T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

KLASİK LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ MAKSİMAL FONKSİYON

NEVİN BİLGİÇLİ

OCAK 2018

Matematik Anabilim Dalında Nevin BİLGİÇLİ tarafından hazırlanan KLASİK LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ MAKSİMAL FONKSİYON adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Ana Bilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV
Ortak Danışman

Prof. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Prof. Dr. Kerim KOCA
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Ali ARAL
Üye	:	Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Üye	:	Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA
Üye	:	Doç. Dr. Canay AYKOL YÜCE

08 /01/2018

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KLASİK LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ MAKSİMAL FONKSİYON

BİLGİÇLİ, Nevin
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL
Ortak Danışman: Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV
Ocak 2018, 88 sayfa

Bu tez ilk bölümü giriş, son bölümü sonuç ve tartışma olmak üzere yedi bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak gösterimler, temel kavramlar ve lemmalara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde dağılım fonksiyonu, artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu ve maksimal fonksiyon tanıtılmış ve bu fonksiyonların bazı özellikleri anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde kuasi-Banach fonksiyon uzayları, yeniden düzenleme altında değişmez kuasi-Banach fonksiyon uzayları ve klasik Lorentz uzayları verilmiştir.

Beşinci bölümde supremum içeren iteratif Hardy tipli operatörün ağırlıklı Lebesgue uzayları arasındaki sınırlılığının artmayan fonksiyonlar konisi üzerinde karakterizasyonu sonlu parametreler için verilmiş ve parametrelerin sonsuz olması durumunda bu sınırlılığın karakterizasyonu elde edilmiştir.

Altıncı bölümde yeni bir genelleştirilmiş kesirli maksimal fonksiyon tanımlanmış ve bu fonksiyonun ağırlıklı klasik Lorentz uzayları arasında, ağırlıklı klasik Lorentz uzayları ve zayıf tipli ağırlıklı klasik Lorentz uzayları arasında, zayıf tipli ağırlıklı klasik Lorentz uzayları arasında sınırlılığı karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Klasik ve Zayıf Tipli Lorentz Uzayları, Artmayan Yeniden Düzenleme, Kesirli Maksimal Fonksiyon, Supremum İçeren İteratif Hardy Tipli Eşitsizlikler, Ağırlık Fonksiyonları

ABSTRACT

GENERALIZED FRACTIONAL MAXIMAL FUNCTIONS IN CLASSICAL LORENTZ SPACES

BİLGİÇLİ, Nevin
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
Co-Supervisor: Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV
January 2018, 88 pages

This thesis consists of seven chapters: The first chapter is introduction and the last chapter contains the result and discussion.

Notations, fundamental concepts and lemmas that will be used in the next chapters are given in Chapter 2.

Distribution function, non-increasing rearrangement, maximal functions and their some important properties are introduced in Chapter 3.

Quasi-Banach function spaces, rearrangement invariant quasi-Banach function spaces and classical Lorentz spaces are given in Chapter 4.

In Chapter 5, characterization of the boundedness of iterated Hardy type operators involving suprema between weighted Lebesgue spaces on the cone of non-increasing functions for finite parameters are recalled and characterization for infinite parameters are obtained.

In Chapter 6, definition of a new generalized fractional maximal function is given and the boundedness of this maximal function between weighted classical Lorentz spaces, between weighted classical Lorentz spaces and weak-type weighted Lorentz spaces, and between weak-type weighted Lorentz spaces are fully characterized.

Keywords: Classical and Weak-type Lorentz Spaces, Non-increasing Rearrangement, Fractional Maximal Function, Iterated Hardy Type Inequalities Involving Suprema, Weights

TEŞEKKÜR

Tez konumun seçiminden başlayarak, tezimin son aşamasına kadar görüş ve önerileri ile beni yönlendiren ortak danışman hocam Sayın Prof. Dr. Rza MUSTAFAYEV'e desteğini esirgemeyip beni yalnız bırakmayan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali ARAL'a, değerli fikirleriyle tezime katkıda bulunan Tez İzleme Komitesi üyeleri Sayın Hocalarım Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye ve Prof. Dr. Kerim KOCA' ya ve son olarak desteklerini her an yanımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Ω	$\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir küme
$(\mathcal{R}, \Sigma, \mu)$	Keyfi ölçü uzayı
μ	Ölçü
m	Lebesgue ölçüsü
ω_n	$\mathbb{R}^n$ de birim küpün hacmi
χ	Karakteristik fonksiyon
$\mathfrak{M}(\mathcal{R})$	$\mathcal{R}$ deki tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfı
$\mathfrak{M}_0(\mathcal{R})$	$\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ deki hemen hemen her yerde sonlu fonksiyonların sınıfı
$\mathfrak{M}^+(\mathcal{R})$	$\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ deki negatif olmayan fonksiyonların sınıfı
$\mathfrak{M}^+((0,\infty),\downarrow)$	$\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ da artmayan fonksiyonların kümesi
$\mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de tüm negatif olmayan, radyal azalan fonksiyonların kümesi
$\mathcal{W}(\Omega)$	Ω daki ağırlık fonksiyonlarının sınıfı
$C(\Omega)$	Ω daki sürekli fonksiyonlarının sınıfı
Mf	Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
M_γ	Kesirli maksimal fonksiyon
$M_{s,\gamma,\mathbb{A}}$	Logaritmik kesirli maksimal fonksiyon
$M_{p,q}$	Stein maksimal fonksiyonu
$M_{\phi,X}$	Genelleştirilmiş kesirli maksimal operatör
f^*	f nin artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu
f^{**}	f^* ın Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
μ_f	f nin dağılım fonksiyonu
m_f	Lebesgue ölçüsüne göre f nin dağılım fonksiyonu
$L^p(w,\Omega)$	Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$\ell^p(w,\Omega)$	Ağırlıklı diskret Lebesgue uzayı
$L^{p,q}$	Lorentz uzayı

$\Lambda^p(w)$ ve $\Gamma^p(w)$	Ağırlıklı klasik Lorentz uzayları
$\Lambda^{p,\infty}(w)$ ve $\Gamma^{p,\infty}(w)$	Zayıf tipli ağırlıklı klasik Lorentz uzayları
H_u	Ağırlıklı Hardy operatörü
$T_{u,b}$	Supremum içeren iteratif Hardy tipli operatör
$h.h.y.$	Hemen hemen her yerde
$r.i.$	Yeniden düzenleme altında değişmez uzay (rearrangement invariant)

1. GİRİŞ

Maksimal ve kesirli maksimal operatörler, harmonik ve reel analizin önemli konularındandır. Bu alt lineer operatörler potansiyel ve singüler integraller teorisinde oldukça aydınlatıcıdır. Maksimal operatörlerin davranışları diferensiyellenebilme teorisi başta olmak üzere pek çok alanda önemli yere sahiptir (bkz., [28, 48–50, 85–87]).

Maksimal fonksiyonun sınırlılığını ifade eden eşitsizliklerin elde edilmesinde yeniden düzenleme fonksiyonunun anahtar rolü bulunmaktadır. $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir, hemen hemen her yerde sonlu bir f fonsiyonunun artmayan yeniden düzenlenme fonksiyonu

$$f^*(t) := \inf\{\lambda \geq 0 : |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| \leq t\}, \qquad t \in (0,\infty)$$

ve bu fonksiyonun maksimal fonksiyonu

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)d\tau, \qquad t > 0$$

şeklinde ilk olarak Hardy-Littlewood tarafından verilmiştir.

Artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu yardımıyla pek çok uzay tanımlanmıştır. Bunların en önemlilerinden biri klasik Lorentz uzaylarıdır. $\Lambda^p(w)$ ve $\Gamma^p(w)$ ağırlıklı klasik Lorentz uzayları sırasıyla

$$\Lambda^p(w) \coloneqq \left\{f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\Lambda^p(w)} \coloneqq \|f^*\|_{p,w,(0,\infty)} < \infty\right\},$$

ve

$$\Gamma^p(w) \coloneqq \left\{f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\Gamma^p(w)} \coloneqq \|f^{**}\|_{p,w,(0,\infty)} < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p \in (0,\infty]$; $w, (0,\infty)$ da negatif olmayan lokal integrallenebilir bir fonksiyon ve $\|\cdot\|_{p,w,(0,\infty)}$,

$$\|f\|_{p,w,(0,\infty)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty |f(x)|^p w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in(0,\infty)} |f(x)|w(x) \quad , & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanan fonksiyoneldir. $\Lambda^p(w)$ ve $\Gamma^p(w)$ uzayları ilk olarak, sırasıyla, [64] te Lorentz ve [77] de Sawyer tarafından tanımlanmıştır. İleri çalışmalar [13], [14], [8] de bulunmaktadır. Bu uzaylarla ilgili daha geniş bilgi için [10] a bakılabilir.

Ağırlıklı klasik Lorentz uzaylarının zayıf tipli hali

$$\Lambda^{p,\infty}(w) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} := \sup_{t>0} f^*(t)\left(\int_0^t w(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

ve

$$\Gamma^{p,\infty}(w) := \left\{ f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)} := \sup_{t>0} f^{**}(t)\left(\int_0^t w(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır ([12, 81]).

Literatürde maksimal ve kesirli maksimal operatörlerin Lorentz uzayları arasındaki sınırlılığını inceleyen bir çok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalara ait sonuçların kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizik alanında geniş uygulamaları vardır.

Maksimal fonksiyonun en temel örneği Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur. Bu fonksiyon, $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilir f fonksiyonları için

$$Mf(x) := \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy = \sup_{Q\ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{1,\mathbb{R}^n}}{\|\chi_Q\|_{1,\mathbb{R}^n}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır. Burada supremum x i içeren tüm Q küpleri üzerinden alınır.

Hardy-Littlewood maksimal operatörünün artmayan yeniden düzenlenme eşitsizliği Herz ve Stein tarafından sadece n ye bağlı $c\ ve\ C$ sabitleri için

$$cf^{**}(t) \leq (Mf)^{*}(t) \leq Cf^{**}(t), \qquad t \in (0, \infty) \tag{1.1}$$

olarak verilmiştir ([4, Bölüm 3, Teorem 3.8]).

Buradan açıktır ki, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $\Lambda^{p}(v)$ den $\Lambda^{q}(w)$ ya sınırlılığının incelenmesi, $u\ ve\ w$ ağırlık fonksiyonları için

$$\left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\tau} f^{*}(\tau)d\tau\right)^{q} w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_0^{\infty} f^{*}(t)^{p} v(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

eşitsizliğinin karakterize edilmesine denktir.

Bu problemle ilgili ilk sonuç Boyd tarafından [5] te elde edilmiştir. Daha sonra [1] de Ari$\tilde{n}$o ve Muckenhoupt tarafından $w = v$ ve $p = q$ durumunda problemin tam çözümü verilmiştir. (1.2) eşitsizliği, $w \neq v$ ve $p \neq q$, $1 < p, q < \infty$ durumunda [77] de Sawyer tarafından duallik prensibi kullanılarak başarıyla çözülmüştür. Stepanov [83] te farklı bir yaklaşımla parametreleri $0 < q < \infty, 1 < p < \infty$ olarak genişletmiştir. Stepanov, ayrıca Sawyer'in duallik prensibinin benzerini $0 < p < 1$ durumunda ispatlamış ve (1.2) eşitsizliğini $0 < p < 1 < q < \infty$ halinde de çözmüştür. $0 < p \leq q \leq 1$ durumunda problemin çözümü farklı yollarla pek çok araştırmacı tarafından elde edilmiştir (bkz., [13], [12]). Eksik olan $0 < q < p < 1$ durumu ise [43] ve [9] da verilmiştir. (1.2) eşitsizliğinin karakterizasyonu [3] ve [30] da, farklı bir diskretleştirme tekniği kullanılarak parametrelerin tüm hallerinde yapılmıştır. Yukarıda bahsedildiği gibi (1.2) eşitsizliği parametrelerin farklı durumlarında pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (bkz., örneğin derleme [10], monografi [59], en son çalışmalar için [44, 40] ve referansları).

Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $\Lambda^{p}(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ya karakterizasyonu [8, 10, 14] te, $\Lambda^{p,\infty}(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ya sınırlılığı ise [81] de karakterize edilmiştir.

Kesirli maksimal operatör M_γ , $\gamma \in [0,n)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$(M_\gamma f)(x) := \sup_{Q \ni x} |Q|^{\gamma/n-1} \int_Q |f(y)|dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $M_0 = M$ olduğu açıktır.

Bu operatörün artmayan yeniden düzenleme eşitsizlikleri [16, Teorem 1.1] de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $t \in (0,\infty)$ için

$$(M_\gamma f)^*(t) \lesssim \sup_{\tau > t} \tau^{\gamma/\,n-1} \int_0^\tau f^*(y)dy \lesssim (M_\gamma \tilde{f})^*(t) \tag{1.3}$$

olarak elde edilmiştir. Burada $\tilde{f}(x) := f^*(\omega_n |x|^n)$ ve ω_n, $\mathbb{R}^n$ de birim yuvarın hacmidir.

Dolayısıyla M_γ kesirli maksimal operatörünün $\Lambda^p(v)$ den $\Lambda^q(w)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\phi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow)$ olmak üzere

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{\tau > t} \tau^{\frac{\gamma}{n}-1} \int_0^\tau \phi(y)dy\right]^q w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \left(\int_0^\infty [\phi(t)]^p\, v(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.4}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

(1.4) ün $1 < p \le q < \infty$ için karakterizasyonu [16] da yapılmıştır. [68, Teorem 2.10] da daha genel operatörler ve daha geniş p, q parametreleri için sonuçlar elde etmiştir.

[20] de $M_{s,\gamma,\mathbb{A}}$ kesirli maksimal operatörü $s \in (0,\infty)$, $\gamma \in [0,n)$ ve $\mathbb{A} = (A_0, A_\infty) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ için

$$(M_{s,\gamma,\mathbb{A}} f)(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_s}{\|\chi_Q\|_{sn/(n-\gamma),\mathbb{A}}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

şeklinde tanımlanmış ve

$$(M_{s,\gamma,\mathbb{A}}f)(x) \approx \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_s}{|Q|^{\frac{n-\gamma}{sn}} \ell^{\mathbb{A}}(|Q|)}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

olduğu gösterilmiştir. Burada

$$\ell^{\mathbb{A}}(t) := (1+|logt|)^{A_0}\chi_{[0,1]}(t) + (1+|logt|)^{A_\infty}\chi_{[1,\infty)}(t), \quad t>0$$

dır. $M_{s,\gamma,\mathbb{A}}$ operatörü, $s=1,\ \gamma=0$ ve $\mathbb{A}=(0,0)$ için M klasik Hardy-Littlewood operatörüne, $s=1,\ \gamma\in[0,n)$ ve $\mathbb{A}=(0,0)$ için M_γ kesirli maksimal operatörüne denktir. $s=1,\ \gamma\in[0,n)$ ve $\mathbb{A}\in\mathbb{R}^2$ durumunda $M_{s,\gamma,\mathbb{A}}$ operatörü [70, 71] de çalışılmıştır.

