde{u}$ olmak zorundadır. $\Delta\widetilde{u} = 0$ olmasından dolayı da u, $U_\delta(z_0)$ da $\Delta u = 0$ denkleminin çözümüdür. z_0, G de keyfi olarak seçildiğinden u, G nin tamamında $\Delta u = 0$ ın çözümüdür. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 4.2.3: u bir G bölgesinde harmonik ise $u(\zeta_0)$; u nun tanım bölgesinden seçilen her ζ_0 merkezli daire üzerinden hesaplanan ortalama değere eşittir.

İspat: ζ_0 u nun tanım bölgesinde bir nokta olsun. ρ sayısını, $|\zeta - \zeta_0| \le \rho$ bölgesi tamamen G de bulunacak şekilde seçelim. O zaman her $0 < r \le \rho$ şeklindeki r sayısı için

$$u(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\zeta - \zeta_0| = r} u(\zeta) ds$$

bağıntısı geçerlidir.Burada ds , $|\zeta - \zeta_0| = r$ çemberinin yay elemanıdır. Bu eşitliğin her iki tarafi r ile çarpılıp 0 dan ρ ya kadar integrali hesaplanırsa

$$\frac{1}{2}\rho^2 u(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|\zeta - \zeta_0| \le \rho} u(\zeta) d\xi d\eta$$

olur. $\zeta = \xi + i\eta$ için $d\xi d\eta = ds dr$ olur. Son eşitliğin her iki tarafi $\frac{1}{2}\rho^2$ ile bölünürse

$$u(\zeta_0) = \frac{1}{\pi\rho^2} \iint\limits_{|\zeta - \zeta_0| \le \rho} u(\zeta) d\xi d\eta$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış oldu.

4.3.Laplace Denklemi İçin Bir Düzgünleştirme Teoremi

Teorem 4.3.1: U, G de $\Delta U = 0$ Laplace Denkleminin Sobolev anlamında sürekli bir çözümü olsun. Bu durumda U, $\Delta U = 0$ ın klasik anlamda da çözümüdür. Fazladan U nun ikinci basamaktan türevleri var ve süreklidir.

İspat: U fonksiyonu G bölgesinde $\Delta U = 0$ denkleminin Sobolev çözümü olsun. Yani her $\varphi \in C_0^2(G)$ için

$$\iint_G U\Delta\varphi dxdy = 0$$

eşitliği gerçeklensin. Şimdi U nun G de $\Delta U = 0$ denkleminin klasik anlamda çözümü olduğunu gösterelim. z_0 G de sabit bir nokta olsun ve

$$\overline{U_R(z_0)} = \{z| \quad |z\text{-}z_0| \le R\} \subset G$$

olacak şekilde bir R sayısını gözönüne alalım. Diğer taraftan r ile z noktalarının z_0 a olan uzaklığını gösterelim. Yani $|z - z_0| = r$ olsun.

$$\varphi(z) = \begin{cases} (R^2 - r^2)^3, & r \le R \\ 0 \quad , & r > R \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $r = R$ için dairenin sınırı elde edilir ve bu sınır üzerinde $\varphi(z) = 0$ dır. φ her yerde süreklidir. Ayrıca

$$r^2 = (x\text{-}x_0)^2 + (y\text{-}y_0)^2$$

olduğundan $U_R(z_0)$ bölgesinin iç noktalarında

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -3(R^2 - r^2)^2 2(x\text{-}x_0), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -3(R^2 - r^2)^2 2(y\text{-}y_0)$$

olur ve $\partial U_R(z_0)$ sınırı üzerinde de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ türevleri özdeş olarak sıfırdır. Böyle tanımlanan φ fonksiyonu düzlemin tamamında sürekli türetilebilir bir fonksiyondur. Benzer şekilde ikinci basamaktan türevler de

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= -6(R^2 - r^2)(-4)(x\text{-}x_0)^2 - 6(R^2 - r^2)^2 \\ &= -6(R^2 - r^2)^2 + 24(R^2 - r^2)(x\text{-}x_0)^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -6(R^2 - r^2)^2 + 24(R^2 - r^2)(y\text{-}y_0)^2$$

olup bu ikinci basamaktan türevler de $\partial U_R(z_0)$ sınırı üzerinde sıfırdır. Böylece $\partial U_R(z_0)$ sınırında ikinci basamaktan türevler de sıfırdır. O halde φ, düzlemin tamamında ikinci basamaktan sürekli türetilebilirdir. φ fonksiyonu, $U_R(z_0)$ ın dışında özdeş olarak sıfır olduğundan sınırlı G bölgesi için $\varphi \in C_0^2(G)$ dir. Bu durumda

$$\iint_G u \Delta \varphi dx dy = 0$$

eşitliği bu özel seçilen φ test fonksiyonu için de geçerlidir.

$$\Delta \varphi = -12(R^2 - r^2)^2 + 24(R^2 - r^2) r^2$$

$$= -12(R^4 - 4R^2 r^2 + 3r^4)$$

olur. Bu özel fonksiyonu

$$\iint_G u \Delta \varphi dx dy = 0$$

eşitliğinde yerine yazıp her tarafi -12 ile bölersek

$$\iint_{U_R(z_0)} U(z)(R^4 - 4R^2 r^2 + 3r^4) dx dy = 0 \tag{4.3.1}$$

olur. Bu integral genel olarak

$$\iint_{|z-z_0| \le R} f(z,R) dx dy = F(R)$$

formundadır. Şimdi ispatı tamamlayabilmek için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 4.3.1: $\dfrac{dF(R)}{dR} = \displaystyle\iint_{U_R(z_0)} \frac{\partial f}{\partial R}(z,R) dx dy + \int_{\partial U_R(z_0)} f(z,R) ds$

dir. Burada *ds* yay elemanıdır.

İspat: $R_1 > R$ olmak üzere

$$F(R_1) - F(R) = \iint\limits_{R \le |z-z_0| \le R_1} f(z,R_1)dxdy + \iint\limits_{|z-z_0| \le R} [f(z,R_1) - f(z,R)]dxdy \tag{4.3.2}$$

farkını gözönüne alalım. Sağdaki ilk integral Fubini teoreminden

$$\int\limits_{r=R}^{R_1} \left(\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z,R_1)ds \right) dr \tag{4.3.3}$$

yazılabilir. Çünkü (r,θ) kutupsal koordinatlar olmak üzere $dxdy = rdrd\theta = drds$ dir.

İntegral hesabın r – doğrultusundaki Ortalama – Değer Teoremi kullanılırsa $R \le \tilde{R} \le R_1$ olacak şekilde $\tilde{R}$ sayısının mevcut olduğunu ve (4.3.3) ün

$$(R_1 - R) \int\limits_{|z-z_0|=\tilde{R}} f(z,R_1)ds$$

ifadesine eşit olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (4.3.2) nin sağ tarafındaki ilk integral için bu kullanılırsa ve her iki taraf R_1-R ile bölünürse

$$\begin{aligned} &\frac{F(R_1) - F(R)}{R_1 - R} - \iint\limits_{|z-z_0| \le R} \frac{\partial f}{\partial R}(z,R)dxdy \\ &= \int\limits_{|z-z_0|=\tilde{R}} f(z,R_1)ds + \iint\limits_{|z-z_0| \le R} \left(\frac{f(z,R_1) - f(z,R)}{R_1 - R} - \frac{\partial f}{\partial R}(z,R) \right) dxdy \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

olur.Diferensiyel hesabın ortalama değer teoreminden r nin her seçimi için $R \le \hat{R} \le R_1$ ve

$$\frac{f(z,R_1) - f(z,R)}{R_1 - R} = \frac{\partial f}{\partial r}(z,\hat{R})$$

olacak şekilde bir $\hat{R}$ sayısı vardır. Bu durumda (4.3.4) ün sağ tarafındaki ikinci integralin integrantı

$$\frac{\partial f}{\partial r}(z,\hat{R}) - \frac{\partial f}{\partial r}(z,R)$$

olur. Yani

$$\frac{F(R_1)-F(R)}{R_1-R}-\iint\limits_{|z-z_0|\leq R}\frac{\partial f}{\partial R}(z,R)dxdy$$

$$=\int\limits_{|z-z_0|=\tilde{R}} f(z,R_1)ds+\iint\limits_{|z-z_0|\leq R}\left(\frac{\partial f}{\partial r}(z,\hat{R})-\frac{\partial f}{\partial r}(z,R)\right)dxdy \qquad (4.3.5)$$

yazılabilir. (4.3.5) de $R_1 \to R$ için limit alınırsa

$$\frac{dF(R)}{dR}-\iint\limits_{|z-z_0|\leq R}\frac{\partial f}{\partial r}(z,R)dxdy=\int\limits_{|z-z_0|=R} f(z,R)ds$$

olup buradan

$$\Rightarrow \frac{dF(R)}{dR}=\iint\limits_{U_R(z_0)}\frac{\partial f}{\partial R}(z,R)dxdy+\int\limits_{\partial U_R(z_0)} f(z,R)ds$$

yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Bu lemmayı (4.3.1) için kullanırsak

$$\iint\limits_{U_R(z_0)} U(z)\left(4R^3-8Rr^2\right)dxdy=0 \qquad (4.3.6)$$

olur. Çünkü $\int\limits_{|z-z_0|=R} f(z,R)ds$ integrali, $R^4-4R^2r^2+3r^4$ ifadesi $r=R$ için sıfır olduğundan yazılmadı. (4.3.6) eşitliği, $4R$ ile bölünüp tekrar R ye göre türev alınırsa, $r=R$ için $R^2-2r^2=-R^2$ olması da gözönünde bulundurulursa

$$-R^2\int\limits_{\partial U_R(z_0)} U(z)ds+2R\iint\limits_{U_R(z_0)} U(z)dxdy=0 \qquad (4.3.7)$$

olur. Çünkü sınır üzerinde $r=R$ olup $R^2-2r^2=-R^2$ olur. Böylece

$$\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial U_R(z_0)} U(z)ds=\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{U_R(z_0)} U(z)dxdy \qquad (4.3.8)$$

bulunur. Bu denklem tekrar lemma (4.3.1) kullanılarak R ye göre türetilirse

$$\frac{d}{dR}\left[\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\partial U_R(z_0)} U(z)ds\right]=-\frac{2}{\pi R^3}\iint\limits_{U_R(z_0)} U(z)dxdy+\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{\partial U_R(z_0)} U(z)ds \qquad (4.3.9)$$

olup buradan (4.3.9) elde edilir. (4.3.8) in her iki tarafı $\frac{2}{R}$ ile çarpılır ve elde edilen ifade (4.3.9) da yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dR}\left[\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial U_R(z_0)} U(z)ds\right]=0$$

olur. Son denklemden de görüldüğü gibi U nun $\partial U_R(z_0)$ üzerinden ortalama değeri R den bağımsızdır. Diğer taraftan eğer R yeterince küçük seçilir ve U nun sürekliliği gözönüne alınırsa

$$\left|\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial U_R(z_0)} U(z)ds-U(z_0)\right|=\frac{1}{2\pi R}\left|\int_{\partial U_R(z_0)}[U(z)-U(z_0)]ds\right|\leq\frac{1}{2\pi R}\varepsilon\, 2\pi R=\varepsilon$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial U_R(z_0)} U(z)ds=U(z_0)$$

olduğu ortaya çıkar. U nun $\partial U_R(z_0)$ üzerindeki ortalama değeri R den bağımsız olarak biliniyordu. O halde bu ortalama değer $U(z_0)$ a eşit olmak zorundadır. Bu ise U nun klasik anlamda harmonik olduğunu gosterir.