$M_{s,\gamma,\mathbb{A}}$ operatörü için

$$(M_{s,\gamma,\mathbb{A}}f)^*(t) \le C\left[\sup_{t\le\tau\le\infty} \tau^{\frac{\gamma}{n}-1}\ell^{-s\mathbb{A}}(\tau)\int_0^\tau (f^*)^s(y)dy\right]^{\frac{1}{s}} \tag{1.5}$$

eşitsizliğinin her $f\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ve $t>0$ için sadece $n,\gamma,s,\mathbb{A}$ ya bağlı $C>0$ sabiti ile sağlandığı [20, Teorem 3.1] de elde edilmiştir.

Diğer taraftan her $\varphi\in\mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow)$ için $f^*=\varphi$ olacak biçimde bir $f\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ vardır öyle ki

$$(M_{s,\gamma,\mathbb{A}}f)^*(t) \ge c\left[\sup_{t>\tau} \tau^{\frac{\gamma}{n}-1}\ell^{-s\mathbb{A}}(\tau)\int_0^\tau (f^*)^s(y)dy\right]^{\frac{1}{s}}$$

eşitsizliği her $t>0$ için sadece n,γ,s ve $\mathbb{A}$ ya bağlı bir $c>0$ sabiti ile doğrudur.

Sonuç olarak $M_{s,\gamma,\mathbb{A}}:\Lambda^p(v)\to\Lambda^q(w)$ ya sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{t>\tau} \tau^{\frac{\gamma}{n}-1} \ell^{-s\mathbb{A}}(\tau) \int_0^\tau \varphi(y)dy\right]^{\frac{q}{s}} w(t)dt\right)^{\frac{s}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty \varphi^{\frac{p}{s}}(t)v(t)dt\right)^{\frac{s}{p}} \quad (1.6)$$

eşitsizliğinin her $\varphi \in \mathfrak{M}^+\left((0,\infty),\downarrow\right)$ için sağlanmasıdır. (1.6) nın tam karakterizasyonu [20, s.17 ve s.34] te verilmiştir. Tam ispatlar ve daha geniş uygulamalar [20] ve [21] de bulunabilir.

Başka bir önemli maksimal operatör $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$M_{p,q}f(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{\|\chi_Q\|_{p,q}} \approx \sup_{Q\ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{p,q}}{|Q|^{1/p}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|\cdot\|_{p,q}$ normu

$$\|f\|_{p,q} := \left(\int_0^\infty \left[\tau^{\frac{1}{p}} f^*(\tau)\right]^q \frac{d\tau}{\tau}\right)^{\frac{1}{q}}$$

olarak tanımlanan Lorentz normudur.

$M_{p,q}$ operatörü ilk olarak Stein tarafından [84] te diferensiyellenebilme teorisinde uç nokta sonuçlarının elde edilmesi amacıyla araştırılmıştır. Daha sonra bu operatör başka araştırmacılar tarafından [2, 61, 62, 67, 73] te çalışılmıştır.

[2] de interpolasyon yardımıyla Stein maksimal operatörünün artmayan yeniden düzenlenme eşitsizliği $1 \leq q \leq p$ için

$$\left(M_{p,q}f\right)^*(t) \lesssim \frac{1}{t^{1/p}}\left(\int_0^t f^*(\tau)^q \tau^{\frac{q}{p}-1} d\tau\right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.7)$$

şeklinde elde edilmiştir. [65] te bu sonuç daha genel maksimal oparatörler için geliştirilmiştir.

(1.7) yardımıyla görülür ki $u, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ve $1 \leq q \leq p$ olmak üzere $M_{p,q}$ operatörünün $\Lambda^{\alpha}(v)$ den $\Lambda^{\beta}(w)$ ya sınırlılığının karakterizasyonu

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(\tau)u(\tau)d\tau\right)^\beta w(t)dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \lesssim \left(\int_0^\infty f^*(t)^\alpha v(t)dt\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1.8}$$

eşitsizliğinin karakterizasyonuna denktir.

$u \in \mathcal{W}(0,\infty) \cap C(0,\infty)$, $b \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ve $B(t) \coloneqq \int_0^t b(s)ds$ olsun $0 < B(t) < \infty$, $t \in (0,\infty)$ olmak üzere supremum içeren iteratif Hardy tipli operatör $T_{u,b}$ her bir $g \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ için

$$(T_{u,b}g)(t) := \sup_{t \leq \tau < \infty} \frac{u(\tau)}{B(\tau)} \int_0^\tau g(y)b(y)dy, \quad t \in (0,\infty)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Yukarıda bahsedilen (1.2), (1.4), (1.6), (1.8) eşitsizliklerinin sol taraflarının $T_{u,b}$ operatörünün özel bir halini içerdiği kolayca görülür.

Supremum içeren iteratif Hardy tipli operatörlerin, Sobolev tipli eşitsizlikleri sağlayan yeniden düzenlemeye göre değişmez normların optimal çiftlerinin araştırılmasında kaçınılmaz olduğu görülmüştür (bkz. [55]). Bu operatörler, bir Sobolev gömmesinde optimal bölge normu olarak ortaya çıkan operatörden indirgenmiş normun karakterizasyonu için oldukça kullanışlıdır (bkz. [72], [74]). Ayrıca supremal operatörler, örneğin [22, 19, 18, 76] de görülebileceği gibi, uç nokta interpolasyon teorisinde önemli araçlardır.

$T_{u,b}$ operatörünün negatif olmayan ve artmayan fonksiyonlar konisi üzerinde ağırlıklı Lebesgue uzayları arasında sınırlılığı, yani

$$\|T_{u,b}f\|_{q,w,(0,\infty)} \le C\|f\|_{p,v,(0,\infty)}, \quad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{1.9}$$

eşitsizliği [42, Teorem 3.5] te

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{u(t)}{B(t)} \int_0^t \frac{b(\tau)}{u(\tau)} d\tau < \infty$$

ek şartı altında incelenmiş, $0 < p \le 1 < q < \infty$ durumu araştırılmamış, $1 < p < \infty$, $0 < q < p < \infty,\ q \neq 1$ durumunda ise sadece diskret koşullar elde edilmiştir. [34] te $0 < p \le 1$ durumunda yeni indirgeme teoremi ispat edilmiş ve bu teknik aracılığıyla (1.9) eşitsizliği $b \equiv 1$ için çözülmüş, fakat $0 < q < p \le 1$ durumunda yalnızca diskret koşullar bulunmuştur. (1.9) eşitsizliğinin $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty$ için tam karakterizasyonu [41] de yapılmıştır (bkz., Teorem 5.1). Literatürde, supremum içeren ağırlıklı iteratif Hardy tipli eşitsizliklerin karakterizasyonunun araştırılmadığı limit durumları bu tezde tamamlanacaktır.

Bu doktora tezi kapsamında; X, n-boyutlu Öklid uzayı üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların bir kuasi-Banach fonksiyon uzayı ve $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ olmak üzere, yeni bir $M_{\phi,X}$ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörü tanımlanmış ve bu operatörün $\Lambda^p(w)$ ağırlıklı klasik Lorentz uzayları arasında, ağırlıklı klasik Lorentz uzayları ile $\Lambda^{p,\infty}(w)$ zayıf tipli ağırlıklı Lorentz uzayları arasında, zayıf tipli ağırlıklı Lorentz uzayları arasında sınırlılığının incelenmesi hedeflenmiştir. ϕ fonksiyonu ve X uzayı bazı doğal koşulları sağladığında, $M_{\phi,X}$ in bu uzaylar arasında sınırlılığının karakterizasyonu; $M_{\phi,X}$ in artmayan yeniden düzenleme fonsiyonu için elde edilmiş kesin eşitsizlikler yardımıyla, supremum içeren ağırlıklı iteratif Hardy tipli eşitsizliklerinin karakterizasyonuna indirgenecektir.

X uzayı özel olarak $\Lambda^\alpha(b)$ ağırlıklı klasik Lorentz uzayı olduğu durumda ise $0 < \alpha < \infty$, $b \in \mathcal{W}$ olmak üzere her $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{\|f\chi_Q\|_{\Lambda^\alpha(b)}}{\phi(|Q|)}, \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{1.10}$$

şeklinde tanımlanan $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}$ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörünün yukarıda bahsedilen uzaylar arasında sınırlılığının tam karakterizasyonu yapılacaktır.

$M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}$ maksimal fonksiyonu, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu, kesirli maksimal fonksiyonu ve bu operatörün literatürde bilinen genelleştirmelerini, Stein maksimal operatörünü ve diğer maksimal operatörleri özel durumlarda içermektedir. Gerçekten,

- $\alpha = 1,\ b \equiv 1,\ \phi(t) = t\ \ (t > 0),$ için $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)} = M$ dır;
- $\alpha = 1,\ b \equiv 1,\ \phi(t) = t^{1-\frac{\gamma}{n}}\ (t > 0),\ 0 < \gamma < n$ için $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)} = M_{\gamma}$ dır;
- $\alpha = s,\ b \equiv 1,\ \phi(t) = t^{\frac{\mathrm{n}-\gamma}{\mathrm{sn}}}\ell^{\mathbb{A}}(t)\ (t > 0),\ 0 < \gamma < n,\ \mathbb{A} = (A_0, A_\infty) \in \mathbb{R}^2$ için $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)} \approx M_{s,\gamma,\mathbb{A}}$ dır;
- $\alpha = q,\ b(t) = t^{\frac{q}{p}-1},\ \phi(t) = t^{\frac{1}{p}}\ (t > 0)$ için $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)} \approx M_{p,q}$ dır.

Bu nedenle tezde elde edilmiş sonuçların fonksiyon uzayları teorisinde, diferensiyellenebilme teorisinde, kısmi türevli diferensiyel denklemler teorisinde ve diğer dallarda çalışan matematikçiler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu tez boyunca ana parametrelerden bağımsız satırdan satıra değişebilen sabitler c ve C ile gösterilecektir. $\lambda > 0$ sabiti için $a \leq \lambda b$ eşitsizliği sağlandığında $a \lesssim b$ ile gösterilecektir. $a \lesssim b$ ve $b \lesssim a$ ise a ile b denktir denilecek ve $a \approx b$ şeklinde ifade edilecektir. Küp terimi ile ayrıtları koordinat eksenlerine paralel açık küpler belirtilecektir.

X ve Y kuasi-normlu vektör uzayları cebirsel ve topolojik anlamda eşitse (kuasi normları denkse) $X = Y$ ile gösterilecektir. X ve Y kuasi normlu iki vektör uzayı olmak üzere $X \subset Y$ ve her $z \in X$ için $\|z\|_Y \leq C\|z\|_X$ olacak biçimde C pozitif sayısı mevcutsa X, Y ye gömülmüştür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. Gömmenin en iyi sabiti $\|I\|_{X\to Y}$ ile gösterilir.

$(\mathcal{R}, \Sigma, \mu)$ keyfi bir ölçü uzayı olsun; $\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ ile $\mathcal{R}$ deki tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi, $\mathfrak{M}_0(\mathcal{R})$ ile $\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ deki hemen hemen her yerde sonlu fonksiyonların sınıfı, $\mathfrak{M}^+(\mathcal{R})$ ile $\mathfrak{M}(\mathcal{R})$ deki negatif olmayan fonksiyonların sınıfı gösterilecektir.

$\mathfrak{M}^+((0,\infty),\downarrow)$, $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ da artmayan fonksiyonlar konisi olmak üzere, $\mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ de tüm negatif olmayan, radyal azalan fonksiyonların kümesidir. Yani

$$\mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n): f\,(\mathrm{x}) = (h|x|), x \in \mathbb{R}^n, h \in \mathfrak{M}^+((0,\infty),\downarrow)\}$$

şeklindedir.

Tez boyunca

(i) $0 \cdot \infty = 0,\ \infty/\infty = 0$ ve $0/0 = 0$

(ii) $p \in [1,\ \infty]$ için $1/p + 1/p' = 1$

(iii) $0 < q < p < \infty$ olduğunda $1/r = 1/q - 1/p$

kabul edilecektir.

Ω, $n \geq 1$ için $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir herhangi bir küme olmak üzere, Ω da negatif olmayan lokal integrallenebilir fonksiyonlara ağırlık fonksiyonu ya da ağırlık denir. Ω da tüm ağırlık fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{W}(\Omega)$ ile gösterilir. Tez boyunca u, v, w ile ağırlık fonksiyonları gösterilecektir.

$w \in \mathcal{W}(\mathrm{A})$ olmak üzere $L^p(A, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$L^p(A, w) := \{f \in \mathfrak{M}(\mathrm{A}): \|f\|_{p,w,A} < \infty\}$$

biçiminde tanımlanır. A üzerinde $w \equiv 1$ olması durumunda $L^p(A, w)$ ve $\|f\|_{p,w,A}$ yerine sırasıyla $L^p(A)$ ve $\|f\|_{p,A}$ gösterimi kullanılır.

$\phi: (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonu için:

$$\phi(2t) \leq D\phi(t), \qquad t > 0$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $D > 0$ mevcutsa ϕ, $\boldsymbol{\Delta_2}$ **şartını** sağlar denir ve $\phi \in \Delta_2$ ile gösterilir.

$$\phi(t_1) \leq K\phi(t_2), \qquad \big(\phi(t_2) \leq K\phi(t_1)\big), \qquad 0 < t_1 \leq t_2 < \infty$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $K > 0$ mevcutsa ϕ **kuasi-artandır** (kuasi-azalandır) denir.

$$\phi(t_1 + t_2) \geq \phi(t_1) + \phi(t_2) \quad \big(\phi(t_1 + t_2) \leq \phi(t_1) + \phi(t_2)\big), \qquad t_1, t_2 > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ϕ **üst toplamsaldır** (alt toplamsaldır) denir.

ϕ, fonksiyonunun sıfırdan farklı değerler aldığı kümenin kapanışına ϕ fonksiyonunun **desteği** (taşıyıcısı) denir ve supp ϕ ile gösterilir.

Aşağıda verilecek lemma, Δ_2 şartını sağlayan ve kuasi-artan herhangi bir ϕ fonksiyonunun belli kuvvetten daha hızlı artamayacağını göstermektedir (tersi doğru değildir, bkz., [56]).

Lemma 2.1. [29, Lemma 6.1.5] ϕ kuasi-artan ve $\phi \in \Delta_2$ ise,

$$\frac{\phi(s)}{s^p} \leq C\frac{\phi(t)}{t^p}, \qquad 0 < t \leq s < \infty$$

olacak biçimde $C > 1$ ve $p > 1$ mevcuttur.

İspat. $0 < t < s \leq 2t$ olsun. $\phi \in \Delta_2$ olduğundan $C = KD$ alınırsa her bir $p > 1$ için

$$\frac{\phi(s)}{s^p} \leq K\frac{\phi(2t)}{t^p} \leq C\frac{\phi(t)}{t^p}$$

olur. Genelliği bozmadan $C > 2$ kabul edilsin.

Eğer $0 < 2t < s$ ise

$$\phi(s) = \phi\left(\frac{s}{t}t\right) = \phi\left(2^{log_2\left(\frac{s}{t}\right)}\,t\right) \leq K\phi\left(2^{\left[log_2\left(\frac{s}{t}\right)\right]+1}\,t\right)$$

$$\leq KD^{\left[log_2\left(\frac{s}{t}\right)\right]+1}\phi(t) \leq KD^{\left(log_2\left(\frac{s}{t}\right)\right)+1}\phi(t) = KD\left(\frac{s}{t}\right)^{log_2 D}\phi(t)$$

dir. $p = log_2 D$ ve $C = KD$ alınırsa ispat tamamlanır (Burada $[\cdot]$ ile tamdeğer gösterilmiştir). $\boxdot$

Lemma 2.2. ([57, 66]) $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\phi \in \Delta_2$ ve $\phi(t)/t$, $(0,\infty)$ da kuasi-artan ise, $(0,\infty)$ da ϕ ye denk pozitif konveks bir fonksiyon mevcuttur.

İspat. $\phi(t)/t$ kuasi-artan olduğundan

$$\frac{\phi(t_1)}{t_1} \leq K \frac{\phi(t_2)}{t_2}, \qquad 0 < t_1 < t_2$$

olacak biçimde $K > 1$ mevcuttur. Şimdi

$$\psi(t) = \frac{1}{K} \int_0^{t/K} \sup_{0<\tau<s} \frac{\phi(\tau)}{\tau} ds\,, \qquad t > 0$$

fonksiyonunu ele alalım. ψ nin $(0, \infty)$ da konveks olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten de bunu görmek için g, $(0, \infty)$ da azalmayan olmak üzere

$$G(u) = \int_0^u g(s)ds, \quad u > 0$$

fonksiyonunun konveks olduğunu göstermek yeterlidir. Konveks fonksiyon tanımından $0 < u_1 < u_2 < \infty$ için

$$G\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(G(u_1) + G(u_2))$$

olduğu yani

$$\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} g(s)ds \leq \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} g(s)ds$$

olduğu gösterilmelidir: g monoton olduğundan

$$\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} g(s)ds \leq g\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} ds$$

$$= g\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} ds \leq \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} g(s) ds$$

dir.

Diğer taraftan her $t > 0$ için

$$\psi(t) \leq \frac{t}{K^2} \sup_{0<\tau<t/K} \frac{\phi(\tau)}{\tau} \leq \phi(t)$$

ve

$$K\psi(2Kt) = \int_0^{2t} \sup_{0<\tau<s} \frac{\phi(\tau)}{\tau} ds \geq \int_t^{2t} \sup_{0<\tau<s} \frac{\phi(\tau)}{\tau} ds \geq \frac{\phi(t)}{t} t = \phi(t)$$

dir.

ϕ azalmayan ve $\phi \in \Delta_2$ olduğundan Lemma 2.1 den,

$$\frac{\phi(s)}{s^p} \leq C \frac{\phi(t)}{t^p}, \ \ 0 < t \leq s$$

olacak biçimde $C > 1$ ve $p > 1$ mevcuttur .

Dolayısıyla

$$\phi(t) \leq C\left(\frac{t}{t/(2K)}\right)^p \phi\left(\frac{t}{2K}\right) = C(2K)^p \phi\left(\frac{t}{2K}\right)$$

dir. Böylece

$$\phi(t) \leq C2^p K^{p+1} \psi(t)$$

dir. Sonuç olarak $\psi \approx \phi$ elde edilir ve ispat tamamlanır. $\boxdot$

Tanım 2.3. $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty), 0 < r < \infty$ olsun. Her $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ negatif olmayan sonlu reel sayı kümesi için

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \phi(t_i)^r\right)^{1/r}$$

olacak biçimde bir $C > 0$ varsa ϕ, $\mathfrak{Q}_r$ **şartını** sağlar denir ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ ile gösterilir.

$0 < r < \infty$ olsun. $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ ise $\phi \in \Delta_2$ olduğu açıktır. Ayrıca $g: (0,\infty) \to (0,\infty)$ kuasi-azalan ve $\omega \in \mathfrak{Q}_r$ ise $\omega \cdot g \in \mathfrak{Q}_r$ dir.

Gerçekten, g kuasi-azalan olduğundan

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \leq C \min_i g(t_i)$$

olur. Böylece, $\omega \in \mathfrak{Q}_r$ olduğundan

$$\begin{aligned}
(\omega \cdot g)\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) &= \omega\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot g\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \omega(t_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \min_i g(t_i) \\
&= C \left(\sum_{i=1}^{n} (\omega(t_i) \cdot \min_i g(t_i))^r\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^{n} (\omega \cdot g)(t_i)\right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\omega \cdot g \in \mathfrak{Q}_r$ olduğunu gösterir.

3. ARTMAYAN YENİDEN DÜZENLEME

Bu bölümde, dağılım fonksiyonu, artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu ve maksimal fonksiyon, ağırlıklı olarak [4, Bölüm 2] den yararlanılarak verilecektir.

3.1. Dağılım Fonksiyonu

$(\mathcal{R}, \Sigma, \mu)$ keyfi bir ölçü uzayı olsun. Tez boyunca bu bölümün sonuçları uygulanırken çoğunlukla $\mathcal{R}$ ile $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ ya da $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ in Lebesgue ölçülebilir alt kümesi**,** Σ ile $\mathcal{R}$ deki tüm Lebesgue ölçülebilir alt kümeler gösterilecek ve μ olarak $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ de m Lebesgue ölçüsü alınacaktır.

Tanım 3.1. $\mu(A) > 0$ ve $B \subset A$ olacak biçimdeki her B kümesinin ölçüsü sıfıra ya da $\mu(A)$ ya eşit oluyorsa A ya μ ölçüsünün **atomu** denir.

Eğer her pozitif μ ölçülü küme atom içerirse, μ ölçüsüne atomik ölçü ve $(\mathcal{R}, \Sigma, \mu)$ uzayına **tamamıyla atomik uzay** denir**.** Eğer μ ölçüsünün hiç atomu yok ise bu ölçüye atomsuz ölçü ve $(\mathcal{R}, \Sigma, \mu)$ uzayına **atomsuz uzay** denir.

Örnek 3.2. m**,** Lebesgue ölçüsü $[a, b]$ deki her ölçülebilir A kümesinde atomsuzdur. Ayrıca her $\alpha \in [0, \mu(A)]$ için $\mu(B) = \alpha$ olacak biçimde bir $B \subset A$ kümesi mevcuttur.

Gerçekten, $F(x) = m(A \cap [a, x))$ şeklinde tanımlı fonksiyon $[a, b]$ de süreklidir. Lebesgue ölçüsü sayılabilir toplamsal olduğundan ispatı tamamlamak için ara değer teoremini uygulamak yeterlidir.

Teorem 3.3. (Sierpinski Teoremi) μ atomsuz ölçü olmak üzere her $\alpha \in [0, \mu(\mathcal{R})]$ için $\mu(A) = \alpha$ olacak biçimde $A \in \Sigma$ mevcuttur.

Tanım 3.4. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olmak üzere

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in \mathcal{R} : |f(x)| > \lambda\}, \quad \lambda \geq 0 \tag{3.1}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun **dağılım fonksiyonu** denir.

Tanım 3.5. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ ve $g \in \mathfrak{M}_0(S, v)$ olmak üzere f ve g fonksiyonlarının dağılım fonksiyonları eşitse, yani

$$\mu_f(\lambda) = v_g(\lambda), \qquad \lambda \geq 0$$

ise f ve g fonksiyonları **eş ölçülebilirdir** denir.

Önerme 3.6. [4, Bölüm 2, Önerme 1.3] $f, g, f_n \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$, $(n = 1,2, \dots)$ ve a sıfırdan farklı bir sabit olsun. μ_f dağılım fonksiyonu negatif olmayan, $[0, \infty)$ da sağdan sürekli, artmayan bir fonksiyondur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$|g| \leq |f| \;\; \mu - h.h.y. \;\Rightarrow\; \mu_g \leq \mu_f \tag{3.2}$$

$$\mu_{af}(\lambda) = \mu_f(\lambda/|a|), \qquad \lambda \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \tag{3.4}$$

$$|f| \leq \liminf_{n \to \infty} |f_n| \;\; \mu - h.h.y. \;\Rightarrow\; \mu_f \leq \liminf_{n \to \infty} \mu_{f_n} \tag{3.5}$$

özel olarak,

$$|f_n| \uparrow |f| \;\; \mu - h.h.y. \;\Rightarrow\; \mu_{f_n} \uparrow \mu_f$$

Örnek 3.7. [4, Bölüm 2, Örnek 1.4] $\{E_j\}_{j=1}^{n}$, $\mathcal{R}$ nin sonlu ölçülü ayrık alt kümeleri ailesi ve $a_1 > a_2 > \cdots a_n > a_{n+1} = 0$ olmak üzere

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{E_j}(x), \quad x \in \mathcal{R} \tag{3.6}$$

negatif olmayan basit fonksiyonu ele alındığında $\lambda \geq a_1$ ise $\mu_f(\lambda) = 0$, $a_2 \leq \lambda < a_1$ ise $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1)$, $a_3 \leq \lambda < a_2$ ise $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ olur. Genellenirse, (3.6) fonksiyonunun dağılım fonksiyonu

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_j \, \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda) \,, \quad \lambda \geq 0 \tag{3.7}$$

dır. Burada

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i), \qquad i = 1,2, \dots, n \tag{3.8}$$

dir.

3.2. Artmayan Yeniden Düzenleme

Tanım 3.8. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olmak üzere $[0, \infty)$ da

$$f^*(t) = \inf \{\lambda \geq 0 : \ \mu_f(\lambda) \leq t\}, \ t \geq 0 \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanan f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun artmayan yeniden düzenlenmesi denir.

Tez boyunca $\inf \emptyset = \infty$ kabul edilecektir. Böylece $\mu_f(\lambda) > t$, $\lambda \geq 0$ ise $f^*(t) = \infty$ olur. Eğer $(\mathcal{R}, \mu)$ sonlu ölçü uzayı ise μ_f dağılım fonksiyonu $\mu(\mathcal{R})$ ile sınırlıdır ve dolayısıyla $t \geq \mu(\mathcal{R})$ olduğunda $f^*(t) = 0$ olur. Bu nedenle f^* fonksiyonu

$[0,\mu(\mathcal{R}))$ de tanımlı kabul edilecektir. Eğer μ_f sürekli ve kesin azalansa f^*, μ_f nin tersidir. Gerçekten de genel bir f fonksiyonu için öncelikle μ_f dağılım fonksiyonu bulunup sonrada onun $[0,\infty)$ da Lebesgue ölçüsüne göre dağılım fonksiyonu m_{μ_f} hesaplanırsa f^* fonksiyonu elde edilir. Bu durum, (3.9) ile dağılım fonksiyonunun tanımı ve artmayanlığının sonucu olarak

$$f^*(t) = sup\{\lambda \geq 0 : \ \mu_f(\lambda) > t\} = m_{\mu_f}(t), \quad t \geq 0 \tag{3.10}$$

şeklinde görülebilir.

Örnek 3.9. [4, Bölüm 2, Örnek 1.6]

(a) (3.6) da verilen basit fonksiyonun artmayan yeniden düzenlemesi (3.9) tanımından faydalanarak hesaplanırsa $t \geq m_3$ için $f^*(t) = 0$, $m_3 > t \geq m_2$ için $f^*(t) = a_3$ ve $m_2 > t \geq m_1$ için $f^*(t) = a_2$ olur. Benzer biçimde devam edildiğinde, $m_0 = 0$ olmak üzere,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \quad t \geq 0 \tag{3.11}$$

elde edilir.

Geometrik anlamda bakıldığında f^* fonksiyonunu elde etmek için sadece f fonksiyonunun grafiğinde yer alan dikey bloklar azalan biçimde sıralanmıştır. Sıçrama noktalarındaki f^* değeri sağdan süreklilik sağlanacak şekilde tanımlanmıştır.

(b) Bazı durumlarda dikey bloklar yerine yatay bloklarla çalışmak daha kullanışlıdır. b_k pozitif sabitler, F_k sonlu ölçülü ve $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$ şeklinde artan bir kümeler dizisi olmak üzere (3.6) basit fonksiyonunun

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \; \chi_{F_k}(x) \tag{3.12}$$

şeklinde yazılabilmesi için (a) dan

$$b_k \; = a_k \; - a_{k+1}, \quad F_k \; = \cup_{j=1}^{k} E_j, \quad k \; = 1,2, \dots, n$$

olmalıdır. Bu durumda

$$f^*(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \; \chi_{[0,\mu(F_k))}(t), \quad t \geq 0 \tag{3.13}$$

bulunur.

(c) $f(x) = 1 - \; e^{-x}$, $(0 < x < \infty)$ fonksiyonunun Lebesgue ölçüsüne göre dağılım fonksiyonu,

$$m_f(\lambda) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq \lambda < 1 \\ 0, & \lambda \geq 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Böylece

$$f^*(t) = 1, \qquad t \geq 0$$

bulunur.

(d) $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 1 - (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \quad , & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun Lebesgue ölçüsüne göre dağılım fonksiyonu,

$$m_f(\lambda) = \begin{cases} 2\sqrt{1-\lambda}\,, & 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 \quad , & \lambda > 1 \end{cases}$$

olur. Buradan

$$f^*(t) = \begin{cases} 1 - t^2/4\,, & 0 \le t \le 2 \\ \quad 0 \quad\;\;, & t > 2 \end{cases}$$

bulunur.

(e) $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad x \ge 0$$

fonksiyonunun Lebesgue ölçüsüne göre dağılım fonksiyonu,

$$m_f(\lambda) = \begin{cases} \infty, & 0 \le \lambda < 1 \\ 0, & \lambda \ge 1 \end{cases}$$

olur. Buradan

$$f^*(t) = 1, \qquad t \ge 0$$

dir.

Önerme 3.10. [4, Bölüm 2, Önerme 1.7] $f, g, f_n\ (\mathcal{R}, \mu) \in \mathfrak{M}_0, (n = 1,2,\dots)$ ve a herhangi bir skaler olmak üzere, f^* fonksiyonu negatif olmayan, $[0,\infty)$ da sağdan sürekli, artmayan bir fonksiyondur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$|g| \le |f| \ \ \mu - h.h.y. \ \Rightarrow \ \ g^* \le f^* \tag{3.14}$$

$$(a\, f)^* = |a| f^* \tag{3.15}$$

$$(f+g)^*\,(t_1+t_2) \le f^*(t_1) + g^*(t_2), \qquad t_1, t_2 \ \ge 0 \tag{3.16}$$

$$(fg)^* \, (t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) \, g^*(t_2), \qquad t_1, t_2 \; \geq 0 \tag{3.17}$$

özel olarak,

$$(f + g)^* \, (t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2), \qquad t \; \geq 0 \tag{3.18}$$

$$(fg)^*(t) \leq f^*(t/2) \, g^*(t/2), \qquad t \; \geq 0 \tag{3.19}$$

$$|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n| \;\; \mu - h.h.y. \;\; \Rightarrow \;\; f^* \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^* \tag{3.20}$$

özel olarak,

$$|f_n| \uparrow |f| \;\; \mu - h.h.y. \;\; \Rightarrow \;\; f_n^* \uparrow f^*$$

$$f^*\left(\mu_f(\lambda)\right) \leq \lambda, \; (\, \mu_f(\lambda) < \infty) \;\text{ ve }\; \mu_f\big(f^*(t)\big) \leq t, \; (f^*(t) < \infty) \tag{3.21}$$

$$f \text{ ve } f^* \text{ eş ölçülüdür} \tag{3.22}$$

$$(|f|^p)^* = (f^*)^p, \quad 0 < p < \infty \, . \tag{3.23}$$

Not 3.11.

$$\mu(\{x \in \mathcal{R} : |f(x)| \geq \lambda\}) = m(\{t \geq 0 : f^*(t) \geq \lambda\}$$

eşitliği genel olarak sağlanmaz. Örneğin,

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0$$

alınırsa $f^*(t) \equiv 1$ dir. Fakat

$$\mu\left(\left\{x \in \mathcal{R}: \left|\frac{x}{1+x}\right| \geq 1\right\}\right) = 0 \neq \infty = m(\{t \geq 0 : 1 \geq 1\})$$

olduğu görülür.