4.4 $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$ Denklemi için Bir Düzgünleştirme Teoremi ve Homogen Olmayan Cauchy Riemann Denkleminin Genel Çözümü.

Lemma 4.4.1: $w=u+iv$, $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$ denkleminin Sobolev anlamında çözümü olsun. Bu durumda u, v ve bunun sonucu olarak w; x,y ye göre birinci basamaktan kısmi türevlere sahiptir.

İspat: w, G bölgesinde $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ denkleminin Sobolev anlamında sürekli, kompleks değerli bir çözümü olsun. Yani her $\varphi \in C_0^1(G)$ için

$$\iint_G w \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dxdy = 0 \tag{4.4.1}$$

bağıntısı gerçeklensin. $\varphi \in C_0^2(G)$ reel değerli herhangi bir test fonksiyonunu gözönüne alalım. $\tilde{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ dersek $\tilde{\varphi} \in C_0^1(G)$ olur. Diğer taraftan

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta \varphi$$

bağıntısı gözönüne alınırsa (4.3.1) den her $\varphi \in C_0^2(G)$ için

$$\iint_G w \Delta \varphi dxdy = 0$$

yazılabilir. Çünkü $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ olduğundan $\Delta w = 0$ dır. Sobolev türev bağıntısından

$$\iint_G \left[w \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} + \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} \right] dxdy = 0$$

olup $w_{z\bar{z}} = 0$ olması nedeniyle buradan

$$\iint_G w \Delta \varphi dxdy = 0$$

elde edilir.

w fonksiyonu $w = u + iv$ şeklinde reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa o zaman $\varphi \in C_0^2(G)$ için

$$\iint_G u \Delta \varphi dxdy = 0 , \quad \iint_G v \Delta \varphi dxdy = 0$$

yazılabilir. Çünkü φ reel değerli bir test fonksiyonudur. Teorem 4.3.1 den u ve v nin klasik anlamda birinci basamaktan kısmî türevleri vardır. $w = u + iv$ olduğundan dolayıda $w \in C^1(G)$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.4.2: w fonksiyonu bir bölgede kompleks değerli, x ve y ye göre sürekli, kısmî türevlere sahip bir fonksiyon ve Sobolev anlamında $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ ise w; o zaman klasik anlamda holomorf bir fonksiyondur.

İspat: $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = u + iv$ olsun. Varsayımdan w, dolayısıyla u ile v kısmî türevlere sahip olduğundan diferensiyel hesabın ortalama değer teoremi kullanılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} w(z) - w(z_0) &= [u(z) - u(z_0)] + i[v(z) - v(z_0)] \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_1)(x\text{-}x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_1)(y\text{-}y_0)\right] + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}(\tilde{z}_2)(x\text{-}x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(\tilde{z}_2)(y\text{-}y_0)\right] \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

bağıntıları yazılabilir. Burada $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ z ve z_0 noktalarını birleştiren doğru üzerinde bulunan noktalardır. $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ türevinin reel haldeki yazılış şekline dikkat edersek $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ kabulünden dolayı

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Cauchy Riemann denklem sistemi gerçeklenir. Böylece (4.4.2) nin sağ tarafi Cauchy Riemann denklemlerinin de kullanılmasıyla

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_1)(x\text{-}x_0)+i\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_2)(y\text{-}y_0)-i\left[\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_2)(x\text{-}x_0)+i\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_1)(y\text{-}y_0)\right]$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_1)(z\text{-}z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_1)(z\text{-}z_0)+i\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_2)-\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_1)\right](y\text{-}y_0)-i\left[\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_2)-\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_1)\right](x\text{-}x_0)$$

şeklinde yazılabilir. $w(z)$-$w(z_0)$ farkı $z\neq z_0$ olmak üzere z- z_0 ile bölünürse

$$\frac{w(z)-w(z_0)}{z\text{-}z_0}=\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_1)-i\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_1)+i\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_2)-i\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{z}_1)\right]\frac{y\text{-}y_0}{z\text{-}z_0}-i\left[\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_2)-\frac{\partial u}{\partial y}(\tilde{z}_1)\right]\frac{x\text{-}x_0}{z\text{-}z_0}$$

......(4.4.3)

eşitliği elde edilir. z yi z_0 a yaklaştırırsak $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ ler de z_0' a yaklaşır. Bu durumda sağ taraftaki ikinci ve üçüncü toplamlar sürekli kısmi türevlerin mevcut olması hipotezinden yeterince küçük yapılabilir. Diğer taraftan

$$\left|\frac{x\text{-}x_0}{z\text{-}z_0}\right|\leq 1\,,\quad \left|\frac{y\text{-}y_0}{z\text{-}z_0}\right|\leq 1$$

olduğu da gözönüne alınırsa $z\to z_0$ limiti için

$$w'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

bulunur ki bu da $w(z)$ nin z_0 da holomorf olduğunu gösterir. Çünkü

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right],\qquad u_x=v_y\,,\ u_y=-v_x$$

Cauchy Riemann sisteminin de gözönüne alınmasıyla

$$=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-i\,2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

Lemma 4.4.1 ve Lemma 4.4.2 yi aşagıdaki teoremle özetleyebiliriz.

Teorem 4.4.1: Eğer w, $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$ denkleminin Sobolev çözümü ise o zaman w fonksiyonu klasik anlamda holomorftur.

Teorem 4.4.2: $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = g$ homogen olmayan Cauchy Riemann Denkleminin bütün w Sobolev çözümleri $w = w_0 + \phi$ formundadır. Burada $w_0 = T_G g$ ve ϕ, G de tanımlı herhangi bir holomorf fonksiyondur.

İspat: G, z düzleminde sınırlı bir bölge ve g, G de tanımlı, sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $w_0 = T_G g$ fonksiyonunun

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = g \tag{4.4.4}$$

homogen olmayan Cauchy Riemann denkleminin bir özel çözümü olduğunu daha önce görmüştük.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_0 + \phi) = \frac{\partial w_0}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = g + 0 = g$$

olması nedeniyle $w_0 + \phi$ de aynı denklemin çözümü olur.

Acaba klasik çözümün dışında (4.4.4) denkleminin $w = w_0 + \phi$ formunda olmayan Sobolev çözümü var mı? w_0, (4.4.4) ün herhangi bir sürekli Sobolev çözümü olsun. Bu takdirde $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w\text{-}w_0) = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial w_0}{\partial \bar{z}} = g\text{-}g = 0$ olur. O halde $w\text{-}w_0$ G de holomorf bir fonksiyondur. Dolayısıyla (4.4.4) denkleminin bütün çözümleri (klasik veya Sobolev anlamında) $w = w_0 + \phi$ formundadır.

5. BÖLÜM:

KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN TÜRETİLEBİLİRLİK ÖZELLİKLERİ

5.1 İkinci Basamaktan Kısmi Türevli Denklemlerin Çözümlerinin Türetilebilirlik Özelliği

$y = y(x)$ fonksiyonu $y'(x) = f(x,y)$ adi türevli diferensiyel denklemin sürekli türetilebilir bir çözümü olsun. Buna ilave olarak sağ taraftaki $f(x,y)$ fonksiyonunun x ve y ye göre kısmi türevlere sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(x,y(x)) = y'(x)$ sürekli türetilebilir bir fonksiyon olur. Bu ise $y = y(x)$ in iki defa sürekli türetilebilmesi demektir. Türevde zincir kuralından

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

olur. Benzer şekilde eğer f in x ve y ye göre ikinci basamaktan sürekli türetilebilir olduğunu kabul edersek o zaman y''' türevi mevcuttur. Ayrıca y''' süreklidir. Buradan da görüldüğü gibi sağ taraftaki fonksiyonun sürekli türetilebilme varsayımı çözümün türetilebilme özelliğine etki etmektedir.

Örnek olarak $\Delta u = 0$ denkleminin çözümlerinin en az iki defa sürekli türetilebilir olması gerekmektedir. $\Delta u = 0$ Laplace Denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.1.1}$$

denkleminin bir özel halidir. Eğer (5.1.1) de $a(x,y)$ katsayısı türevlenebilir bir fonksiyon ise o zaman denklemin her çözümü türevlenebilirdir. Çünkü $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0$

olmak üzere u, denklemin bir çözümü ise

$$a(x,y) = -\frac{u_{xx}}{u_{yy}}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $a(x,y)$ nin herhangi bir sabit seçimi için (5.1.1) in her çözümü türevlenemeyebilir. Örneğin $a(x,y)$= -1 alınırsa denklem

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

haline gelir. Bu denklemin

$$u = u(x,y) = f_1(x+y)$$

şeklinde bir çözümü vardır. Eğer f_1 sadece ikinci basamaktan sürekli türetilebilir ise o zaman $u = f_1(x+y)$ denklemin bir çözümüdür. u fonksiyonu her basamaktan türeve sahip olmayabilir.

Diferensiyel denklemle birlikte, ilgili bölgenin sınırında çözümün değeri önceden verilirse, sınırda çözümün diferensiyellenebilme özelliği, önceden verilen sınır fonksiyonunun diferensiyellenebilme hipotezini nasıl etkiler? Bu soruyu düzlemdeki bir dairesel bölgede tanımlanan $\Delta u = 0$ Laplace Denklemi için inceleyeceğiz.

5.2 Dirichlet Sınır Değer Problemi Çözümlerinin Sınırdaki Hölder Sürekliliği.

z düzleminde bir G bölgesi $|z| < R$ ile tanımlanmış olsun. Bölgenin ∂G sınırında önceden verilmiş sürekli bir g fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu durumda $\Delta u = 0$ denkleminin ∂G sınırında $u = g$ ile çakışan bir u çözümü vardır. Bu fonksiyon $\overline{G}$ da süreklidir. Bu durumda g nin ∂G sınırındaki sürekliliği yardımıyla u çözümünün sürekliliği $\overline{G}$ a genişletilebilir. Eğer u çözümünün $\overline{G}$' daki sürekliliği dışında başka özellikleri de sağlamasını istersek o zaman g sınır fonksiyonu üzerine süreklilikten daha kuvvetli başka hipotezler koymak zorundayız. Şimdi Hölder koşulu kavramını verelim.

Tanım 5.2.1: M herhangi bir küme (M, kompleks düzlemin bir alt bölgesi de olabilir) ve f, M de tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Eğer her $z \in M$ için

$$|f(z)-f(z_0)| \leq H|z\text{-}z_0|^{\lambda} \tag{5.2.1}$$

olacak şekilde $0<\lambda \leq 1$ sayısı ve H sabiti varsa f' ye $z_0 \in M$ noktasında λ üsteline göre Hölder süreklidir denir. Eğer (5.2.1) her $z_0 \in M$ noktasında aynı H sabiti için geçerliyse o zaman f e; λ üsteline göre M nin tamamında Hölder süreklidir denir.