Not 3.12. "*" operatörü ne alt toplamsal, ne de alt çarpımsaldır. Yani

$$(f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t)$$
$$(fg)^*(t) \leq f^*(t)\, g^*(t)$$

eşitsizlikleri her zaman sağlanmayabilir.

Örnek 3.13. A ve B ölçülebilir kümeler, $A \cap B \neq \emptyset$, $0 < \mu(A) < \mu(B)$ olmak üzere $f(x) = \chi_A(x)$ ve $g(x) = \chi_B(x)$ alınırsa, her $t \geq 0$ için

$$f^*(t) = \chi_{[0,\mu(A))}(t)$$

ve

$$g^*(t) = \chi_{[0,\mu(B))}(t)$$

dir. Dolayısıyla

$$f^*(t) + g^*(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < \mu(A) \\ 1, & \mu(A) \leq t < \mu(B) \\ 0, & \mu(B) \leq t \end{cases}$$

dir.

$$(f+g)(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$$

olduğundan

$$(f+g)^*(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < \mu(A \cap B) \\ 1, & \mu(A \cap B) \leq t < \mu(A \cup B) \\ 0, & \mu(A \cup B) \leq t \end{cases}$$

dir. Buradan $\mu(B) < t < \mu(A \cup B)$ olacak biçimde bir t için

$$(f+g)^*(t) = 1 \geq 0 = f^*(t) + g^*(t)$$

olur. Yani "*" operatörü alt toplamsal değildir. Benzer şekilde bu operatörün alt çarpımsal olmadığı da gösterilebilir.

Teorem 3.14. (Teklik) [57, s.59] f fonksiyonu ile eş ölçülebilir sağdan sürekli tek bir fonksiyon vardır.

Önerme 3.15. [4, Bölüm 2, Önerme 1.8] $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olmak üzere her $0 < p < \infty$ için

$$\int_{\mathcal{R}} |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty f^{*p}(t) dt \tag{3.24}$$

sağlanır. Ayrıca $p = \infty$ için

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathcal{R}} |f(x)| = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0) \tag{3.25}$$

dir.

Yukarıdaki önerme bir fonksiyonun L^p normunun dağılım fonksiyonu ve artmayan yeniden düzenlemesi cinsinden yazılışını ifade etmektedir.

Lemma 3.16. [4, Bölüm 2, Önerme 2.1] g, $(\mathcal{R},\mu)$ de negatif olmayan basit fonksiyon ve E, $\mathcal{R}$ nin keyfi μ-ölçülebilir bir alt kümesi olmak üzere

$$\int_E g d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s)ds \tag{3.26}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.17.[4, Bölüm 2, Teorem 2.2] (Hardy-Littlewood Teoremi) $f,g \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olmak üzere

$$\int_{\mathcal{R}} |fg| d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s)g^*(s)ds \tag{3.27}$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 3.18. $(\mathcal{R},\mu)$ σ-sonlu uzay olsun. Her $f,g \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ için

$$\int_0^{\infty} f^*(s)g^*(s)ds = \sup \int_{\mathcal{R}} |f\tilde{g}| d\mu \tag{3.28}$$

eşitliği sağlanırsa $(\mathcal{R},\mu)$ uzayına **rezonant uzay** denir. Burada supremum $\mathcal{R}$ de tanımlı g ile eş ölçülü olan tüm $\tilde{g}$ fonksiyonları üzerinden alınmaktadır.

Benzer biçimde eğer her bir $f,g \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ için

$$\int_0^{\infty} f^*(s)g^*(s)ds = \int_{\mathcal{R}} |f\tilde{g}| d\mu \tag{3.29}$$

eşitliğini sağlayacak biçimde $\mathcal{R}$ de g ile eş ölçülü bir $\tilde{g}$ fonksiyonu mevcutsa, $(\mathcal{R},\mu)$ uzayına **güçlü rezonant uzay** denir.

Lemma 3.19. [4, Bölüm 2, Lemma 2.5] $(\mathcal{R},\mu)$ sonlu atomsuz ölçü uzayı, $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olsun. Bu durumda her $t \in [0,\mu(\mathcal{R}))$ için

$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_0^t f^*(s) ds \tag{3.30}$$

eşitliğini sağlayan $\mu(E_t) = t$ olcak biçimde bir E_t ölçülebilir kümesi mevcuttur. Ayrıca E_t kümeleri t ye göre azalandır yani

$$0 \leq s \leq t \leq \mu(\mathcal{R}) \;\Rightarrow\; E_s \subset E_t \tag{3.31}$$

dir.

Teorem 3.20. [4, Bölüm 2, Teorem 2.6] σ-sonlu $(\mathcal{R},\mu)$ uzayının güçlü rezonant olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın
(i) atomsuz uzay;
(ii) tüm atomları eş ölçülü olan tamamen atomik uzay;
özelliklerinden birini sağlayan sonlu ölçülü bir uzay olmasıdır.

Teorem 3.21. [4, Bölüm 2, Teorem 2.7] σ-sonlu $(\mathcal{R},\mu)$ uzayının rezonant olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın
(i) atomsuz uzay;
(ii) tüm atomları eş ölçülü olan tamamen atomik uzay;
özelliklerinden birini sağlamasıdır.

Aşağıda verilecek sonuç Teorem 3.20 ve 3.21 in bir sonucudur.

Sonuç 3.22. [4, Bölüm 2, Sonuç 2.8] σ-sonlu $(\mathcal{R},\mu)$ ölçü uzayının güçlü rezonant olması için gerek ve yeter koşul $(\mathcal{R},\mu)$ nün rezonant olması ve $\mu(\mathcal{R})$ nin sonlu olmasıdır.

3.3. Maksimal Fonksiyon

g fonksiyonu, ölçüsü t sayısına eşit olan bir E kümesinin karakteristik fonksiyonu olduğunda (3.27) Hardy-Littlewood eşitsizliği

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f| d\mu \leq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \ \ (f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)) \tag{3.32}$$

eşitsizliğine dönüşür. Dolayısıyla $|f|$ nin t ölçülü herhangi bir küme üzerindeki ortalaması, f^* ın $(0,t)$ üzerindeki ortalamasını aşmaz. Ayrıca (3.32) nin sağ tarafındaki ortalama f^* ın t ölçülü kümeler içindeki ortalamalarının en büyüğüdür (Bu doğrudan f^* ın azalanlığından ya da (3.32) de $(\mathcal{R},\mu)$ yerine $([0,\infty),\ m)$ ve $f = f^*$ alınarak görülebilir). Bu sebeple, (3.32) nin sağ tarafındaki fonksiyon maksimal fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 3.23. $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu)$ olmak üzere

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\ , \qquad t > 0 \tag{3.33}$$

fonksiyonuna f^* ın maksimal fonksiyonu denir.

$f \to f^{**}$ maksimal operatörünün bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.24. [4, Bölüm 2, Önerme 3.2] $f, g, f_n \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R},\mu), (n = 1,2, \dots)$ ve a herhangi bir sabit olsun. Bu durumda f^{**} negatif olmayan, $(0,\infty)$ da sürekli, artma-yan bir fonksiyondur ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$f^{**} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu - h.h.y. \tag{3.34}$$

$$f^* \leq f^{**} \tag{3.35}$$

$$|g| \leq |f| \quad \mu - h.h.y. \quad \Rightarrow \quad g^{**} \leq f^{**} \tag{3.36}$$

$$(af)^{**} = |a|\, f^{**} \tag{3.37}$$

$$|f_n| \uparrow |f| \quad \mu - h.h.y. \quad \Rightarrow \quad {f_n}^{**} \uparrow f^{**} \tag{3.38}$$

Önerme 3.25. [4, Bölüm 2, Önerme 3.3] σ-sonlu $(\mathcal{R}, \mu)$ ölçü uzayı ve t, μ nün görüntü kümesi içinde bulunan herhangi bir pozitif sayı olsun, $f \in \mathfrak{M}_0(\mathcal{R}, \mu)$ olmak üzere:

(a) $(\mathcal{R}, \mu)$ rezonant ise

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f| d\mu : \mu(E) = t \right\} \tag{3.39}$$

(b) $(\mathcal{R}, \mu)$ güçlü rezonant ise

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_E |f| d\mu \tag{3.40}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu(E) = t$ olacak biçimde $E \subset \mathcal{R}$ mevcuttur.

(3.39) yardımıyla

$$(f+g)^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x) + g(x)| d\mu$$

$$\leq \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \left(\int_E |f(x)| d\mu + \int_E |g(x)| d\mu \right)$$

$$\leq \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |f(x)| d\mu + \frac{1}{t} \sup_{\mu(E)=t} \int_E |g(x)| d\mu$$

$$= f^{**}(t) + g^{**}(t)$$

dır. Dolayısıyla t, μ nün görüntü kümesinin içindedir ve $(\mathcal{R}, \mu)$ rezonant ise

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t) \tag{3.41}$$

eşitsizliği sağlanır yani, "**" operatörü alt toplamsaldır. Ayrıca $(\mathcal{R}, \mu)$ atomsuz uzay ise Teorem 3.21 den $(\mathcal{R}, \mu)$ rezonanttır. Eğer uzay aynı zamanda sonsuz ise μ nün görüntü kümesi $[0, \infty)$ aralığındadır ve dolayısıyla (3.41), her $t > 0$ değeri için sağlanır. Aynı sonucun atomsuz sonlu uzaylar içinde sağlandığını görmek zor değildir. Gerçekten de, $t_0 = \mu(\mathcal{R})$ sonlu ise $0 < t \leq t_0$ aralığındaki t ler için (3.41) hemen sağlanır. $t > t_0$ için $f^*(t)$, $g^*(t)$ ve $(f + g)^*(t)$ sıfır olacağından

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t_0} f^*(s) ds = \frac{t_0}{t} f^{**}(t_0)$$

$$g^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t_0} g^*(s) ds = \frac{t_0}{t} f^{**}(t_0)$$

$$(f + g)^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t} (f + g)^*(s) ds = \frac{t_0}{t} (f + g)^{**}(t_0)$$

dır. Böylece, (3.41) eşitsizliği t_0 için sağlandığından

$$(f + g)^{**}(t) = \frac{t_0}{t} (f + g)^{**}(t_0)$$

$$\leq \frac{t_0}{t} \left(f^{**}(t_0) + g^{**}(t_0)\right)$$

$$= f^{**}(t) + g^{**}(t)$$

bulunur. Yani (3.41) her $t > 0$ için sağlanır.

Keyfi ölçülü uzayda maksimal operatörün alt toplamsallığı ise [4, Bölüm 2, Kısım 3] te verilen "retract" yöntemi yardımıyla atomsuz uzaylardan türetilebilir.

4. $\Lambda^p(w)$ ve $\Gamma^p(w)$ LORENTZ UZAYLARI

X reel bir vektör uzayı olmak üzere,

1. $\|x\| > 0,\ x \in X,\ x \neq 0;$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|,\ \lambda \in \mathbb{R};$
3. $\|x_1 + x_2\| \leq C(\|x_1\| + \|x_2\|), x_1, x_2 \in X$ olacak biçimde x_1 ve x_2 den bağımsız bir $C > 0$ sayısı vardır;

şartlarını sağlayan $\|\cdot\|: X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna X üzerinde bir kuasi-norm ve $(X, \|\cdot\|)$ uzayına **kuasi-normlu uzay** denir.

X kuasi-normlu uzayı $\|\cdot\|$ kuasi-normunun türettiği topolojiye göre tam metriklenebilir ise X e **kuasi-Banach uzayı** denir.

X kuasi-Banach uzayı $\mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ nin alt uzayı olsun. Eğer

1. Hemen hemen her yerde pozitif bir $u \in X$ vardır;
2. $g \in X$ ve $f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ için $|f| \leq |g|\ h.h.y.$ olması $f \in X$ ve $\|f\|_X \leq \|g\|_X$ olmasını gerektirir;

özellikleri sağlanırsa X uzayına $(\mathbb{R}^n, dx)$ ölçü uzayı üzerinde **kuasi-Banach fonksiyon uzayı** denir.

X bir kuasi-Banach fonksiyon uzayı ve $0 < r < \infty$ olsun. Eğer sonlu ve ayrık destekli her $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X$ fonksiyon kümesi için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_X^r\right)^{1/r} \leq C \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i\right\|_X$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde bir pozitif C sabiti mevcutsa X uzayına **alt r-kestirim uzayı** denir (bkz., [63]).

Minkowski eşitsizliğinin bir sonucu olarak $0 < p, r < \infty$ için ℓ^p dizi uzayının alt r-kestirim uzay olması için gerek ve yeter koşul $r \geq p$ olmasıdır.

$(X, \|\cdot\|_X)$, $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ de reel değerli, Lebesgue ölçülebilir, lokal integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan bir kuasi-Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer

1. $g^* \leq f^*$ ve $f \in X \Rightarrow g \in X$ ve $\|g\|_X \leq \|f\|_X$;
2. $m(A) < \infty \Rightarrow \chi_A \in X$;
3. $0 \leq f_n \uparrow$ ve $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_X \leq M \Rightarrow f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in X$ ve $\|f\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_X$;

özellikleri sağlanırsa X uzayına **yeniden düzenleme altında değişmez (*r.i.*) uzay** denir (bkz., [2]).

$(\mathbb{R}^n, dx)$ üzerinde her bir *r.i.* X uzayı için, $(0, \infty)$ üzerinde

$$f \in X \iff f^* \in \bar{X} \wedge \|f\|_X = \|f^*\|_{\bar{X}}$$

özelliğine sahip bir *r.i.* $\bar{X}$ uzayı vardır . Bu $\bar{X}$ uzayına X uzayının **yeniden düzenleme altında değişmez ilişikli uzayı** denir (bkz., [4]).

X, *r.i.* uzaylarının pek çok özelliği, $|E| = t$ olmak üzere

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X$$

biçiminde tanımlanan φ_X temel fonksiyonu yardımıyla formüle edilebilir.

Girişte belirtildiği üzere fonksiyonların artmayan yeniden düzenlemesi yardımıyla tanımlanan uzaylardan en önemlileri klasik Lorentz uzayları $\Lambda^p(w)$ ve $\Gamma^p(w)$ ile bu uzayların zayıf tipli halleri olan $\Lambda^{p,\infty}(w)$ ve $\Gamma^{p,\infty}(w)$ uzaylarıdır.

Klasik ve zayıf tipli Lorentz uzayları bilinen pek çok fonksiyon uzaylarını da içerir (bkz., örneğin, [20]).

Klasik Lorentz uzaylarının en temel örneği $p, q \in (0, \infty]$ için

$$L^{p,q} = \{f \in \mathfrak{M}(\mathcal{R}, \mu) : \|f\|_{p,q} < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan uzaydır. Bu uzaylar arasında parametrelere ve ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki gibi pek çok ilişki mevcuttur.

Bu uzayların tanımlarından $\Lambda^p(w) \hookrightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$ olduğu kolayca görülebilir.