Bu tanıma göre f , M de Hölder sürekli ise bu durumda her $z_1, z_2 \in M$ noktaları için

$$|f(z_2)-f(z_1)| \leq H|z_2 - z_1|^{\lambda} \tag{5.2.2}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Şimdi ∂G sınırında önceden verilen reel değerli bir g fonksiyonunun $z_0 \in \partial G$ sınır noktasında (5.2.1) Hölder koşulunu sağladığını varsayalım. O zaman her $z \in \partial G$ için g fonksiyonu

$$-H|z\text{-}z_0|^{\lambda} \leq g(z)-g(z_0) \leq H|z\text{-}z_0|^{\lambda} \tag{5.2.3}$$

şeklinde sınırlandırılabilir. Şimdi $H|z\text{-}z_0|^{\lambda}$ sınırını yine bir harmonik fonksiyon yardımıyla sınırlandırmaya çalışalım.

$$Log(z\text{-}z_0) = \ln|z\text{-}z_0| + i\ \arg(z\text{-}z_0)$$

ile tanımlanan kompleks logaritmik fonksiyona dikkat edelim. $z_0 \in \partial G$ ve $\overline{G}$ da $z \neq z_0$ ise o zaman $\arg(z\text{-}z_0)$ tek anlamlı ve sürekli olarak tanımlanabilir. Hatta c' yi uygun bir sabit seçmek suretiyle

$$c < \arg(z\text{-}z_0) < c+\pi \qquad 5.2.4)$$

için de verilen fonksiyon tek anlamlı olur. Bu durumda $Log(z\text{-}z_0)$ G de tek anlamlı holomorf bir fonksiyon olur. Böylece

$$\begin{aligned}\lambda Log(z\text{-}z_0) &= \lambda \ln(z\text{-}z_0) + i\lambda \arg(z\text{-}z_0)\\ &= \ln|z\text{-}z_0|^{\lambda} + i\lambda \arg(z\text{-}z_0)\end{aligned}$$

ve

$$\lambda\left[Log(z\text{-}z_0) - i\left(c+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \ln|z\text{-}z_0|^{\lambda} + i\lambda\left[\arg(z\text{-}z_0) - c\text{-}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$e^{\lambda\left[\log(z\text{-}z_0) - i\left(c+\frac{\pi}{2}\right)\right]} = |z\text{-}z_0|^{\lambda} e^{i\lambda\left[\arg(z\text{-}z_0) - c\text{-}\frac{\pi}{2}\right]}$$

şeklinde yazdığımız fonksiyonların tümü G de holomorftur. Bir holomorf fonksiyonun reel kısmı Laplace Denklemini sağlayacağından son denklemin reel kısmı olan

$$|z\text{-}z_0|^{\lambda} \cos\left[\lambda\left(\arg(z\text{-}z_0) - c\text{-}\frac{\pi}{2}\right)\right] \qquad (5.2.5)$$

fonksiyonu Laplace Denkleminin bir çözümüdür. (5.2.5) ile tanımlanan fonksiyonu $\widetilde{U}$ ile gösterirsek o zaman

$$|z\text{-}z_0|^{\lambda} = \frac{\widetilde{U}}{\cos\left[\lambda\left(\arg(z\text{-}z_0) - c\text{-}\frac{\pi}{2}\right)\right]} \qquad (5.2.6)$$

olur. (5.2.4) ten

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(z\text{-}z_0) - c\text{-}\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

olup (5.2.5)' e göre $\widetilde{U}(z) > 0$ olur. Bu, her $z \in \partial G$ ve $z \neq z_0$ için geçerlidir. (5.2.6) dan $0 < \lambda < 1$ için

$$|z\text{-}z_0|^{\lambda} < \frac{\widetilde{U}(z)}{\cos\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)} \tag{5.2.7}$$

elde edilir. (5.2.5) ten $\widetilde{U}$ nın $z \to z_0$ için sıfır limitine sahip olduğunu söyleyebiliriz. Yani $\lim\limits_{z \to z_0} \widetilde{U}(z) = 0$ dır. Ayrıca $\widetilde{U}$, $\overline{G}$ ın tamamında sürekli ve G de Laplace Denkleminin çözümüdür.

Eğer U, ∂G sınırında U=g yardımıyla belirlenmiş ve G de $\Delta U = 0$ Laplace Denkleminin bir çözümü ise o zaman $z \in \partial G$ için (5.2.3)'te yani

$$-H|z\text{-}z_0|^{\lambda} \leq g(z) - g(z_0) \leq H|z\text{-}z_0|^{\lambda}$$

eşitsizliğinde $g(z) - g(z_0)$ yerine $U(z) - g(z_0)$ yazılabilir.

$$|z\text{-}z_0|^{\lambda} < \frac{\widetilde{U}(z)}{\cos\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)}$$

eşitsizliği,

$$-H|z\text{-}z_0|^{\lambda} \leq g(z) - g(z_0) \leq H|z\text{-}z_0|^{\lambda}$$

eşitsizliğinde kullanılırsa

$$-\frac{H}{Cos\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)}\widetilde{U} < U(z) - g(z_0) < \frac{H}{Cos\left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)}\widetilde{U} \tag{5.2.8}$$

elde edilir. U, Laplace Denkleminin çözümü olduğundan $U(z) - g(z_0)$ ile tanımlanan fonksiyon da Laplace Denkleminin çözümüdür.

Lemma 5.2.1: U_1 ve U_2 Laplace Denkleminin G de sürekli iki çözümü olsun. ∂G sınırında $U_1 \leq U_2$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $\overline{G}$ bölgesinin tamamında $U_1 \leq U_2$ dir.

İspat: Kabulümüz nedeniyle ∂G' de $U_2 - U_1 \geq 0$ dir. Laplace Denkleminin iki çözümünün farkı da Laplace Denklemini sağlayacağından $\widetilde{U} = U_2 - U_1$ için $\Delta\widetilde{U} = 0$ gerçeklenir. Bu durumda $U_2 - U_1$ için maksimum minimum prensibi geçerlidir. $U_2 - U_1$ minimum değerini ∂G'de almak zorundadır. G nin sınırında $U_2 - U_1 \geq 0$ olduğundan G nin tamamında $U_2 - U_1 \geq 0$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 5.2.1 den (5.2.8) eşitsizliği sadece ∂G sınırında değil G bölgesinin tamamında geçerlidir. Diğer taraftan

$$\widetilde{U}(z) = |z - z_0|^{\lambda} \cos\left[\lambda\left(\arg(z\text{-}z_0) - c\text{-}\frac{\pi}{2}\right)\right] \geq 0$$

fonksiyonu için de G nin tamamında

$$\widetilde{U}(z) \leq |z - z_0|^{\lambda}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece (5.2.8) den

$$|U(z) - g(z_0)| \leq \frac{H}{Cos\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)}|z\text{-}z_0|^{\lambda} \tag{5.2.9}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş oldu:

Teorem 5.2.1: g fonksiyonu ∂G sınırında $\Delta U = 0$ Laplace Denklemini sağlasın. Ayrıca g, $z_0 \in \partial G$ sınır noktasında H Hölder sabiti ve λ $(0 < \lambda < 1)$ Hölder üsteline göre Hölder sürekli olsun. Bu takdirde U çözümü her $z \in \overline{G}$ için

$$|U(z)-g(z_0)|\leq \frac{H}{\cos\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)}|z\text{-}z_0|^{\lambda}$$

Hölder koşulunu gerçekler. Buradaki Hölder sabiti $H_1=\dfrac{H}{\cos\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)}$ dir.

SONUÇ 5.2.1: Eğer g sınırdeğer fonksiyonu her $z_0\in\partial G$ için Hölder sürekli ise bu takdirde $\Delta u=0$ denkleminin çözümleri, her $z_0\in\partial G$ sınır noktası için (5.2.9) eşitsizliğini sağlar.

5.3. Dirichlet Sınır Değer Problemi Çözümünün Sınırdaki Davranışı

Teorem 5.3.1: $G=\{z|\ \ |z|<R\}$ olmak üzere ∂G sınırında $|g|\leq M$ eşitsizliği gerçekleniyorsa $\Delta u=0$ denkleminin ∂G sınırında u=g ile belirlenen u çözümü için

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right|\leq \frac{4M}{\pi(R-|z|)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $G=\{z|\ \ |z|<R\}$ olsun. u nun

$$\left.\begin{array}{ll} G \text{ de} & \Delta u=0 \\ \partial G \text{ de} & u=g\ (g \text{ sürekli}) \end{array}\right\}$$

sınır değer probleminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. $\Delta u=0$ denklemi x e göre türetilirse

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0$$

olur. Yani $\frac{\partial u}{\partial x}$ ifadesi yine harmonik bir fonksiyondur. z, G nin herhangi bir noktası olsun. δ sayısı $\delta < R-|z|$ eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilirse o zaman z merkezli δ- yarıçaplı disk tamamen G nin içinde kalır.Lemma 4.2.3 $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $|\zeta - z| \leq \delta$ için kullanılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{|\zeta - z| \leq \delta} \frac{\partial u}{\partial x}(\zeta) d\xi d\eta$$

olur. Ostrogradski-Gauss Teoreminin kullanılmasıyla bu integral

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{|\zeta - z| = \delta} u(\zeta) d\eta \tag{5.3.1}$$

şeklinde sınır integraline dönüşür. Sınır üzerine $|u(\zeta)| \leq M$ olduğundan (5.3.1) den

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right| \leq \frac{4M}{\pi\delta} \tag{5.3.2}$$

elde edilir. Her $\delta < R-|z|$ için (5.3.2) geçerli olduğundan $\delta \to R-|z|$ limiti hesaplanabilir. O halde

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right| \leq \frac{4M}{\pi(R-|z|)}$$

olup bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 5.3.2: g fonksiyonu ∂G sınırında Hölder koşulunu sağlasın. Hölder sabiti H, Hölder üsteli α olsun. Bu takdirde $\Delta u = 0$ Laplace denkleminin ∂G de g ile çakışan her çözümü için

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right| \leq \frac{4.2^{\alpha}}{\pi \cos(\alpha \frac{\pi}{2})} \frac{1}{(R-|z|)^{1-\alpha}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $z_0 \in \partial G$ noktası, $z \neq 0$ olmak üzere $\zeta = 0$ dan başlayarak z den geçen bir ışın üzerinde bulunsun. Bu takdirde $|\zeta - z| = \delta$ çember eğrisi tamamen z_0 merkezli ve $R - |z| + \delta$ yarı çaplı kapalı dairenin içinde bulunur. $|\zeta - z| = \delta$ eşitliğini sağlayan bütün δ lar için

$$|u(\zeta) - g(z_0)| \leq \frac{H}{\cos(\alpha \frac{\pi}{2})} |\zeta - z_0|^{\alpha}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Diğer taraftan $|\zeta - z| = \delta$ eşitliğini sağlayan δ lar için $|\zeta - z_0| \leq R - |z| + \delta$ olduğundan $u(\zeta) - g(z_0)$ farkının mutlak değeri

$$M = \frac{H}{\cos(\alpha \frac{\pi}{2})} (R - |z| + \delta)^{\alpha}$$

ile sınırlıdır. Yani $|u(\zeta) - g(z_0)| \leq M$ dir. Bir önceki teorem 5.3.1 i $u(\zeta) - g(z_0)$ için kullanalım. $u(\zeta) - g(z_0)$ ile $u(\zeta)$ aynı kısmi türevlere sahip olduğundan

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(z) \leq \right| \frac{4H}{\pi \cos(\alpha \frac{\pi}{2})} \frac{(R - |z| + \delta)^{\alpha}}{\delta}$$

yazılabilir. Bu sınırlandırma her $\delta < R - |z|$ için geçerli olduğundan $\delta \to R - |z|$ için limit hesaplanırsa

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(z) \leq \right| \frac{4.2^{\alpha} H}{\pi \cos(\alpha \frac{\pi}{2})} \frac{1}{(R - |z|)^{1-\alpha}}$$

elde edilir.

Not: Teorem 5.3.1 ve Teorem 5.3.2 nin ifadelerini değiştirmeksizin benzer sınırlandırmalar u nun y ye göre kısmi türevleri için de verilebilir.

5.4. Bir Bölgenin Kapanışında Tanımlanan Dirichlet Probleminin Çözümlerinin Hölder Sürekliliği.

Teorem 5.4.1: u fonksiyonu G de birinci basamaktan kısmi türevlere sahip olsun ve

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial y}(z)\right| \leq \frac{c}{(R-|z|)^{1-\alpha}} \tag{5.4.1}$$

eşitsizliği gerçeklensin. Bu takdirde u, $\overline{G}$ da α üsteline göre Hölder süreklidir. Burada Hölder sabiti

$$c\left(\frac{2}{\alpha}(1+2^{\alpha})+\pi\right)$$

dir.