Ağırlık fonksiyonu özel olarak $v(t) = t^{q/p-1}$, $q \in (0, \infty)$ alındığında,

$$\Lambda^q(v) = L^{p,q}$$

olduğu görülür. Ağırlık fonksiyonu $v(t) = 1$ olduğunda,

$$\Lambda^{p,\infty}(v) = L^{p,\infty}$$

dur. $\tilde{v}(t) = \int_t^\infty s^{-1} v(s)\, ds,\ t \in (0, \infty)$ şeklindeki ağırlık fonksiyonu için,

$$\Gamma^1(v) = \Lambda^1(\tilde{v})$$

olduğu Fibuni teoremi yardımıyla görülebilir.

Benzer biçimde, $\tilde{v}(t) = (1/p)V(t)^{1/p-1} v(t)$ olmak üzere $p \in (0, \infty)$ için

$$\Lambda^{p,\infty}(v) = \Lambda^{1,\infty}(\tilde{v}) \text{ ve } \Gamma^{p,\infty}(v) = \Gamma^{1,\infty}(\tilde{v})$$

dır. Ayrıca $p \in (0, \infty)$ ve her v ağırlık fonksiyonu için

$$\Gamma^p(v) \hookrightarrow \Lambda^p(v), \quad \Lambda^p(v) \hookrightarrow \Lambda^{p,\infty}(v) \text{ ve } \Gamma^p(v) \hookrightarrow \Gamma^{p,\infty}(v)$$

doğrudur.

Lorentz'in [64] teki ispatına göre $\|\cdot\|_{\Lambda^p(v)}$ nin $p \geq 1$ durumunda norm olması için gerek ve yeter koşul v nin artmayan olmasıdır. $\|\cdot\|_{\Lambda^p(v)}$ nin bir norma denk olduğu, başka bir deyişle $\Lambda^p(v)$ nin bir Banach uzayına denk olduğu, ağırlık fonksiyonları sınıfı ise daha geniştir. $p \in (1,\infty)$ için $\Lambda^p(v)$ uzayının bir Banach uzayına denk olması için gerek ve yeter koşul

$$t^p \int_t^\infty s^{-p} v(s)ds \leq C \int_0^t v(s)ds, \;\; t > 0 \tag{4.1}$$

eşitsizliğinin t den bağımsız $C > 0$ sabiti ile sağlanmasıdır (bkz., örneğin, [77] Teorem 4]). (4.1) i sağlayan v için $v \in B_p$ denir.

Diğer taraftan $\Lambda^1(v)$ uzayının Banach uzayına denk olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{t}\int_0^t v(s)ds \leq C \frac{1}{s}\int_0^s v(y)dy, \;\; 0 < s \leq t \tag{4.2}$$

eşitsizliğinin t den bağımsız $C > 0$ sabiti ile sağlanmasıdır ([8, Teorem 2.3]). (4.2) yi sağlayan v için $v \in B_{1,\infty}$ denir. $v \in B_{1,\infty}$ koşulu $v \in B_1$ koşulundan daha zayıftır. (4.2) koşulunun (4.1) in $p \to 1+$ iken limit durumu olmadığı görülmektedir. $p \in (0,\infty)$ olmak üzere $v \in B_p$ olması için gerek ve yeter koşulun $\Lambda^p(v) = \Gamma^p(v)$ olduğunu hatırlatalım (bkz., [1]). Sawyer [77, Teorem 4] te $v \in B_p$ olması için gerek ve yeter koşulun

$$\left(\int_0^t v(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{s}\int_0^s v(y)dy\right)^{1-p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}} \leq Ct, \qquad t > 0$$

olduğunu göstermiştir. Bu eşitsizliğin

$$\left(\int_0^t \left(\frac{1}{s}\int_0^s v(y)dy\right)^{-p'} v(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^t v(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \leq Ct, \qquad t > 0 \tag{4.3}$$

eşitsizliğine denk olduğu kısmi integrasyonla gösterilebilir. Buradan özel olarak (4.3) koşulunun $p \to 1+$ iken limit durumunun (4.2) olduğu kolayca görülebilir.

Bilindiği gibi $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$, $0 < p < \infty$ fonksiyonelinin kuasi-norm olması için gerek ve yeter şart $W \in \Delta_2$ olmasıdır (bkz., örneğin, [12, sonuç 2.2]). Burada

$$W(x) := \int_0^x w(t)dt, \quad x > 0$$

şeklinde tanımlanır.

Gerçekten: $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ nin kuasi-norm olduğunu kabul edip $f = \chi_{(0,x/2]}$ ve $g = \chi_{(x/2,x]}$ olarak alınırsa her $x \in (0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} W^{1/p}(x) &= \|\chi_{(0,x]}\|_{\Lambda^p(w)} \le C\left(\|\chi_{(0,x/2]}\|_{\Lambda^p(w)} + \|\chi_{(x/2,x]}\|_{\Lambda^p(w)}\right) \\ &= 2CW^{1/p}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Yani $W \in \Delta_2$ dir. Tersi de doğrudur: $W \in \Delta_2$ olduğu kabul edilirse,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\Lambda^p(w)} &= \left(\int_0^\infty (f+g)^*(t)^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_0^\infty \left[f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty \left[f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \left[g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty \left[f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^p w\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^\infty \left[g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]^p w\left(\frac{t}{2}\right)d\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{\Lambda^p(w)} + \|g\|_{\Lambda^p(w)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$w, (0,\infty)$ da $W \in \Delta_2$, $W(\infty) = \infty$ sağlanacak biçimde bir ağırlık fonksiyonu ise $\Lambda^p(w)$, $0 < p < \infty$ uzayı bir *r.i.* kuasi-Banach fonksiyon uzayıdır (bkz., örneğin, [11, Bölüm 2.2] ve [54]).

Önerme 4.1. ([54], Önerme 1) $0 < p < \infty, w_1$ ve w_2 ağırlık fonksiyonları olsun. Her bir f fonksiyonu için

$$C^{-1}\|f\|_{\Lambda^p(w_1)} \leq \|f\|_{\Lambda^p(w_2)} \leq C\|f\|_{\Lambda^p(w_1)}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f den bağımsız bir C sabitinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $W_1 \approx W_2$ olmasıdır. Burada $W_i(t) = \int_0^t w_i(\tau)d\tau,\ i = 1,2,\ t > 0.$

X bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq M \subset X$ verilsin. M de olan vektörlerin tüm lineer kombinasyonlarının kümesine M nin gereni denir.

Teorem 4.2. ([54, Teorem 1]) $0 < p < \infty$ ve $W \in \Delta_2$ olmak üzere $\Lambda^p(w)$ Lorentz uzayı ℓ^p dizi uzayının izomorfik kopyasını içerir.

İspat. $\mathrm{I} = (0, 1]$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Gereni $\Lambda^p(w)$ de ℓ^p nin izomorfik kopyası olacak biçimde ayrık destekli $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Lambda^p(w)$ fonksiyon dizisi oluşturalım.

$$k_1 = 1, \mathbb{N} \ni N_1 > k_1,\ b_1 > 0\ \text{ ve }\ b_1^p W(2^{-k_1}) = 1, b_1^p W(2^{-N_1}) < \varepsilon/4$$

olmak üzere

$$f_1 = b_1\, \chi_{(1-2^{-k_1},1)}$$

alınırsa

$$\|f_1\|_{\Lambda^p(w)} = \left(\int_0^1 b_1^p\, \chi_{(0,2^{-k_1})}(t)w(t)dt\right)^{1/p} = \left(b_1^p W(2^{-k_1})\right)^{1/p} = 1$$

ve

$$\int_0^{2^{-N_1}} (f_1^*(t))^p w(t)dt = \int_0^{2^{-N_1}} b_1^p\, \chi_{(0,2^{-k_1})}(t) w(t)dt = b_1^p\, W(2^{-N_1}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

tür.

$\Sigma_\emptyset = 0$ olduğunu kabul edelim. Tümevarım yöntemiyle devam edilirse her bir $j = 1,2,\dots$ için

$$f_j = b_j\, \chi_{\left(1-\sum_{i=1}^{j} 2^{-k_i},1-\sum_{i=1}^{j-1} 2^{-k_i}\right)},$$

fonksiyonunun

$$f_j^{\,*} = b_j \chi_{\left(0,2^{-k_j}\right)},$$

$$\left\|f_j\right\|_{\Lambda^p(w)} = \left(b_j^p\left(\, W(2^{-k_j})\right)\right)^{1/p} = 1$$

ve

$$\int_0^{2^{-N_j}} (f_j^{\,*}(t))^p w(t)dt = b_j^p\, W(2^{-N_j}) < \frac{\varepsilon}{4^j}, \qquad k_j < N_j < k_{j+1} - 1$$

şartlarını sağlayacak şekilde $\left\{N_j\right\}_{j=1}^{\infty}$, $\left\{k_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ doğal sayı dizileri ve $\left\{b_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ pozitif sayı dizisi bulunabilir. $b_j = W(2^{-k_j})^{-1/p}$, $j \in \mathbb{N}$ olduğundan $b_j < b_{j+1}$ dir. Yeniden düzenleme fonksiyonunun tanımı gereğince

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j^p\right)^* = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^p\, \chi_{B_j}$$

olacak biçimde her bir $j = 1,2,\dots$ için $\left|B_j\right| = 2^{-k_j}$ ve $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = (0,\alpha), \alpha \leq 1$ özelliklerine sahip $\left\{B_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ aralıklar dizisi vardır.

$\{a_i\} \in \ell^p, \|\{a_i\}\|_{\ell^p}^p = \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p \leq 1$ olsun. $N_0 = 0$ ve C =max$\{2^{p-1}, 1\}$ olmak üzere

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|_{\Lambda^p(w)}^p = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right)^{*p} (t) w(t) dt$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left\{\left(a_{j+1} f_{j+1} + \sum_{i \neq j+1} a_i f_i\right)^* (t)\right\}^p w(t) dt$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left\{(a_{j+1} f_{j+1})^* \left(\frac{t}{2}\right) + \left(\sum_{i \neq j+1} a_i f_i\right)^* \left(\frac{t}{2}\right)\right\}^p w(t) dt$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left\{(a_{j+1} f_{j+1})^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) + \left(\sum_{i \neq j+1} a_i f_i\right)^{*p} \left(\frac{t}{2}\right)\right\} w(t) dt$$

$$= C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} (a_{j+1} f_{j+1})^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) w(t) dt$$

$$+ C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i \neq j+1} a_i f_i\right)^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) w(t) dt$$

dir. Buradan

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|_{\Lambda^p(w)}^p \leq C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} (a_{j+1} f_{j+1})^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) w(t) dt$$

$$+ C \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i \neq j+1} a_i f_i\right)^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) w(t) dt$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında bulunan integral ifadeleri ayrı ayrı incelenirse: her bir $j = 0,1, \ldots$ için $k_{j+1} - 1 > N_j$ olduğundan

$$P_{j+1} := \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} (a_{j+1} f_{j+1})^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) w(t) dt$$

$$= |a_{j+1}|^p \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} b_{j+1}^p \, \chi_{\left(0,2^{-k_{j+1}+1}\right)}(t)w(t)dt$$

$$= |a_{j+1}|^p \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-(k_{j+1}-1)}} b_{j+1}^p w(t)dt$$

dir. $W \in \Delta_2$ olduğu dikkate alınırsa

$$\int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-(k_{j+1}-1)}} b_{j+1}^p \, w(t)dt \leq b_{j+1}^p W\left(2^{-(k_{j+1}-1)}\right) \leq K b_{j+1}^p W\left(2^{-k_{j+1}}\right) = K$$

olur. Dolayısıyla

$$P_{j+1} \leq K|a_{j+1}|^p, \qquad j = 0,1, \dots$$

dir.

$|a_i| \leq 1, i \in \mathbb{N}$ olduğundan her bir $j = 0,1, \dots$ için

$$Q_{j+1} := \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i \neq j+1} a_i f_i\right)^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) w(t)dt \leq \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i \neq j+1} f_i\right)^{*p} \left(\frac{t}{2}\right) w(t)dt$$

dir. Ayrıca, yeniden düzenleme fonksiyonunun tanımı gereğince

$$\left(\sum_{i \neq j+1} f_i\right)^{*p} = \sum_{i=j+2}^{\infty} b_i^p \chi_{B_i} + \sum_{i=1}^{j} b_i^p \chi_{E_i}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde $|E_i| = 2^{-k_i}$, $i = 1, \dots, j$ özelliğine sahip E_i aralıkları vardır ve $\bigcup_{i=j+2}^{\infty} B_i \cup \bigcup_{i=1}^{j} E_i$ de bir aralıktır. $k_{j+2} - 2 \geq k_{j+1} - 1 \geq N_{j+1}$ olduğundan,

$$\left|\bigcup_{i=j+2}^{\infty} 2B_i\right| \leq \sum_{i=j+2}^{\infty} |2B_i|$$

$$= 2\sum_{i=j+2}^{\infty} |B_i| \leq 2\sum_{i=j+2}^{\infty} 2^{-k_i} \leq 2\sum_{i=k_{j+2}}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-(k_{j+2}-2)} \leq 2^{-N_{j+1}}$$

dir. Dolayısıyla her bir $j = 0,1, \dots$ için

$$\int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i=j+2}^{\infty} b_i^p \chi_{B_i}\right)\left(\frac{t}{2}\right) w(t)dt = \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i=j+2}^{\infty} b_i^p \chi_{2B_i}\right)(t) w(t)dt = 0$$

olur.

$N_j > k_j$ ve $|E_i| = 2^{-k_i}$ olduğundan $\chi_{2E_i \cap (0,2^{-N_j})} \leq \chi_{\left(0,2^{-k_j}\right)}$, $i = 1, \dots, j$ dir. Buradan

$$\int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i=1}^{j} b_i^p \chi_{E_i}\right)\left(\frac{t}{2}\right) w(t)dt = \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} \left(\sum_{i=1}^{j} b_i^p \chi_{2E_i}\right)(t) w(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} b_i^p \chi_{2E_i}(t) w(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \int_{0}^{2^{-N_j}} b_i^p w(t)dt$$

$$\leq j \int_{0}^{2^{-N_j}} b_j^p w(t)dt$$

$$= j \int_{0}^{2^{-N_j}} f_j^{*p}(t) w(t)dt < j\frac{\varepsilon}{4^j} < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

olur. O halde $Q_1 = 0$ ve $Q_{j+1} < \varepsilon/2^j$, $j = 1,2, \dots$ dir.

Yukarıdaki eşitsizliklerden her $\{a_i\} \in \ell^p$, $\|\{a_i\}\|_{\ell^p} \leq 1$ için

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|_{\Lambda^p(w)}^p \leq CK\sum_{j=0}^{\infty}\left|a_{j+1}\right|^p + C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^j} \leq CK\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|a_{j+1}\right|^p + \varepsilon\right)$$

elde edilir.

Böylece her $\{a_i\} \in \ell^p$, $\|\{a_i\}\|_{\ell^p} \leq 1$ için

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|_{\Lambda^p(w)} \leq (CK)^{1/p}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left|a_{j+1}\right|^p + \varepsilon\right)^{1/p}$$

doğrudur.

Dolayısıyla her $\{a_i\} \in \ell^p$ için

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|_{\Lambda^p(w)} \leq M\|\{a_i\}\|_{\ell^p}$$

olacak biçimde bir $M > 0$ vardır.