İspat: $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ G nin herhangi iki noktası olsun. $r_1 \leq r_2$, $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_1 + \pi$ olduğunu kabul edelim. Diğer taraftan $|z_1 - z_2| = d$ olmak üzere z_1 ve z_2 den başka $z_3 = (r_1 - d)e^{i\theta_1}$ $z_4 = (r_1 - d)e^{i\theta_2}$ noktalarını da gözönüne alalım. Eğer $r_1 < d$ ise o zaman $z_3 = z_4 = 0$ olsun. Bu durumda $|z_1 - z_3| \leq d$, $|z_2 - z_4| \leq 2d$ dir. Çünkü $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ile $r_1 e^{i\theta_2}$ arasındaki uzaklık için $r_2 - r_1 \leq d$ eşitsizliği gerçeklenir.

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

kutupsal koordinatları kullanırsak

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

olur. (5.4.1) den

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}(z)\right|\leq\frac{2c}{(R-|z|)^{1-\alpha}}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \theta}(z)\right|\leq\frac{2c|z|}{(R-|z|)^{1-\alpha}} \tag{5.4.2}$$

eşitsizliği yazılabilir.Böylece $|z|=r$ olmasından dolayı

$$|u(z_1)-u(z_3)|\leq 2c\int_{\max(r_1-d,0)}^{r_1}(R-r)^{\alpha-1}dr$$

$$|u(z_2)-u(z_4)|\leq 2c\int_{\max(r_1-d,0)}^{r_2}(R-r)^{\alpha-1}dr$$

eşitsizliklerini de yazılabiliriz.Burada ortaya çıkan integrallerin integrantları r nin monoton artan fonksiyonlarıdır. İlk integraldeki integrasyon aralığının uzunluğu en fazla d, ikinci integralin integral aralığının uzunluğu en fazla $2d$ kadar olduğundan integrasyon sınırı olarak birinci integral için $\max(R-d,0)$ ve R ikinci integral için $\max(R-2d,0)$ ve R olarak seçersek integral değerleri daha da büyütülmüş olacaktır. Böylece

$|u(z_1)-u(z_3)|$ ve $|u(z_2)-u(z_4)|$ ifadeleri için

$$\frac{2c}{\alpha}\left[-(R-r)^{\alpha}\right]\Big|_{\max(R-d,0)}^{R} \quad \text{veya} \quad \frac{2c}{\alpha}\left[-(R-r)^{\alpha}\right]\Big|_{\max(R-2d,0)}^{R} \tag{5.4.3}$$

sınırları elde edilir. $R\geq d$ ve $R<d$ olması durumuna göre birinci sınır değeri $\frac{2c}{\alpha}d^{\alpha}$ veya $\frac{2c}{\alpha}R^{\alpha}$ olur. $R<d$ olması halinde $R^{\alpha}<d^{\alpha}$ olacağından (5.4.3) deki ilk sınır her iki halde de $\frac{2c}{\alpha}d^{\alpha}$ ile sınırlı, ikincisi ise $R\geq 2d$ ya da $R<2d$ durumuna göre ya $\frac{2c}{\alpha}2^{\alpha}d^{\alpha}$ ya da $\frac{2c}{\alpha}2^{\alpha}R^{\alpha}$

ile sınırlıdır. İkinci değer birinci değer yardımıyla sınırlandırılabilir. Böylece

$$|u(z_1)-u(z_3)| \leq \frac{2c}{\alpha} d^{\alpha} \quad , \quad |u(z_2)-u(z_4)| \leq \frac{2.2^{\alpha} c}{\alpha} d^{\alpha} \tag{5.4.4}$$

dır. (5.4.4) eşitsizliklerinin de gözönüne alınmasıyla

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}(z)\right| \leq \frac{2c|z|}{(R-|z|)^{1-\alpha}}$$

eşitsizliğinin her iki tarafınında z=0 merkezli $r_1 - d$ yarıçaplı çember üzerinden z_3 den z_4 e integrali hesaplanırsa

$$|u(z_4)-u(z_3)| \leq \frac{2c(r_1-d)}{(R-r_1+d)^{1-\alpha}}(\theta_2-\theta_1) \qquad \text{........(5.4.5)}$$

bulunur. $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}$ yardımıyla tanımlanan fonksiyon monoton artan olduğundan $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ için $\dfrac{\alpha}{\sin\alpha} \leq \dfrac{\pi}{2}$ yazılabilir.

(5.4.5) ve $\dfrac{|z_4 - z_3|}{\sin(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})} = 2(r_1 - d)$ nin gözönüne alınmasıyla

$$4(r_1-d)\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1) \leq 4(r_1-d)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2} \leq \pi d$$

olur.

Bu sınırlandırma (5.4.5) de kullanılır ve $R - r_1 + d > d$ olduğu da gözönüne alınırsa

$$|u(z_4)-u(z_3)| \leq \frac{\pi c d}{d^{1-\alpha}} = \pi c d^{\alpha} \tag{5.4.6}$$

olur. Bunun d=0 olması halinde de doğru olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$|u(z_2)-u(z_1)| \leq |u(z_2)-u(z_4)| + |u(z_4)-u(z_3)| + |u(z_3)-u(z_1)|$$

yazılabilir. Böylece (5.4.4) ve (5.4.6) dan

$$|u(z_2)-u(z_1)| \leq c\left(\frac{2}{\alpha}(1+2^{\alpha})+\pi\right)|z_2-z_1|^{\alpha} \tag{5.4.7}$$

elde edilir. Buradan şunu söyleyebiliriz: u nun sadece G de tanımlı olması halinde u, ∂G sınır noktalarında limite sahip olmak zorundadır. $\{z_n\}_{n\in N}$ elemanları G de olan ∂G nin bir noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda yeterince büyük m, n indisleri için $|z_n - z_m|$ ve bunun sonucu olarak $|u(z_n) - u(z_m)|$ farkı (5.4.7) den dolayı yeterince küçük kalır. O zaman $u(z_n)$ bir cauchy dizisi oluşturur. Böylece u, $\overline{G}$ ın tamamına genişletilmiş oldu.

$z_1, z_2 \in \overline{G}$ herhangi iki nokta olsun. Bu noktaların her ikisi ya da en az biri ∂G sınırında bulunuyorsa bu durumda G nin noktalarından oluşan ve sınır noktasına yakınsayan bir Cauchy dizisi bulunabilir. (5.4.7) eşitsizliği dizinin elemanları için yazılır ve nokt aların sınıra doğru yakalaştırıldığı kabul edilirse o zaman (5.4.7) nin $\overline{G}$ ın bütün noktaları için geçerli olduğu görülür. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5.5 Bir Bölgenin Kapanışında Hölder Sürekli Holomorf Fonksiyonlar İçin Dirichlet Problemi.

u fonksiyonu

$$\Delta u = 0, \quad G \text{ de}$$
$$u = g \quad , \quad \partial G \text{ de}$$

Dirichlet probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda g, ∂G de Hölder sürekli ise u nun $\overline{G}$

da Hölder sürekli olduğunu gördük.

v fonksiyonu

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5.5.1}$$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$ holomorf bir fonksiyondur ve $\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} = 0$ gerçeklenir. Teorem 5.3.1 de u nun birinci basamaktan kısmi türevleri için verilen sınırlandırmalar v nin kısmi türevleri için de verilebilir. Bu sınırlandırmadan dolayı için aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 5.5.1: u fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \quad G \text{ de} \\ u &= g \quad , \quad \partial G \text{ de} \end{aligned}$$

Dirichlet probleminin bir çözümü ve g, ∂G de Hölder sürekli, Hölder sabiti de H olsun. Eğer v, (5.5.1) eşitliklerini sağlayan bir fonksiyon ise bu takdirde v de $\overline{G}$ ın tamamında Hölder süreklidir ve Hölder sabiti de

$$\frac{4.2^{\alpha}}{\cos(\alpha \frac{\pi}{2})}\left[\frac{2}{\alpha \pi}(1+2^{\alpha})+1\right]H$$

dir.

İspat: İspat Bölüm 4 deki gibi yapılabilir.

$v = \operatorname{Im}\Phi$ de Laplace Denkleminin çözümüdür. Burada v aynı zamanda $u = \operatorname{Re}\Phi$ nin konjuge harmonik fonksiyonunu göstermektedir.O halde v ler bir sabitle toplam kadar farkeden fonksiyonlarla tek anlamlı olarak tespit edilebilir. Bu toplamsal sabitleri $z_0 \in \partial G$ olmak üzere $v(z_0) = c$ olacak şekilde belirleyelim.Bu durumda G de tanımlanan $\Phi(z)$ holomorf fonksiyonu

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\Phi &= g \quad , \quad \partial G \text{ de} \\ \operatorname{Im}\Phi(z_0) &= c \quad , \quad z_0 \in \partial G \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

sınır koşullarını gerçekler.

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)| \le |u(z_2)-u(z_1)| + |v(z_2)-v(z_1)|$$

yazılabileceğinden böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.5.2: Eğer g, ∂G de Hölder sabiti H olan Hölder sürekli önceden verilen bir fonksiyon ise bu durumda G de (5.5.2) sınır şartlarını sağlayan bir Φ holomorf fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon da $\overline{G}$ da Hölder süreklidir ve ilgili Hölder sabiti

$$\frac{8.2^{\alpha}}{\cos(\alpha\frac{\pi}{2})}\left[\frac{2}{\alpha\pi}(1+2^{\alpha})+1\right]H$$

dır.

6. BÖLÜM

T_G, Π_G OPERATÖRLERİ VE ÖZELLİKLERİ

6.1 Hölder Sürekli Fonksiyonların Banach Uzayı

G, z – düzleminde sınırlı bir bölge, f ise $\overline{G}$' da tanımlı $\overline{G}$' ın tamamında Hölder sürekli kompleks değerli bir fonksiyon ve. H, f in $\overline{G}$ bölgesi için Hölder sabiti olsun. Bu takdirde $z_1 \neq z_2$ noktaları için

$$\frac{|f(z_2)-f(z_1)|}{|z_2-z_1|^{\lambda}} \leq H \tag{6.1.1}$$

yazılabilir. (6.1.1) eşitsizliğinin sol tarafi $z_1 \neq z_2$ noktaları için daima sınırlı kalmaktadır. O halde bu sol taraf sonlu bir supremuma sahiptir. $\overline{G}$ ın tamamında tanımlı ve $\overline{G}$ da (6.1.1) eşitsizliğini sağlayan bütün fonksiyonları $C_{\lambda}(\overline{G})$ ile gösterelim. Buradaki H sabitleri f in özel seçimine de bağlıdır.Ancak z_1 ve z_2 noktalarının seçiminden bağımsızdır.

Lemma 6.1.1: $f \in C_{\lambda}(\overline{G})$ olmak üzere

$$\|f\|_{\lambda} = \max\left[\sup_{G}|f(z)|\,,\ \sup_{z_1\neq z_2}\frac{|f(z_2)-f(z_1)|}{|z_2-z_1|^{\lambda}}\right] \tag{6.1.2}$$

ifadesi $C_{\lambda}(\overline{G})$ sınıfında bir normdur.