Diğer taraftan f_j ayrık destekli ve $|\alpha\chi_A + \beta\chi_B| = |\alpha|\chi_A + |\beta|\chi_B$, $A \cap B = \emptyset$ olduğundan her $\{a_i\} \in \ell^p$ için

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right\|_{\Lambda^p(w)}^p &= \sum_{j=0}^{\infty}\int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}}\left\{\left(\left|a_{j+1}f_{j+1}\right| + \left|\sum_{i\neq j+1} a_i f_i\right|\right)^*(t)\right\}^p w(t)dt \\ &\geq \sum_{j=0}^{\infty}\left|a_{j+1}\right|^p\int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} f_{j+1}^*(t)^p w(t)dt\end{aligned}$$

ve $N_j < k_{j+1} < N_{j+1}$ olduğundan

$$\int_{2^{-N_{j+1}}}^{2^{-N_j}} f_{j+1}^*(t)^p w(t)dt = \int_0^1 f_{j+1}^*(t)^p w(t)dt - \int_0^{2^{-N_{j+1}}} f_{j+1}^*(t)^p w(t)dt$$
$$\geq 1 - \frac{\varepsilon}{4^{j+1}}$$

ve böylece

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \right\|_{\Lambda^p(w)} \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^{1/p} \|\{a_i\}\|_{\ell^p}$$

dır. Sonuncu eşitsizlikte ε keyfi olduğundan

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \right\|_{\Lambda^p(w)} \geq \|\{a_i\}\|_{\ell^p}$$

olur. Sonuç olarak

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \right\|_{\Lambda^p(w)} \approx \|\{a_i\}\|_{\ell^p}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. $\boxdot$

Not 4.3. Yukarıdaki teorem azalan w fonksiyonu ve $1 \leq p < \infty$ durumunda [23] te ispatlanmıştır (artan ağırlık fonksiyonları için bkz., [6] ve [7]).

Teorem 4.4. ([54, Teorem 7]) $0 < p, r < \infty$ ve $w, W \in \Delta_2$ olacak biçimde bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki özellikler denktir:

(i) $\Lambda^p(w)$ alt r-kestirim uzayıdır;
(ii) $W(t)/t^{p/r}$, kuasi-artandır ve $r \geq p$ dir.

İspat. Teorem 4.2 den $r \geq p$ dir. $\Lambda^p(w)$ nin alt r-kestirim uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\Lambda^{p/r}(w)$ nin alt 1-kestirim uzayı olmasıdır. Bu nedenle

$$\Lambda^p(w),\ 0 < p \leq 1, \text{ alt 1-kestirim uzayıdır} \Leftrightarrow W(t)/t^p \text{ kuasi-artandır}$$

ifadesinin gösterilmesi yeterlidir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $W(t)/t^p$ kuasi-artan olsun. Lemma 2.2 den $W^{1/p}(t)$ konveks bir fonksiyona denktir. Önerme 4.1 den, genelliği bozmadan $W^{1/p}(t)$ konveks kabul edilebilir. Ek olarak $W^{1/p}(0) = 0$ olduğundan $W^{1/p}(t)/t$ artandır. Dolayısıyla $W^{1/p}$ üst toplamsaldır ([57, Sayfa 51]). Gerçekten:

$$\begin{aligned} W^{1/p}(t_1 + t_2) &= t_1 \frac{W^{1/p}(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} + t_2 \frac{W^{1/p}(t_1 + t_2)}{t_1 + t_2} \\ &\geq t_1 \frac{W^{1/p}(t_1)}{t_1} + t_2 \frac{W^{1/p}(t_2)}{t_2} \\ &= W^{1/p}(t_1) + W^{1/p}(t_2) \end{aligned}$$

dir.

$$m_f(t) = |\{x \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : |f(x)| > t\}|, \qquad t > 0$$

olmak üzere

$$\|f\|_{\Lambda^p(w)} = \left(\int_0^\infty W\left(m_f(t)\right) d(t^p) \right)^{1/p}$$

dir. Gerçekten:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda^p(w)} &= \left(\int_0^\infty f^*(t)^p w(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty \int_0^{f^*(t)} d(\tau^p) w(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\{f^*(t) > \tau\}} d(\tau)^p w(t) dt \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\{m_f(\tau)>t\}} d(\tau^p) w(t) dt \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{\{m_f(\tau)>t\}} w(t) dt d(\tau^p) \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^\infty \int_0^{m_f(\tau)} w(t) dt d(\tau^p) \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^\infty W(m_f(t)) d(t^p) \right)^{1/p}$$

dir.

$\{f_i\}_{i=1}^n \subset \Lambda^p(w)$ ayrık taşıyıcılı f_i lerden oluşan herhangi bir küme ise $m_{\sum_{i=1}^n f_i} = \sum_{i=1}^n m_{f_i}$ dir. $W^{1/p}$ nin üst toplamsallığı ve ters Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_{\Lambda^p(w)} = \left(\int_0^\infty \left(W^{1/p} \left(m_{\sum_{i=1}^n f_i}(t) \right) \right)^p d(t^p) \right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^\infty \left(W^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n m_{f_i}(t) \right) \right)^p d(t^p) \right)^{1/p}$$

$$\geq \left(\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n W^{1/p} \left(m_{f_i}(t) \right) \right)^p d(t^p) \right)^{1/p}$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \left(\int_0^\infty W \left(m_{f_i}(t) \right) d(t^p) \right)^{1/p} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{\Lambda^p(w)}$$

elde edilir.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): $0 < s \leq t < \infty,\ n = [t/s]$ için

$$f_i = \chi_{\left(\frac{(i-1)t}{2n}, \frac{it}{2n} \right]}, \quad i = 1, \dots, 2n$$

olsun.

$\Lambda^p(w)$ alt 1-kestirim uzayı olduğundan $C > 0$ için

$$W^{1/p}(t) = \left(\int_0^t w(\tau)d\tau\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty \chi_{(0,t]}(\tau)w(\tau)d\tau\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_0^\infty \chi_{(0,t]}{}^*(\tau)w(\tau)d\tau\right)^{1/p} = \left\|\chi_{(0,t]}(\tau)\right\|_{\Lambda^p(w)}$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{2n} f_i\right\|_{\Lambda^p(w)} \geq C^{-1}\sum_{i=1}^{2n} \|f_i\|_{\Lambda^p(w)}$$

$$= C^{-1}\sum_{i=1}^{2n} W^{1/p}\left(\frac{t}{2n}\right) = 2C^{-1}nW^{1/p}\left(\frac{t}{2n}\right)$$

$$\geq 2C^{-1}\frac{t}{s}\, W^{1/p}(s)$$

olacak biçimde bir $C > 0$ vardir. Dolayısıyla $W^{1/p}(t)/t$ kuasi-artandır. $\boxdot$

5. $T_{u,b}$ OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Bu bölümde supremum içeren iteratif Hardy tipli operatörlerin ağırlıklı Lebesgue uzayları arasındaki sınırlılığı artmayan fonksiyonlar konisi üzerinde incelenecektir. Öncelikle (1.9) eşitsizliğinin $0 < p, q < \infty$ durumunda çözümü hatırlatılacak, daha sonra $p = \infty$ veya $q = \infty$ durumlarında karakterizasyonu yapılacaktır.

Aşağıdaki teoremlerde

$$V(x) := \int_0^x v(t)dt, \quad x > 0$$

kabul edilecektir.

Teorem 5.1. ([41, Teorem 5.1 ve 5.5]) $0 < p, q < \infty$ ve $u \in \mathcal{W}(0,\infty) \cap C(0,\infty)$ olsun. $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$, $0 < B(x) < \infty, 0 < V(x) < \infty$ ve $0 < W(x) < \infty, x > 0$ kabul edelim.

$$\left\|T_{u,b}f\right\|_{q,w,(0,\infty)} \leq C\|f\|_{p,v,(0,\infty),} \quad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{5.1}$$

eşitsizliğinin C en iyi sabiti ile sağlanması için gerek ve yeter koşul

(i) $1 < p \leq q$ ve $A_1 + A_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$\mathrm{A}_1 := \sup_{x>0}\left(\left[\sup_{x\leq\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q W(x) + \int_x^\infty \left[\sup_{t\leq\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x \left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{p'} v(y)dy\right)^{1/p'}$$

$$\mathrm{A}_2 := \sup_{x>0}\left(\left[\sup_{x\leq\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q W(x) + \int_x^\infty \left[\sup_{t\leq\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{1/q}\left(\int_0^x V^{p'}(y)\, v(y)dy\right)^{1/p'}$$

ve bu durumda $C \approx A_1 + A_2$.

(ii) $1 = p \le q$ ve $B_1 + B_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$B_1 \coloneqq \sup_{x>0}\left(\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q W(x) + \int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{1/q}\left(\sup_{0<y\le x}\frac{B(y)}{V(y)}\right)$$

$$\mathrm{B}_2 \coloneqq \sup_{x>0}\left(\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q W(x) + \int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{1/q} V(x)$$

ve bu durumda $C \approx B_1 + B_2$.

(iii) $\max\{q,1\} < p$ ve $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 < \infty$ olmasıdır; burada

$$C_1 \coloneqq \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{r/p}\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q \left(\int_0^x \left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{p'} v(y)dy\right)^{r/p'} w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$C_2 \coloneqq \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\left[\sup_{\tau\le y<\infty}\frac{u(y)}{B(y)}\right]\left(\int_0^\tau \left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{p'} v(y)dy\right)^{1/p'}\right]^r w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$C_3 \coloneqq \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{r/p}\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q \left(\int_0^x V^{p'}(y)v(y)dy\right)^{r/p'} w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$C_4 \coloneqq \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\left[\sup_{\tau\le y<\infty}\frac{u(y)}{V^2(y)}\right]\left(\int_0^\tau V^{p'}(y)v(y)dy\right)^{1/p'}\right]^r w(x)dx\right)^{1/r}$$

ve bu durumda $C \approx C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

(iv) $q < 1 = p$ ve $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 < \infty$ olmasıdır; burada

$$D_1 \coloneqq \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{r/p}\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q \left(\sup_{0<y\le x}\frac{B(y)}{V(y)}\right)^r w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$D_2 \coloneqq \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\left[\sup_{\tau\le y<\infty}\frac{u(y)}{B(y)}\right]\left(\sup_{0<y\le\tau}\frac{B(y)}{V(y)}\right)\right]^r w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$D_3 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{r/p} \left[\sup_{x\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{V^2(\tau)}\right]^q V^r(x)w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$D_4 := \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x) \left[\sup_{x\le\tau<\infty} \left[\sup_{\tau\le y<\infty} \frac{u(y)}{V^2(y)}\right] V(\tau)\right]^r w(x)dx\right)^{1/r}$$

ve bu durumda $C \approx D_1 + D_2 + D_3 + D_4$.

(v) $p \le min\{q, 1\}$ ve $E_1 + E_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$E_1 := \sup_{x>0} \left(\left[\sup_{x\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q W(x) + \int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{1/q} \sup_{0<y\le x} \frac{B(y)}{V^{1/p}(y)}$$

$$\mathrm{E}_2 := \sup_{x>0} \left(\left[\sup_{x\le y<\infty} \frac{u^p(y)}{V^2(y)}\right]^{q/p} W(x) + \int_x^\infty \left[\sup_{t\le y<\infty} \frac{u^p(y)}{V^2(y)}\right]^{q/p} w(t)dt\right)^{1/q} V^{1/p}(x)$$

ve bu durumda $C \approx E_1 + E_2$.

(vi) $q < p \le 1$ ve $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 < \infty$ olmasıdır; burada

$$F_1 := \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x) \left[\sup_{x\le\tau<\infty} \left[\sup_{\tau\le y<\infty} \frac{u(y)}{B(y)}\right]^p \left(\sup_{0<y\le\tau} \frac{B(y)^p}{V(y)}\right)\right]^{r/p} w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$F_2 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{r/p} \left[\sup_{0<\tau\le x} \frac{B^p(\tau)}{V(\tau)}\right]^{r/p} \left[\sup_{x\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{B(\tau)}\right]^q w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$F_3 := \left(\int_0^\infty W^{r/p}(x) \left(\sup_{x\le\tau<\infty} \left[\sup_{\tau\le y<\infty} \frac{u^p(y)}{V^2(y)}\right] V(\tau)\right)^{r/p} w(x)dx\right)^{1/r}$$

$$F_4 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t\le y<\infty} \frac{u^p(y)}{V^2(y)}\right]^{q/p} w(t)dt\right)^{r/p} \left[\sup_{x\le y\le\infty} \frac{u^p(y)}{V^2(y)}\right]^{q/p} V^{r/p}(x)w(x)dx\right)^{1/r}$$

ve bu durumda $C \approx F_1 + F_2 + F_3 + F_4$.

[41] de $p = \infty$ veya $q = \infty$ durumları araştırılmamıştır. Bu durumlar için (5.1) in karakterizasyonu, Teorem 5.5, Teorem 5.6 ve Teorem 5.7 de verilecektir. Şimdi bu ispatlar için gerekli teoremler [44] ten hatırlatılacaktır.

Teorem 5.2. $0 < \beta \leq \infty,\ 1 \leq s < \infty$ olsun. $T: \mathfrak{M}^+(0,\infty) \rightarrow \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ operatörü

(i) $T(\lambda f) = \lambda T f,\ \lambda \geq 0, f \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$;
(ii) $\exists C > 0\ \ni\ f(x) \leq g(x)\ h.h.\, x \in (0,\infty)\ \Longrightarrow\ Tf(x) \leq CTg(x)\ h.h.\ x \in (0,\infty)$;
(iii) $\exists C > 0\ \ni\ T(f+g) \leq C(Tf + Tg),\ \forall f, g \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$;

özelliklerini sağlasın. Bu durumda,

$$\|Tf\|_{\beta,w,(0,\infty)} \leq C\|f\|_{s,v,(0,\infty)}, \qquad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{5.2}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left\| T\left(\int_x^\infty h\right)\right\|_{\beta,w,(0,\infty)} \leq c\|h\|_{s,V^s v^{1-s},(0,\infty)}, \qquad h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) \tag{5.3}$$

ve

$$\|T\mathbf{1}\|_{\beta,w,(0,\infty)} \leq c\|\mathbf{1}\|_{s,v,(0,\infty)} \tag{5.4}$$

eşitsizliklerinin doğru olmasıdır.

Teorem 5.3. $0 < \beta \leq \infty,\ 1 \leq s < \infty$ olsun. $T: \mathfrak{M}^+(0,\infty) \rightarrow \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ operatörü (i)-(iii) şartlarını sağlasın. Bu durumda (5.2) eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul

$$\left\| T\left(\frac{1}{V^2(x)}\int_0^x hV\right)\right\|_{\beta,w,(0,\infty)} \leq c\|h\|_{s,v^{1-s},(0,\infty)}, \qquad h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) \tag{5.5}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Aşağıda ağırlıklı Hardy eşitsizliklerinin artmayan fonksiyonlar konisinde karakterizasyonu hatırlatılacaktır.