İspat: (6.1.2) nin normun bütün özelliklerini sağladığını gösterelim.

i) Eğer f özdeş olarak sıfır ise o zaman tanım gereğince $\|f\|_\lambda = 0$ dır. Tersine $\|f\|_\lambda = 0$ ise $\underset{G}{Sup}|f(z)| = 0$ yani f özdeş olarak sıfırdır.

ii) α bir kompleks sabit ise (6.1.2) den

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_\lambda &= \max\left[\underset{G}{Sup}|(\alpha f)(z)|\,,\ \underset{z_1\neq z_2}{Sup}\frac{|(\alpha f)(z_2)-(\alpha f)(z_1)|}{|z_2-z_1|^\lambda}\right] \\ &= |\alpha|\ \max\left[\underset{G}{Sup}|f(z)|\,,\ \underset{z_1\neq z_2}{Sup}\frac{|f(z_2)-f(z_1)|}{|z_2-z_1|^\lambda}\right] \\ &= |\alpha|\|f\|_\lambda\end{aligned}$$

olur.

iii) Şimdi $f_1, f_2 \in C_\lambda(\overline{G})$ ise $\|f_1+f_2\|_\lambda \le \|f_1\|_\lambda + \|f_2\|_\lambda$ olduğunu gösterelim. (6.1.2) nin tanımından $f \in C_\lambda(\overline{G})$ ise

$$|f(z)| \le \|f\|_\lambda \tag{6.1.3}$$

dir. Aynı zamanda

$$|f(z_2)-f(z_1)| \le \|f\|_\lambda |z_2-z_1|^\lambda \tag{6.1.4}$$

olduğu tanımdan görülebilir. f_1 ve f_2 $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfından herhangi iki eleman olsun. (6.1.3) den

$$|f_1+f_2| \le |f_1|+|f_2| \le \|f_1\|_\lambda + \|f_2\|_\lambda$$

yazılabilir. Böylece

$$\underset{G}{Sup}|f_1+f_2| \le \|f_1\|_\lambda + \|f_2\|_\lambda \tag{6.1.5}$$

olup (6.1.4) bağıntısının gözönüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}|(f_1+f_2)(z_2)-(f_1+f_2)(z_1)| &= |f_1(z_2)+f_2(z_2)-f_1(z_1)-f_2(z_1)| \\ &\le |f_1(z_2)-f_1(z_1)|+|f_2(z_2)-f_2(z_1)| \\ &\le \|f_1\|_\lambda |z_2-z_1|^\lambda + \|f_2\|_\lambda |z_2-z_1|^\lambda \\ &= (\|f_1\|_\lambda + \|f_2\|_\lambda)|z_2-z_1|^\lambda\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{|(f_1+f_2)(z_2)-(f_1+f_2)(z_1)|}{|z_2-z_1|^\lambda} \le \|f_1\|_\lambda + \|f_2\|_\lambda \tag{6.1.6}$$

olur. Bu eşitsizlik ise f_1+f_2 nin $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfına ait olduğunu gösterir. (6.1.5) ve (6.1.6) nın birlikte kullanılmasıyla

$$\|f_1+f_2\|_\lambda \le \|f_1\|_\lambda + \|f_2\|_\lambda$$

olur. O halde (6.1.2) $C_\lambda(\overline{G})$ da bir norm tanımlar.

Teorem 6.1.1:(6.1.2) normuna göre $C_\lambda(\overline{G})$ bir Banach uzayıdır.

İspat: $C_\lambda(\overline{G})$ ın tamlığını göstermek için $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfında bir $\{f_n\}_{n\in N}$ Cauchy dizisi seçelim. Tanım gereğince $n,k \ge n_0$ olduğunda

$$\|f_n - f_k\|_\lambda < \varepsilon \tag{6.1.7}$$

olur. (6.1.3) den $|f(z)| \le \|f\|_\lambda$ yazılabilir. O halde $n,k \ge n_0$ için

$$|f_n(z) - f_k(z)| < \varepsilon \tag{6.1.8}$$

elde edilir. Bu ise $\{f_n\}_{n\in N}$ dizisinin düzgün yakınsak olduğunu verir. O halde (6.1.8) de n sabit tutulup $k \to \infty$ için limit alınırsa $n \ge n_0$ için

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \tag{6.1.9}$$

olacak şekilde sürekli bir f fonksiyonu bulabiliriz. (6.1.4)' ten

$$\left|\left[f_n(z_2)-f_k(z_2)\right]-\left[f_n(z_1)-f_k(z_1)\right]\right| \leq \left\|f_n - f_k\right\|_\lambda \left|z_2 - z_1\right|^\lambda$$

yazılabilir. (6.1.7) den

$$\left\|f_n - f_k\right\|_\lambda < \varepsilon$$

olduğundan

$$\left|\left[f_n(z_2)-f_k(z_2)\right]-\left[f_n(z_1)-f_k(z_1)\right]\right| < \varepsilon\left|z_2 - z_1\right|^\lambda$$

olur. n sabit tutulup $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\left|\left[f_n(z_2)-f(z_2)\right]-\left[f_n(z_1)-f(z_1)\right]\right| < \varepsilon\left|z_2 - z_1\right|^\lambda$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\left|\left[f_n(z_2)-f(z_2)\right]-\left[f_n(z_1)-f(z_1)\right]\right|}{\left|z_2 - z_1\right|^\lambda} < \varepsilon \tag{6.1.10}$$

bulunur. Bu ise $f_n - f$ ve $f - f_n$ farklarının $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfına ait olduğunu gösterir. Böylece $f - f_n + f_n = f$ fonksiyonu da $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfına aittir. (6.1.9) ve (6.1.10) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa her $n \geq n_0$ için

$$\left\|f_n - f\right\|_\lambda < \varepsilon$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini görülür. Bu ise $\{f_n\}_{n\in N}$ dizisinin $C_\lambda(\overline{G})$ daki metriğe göre f e yakınsadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.2 T_G Operatörü ve Özellikleri.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = g$$

homogen olmayan Cauchy - Riemann denkleminin bir özel çözümü

$$w_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta \tag{6.2.1}$$

dır. (6.2.1) deki özel çözümü $T_G g$ ile gösterirsek

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_G g = g$$

özelliği sağlanır.

Teorem 6.2.1: $0<\lambda<1$ olması halinde T_G, $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfından yine kendi içine dönüşen sınırlı bir operatördür.

İspat: $z \in \overline{G}$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$T_G f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta - z_1 - \zeta + z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} = \frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)}$$

olması nedeniyle

$$T_G f(z_2) - T_G f(z_1) = -\frac{z_2 - z_1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\xi d\eta$$

yazılabilir. Böylece (6.1.3) eşitsizliğinin de gözönüne alınmasıyla

$$|T_G f(z)| \leq \frac{\|f\|_\lambda}{\pi} \iint_G \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \tag{6.2.2}$$

ve

$$|T_G f(z_2) - T_G f(z_1)| \leq \frac{\|f\|_\lambda}{\pi} |z_2 - z_1| \iint_G \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1||\zeta - z_2|} \tag{6.2.3}$$

elde edilir. Bölüm 3' deki Teorem 3.4.1, $\alpha = 1$ için kullanılırsa ve

$$K_1 = \frac{1}{\pi} 2\pi \left(\frac{mG}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

alınırsa her $z \in C$, özellikle her $z \in \overline{G}$ için

$$|T_G f(z)| \leq K_1 \|f\|_\lambda$$

olur. Benzer şekilde $|z_2 - z_1| \leq 1$ kabul edilirse Bölüm 3' deki Teorem 3.4.2 $\alpha = \beta = 1$ için yazılırsa K_2, G nin alanına bağlı bir sabit olmak üzere

$$\iint_G \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_1||\zeta - z_2|} \leq K_2 - 4\pi \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2}$$

yazılabilir. Böylece (6.2.3) den

$$|T_G f(z_2) - T_G f(z_1)| \leq \frac{\|f\|_\lambda}{\pi} |z_2 - z_1| \left(K_2 - 4\pi \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[K_2 |z_2 - z_1|^{1-\lambda} - 4\pi |z_2 - z_1|^{1-\lambda} \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2} \right] |z_2 - z_1|^\lambda \|f\|_\lambda \qquad (6.2.5)$$

olur. $0 < \lambda < 1$ olması nedeniyle $1-\lambda > 0$ dır. O halde $\rho^{1-\lambda} \ln \frac{\rho}{2}$ ifadesi $\rho \to 0$ için sıfır limitine sahiptir. Böylece $\rho = |z_1 - z_2|$ olmak üzere herhangi z_1, z_2 için $0 < |z_2 - z_1| \leq 1$ olduğu sürece (6.2.5) ifadesindeki

$$\frac{1}{\pi} \left[K_2 |z_2 - z_1|^{1-\lambda} - 4\pi |z_2 - z_1|^{1-\lambda} \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2} \right]$$

terimi sınırlıdır. Bu sınır K_3 ile gösterilirse o zaman (6.2.5) ifadesi

$$|T_G f(z_2) - T_G f(z_1)| \leq K_3 \|f\|_\lambda |z_2 - z_1|^\lambda \qquad (6.2.6)$$

haline dönüşür. K_2 yalnızca G ye bağlı olduğundan K_3 de G ye bağlıdır. (6.2.6) eşitsizliği $|z_2 - z_1| \leq 1$ varsayımı altında geçerlidir. Eğer $1 < |z_2 - z_1|$ ise $1 < |z_2 - z_1|^\lambda$ olacağından (6.2.4) ün yani

$$|T_G f(z)| \leq K_1 \|f\|_\lambda$$

eşitsizliğinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}|T_G f(z_2)-T_G f(z_1)| &\le |T_G f(z_2)|+|T_G f(z_1)| \\ &\le 2K_1\|f\|_\lambda \le 2K_1\|f\|_\lambda |z_2-z_1|^\lambda\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

yazılabilir. Böylece $|z_2-z_1|>1$ olması halinde (6.2.7) eşitsizliği geçerlidir. O halde herhangi $z_1,z_2\in\overline{G}$ için

$$|T_G f(z_2)-T_G f(z_1)|\le \max\ (2K_1,K_3)\|f\|_\lambda |z_2-z_1|^\lambda \tag{6.2.8}$$

olur. Buradan

$$\frac{|T_G f(z_2)-T_G f(z_1)|}{|z_2-z_1|^\lambda}\le \max(2K_1,K_3)\|f\|_\lambda$$

bulunur. Bu ise $T_G f$' in tekrar $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfına ait olduğunu gösterir. $f\in C_\lambda(\overline{G})$ olmak üzere

$$\|f\|_\lambda=\max\left[\underset{G}{Sup}|f(z)|\ ,\ \underset{z_1\neq z_2}{Sup}\frac{|f(z_2)-f(z_1)|}{|z_2-z_1|^\lambda}\right]$$

Hölder normuna dikkat edilirse (6.2.4) ve(6.2.8) den

$$\|T_G f\|_\lambda\le \max(2K_1,K_3)\|f\|_\lambda \tag{6.2.9}$$

olduğu görülür. Bu ise $C_\lambda(\overline{G})$ içine dönüşen T_G operatörünün sınırlı olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6.3 Π_G Operatörü ve Özellikleri.