Teorem 5.4. ([44], Teorem 3.16) $\|\cdot\|_X$, $\mathfrak{M}^+(0,\infty)$ üzerinde bir kuasi-norm ve $k(x,y)$, $\{(x,y): x \geq y \geq 0\}$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left\| \int_0^x k(x,y) f(y) dy \right\|_X \leq C \|fv\|_{\infty,(0,\infty)}, \qquad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{5.6}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul

$$A = \left\| \int_0^x \frac{k(x,y) dy}{\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in (0,y)} v(\tau)} \right\|_X < \infty$$

olmasıdır. Bu durumda (5.6) nın en iyi sabiti $C = A$ dır.

Şimdi (5.1) eşitsizliğinin $p = \infty$ veya $q = \infty$ için çözümü verilecektir.

Teorem 5.5. $0 < p < \infty$ olsun. $0 < B(t) < \infty$, $0 < V(x) < \infty$, $0 < W(x) < \infty$, $x > 0$ olacak şekilde $b \in \mathcal{W}(0,\infty), u, w \in \mathcal{W}(0,\infty) \cap C(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için

$$\left\| T_{u,b} f \right\|_{\infty,w,(0,\infty)} \leq C \|f\|_{p,v,(0,\infty)}, \qquad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{5.7}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

(i) $1 < p$ ve $G_1 + G_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$G_1 := \sup_{x>0}\left(\sup_{x\le t<\infty}\left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau)\right]\frac{u(t)}{B(t)}\right)\left(\int_0^x \left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{p'} v(y)dy\right)^{1/p'}$$

$$G_2 := \sup_{x>0}\left(\sup_{x\le t<\infty}\left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau)\right]\frac{u(t)}{V^2(t)}\right)\left(\int_0^x V^{p'}(y)v(y)dy\right)^{1/p'}$$

ve bu durumda (5.7) eşitsizliğinin en iyi sabiti $C \approx G_1 + G_2$ dir.

(ii) $p \le 1$ ve $H_1 + H_2 < \infty$ olmasıdır, burada

$$H_1 := \sup_{x>0}\left(\sup_{0<y\le x}\left(B(y)\sup_{y\le t<\infty}\left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau)\right]\frac{u(t)}{B(t)}\right)\right)V^{-1/p}(x)$$

$$H_2 := \sup_{x>0}\left(\sup_{x\le t<\infty}\left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau)\right]\frac{u(t)}{B(t)}\right)\frac{B(x)}{V^{1/p}(x)}$$

ve bu durumda (5.7) eşitsizliğinin en iyi sabiti $C \approx H_1 + H_2$ dir.

İspat. $F, G \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$ olmak üzere; F, artmayan ise

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} F(t)G(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} F(t) \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(0,t)} G(\tau)$$

dir. Benzer biçimde F azalmayan ise

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} F(t)G(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} F(t) \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in(t,\infty)} G(\tau)$$

dir. Dolayısıyla

$$\left\|T_{u,b}f\right\|_{\infty,w,(0,\infty)} = \sup_{x>0} w(x) \sup_{x\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\int_0^\tau f(y)b(y)dy$$

$$= \sup_{x>0} \left(\sup_{0<\tau\le x} w(\tau) \right) \sup_{x\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{B(\tau)} \int_0^\tau f(y)b(y)dy$$

$$= \sup_{x>0} \left(\sup_{0<\tau\le x} w(\tau) \right) \frac{u(x)}{B(x)} \int_0^x f(y)b(y)dy$$

$$= \sup_{x>0} \widetilde{w}(x) \int_0^x f(y)b(y)dy \tag{5.8}$$

dir. Burada

$$\widetilde{w}(x) := \left(\sup_{0<\tau\le x} w(\tau) \right) \frac{u(x)}{B(x)}, \quad x > 0$$

dır. Böylece (5.7) eşitsizliği

$$\sup_{x>0} \widetilde{w}(x) \int_0^x f(y)b(y)dy \le C \left(\int_0^\infty f^p(y)v(y)dy \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{5.9}$$

eşitsizliğine denktir.

(i) $p > 1$ olsun. Teorem 5.2 den (5.9) un sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{x>0} \widetilde{w}(x) \int_0^x \left(\int_y^\infty h(\tau)d\tau \right) b(y)dy$$

$$\le C \left(\int_0^\infty h^p(y)V^p(y)v^{1-p}dy \right)^{1/p}, h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) \tag{5.10}$$

ve

$$\sup_{x>0} \widetilde{w}(x)B(x) \le C \left(\int_0^\infty v(y)dy \right)^{1/p} \tag{5.11}$$

eşitsizliklerinin sağlanmasıdır.

Fubini teoremi gereğince her bir $x > 0$ için

$$\int_0^x \left(\int_y^\infty h(\tau)d\tau \right) b(y)dy = \int_0^x \left(\int_y^x h(\tau)d\tau \right) b(y)dy + \int_0^x \left(\int_x^\infty h(\tau)d\tau \right) b(y)dy$$
$$= \int_0^x h(\tau) \left(\int_0^\tau b(y)dy \right) d\tau + \int_0^x b(y)dy \left(\int_x^\infty h(\tau)d\tau \right)$$
$$= \int_0^x h(\tau)B(\tau)d\tau + B(x) \left(\int_x^\infty h(\tau)d\tau \right)$$

dir. Buradan (5.10) eşitsizliği

$$\sup_{x>0} \widetilde{w}(x) \int_0^x h(\tau)B(\tau)d\tau \leq C \left(\int_0^\infty h^p(y)V^p(y)v^{1-p}(y)dy \right)^{1/p}, h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) \quad (5.12)$$

$$\sup_{x>0} \widetilde{w}(x)B(x) \int_x^\infty h(\tau)d\tau \leq C \left(\int_0^\infty h^p(y)V^p(y)v^{1-p}(y)dy \right)^{1/p}, h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) \quad (5.13)$$

eşitsizliklerine denktir.

Teorem 5.2 ten (5.13) ve (5.11) in sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{x>0} \widetilde{w}(x)B(x)f(x) \leq C \left(\int_0^\infty f^p(y)v(y)dy \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \quad (5.14)$$

olmasıdır.

Teorem 5.3 den (5.14) ün sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{x>0} \widetilde{w}(x)B(x)\frac{1}{V^2(x)}\int_0^x h(\tau)V(\tau)d\tau$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty h^p(y)v^{1-p}(y)dy\right)^{1/p}, h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty) \quad (5.15)$$

olmasıdır.

Böylece (5.7) eşitsizliğinin

$$\sup_{x>0}\left[\sup_{0<\tau\leq x} w(\tau)\right]\frac{u(x)}{B(x)}\int_0^x h(y)dy$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty h^p(y)\left(\frac{V(y)}{B(y)}\right)^p v^{1-p}(y)dy\right)^{1/p}, h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$$

$$\sup_{x>0}\left[\sup_{0<\tau\leq x} w(\tau)\right]\frac{u(x)}{V^2(x)}\int_0^x h(y)dy$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty \left(\frac{h(y)}{V(y)}\right)^p v^{1-p}(y)dy\right)^{1/p}, h \in \mathfrak{M}^+(0,\infty)$$

eşitsizliklerine denk olduğu görülür.

Hardy eşitsizlikleri teorisinden bilindiği gibi son iki eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul sırasıyla $G_1 < \infty$, $G_2 < \infty$ olmasıdır (bkz., örneğin [58, 59, 69]).

(ii) $p \leq 1$ olsun. (5.9) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşulun

$$\sup_{x>0}\left(\sup_{y>0} B(\min\{x,y\})\left(\sup_{y\leq t<\infty}\left[\sup_{0<\tau\leq t} w(\tau)\right]\frac{u(t)}{B(t)}\right)\right)V^{-1/p}(x) < \infty$$

olduğu bilinmektedir (bkz., örneğin, [40, Teorem 5.1, (v)]).

Her bir $x > 0$ için

$$\sup_{y>0} B(\min\{x,y\}) \left(\sup_{y\le t<\infty} \left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau) \right] \frac{u(t)}{B(t)} \right)$$
$$= max \left\{ \sup_{0<y\le x} B(y) \left(\sup_{y\le t<\infty} \left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau) \right] \frac{u(t)}{B(t)} \right), B(x) \sup_{x\le t<\infty} \left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau) \right] \frac{u(t)}{B(t)} \right\}$$

olduğundan sonuncu koşulun $H_1 < \infty$ ve $H_2 < \infty$ koşullarına denk olduğu açıktır. ⊡

Teorem 5.6. $0 < B(t) < \infty,\ 0 < V(x) < \infty,\ 0 < W(x) < \infty,\ x > 0$ olacak şekilde $b \in \mathcal{W}(0,\infty),\ u, w \in \mathcal{W}(0,\infty) \cap C(0,\infty)$ fonksiyonları için

$$\left\| T_{u,b} f \right\|_{\infty,w,(0,\infty)} \le C \|f\|_{\infty,v,(0,\infty)}, \qquad f \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{5.16}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$I := \sup_{x>0} \left(\int_0^x \frac{b(y)dy}{\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,y)} v(s)} \right) \left[\sup_{0<\tau\le x} w(\tau) \right] \frac{u(x)}{B(x)} < \infty$$

olmasıdır. Ayrıca (5.16) nın en iyi sabiti $C \approx I$ dır.

İspat. (5.8) den (5.16) eşitsizliği

$$\sup_{x>0} \left(\sup_{x\le t<\infty} \left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau) \right] \frac{u(t)}{B(t)} \right) \int_0^x f(y) b(y) dy$$
$$\le C \operatorname*{ess\,sup}_{x>0} f(x) v(x), h \in \mathfrak{M}^+((0,\infty);\downarrow) \tag{5.17}$$

eşitsizliğine denktir.

Teorem 5.4 de $k(x,y) = b(y),\ \mathrm{x} > 0$ ve

$$\|h\|_X = \sup_{x>0} \left(\sup_{x\le t<\infty} \left[\sup_{0<\tau\le t} w(\tau) \right] \frac{u(t)}{B(t)} \right) h(x)$$

alınırsa, (5.17) nin sağlanması için gerek ve yeter koşulun

$$\sup_{x>0}\left(\int_0^x \frac{b(y)dy}{\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,y)} v(s)}\right)\left[\sup_{0<\tau\le x} w(\tau)\right]\frac{u(x)}{B(x)} < \infty$$

olduğu görülebilir. $\boxdot$

Teorem 5.7. $0 < q < \infty$ olsun. $0 < B(x) < \infty,\ x > 0$ olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ve $u \in \mathcal{W}(0,\infty) \cap C(0,\infty)$ fonksiyonları için

$$\left\|T_{u,b}f\right\|_{q,w,(0,\infty)} \le C\|f\|_{\infty,v,(0,\infty),} \qquad f \in \mathfrak{M}^+\big((0,\infty);\downarrow\big) \tag{5.18}$$

eşitsizliğinin doğru olması için gerek ve yeter koşul

$$J := \left(\int_0^\infty \left[\mathop{sup}_{x\le\tau<\infty}\frac{u(\tau)}{B(\tau)}\int_0^\tau \frac{b(y)dy}{\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,y)} v(s)}\right]^q w(x)dx\right)^{1/q} < \infty$$

olmasıdır. Ayrıca (5.18) in en iyi sabiti $C \approx J$ dir.

İspat: Teorem 5.4 de $k(x,y) = b(y)$, $\mathrm{x} > 0$, ve

$$\|h\|_X = \left(\int_0^\infty \left(\sup_{x\le t<\infty}\frac{u(t)}{B(t)}\ h(t)\right)^q w(x)dx\right)^{1/q}$$

alınırsa, (5.18) nin sağlanması için gerek ve yeter koşulun

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{x\le\tau<\infty} \frac{u(\tau)}{B(\tau)} \int_0^\tau \frac{b(y)dy}{\operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,y)} v(s)}\right]^q w(x)dx\right)^{1/q} < \infty$$

olduğu görülebilir. $\boxdot$

6. $\Lambda^p(w)$ KLASİK LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ MAKSİMAL FONKSİYON

F, tüm pozitif ve sonlu ölçülü kümeler üzerinde tanımlı negatif olmayan fonksiyon olmak üzere F nin maksimal fonksiyonu

$$MF(x) \coloneqq \sup_{Q \ni x} F(Q)$$

ile tanımlanır. Burada supremum x i içeren Q küpleri üzerinden alınır.

MF maksimal fonksiyonunun artmayan yeniden düzenleme eşitsizlikleri Lerner tarafından [62] de verilmiştir. Böylece literatürde araştırılmış maksimal fonksiyonların yeniden düzenleme eşitsizlikleri bilinen metodlara göre çok daha basit ve kısa şekilde elde edilebilmektedir. Bu sonucu ifade etmek için önce aşağıdaki tanım verilecektir.

Tanım 6.1. ([62, Tanım 1]) Sonlu sayıda ikişer ayrık $\{Q_i\}$ küplerinin herhangi bir koleksiyonu için

$$\min_i F(Q_i) \leq CF\left(\bigcup_i Q_i\right) \tag{6.1}$$

olacak biçimde $C > 0$ mevcutsa F ye **pseudo-artandır** denir.

Şimdi ileride tanımlayacağımız genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörün Lorentz uzaylarında sınırlığının araştırılmasında önemli rol oynayan teorem hatırlatılacaktır.

Teorem 6.2. ([62, Teorem 1]) F pseudo-artan küme fonksiyonu olmak üzere

$$(MF)^*(t) \leq C \sup_{|E| > t/3^n} F(E), \qquad t > 0 \tag{6.2}$$

eşitsizliği (6.1) deki $C > 0$ sabiti ile sağlanır. Burada supremum $|E| > t/3^n$ olacak biçimde sonlu ölçülü tüm E kümeleri üzerinden alınır.

İspat. $m_{MF}(\lambda) > t$ olacak biçimde $t > 0$ ve $\lambda > 0$ alınsın. Lebesgue ölçüsünün regülerliğinden

$$|\{x: MF(x) > \lambda\}| = \sup\{|K|: K \subset \{x: MF(x) > \lambda\} \text{ kompakt}\}$$

dır.

$|K| > t$ ve $K \subset \{x: MF(x) > \lambda\}$ olacak şekilde kompakt K kümesi seçilirse, her $x \in K$ için $F(Q_x) > \lambda$ olacak şekilde x i içeren Q_x küpü mevcuttur. Vitali örtü lemmasından (bkz., [86, s.12]) $\bigcup_{x\in K} Q_x \subset \bigcup_i 3Q_i$ olacak biçimde $\{Q_i\} \subset \{Q_x\}_{x\in K}$ sonlu ayrık küpleri mevcuttur.

Böylece

$$|K| \leq \left|\bigcup_{x\in K} Q_x\right| \leq \left|\bigcup_i 3Q_i\right| \leq \sum_i |3Q_i| = 3^n \sum_i |Q_i| = 3^n \left|\bigcup_i Q_i\right|.$$

Buradan $|\bigcup_i Q_i| > t/3^n$ dir. (6.1) uygulandığında

$$\lambda < \min_i F(Q_i) \leq CF\left(\bigcup_i Q_i\right) \leq C \sup_{|E|>t/3^n} F(E)$$

elde edilir ve $m_{MF}(\lambda) > t$ olacak biçimde tüm $\lambda > 0$ lar üzerinden supremum alınırsa ispat tamamlanır. $\boxdot$

Not 6.3. ([62]) Teorem 6.2 den (6.1) koşulu kaldırılamaz. Gerçekten: φ, $[0,\infty)$ da sınırlı, azalan, $\varphi(\infty) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. F küme fonksiyonunu $F(E) = \varphi(|E|)$ olarak tanımlayalım.