G, z - düzleminin sınırlı bir bölgesi ve *G* nin sınırı yeterince düzgün olsun. $z\in G$ herhangi bir nokta olmak üzere *z* merkezli δ yarıçaplı diskin kapanışını *G* den çıkaralım. δ yı bu disk tamamen *G*' nin içinde kalacak şekilde belirleyelim ve disk *G* den çıkarıldıktan sonra geri kalan bölgeye G_δ dersek bu durumda G_δ nın sınırı, G nin ∂G sınırı ve z merkezli δ yarıçaplı komşuluğun $\partial U_\delta(z)$ sınırından oluşur. Daha önce Lemma (3.5.1) ile Ostrogradski - Gauss teoremini $\frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z}, \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^2}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar için kullanırsak

$$\left.\begin{aligned} \iint_{G_\delta} \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta &= \frac{1}{2i} \int_{\partial G} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i} \int_{\partial U_\delta(z)} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta \\ \iint_{G_\delta} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta &= \frac{1}{2i} \int_{\partial G} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \frac{1}{2i} \int_{\partial U_\delta(z)} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^2} d\zeta \end{aligned}\right] \tag{6.3.1}$$

olur. Çünkü $\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\left[\frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^2}\right] = \frac{1}{(\zeta - z)^2}$ dir. (6.3.1) deki ilk eşitliğin sağ tarafındaki ilk integrali

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\overline{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta \tag{6.3.2}$$

şeklinde yazalım. Bu durumda $\psi(z)$, G de $\overline{z}$ değişkeninden bağımsız olduğundan holomorf bir fonksiyon olur ve

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \psi'(z)$$

yazılabilir. Böylece (6.3.1)' deki ikinci denklemin sağ tarafındaki ilk ifade için bir gösterilim elde edilmiş oldu. (6.3.1) in ikinci formulünün ikinci ifadesi için de şu lemmayı verelim:

Lemma 6.3.1: $k \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere

$$\int_{\partial U_\delta(z)} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i \overline{z}, & k = 0 \\ 0 \quad , & k \geq 1 \end{cases}$$

dir.

İspat: $\partial U_\delta(z)$ eğrisini pozitif yönde yönlendirelim ve

$$\zeta - z = \delta\, e^{i\theta},\ \ 0 \le \theta < 2\pi$$

değişken değiştirmesi yapalım.

$$\overline{\zeta} = \overline{z} + \delta e^{-i\theta}\ ,\ \ d\zeta = i\delta^{i\theta} d\theta$$

olması nedeniyle

$$\int_{\partial U_\delta(z)} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = i \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\overline{z} + \delta e^{-i\theta}}{\delta^{k+1} e^{i(k+1)\theta}} \delta e^{i\theta} d\theta$$

$$= i \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\frac{\overline{z}}{\delta^{k}} e^{-ik\theta} + \frac{1}{\delta^{k-1}} e^{-i(k+1)\theta} \right] d\theta$$

yazılabilir. Bu durumda sıfırdan farklı bütün k pozitif tamsayıları için

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta = -\frac{1}{ik} e^{-ik\theta} \Big|_{0}^{2\pi} = 0$$

olur. $k = 0$ için ise

$$\int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

olur. O halde

$$\int_{\partial U_\delta(z)} \frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \begin{cases} 2\pi i \overline{z} & ,\ k = 0 \\ 0 & ,\ k \ge 1 \end{cases}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Bu lemmanın kullanılması ve (6.3.2) nin de gözönüne alınmasıyla

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \iint_{G_\delta} \frac{1}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\mu &= \psi(z) + \overline{z} \\ -\frac{1}{\pi} \iint_{G_\delta} \frac{\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\mu}{(\zeta - \mathrm{z})^2} &= \psi'(z) \end{aligned}\right] \qquad (6.3.3)$$

bulunur. (6.3.3)' te $\delta \to 0$ için limit alınırsa ikinci taraflar δ' dan bağımsız olduğundan

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{1}{\zeta - z}d\xi d\eta &= \psi(z) + \bar{z} \\ -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2} &= \psi'(z) \end{aligned}\right] \tag{6.3.4}$$

olur.

Lemma 6.3.2: $0 < \lambda \le 1$ ve $f \in C_\lambda(\overline{G})$ olsun. Bu takdirde her $z \in G$ için Cauchy esas değeri olarak $\Pi_G f$ mevcuttur.

İspat: $f \in C_\lambda(\overline{G})$ ise o zaman

$$\frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|^2} \le \frac{\|f\|_\lambda |\zeta - z|^\lambda}{|\zeta - z|^2} = \frac{\|f\|_\lambda}{|\zeta - z|^{2-\lambda}} \tag{6.3.5}$$

yazılabilir. Teorem 3.4.1' den kompleks düzlemdeki her z için

$$-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

integrali klasik anlamda mevcuttur. Diğer taraftan

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2} + f(z)\frac{1}{(\zeta - z)^2} \tag{6.3.6}$$

dir. (6.3.6)' da sağdaki ilk ifadenin bölge üzerinden integrali mevcut ve her $z \in G$ için ikinci ifadenin de Cauchy esas değeri olarak bölge üzerinden integrali mevcuttur. (6.3.3)' deki ikinci integral olan

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{G_\delta} \frac{1}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta = \psi'(z)$$

ifadesinin sağ tarafı δ' dan bağımsızdır. O halde her $z \in G$ ve $U_\delta(z) \subset G$ olmak üzere her δ için

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{U_\delta}\frac{1}{(\zeta - z)^2}d\xi d\eta = 0$$

dır. Böylece (6.3.6) dan şunu söyleyebiliriz: Tamamen G de bulunan $U_\delta(z)$ komşuluğu verilsin. Bu takdirde δ yeterince küçük seçildiğinde her $z \in \mathrm{G}$ için

$$\frac{1}{\pi}\left|\iint_{U_\delta}\frac{f(\zeta)}{(\zeta\text{-}z)^2}d\xi d\eta\right| < \varepsilon$$

olacak şekilde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı mevcuttur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 6.3.3: $G = \{\zeta| \ |\zeta| < R\}$ diskini gözönüne alalım. Bu takdirde (6.3.2) ile tanımlanan

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta\text{-}z}d\zeta$$

fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır.

İspat: $\psi(z)$' nin k. basamaktan türevi G:$|\zeta|$=1 olmak üzere

$$\psi^{(k)}(z) = -\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta$$

bulunur. O halde

$$\psi^{(k)}(0) = -\frac{k!}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{\zeta}}{\zeta^{k+1}}d\zeta$$

olur. Lemma 6.3.1 de $z = 0$, $\zeta = 1$ seçersek o zaman

$$\psi^{(k)}(0)=0\ ,\quad k=0,1,2,...$$

bulunur. ψ fonksiyonu G diskinin tamamında holomorf olduğundan $z_0=0$ noktası komşuluğunda bu fonksiyon kuvvet serisine açılabilir ve bu kuvvet serisi G de yakınsak olur.Böylece

$$\psi(z)=\psi(z_0)+\frac{\psi'(0)}{1!}z+\frac{\psi''(0)}{2!}z^2+...$$

olup $\psi(z)$ nin açılımındaki tüm türevler sıfır olduğundan $\psi(z)$ özdeş olarak sıfırdır.

Bu lemmanın bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 6.3.4: $G=\{\zeta \mid \ |\zeta|<R\}$ olsun. Bu takdirde her $z\in G$ için

$$-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{1}{\zeta-z}d\xi d\eta=\bar{z}$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{1}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta=0$$

dır.

İspat: (6.3.4) ve Lemma 6.3.3. den görülür.

Lemma 6.3.5: $G=\{\zeta \mid \ |\zeta|<R\}$ olsun. Bu takdirde

$$|\Pi_G f(z)|\leq 2\frac{R^\lambda}{\lambda}\|f\|_\lambda$$

dır. Yani Π_G operatörü sınırlıdır.

İspat: Lemma (6.3.4)' ün gözönüne alınmasıyla

$$\Pi_G f(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)-f(z)}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta \tag{6.3.7}$$

yazılabilir. Çünkü integrali dağıttığımız zaman ikinci integralin değeri sıfır olur. (6.3.5) bağıntısından

$$|\Pi_G f(z)| \leq \frac{\|f\|_\lambda}{\pi} \iint_G \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{2-\lambda}}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikteki integral, Teorem 3.4.1' den dolayı $\frac{2\pi R^\lambda}{\lambda}$ ile sınırlıdır. Dolayısıyla

$$|\Pi_G f(z)| \leq \frac{2R^\lambda}{\lambda} \|f\|_\lambda$$

eşitsizliği gerçeklenmiş olur. (6.3.7) gösterilimi, G de geçerli olduğundan her şeyden önce $\Pi_G f'$ de G de tanımlıdır. Şimdi $\Pi_G f'$ in ∂G sınırına genişletilebileceğini görelim:

z_1, z_2 noktaları $|z_1 - z_2| < 1$ olacak şekilde G' de iki nokta olsun. Bu takdirde

$$\Pi_G f(z_2) - \Pi_G f(z_1) = -\frac{1}{\pi} \iint_G f(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z_2)^2} - \frac{1}{(\zeta - z_1)^2} \right] d\xi d\eta \tag{6.3.8}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\zeta - z_2)^2} - \frac{1}{(\zeta - z_1)^2} &= \frac{(\zeta - z_1)^2 - (\zeta - z_2)^2}{(\zeta - z_1)^2 (\zeta - z_2)^2} \\ &= (z_2 - z_1) \frac{(\zeta - z_1) + (\zeta - z_2)}{(\zeta - z_1)^2 (\zeta - z_2)^2} \\ &= (z_2 - z_1) \left[\frac{1}{(\zeta - z_1)^2 (\zeta - z_2)} + \frac{1}{(\zeta - z_2)^2 (\zeta - z_1)} \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Bunun yardımıyla (6.3.8)' in integrantı $-\frac{1}{\pi}$ nin de integral içine alınmasıyla

$$
\left.\begin{array}{l}
-\dfrac{z_2-z_1}{\pi}\dfrac{f(\zeta)-f(z_1)}{(\zeta-z_1)^2(\zeta-z_2)}-\dfrac{z_2-z_1}{\pi}\dfrac{f(\zeta)-f(z_{12})}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)^2} \\
-\dfrac{f(z_1)}{\pi}\dfrac{z_2-z_1}{(\zeta-z_1)^2(\zeta-z_2)}-\dfrac{f(z_2)}{\pi}\dfrac{z_2-z_1}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)^2}
\end{array}\right] \tag{6.3.9}
$$

olur. $|\Pi_G f(z_2)-\Pi_G f(z_1)|$ için bir sınırlandırma yapmak için (6.3.9)' daki dört toplamın integralleri ayrı ayrı sınırlandırılmalıdır. (6.3.5) eşitsizliği yani

$$
\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|^2}\leq\frac{\|f\|_\lambda}{|\zeta-z|^{2-\lambda}}
$$

bağıntısı gözönüne alınırsa ilk terimin mutlak değerinin integrali için

$$
|z_2-z_1|\|f\|_\lambda\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{d\xi d\eta}{|\zeta\text{-}z_1|^{2-\lambda}|\zeta-z_2|} \tag{6.3.10}
$$

yazılabilir. $0<\lambda<1$ olduğundan $\alpha=2-\lambda$, $\beta=1$ için Teorem 3.4.2 kullanılırsa $2-\alpha-\beta=\lambda-1$ olması nedeniyle

$$
\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{d\xi d\eta}{|\zeta\text{-}z_1|^{2-\lambda}|\zeta-z_2|}\leq K_4|z_2-z_1|^{\lambda-1}+K_5
$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Burada K_4, K_5 G nin yarıçapı ve λ sabitine bağlı yeni sabitlerdir. Böylece $0<\lambda<1$, $|z_2-z_1|<1$ ve $|z_2-z_1|<|z_2-z_1|^\lambda$ olmaları nedeniyle (6.3.10) için bir üst sınır olarak

$$
\|f\|_\lambda(K_4+K_5)|z_2-z_1|^\lambda
$$

ifadesi alınabilir. Çünkü

$$
\begin{aligned}
|z_2-z_1|\|f\|_\lambda\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{d\xi d\eta}{|\zeta\text{-}z_1|^{2-\lambda}|\zeta-z_2|} &\leq |z_2-z_1|\|f\|_\lambda\left(K_4|z_2-z_1|^\lambda+K_5\right) \\
&=\|f\|_\lambda\left(K_4|z_2-z_1|^\lambda+K_5|z_2-z_1|\right) \\
&\leq\|f\|_\lambda\left[K_4|z_2-z_1|^\lambda+K_5|z_2-z_1|^\lambda\right]
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (6.3.9) daki ikinci terimin mutlak değeri üzerinden integral de aynı ifade ile sınırlandırılabilir. Çünkü ilk terimden farklı olarak sadece z_1 ile z_2 nin rolleri değişmiştir.

(6.3.9)' daki üçüncü ve dördüncü terimlerin mutlak değerlerinin integrallerini sınırlayabilmek için önce

$$\frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_1)^2(\zeta - z_2)} = -\frac{1}{(\zeta - z_1)^2} + \frac{1}{z_2 - z_1}\left(\frac{1}{(\zeta - z_2)} - \frac{1}{(\zeta - z_1)}\right)$$

yazılışını gözönüne alalım. Buradan

$$-\frac{z_2 - z_1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_1)^2(\zeta - z_2)} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{z_2 - z_1}$$

bulunur. Son eşitlikte z_1 ile z_2 nin yerleri değiştirilirse

$$\frac{z_2 - z_1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)^2} = \frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{z_2 - z_1}$$

elde edilir. (6.3.9)' daki üçüncü ve dördüncü terimlerin G üzerinden integralleri hesaplanırsa ikisi birden

$$[f(z_1) - f(z_2)]\frac{\overline{z_2} - \overline{z_1}}{z_2 - z_1}$$

olur. Böylece bunun mutlak değeri de

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \|f\|_\lambda |z_2 - z_1|^\lambda$$

ile sınırlandırılabilir. Bunun gözönüne alınmasıyla $|z_2 - z_1| < 1$ olmak üzere her $z_1, z_2 \in G$ için

$$|\Pi_G f(z_2) - \Pi_G f(z_1)| \leq [2(K_4 + K_5) + 1]\|f\|_\lambda |z_2 - z_1|^\lambda \qquad (6.3.11)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(6.3.11) eşitsizliği $\Pi_G f$ in her $z \in G$ noktasında sürekli olduğunu gösterir. O halde sadece G de tanımlanan Π_G fonksiyonu her $z_0 \in \partial G$ noktasında bir limite sahiptir.

7. BÖLÜM:

GENELLEŞTİRİLMİŞ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN BİR SINIR DEGER PROBLEMİ.

7.1. Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyon Kavramı

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+au+bv=0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+cu+dv=0 \end{aligned}\right\} \tag{7.1.1}$$

sisteminin çözümlerine *genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar* denir.

$$w=u+iv\,,A=\frac{1}{4}(a+d+ic-ib)\,,B=\frac{1}{4}(a-d+ic+ib)$$

olmak üzere (7.1.1) sistemi

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+A(z)w+B(z)\overline{w}=0 \tag{7.1.2}$$

kompleks kısmi türevli diferensiyel denkleme eşdeğerdir.

Lemma 7.1.1: $w(z)$ düzgün sınırlı bir Ω bölgesinde (7.1.2) nin bir çözümü olsun. Ayrıca

$$g(z)=\begin{cases} A(z)+B(z)\dfrac{\overline{w(z)}}{w(z)} & ,\ w\neq 0 \\ 0 & ,\ w=0 \end{cases} \tag{7.1.3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu takdirde

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta=-T_{\Omega}g \tag{7.1.4}$$

olmak üzere

$$\phi(z) = w(z)e^{-\omega(z)} \tag{7.1.5}$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyonu holomorftur.

İspat: (7.1.5) de türev alırsak

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} e^{-\omega(z)} - \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} w(z) e^{-\omega(z)}$$

$$= e^{-\omega}\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - w\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}}\right)$$

$$= e^{-\omega}(-Aw - B\bar{w} + wg)$$

elde edilir. (7.1.3)'den dolayı

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0$$

elde edilir. Böylece ϕ holomorftur.

Bu sonuç herbir genelleştirilmiş analitik $w=w(z)$ fonksiyonunun; ω, (7.1.4) ile tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$w(z) = \phi(z)e^{\omega(z)} \tag{7.1.6}$$

yazılabileceğini gösterir. (7.1.6) formulü $\phi(z)$ holomorf fonksiyonunun sıfırlarının kumesi ile $w(z)=0$ noktalarının kümesinin çakıştığını gösterir.

7.2. Genelleştirlmiş Analitik Fonksiyonlar İçin Bir Sınır–Değer Problemi

$A, B \in C^{\alpha}(\overline{G})$ olmak üzere

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0$$

$$Re\, w|_{\partial G} = g \qquad , g \in C^{\alpha}(\partial\Omega) \tag{7.2.1}$$

$$\operatorname{Im} w(z_0) = c \qquad , z_0 \in \overline{\Omega}$$

Dirichlet problemini gözönüne alalım.

Teorem 7.2.1: $w \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ fonksiyonunun (7.2.1) Dirichlet probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$w(z) = \phi(z) + T_{\Omega}[-(Aw + B\overline{w})]$$

integral denklemini sağlar. Burada $\phi \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\phi &= g - \operatorname{Re}T_{\Omega}[-(Aw + B\overline{w})] && \partial\Omega \\ \operatorname{Im}\phi(z_0) &= c - \operatorname{Im}T_{\Omega}[-(Aw + B\overline{w})][z_0] && z_0 \in (\overline{\Omega}) \end{aligned}$$

Dirichlet şartlarını sağlayan Ω da holomorf bir fonksiyondur.

İspat: $w \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ fonksiyonunun sınır şartlarıyla birlikte (7.2.1) denklemini sağladığını kabul edelim ve

$$\phi(z) = w(z) - T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Buradan

$$\frac{\partial\phi}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial w}{\partial\overline{z}} + Aw + B\overline{w} = 0$$

elde edilir.O halde ϕ; Ω da holomorf bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\phi(z) &= \operatorname{Re}[w - T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})] \\ &= g - \operatorname{Re}T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w}) \\ \operatorname{Im}w(z_0) &= \operatorname{Im}w(z_0) - T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})](z_0) \\ &= c - \operatorname{Im}T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})](z_0) \end{aligned}$$

şartları da sağlanır. $g \in C^{\alpha}(\partial\Omega)$ olduğu verilmiş idi. Ayrıca $w \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ için $T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w}) \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ dır. Özel olarak $\operatorname{Re}T_{\Omega}[-(Aw + B\overline{w})] \in C^{\alpha}(\partial\Omega)$ olur.

Tersine w fonksiyonu

$$w(z) = \phi(z) + T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w}) \tag{7.2.2}$$

integral denklemini sağlasın. Burada ϕ verilen şartları sağlayan holomorf bir fonksiyondur. (7.2.2) de $\bar{z}$ e göre türev alırsak

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})$$

olur. ϕ holomorf olduğundan

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -(Aw + B\overline{w})$$

elde edilir. Ayrıca $\partial\Omega$ da

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w &= \operatorname{Re}[\phi + T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})] \\ &= g - \operatorname{Re}(-Aw - B\overline{w}) + \operatorname{Re}(-Aw - B\overline{w}) \\ &= g \end{aligned}$$

ve $z_0 \in \overline{\Omega}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} w(z_0) &= \operatorname{Im}[\phi + T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})](z_0) \\ &= c - \operatorname{Im} T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w}) + \operatorname{Im} T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w})(z_0) \\ &= c \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 7.2.1: Teorem 7.2.1 e göre (7.2.1) problemi (7.2.2) integral denklemine eşdeğerdir. O halde (7.2.1) denkleminin yerine (7.2.2) integral denklemini gözönüne alabiliriz. Böylece (7.2.2) denkleminin sag tarafının yardımı ile bir operatör tanımlamak mümkündür.

$w \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P &: C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \\ & w \to P(w) = \phi_{(w)} + T_{\Omega}(-Aw - B\overline{w}) \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Burada $\phi(w), \Omega$ da tanımlanmış

$$\mathrm{Re}\,\phi_{(w)} = g - \mathrm{Re}\,T_\Omega(-Aw - B\overline{w}), \qquad \partial\Omega$$
$$\mathrm{Im}\,\phi_{(w)}(z_0) = c - \mathrm{Im}\,T_\Omega(-Aw - B\overline{w})(z_0), \quad z_0 \in \overline{\Omega}$$

sınır şartları ile tek olarak belirlenebilen holomorf bir fonksiyondur. Bu durumda *P(w)* (7.2.1) denklemindeki sınır şartlarını sağlar ve eğer *w*, *P* operatörünün sabit bir noktası ise

$$w = \phi_{(w)} + T_\Omega(-Aw - B\overline{w})$$

olur. Böylece $w \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ olmak üzere *w*, *P* operatörünün bir sabit noktası olduğunda bu fonksiyon (7.2.1) sınır-değer probleminin bir çözümü olur.

Teorem 7.2.2: $A, B \in C^\alpha(\overline{G})$ olmak üzere (7.2.3) ile tanımlanan *P* operatörü için

$$\|A\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \|B\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} < \frac{1}{(K+1)\|T_\Omega\|}$$

eşitsizliği gerçeklenecek şekilde *K* sabiti varsa *P* bir daralma dönüşümüdür.

İspat: $w_1, w_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ olsun. Bu durumda

$$P(w_1) = \phi_{(w_1)} + T_\Omega(-Aw_1 - B\overline{w_1})$$

$$P(w_2) = \phi_{(w_2)} + T_\Omega(-Aw_2 - B\overline{w_2})$$

olur. Burada $\phi_{(w_1)}$ ve $\phi_{(w_2)}$

$$\mathrm{Re}\,\phi_{(w_1)} = g - \mathrm{Re}\,T_\Omega(-Aw_1 - B\overline{w_1}), \qquad \partial\Omega$$
$$\mathrm{Im}\,\phi_{(w_1)}(z_0) = c - \mathrm{Im}\,T_\Omega(-Aw_1 - B\overline{w_1})(z_0), \quad z_0 \in \overline{\Omega}$$

ve

$$\mathrm{Re}\,\phi_{(w_2)} = g - \mathrm{Re}\,T_\Omega(-Aw_2 - B\overline{w_2}), \qquad \partial\Omega$$
$$\mathrm{Im}\,\phi_{(w_2)}(z_0) = c - \mathrm{Im}\,T_\Omega(-Aw_2 - B\overline{w_2})(z_0), \quad z_0 \in \overline{\Omega}$$

sınır koşullarını sağlayan holomorf fonksiyonlardır.Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
P(w_1)-P(w_2) &= (\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})+T_\Omega[-(Aw_1+B\overline{w_1})+(Aw_2+B\overline{w_2})] \\
&= (\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})+T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})] \\
\operatorname{Re}(\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)}) &= -\operatorname{Re}T_\Omega[-(Aw_1+B\overline{w_1})+(Aw_2+B\overline{w_2})] \\
&= -\operatorname{Re}T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})], \qquad \partial\Omega \\
\operatorname{Im}(\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})(z_0) &= -\operatorname{Im}T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})](z_0), \quad z_0\in\overline{\Omega}
\end{aligned}
$$

yazılabilir ve $A,B\in C^\alpha(\overline{G})$ olması nedeniyle

$$
\begin{aligned}
\left\|T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})]\right\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} &\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\left\|A(w_1-w_2)+B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \\
&\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\left(\|A(w_1-w_2)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}+\|B(w_1-w_2)\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\left(\|A\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\right) \\
&= \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\left(\|A\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\right)\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca

$$
\left\|\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)}\right\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \max\left\{\underset{\overline{\Omega}}{Sup}\left|\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)}\right|, \underset{z_1\neq z_2}{Sup}\frac{\left|(\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})(z_1)-(\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})(z_2)\right|}{|z_1-z_2|^\alpha}\right\}
$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)}$ için tanımlanan Dirichlet problemini gözönüne alalım ve bu fonksiyonun reel kısmının $\partial\Omega$ daki davranışını inceleyelim.

$$
\begin{aligned}
&\left|-\operatorname{Re}T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})](z_1)+\operatorname{Re}T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})](z_2)\right| \\
&\le \left|-T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})](z_1)+T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})](z_2)\right| \\
&\le \left\|T_\Omega[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})]\right\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}|z_1-z_2|^\alpha \\
&\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\left\|[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})]\right\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}|z_1-z_2|^\alpha \\
&\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\left(\|A\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}\right)\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}|z_1-z_2|^\alpha
\end{aligned}
$$

O halde reel kısım, $\|T_\Omega\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})})\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$dan büyük olmayan bir Hölder sabiti ile karakterize edilebilen Hölder sürekli bir fonksiyon olur. O halde

$$\left|(\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})(z_1)-(\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})(z_2)\right| \le k\|T_\Omega\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})})\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}|z_1-z_2|^\alpha \quad \ldots(7.2.4)$$

Teorem 5.6.2 den

$$k=\frac{2^{\alpha+3}}{\cos(\alpha\frac{\pi}{2})}\left[\frac{2}{\alpha\pi}(1+2^\alpha)+1\right]$$

dir. Hipotezlerin de gözönüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}\left|(\phi_{(w_1)}-\phi_{(w_2)})(z)\right| &\le 2^\alpha k\|T_\Omega\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})})\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\\ &+\underset{\partial\Omega}{Sup}\left|-\mathrm{Re}\,T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right|\\ &+\left|-\mathrm{Im}\,T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right](z_0)\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\underset{\partial\Omega}{Sup}\left|-\mathrm{Re}\,T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right|\\ &\le \underset{\partial\Omega}{Sup}\left|T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right|\\ &\le \underset{\bar{\Omega}}{Sup}\left|T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right|\\ &\le \left\|T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\\ &\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\left\|A(w_1-w_2)+B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\\ &\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})})\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left|-\mathrm{Im}\,T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right|\\ &\le \left|T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right|\\ &\le \underset{\bar{\Omega}}{Sup}\left|T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right|\\ &\le \left\|T_\Omega\left[-A(w_1-w_2)-B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right]\right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\\ &\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\left\|A(w_1-w_2)+B(\overline{w_1}-\overline{w_2})\right\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\\ &\le \|T_\Omega\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}+\|B\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})})\|w_1-w_2\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\left|\phi_{(w_1)} - \phi_{(w_2)}\right| \leq (2^{\alpha} k + 2)\|T_{\Omega}\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|B\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})})\|w_1 - w_2\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \qquad (7.2.5)$$

elde edilir. (7.2.4) ve (7.2.5) den

$$\left\|\phi_{(w_1)} - \phi_{(w_2)}\right\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \leq (2^{\alpha} k + 2)\|T_{\Omega}\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|B\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})})\|w_1 - w_2\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}$$

bulunur. $K = 2^{\alpha} k + 2$ diyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|P(w_1) - P(w_2)\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} &\leq \left\|\phi_{(w_1)} - \phi_{(w_2)}\right\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \left\|T_{\Omega}\left[-A(w_1 - w_2) - B(\overline{w_1} - \overline{w_2})\right]\right\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \\ &\leq (2^{\alpha} k + 3)\|T_{\Omega}\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|B\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})})\|w_1 - w_2\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} \\ &= (\mathrm{K} + 1)\,\|T_{\Omega}\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|B\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})})\|w_1 - w_2\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}\end{aligned}$$

olur. Tanım gereğince

$$(K+1)\|T_{\Omega}\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}(\|A\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|B\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}) < 1$$

ise P dönüşümü daralandır.O halde P dönüşümünün daralan olması için

$$(\|A\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + \|B\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}) < \frac{1}{(K+1)\|T_{\Omega}\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}}$$

olmalıdır.

7.3. Kompleks Denklemler İçin Bir Dirichlet Probleminin Genelleştirilmesi

$\dfrac{\partial u_j}{\partial x} = p_j$, $\dfrac{\partial u_j}{\partial y} = q_j$ olmak üzere 2n- tane $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ fonksiyonları

$$H_j(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}, p_1, p_2, \ldots, p_{2n}, q_1, q_2, \ldots, q_{2n}) = 0, \quad \mathrm{j} = 1,2,\ldots 2\mathrm{n} \qquad (7.3.1)$$

1.basamaktan reel kısmi türevli diferensiyel denklem sisteminin çözümü olsun. (7.3.1) sisteminden p_j lerin

$$p_j = f_j(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{2n}, q_1, q_2, \ldots, q_{2n}) \qquad (7.3.2)$$

şeklinde çözülebilir olduğunu kabul edelim. Şimdi $\upsilon = 1,2,\ldots n$ olmak üzere

$$x+iy=z\ ,\quad u_\upsilon+iu_{n+\upsilon}=w_\upsilon,\quad p_\upsilon+ip_{n+\upsilon}=\frac{\partial w_\upsilon}{\partial x}=\sigma_\upsilon\ ,\quad q_\upsilon+iq_{n+\upsilon}=\frac{\partial w_\upsilon}{\partial y}=\sigma_{n+\upsilon}$$

kısaltmalarını yapalım. Bu durumda (7.4.2) ifadesi

$$\sigma_\upsilon=\varphi_\upsilon(z,w_1,w_2,...,w_n,\ \sigma_{n+1},\sigma_{n+2},...,\sigma_{2n});\ \upsilon=1,2,...\text{n} \qquad (7.3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer tekrar

$$\sigma_\upsilon=W_\upsilon+W_{n+\upsilon}\ ,\ \sigma_{n+\upsilon}=i(W_\upsilon-W_{n+\upsilon})=iW_\upsilon-iW_{n+\upsilon} \qquad (7.3.4)$$

gösterilim şeklini kullanırsak $W_1,W_2,...,W_{2n}$ yeni değişkenlerine ulaşmış oluruz. Bu değişkenler (7.3.3) de yerine yazılırsa o zaman 2n tane W_j kompleks değişkenleri tarafından sağlanan ve n- tane kompleks denklemi olan bir kompleks denklem sistemi ortaya çıkar. Bu sistemden de $W_{n+1},W_{n+2},...,W_{n+\upsilon},...,W_{2n}$ değişkenleri çözülürse o zaman (7.3.3) sistemi

$$W_{n+\upsilon}=F_\upsilon(z,w_1,w_2,...,w_n,W_1,W_2,...,W_n),\ \ \upsilon=1,2,...,\text{n} \qquad (7.3.5)$$

şekline gelir. Bu sistemlerden W_j veya p_j değişkenlerini açıkca çözmeye gerek yoktur. φ_υ veya f_j fonksiyonlarının türevlerine ilişkin çözülebilme koşulları verilebilir. W_j ve p_j lerde H_j ile bağlantılı olduğundan H_j fonksiyonları üzerine çözülebilme koşulları koymak yeterlidir. (7.3.4) ten

$$W_\upsilon=\frac{1}{2}(\sigma_\upsilon-i\sigma_{n+\upsilon})=\frac{1}{2}(\frac{\partial w_\upsilon}{\partial x}-i\frac{\partial w_\upsilon}{\partial y})=\frac{\partial w_\upsilon}{\partial z},\ \ W_{n+\upsilon}=\frac{\partial w_\upsilon}{\partial\bar{z}}$$

yazılabilir. Böylece uygun çözülebilirlik koşulları altında (7.3.1) sisteminden

$$\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}=F(z,w,w_z) \qquad (7.3.6)$$

denklemine ulaşılır. Burada $w=(w_1,w_2,...,w_n)$, $F=(F_1,F_2,...,F_n)$ dir. Öte yandan

$$T_G h(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

$$\pi_G h(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

gösterilimleri gözönüne alınırsa (7.3.6) nın çözümü

$$w = \phi + T_G F(z, w, w_z) \tag{7.3.7}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ bir holomorf fonksiyondur. Şimdi

$$\frac{\partial w}{\partial z} = h$$

dersek

$$\frac{\partial}{\partial z} T_G = \pi_G$$

olması nedeniyle (7.3.7) den

$$\left.\begin{aligned} w &= \phi + T_G F(z, w, h) \\ h &= \phi' + \pi_G F(z, w, h) \end{aligned}\right\} \tag{7.3.8}$$

integral denklem sistemine ulaşılır.

Şimdi (7.3.6) denklemi veya (7.3.8) sisteminin hangi koşullar altında çözülebilir olduğunu inceleyelim:

G, sınırlı bir bölge olsun. *G*' de en az k defa Hölder sürekli türetilebilir W n-lilerinin veya (w, h) 2n- lilerin kümesini $C^{(k,\alpha)}(\overline{G})$ ile gösterelim. Burada α Hölder üstel sabiti olarak isimlendirilir. Bu durumda bu sınıftaki norm

$$\|w\|_{0,\alpha} = \max_j \left(\underset{G}{Sup}|w_j|,\ \underset{z_1 \neq z_2}{\mathrm{Sup}} \frac{|w_j(z_2) - w_j(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right)$$

$$\|(w,h)\|_{0,\alpha} = \max(\|w\|_{0,\alpha}, \|h\|_{0,\alpha})$$

olarak tanımlanabilir.

$\|\cdot\|_{k,\alpha}$ ile z ve $\bar{z}$ e göre k- yıncı basamağa kadar kompleks kısmi türevleri α Hölder üsteline göre Hölder sürekli fonksiyonların normunu gösterelim. Diğer taraftan $d^{(k,\alpha)}[(w,h),(\widetilde{w},\widetilde{h})]$ ile n-lilerin veya 2n-lilerin fark normunu gösterelim.

$$w_{\bar{z}} = F(z,w,h)$$

diferensiyel denklemindeki F fonksiyonu her $z \in \overline{G}$ için kendi değişkenlerine göre sürekli olsun. Ayrıca (w,h) ve $(\widetilde{w},\widetilde{h})$ çiftlerinin $C^{(0,\alpha)}(\overline{G})$ sınıfından olmak üzere aşağıdaki hipotezlerin sağlandığını varsayalım:

$$I)\ \left|F_j(z,w,h)\right| \le M$$
$$II)\left|F_j(z_2,w,h) - F_j(z_1,w,h)\right| \le l\left|z_2 - z_1\right|^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$
$$\text{III)}d^{(0,\alpha)}[F(z,w,h),F(z,\widetilde{w},\widetilde{h})] \le L d^{(0,\alpha)}[(w,h),(\widetilde{w},\widetilde{h})]$$

III) hipotezi, Hölder sürekli fonksiyonlar uzayındaki metrigin Lipschitz koşuludur. Yukarıdaki şartlar sağlanırsa problem çözülebilir. Daha fazla bilgi [4] den elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] – L.BERS, “Theory of Pseudo analytic Functions” Lecture Notes New-York , 1953

[2] – W.TUTSCHKE, “Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer in mehrenen komplexen Variablen” , VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1977)

[3] – W.TUTSCHKE, “ Partielle Differentialgleichungen, klassische funktional analytische und komplexe Methoden”. TEUBNER TEXTE, Bond 27 Leibzig (1983)

[4] – W.TUTSCHKE, “Lösung nichtlinearer Partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung eine komplexen Normalform” Math. Nachi. 75, 283-298, (1976)

[5] I.N. VEKUA, “Verallgemeinerte analytische Funktionen” Akademia Verlag, Berlin, (1963)(Überset aus dem Russ.)