Herhangi bir $c > 0$ sabiti için (6.1) i sağlamayacak biçimde $\{Q_i\}$ küpler ailesi bulunabilir. Mesela, $\mathbb{R}^n$ de $Q_i = (i, i+1) \times (0,1)^{n-1}, i \in \mathbb{N}$ küpleri için $|Q_i| = 1$, $i \in \mathbb{N}$ dir ve bu küpler ayrıktırlar. Her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\min_{1 \le i \le m} F(Q_i) = \varphi(1) \text{ ve } F(\cup_{i=1}^m Q_i) = \varphi(|\cup_{i=1}^m Q_i|) = \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^m |Q_i|) = \varphi(m)$$

olduğundan $\lim_{m \to \infty} \varphi(m) = 0$ olması nedeniyle

$$\varphi(1) = \min_{1 \le i \le m} F(Q_i) > c\, F\left(\bigcup_{i=1}^m Q_i\right) = c\, \varphi(m)$$

eşitsizliğini m yi yeterince büyük alarak sağlatmak mümkündür.

Öte yandan her bir $x \in \mathbb{R}^n$ noktasını içeren $\{Q_x\}$ küpler ailesini $|Q_x| \to 0+$ olacak biçimde alırsak $MF(x) = \lim_{t \to 0+} \varphi(t) = \|\varphi\|_\infty$ olduğu görülebilir. Yani $MF \equiv \|\varphi\|_\infty$ ve dolayısıyla $(MF)^*(t) = \|\varphi\|_\infty$ dır. Diğer taraftan $\sup_{|E| > t/3^n} F(E) = \varphi(t/3^n)$ dir ve (6.2) eşitsizliği hiç bir $c > 0$ için sağlanmaz.

Not 6.4. ([62]) (6.1) i sağlayan ve uygulamada önemi olan genel bir F küme fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulabilir. ν herhangi bir negatif olmayan Borel ölçüsü olsun. w ve g, $(0, \infty)$ da tanımlı negatif olmayan fonksiyonlar, w alt toplamsal, g kuasi-azalan bir fonksiyon olmak üzere

$$F(E) = \frac{\nu(E)}{(w \cdot g)(|E|)} \tag{6.3}$$

olsun. $\{Q_i\}$ ayrık küpleri için

$$A = \min_i \frac{\nu(Q_i)}{(w \cdot g)(|Q_i|)}$$

olarak gösterilirse

$$A(w\cdot g)\left(\left|\bigcup_i Q_i\right|\right) = Aw\left(\left|\bigcup_i Q_i\right|\right)\cdot g\left(\left|\bigcup_i Q_i\right|\right)$$
$$\le AC\left(\sum_i w|Q_i|\right)\cdot\ g(|Q_i|)$$
$$\le C\left(\sum_i A(w\cdot g)|Q_i|\right)$$
$$\le C\left(\sum_i \nu(Q_i)\right) = C\nu\left(\bigcup_i Q_i\right)$$

elde edilir. Burada $C,\ g$ nin kuasi-azalanlığının tanımında bulunan sabittir.

Böylece

$$A \le C\frac{\nu(\cup_i Q_i)}{(w\cdot g)(|\cup_i Q_i|)}$$

olur. Yani F için (6.1) doğrudur. Dolayısıyla F maksimal fonksiyonu için (6.2) eşitsizliği sağlanır.

Tanım 6.5. $X, \mathbb{R}^n$ de tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kuasi-Banach uzayı olsun. $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ verilsin. Her bir $f \epsilon X_{loc} := \left\{f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}): f\chi_Q \in X,\ Q \subset \mathbb{R}^n\right\}$ için

$$M_{\phi,\mathrm{X}}f(x) := \sup_{Q\ni x}\frac{\left\|f\chi_Q\right\|_{\mathrm{X}}}{\phi(|Q|)}, \qquad (x\in\mathbb{R}^n) \tag{6.4}$$

şeklinde tanımlanan $M_{\phi,\mathrm{X}}f$ fonksiyonuna **genelleştirilmiş kesirli maksimal fonksiyon** denir.

Bu tanımda supremumu alınan küme fonksiyonunun pseudo-artanlığı aşağıdaki lemmada incelenecektir.

Lemma 6.6. $0 < r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ olsun. $(\mathbb{R}^n, dx)$ üzerinde bir alt r-kestirim X uzayı verilsin. Bu durumda her $f \in X$ ve $\mathbb{R}^n$ de her ikişer ayrık sonlu $\{Q_j\}$ küpler ailesi için

$$\min_i \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_X}{\phi(|Q_i|)} \leq C \frac{\|f\chi_{\cup_i Q_i}\|_X}{\phi(|\cup_i Q_i|)} \tag{6.5}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $C > O$ sayısı mevcuttur.

İspat.

$$A := \min_i \frac{\|f\chi_{Q_i}\|_X}{\phi(|Q_i|)}$$

olsun. $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ olduğundan

$$A\phi\left(\left|\bigcup_i Q_i\right|\right) = A\phi\left(\sum_i |Q_i|\right) \lesssim A\left(\sum_i \phi(|Q_i|)^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_i \|f\chi_{Q_i}\|_X^{\ r}\right)^{1/r}$$

olur. X, alt r-kestirim uzayı olduğundan

$$\left(\sum_i \|f\chi_{Q_i}\|_X^{\ r}\right)^{1/r} \lesssim \left\|\sum_{i=1}^n f\chi_{Q_i}\right\|_X = \|f\chi_{\cup_i Q_i}\|_X$$

dir. Buradan

$$A\phi\left(\left|\bigcup_i Q_i\right|\right) \lesssim \|f\chi_{\cup_i Q_i}\|_X$$

dir ve ispat tamamlanır. $\boxdot$

Lemma 6.7. $0 < r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ olsun. X, alt r-kestirim uzayı olmak üzere

$$\left(M_{\phi,X}f\right)^*(t) \leq C \sup_{|E|>t/3^n} \frac{\|f\chi_E\|_X}{\phi(|E|)} \tag{6.6}$$

her $t > 0$ için (6.5) teki $C > 0$ sayısı ile sağlanır.

İspat. Teorem 6.2 ve Lemma 6.6 dan ispat açıktır.

Lemma 6.8. $0 < r < \infty, \phi \in \mathfrak{Q}_r$ olsun. X, $r.i.$ alt r-kestirim uzayı olmak üzere her $t > 0$ için

$$\left(M_{\phi,X}f\right)^*(t) \leq C \sup_{\tau>t} \frac{\left\|f^*\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)} \tag{6.7}$$

eşitsizliği f ve t den bağımsız $C > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat. Lemma 6.7 den

$$\begin{aligned}
\left(M_{\phi,X}f\right)^*(t) &\leq C \sup_{|E|>t/3^n} \frac{\|f\chi_E\|_X}{\phi(|E|)} \\
&= C \sup_{|E|>t/3^n} \frac{\|(f\chi_E)^*\|_{\bar{X}}}{\phi(|E|)} \\
&\leq C \sup_{|E|>t/3^n} \frac{\left\|f^*\chi_{[0,|E|)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(|E|)} \\
&= C \sup_{\tau>t/3^n} \frac{\left\|f^*\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}
\end{aligned}$$

olur.

$\phi \in \mathfrak{Q}_r$ ve dolayısıyla $\phi \in \Delta_2$ olduğundan

$$\sup_{\tau>t/3^n} \frac{\|f^*\chi_{[0,\tau)}\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)} \le C \sup_{3^n\tau>t} \frac{\|f^*\chi_{[0,3^n\tau)}\|_{\bar{X}}}{\phi(3^n\tau)} = C\sup_{\tau>t} \frac{\|f^*\chi_{[0,\tau)}\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}$$

dır. Böylece (6.7) elde edilir. $\boxdot$

Sonuç 6.9. $0 < \alpha \le r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ olsun. $b \in \mathcal{W}(0,\infty), B(\infty) = \infty, B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $f \in \mathfrak{M}_0(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için

$$\left(M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}f\right)^*(t) \le C \sup_{\tau>t} \frac{\left(\int_0^\tau (f^*)^\alpha(y)b(y)dy\right)^{1/\alpha}}{\phi(\tau)}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $C > 0$ sabiti mevcuttur.

İspat. Teorem 4.4 den $\Lambda^\alpha(b)$ alt r-kestirim uzayıdır. Lemma 6.8 de $X = \Lambda^\alpha(b)$ alınırsa ispat tamamlanır. $\boxdot$

Sonuç 6.10. $0 < q \le p < \infty$ ve f, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(M_{p,q}f\right)^*(t) \le \frac{C}{t^{1/p}} \left(\int_0^t (f^*)^q(y) y^{q/p-1} dy\right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $C > 0$ sabiti mevcuttur.

İspat. $\alpha = q, b(t) = t^{q/p-1}, \phi(t) = t^{1/p}$ $(t > 0)$ için $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} = M_{p,q}$ olduğunu biliyoruz. $B(t) \approx t^{q/p}$ $(t > 0)$ olduğundan $B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{q/r}$, $r = p \ge q$ için kuasi-artandır. Ayrıca $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ olduğu açıktır. Dolayısıyla Sonuç 6.9 kullanılabilir. Buradan,

$$\left(M_{p,q}f\right)^*(t) \leq C \sup_{\tau>t} \frac{1}{\tau^{1/p}} \left(\int_0^\tau (f^*)^q(y) y^{q/p-1} dy \right)^{1/q}$$

elde edilir.

g artmayan olduğunda $F(\tau) = \frac{1}{\tau^{q/p}} \int_0^\tau g(y) dy^{q/p}$ fonksiyonunun artmayan olduğunu görmek kolaydır: $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ olsun

$$\begin{aligned}
F(\tau_2) &= \frac{1}{\tau_2^{q/p}} \int_0^{\tau_2} g(y) dy^{q/p} \\
&= \frac{1}{\tau_2^{q/p}} \int_0^{\tau_1} g(y) dy^{q/p} + \frac{1}{\tau_2^{q/p}} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(y) dy^{q/p} \\
&\leq \frac{1}{\tau_2^{q/p}} \int_0^{\tau_1} g(y) dy^{q/p} + g(\tau_1) \frac{\tau_2^{q/p} - \tau_1^{q/p}}{\tau_2^{q/p}} \\
&= \frac{1}{\tau_2^{q/p}} \int_0^{\tau_1} g(y) dy^{q/p} + g(\tau_1) \frac{\tau_2^{q/p} - \tau_1^{q/p}}{\tau_1^{q/p} \tau_2^{q/p}} \int_0^{\tau_1} dy^{q/p} \\
&\leq \frac{1}{\tau_2^{q/p}} \int_0^{\tau_1} g(y) dy^{q/p} + \frac{\tau_2^{q/p} - \tau_1^{q/p}}{\tau_1^{q/p} \tau_2^{q/p}} \int_0^{\tau_1} g(y) dy^{q/p} \\
&= \frac{1}{\tau_1^{q/p}} \int_0^{\tau_1} g(y) dy^{q/p} = F(\tau_1)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak

$$\sup_{\tau>t} \frac{1}{\tau^{1/p}} \left(\int_0^\tau (f^*)^q(y) y^{q/p-1} dy \right)^{1/q} = \frac{1}{t^{1/p}} \left(\int_0^t (f^*)^q(y) y^{q/p-1} dy \right)^{1/q}$$

olur. Dolayısıyla

$$\left(M_{p,q}f\right)^*(t) \leq \frac{C}{t^{1/p}} \left(\int_0^t (f^*)^q(y) y^{q/p-1} dy \right)^{1/q}$$

elde edilir. $\boxdot$

Sonuç 6.11. $s \in (0,\infty)$, $\gamma\epsilon(0,n)$, $\mathbb{A} = (A_0, A_\infty) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ ve her $t \in (0,\infty)$ için

$$(M_{s,\gamma,\mathbb{A}} f)^*(t) \leq C \left[\sup_{\tau>t} \tau^{\gamma/n-1} \ell^{-s\mathbb{A}}(\tau) \int_0^\tau (f^*)^s(y)dy\right]^{1/s} \tag{6.8}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde n, s, γ ve $\mathbb{A}$ ya bağlı bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat. Girişte bahsedildiği gibi $\alpha = s$, $b \equiv 1$ ve $\phi(t) = t^{(n-\gamma)/sn} \ell^{\mathbb{A}}(t)$ $(t > 0)$ için $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} \approx M_{s,\gamma,\mathbb{A}}$ dır. $w(t) = t^{1/s}$ ve $g(t) = t^{-\gamma/sn} \ell^{\mathbb{A}}(t)$ $(t > 0)$ olarak alınırsa $\phi = w \cdot g$ olur. $w \in \mathfrak{Q}_s$ ve g kuasi-azalandır. Dolayısıyla $\phi \in \mathfrak{Q}_s$ dir.

Diğer taraftan $r = s$ alınırsa, $B(t) = t$, $t > 0$ olduğundan $B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r} = B(t)/t = 1$ kuasi-artandır. Böylece Sonuç 6.9 dan (6.8) eşitsizliği doğrudur. $\boxdot$

Şimdi $M_{\phi,X}$ in artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu için alttan kestirimler elde edilecektir.

Lemma 6.12 $0 < r < \infty$ ve $\phi \in \Delta_2$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. X in *r.i.* uzayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\left(M_{\phi,X} f\right)^*(t) \geq c \sup_{\tau>t} \frac{\left\|f^* \chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}, \quad f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n) \tag{6.9}$$

eşitsizliği her $t > 0$ için f ve t den bağımsız $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat. $f \in \mathfrak{M}^{rad,\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ ve $|y| > |x|$ olacak biçimde her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left(M_{\phi,X} f\right)(x) \gtrsim \frac{\left\|f \chi_{B(0,|y|)}\right\|_X}{\phi(|B(0,|y|)|)}$$

dir. f radyal azalan olduğundan $\left(f\chi_{B(0,|y|)}\right)^*(t)=f^*(t)\chi_{[0,|B(0,|y|)|)}(t),\ \ t>0$ dır. Bununla beraber X $r.i.$ uzayı olduğundan

$$\left(M_{\phi,X}f\right)(x)\gtrsim\frac{\left\|f^*\chi_{[0,|B(0,|y|)|)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(|B(0,|y|)|)}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\left(M_{\phi,X}f\right)(x)&\gtrsim\sup_{|y|>|x|}\frac{\left\|f^*\chi_{[0,|B(0,|y|)|)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(|B(0,|y|)|)}\\&=\sup_{|y|>|x|}\frac{\left\|f^*\chi_{[0,\omega_n|y|^n)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\omega_n|y|^n)}\\&=\sup_{\tau>\omega_n|x|^n}\frac{\left\|f^*\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}\end{aligned}$$

elde edilir. Yeniden düzenleme için

$$f^*(t)=\sup_{|E|=t}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E}|f(x)|,\quad t\in(0,\infty)$$

(bkz., örneğin, [15, s.33]) formülünden faydalanılırsa,

$$\begin{aligned}\left(M_{\phi,X}f\right)^*(t)&=\sup_{|E|=t}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E}\left(M_{\phi,X}f\right)(x)\\&\geq\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B\left(0,(t/\omega_n)^{1/n}\right)}\left(M_{\phi,X}f\right)(x)\\&\gtrsim\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B\left(0,(t/\omega_n)^{1/n}\right)}\sup_{\tau>\omega_n|x|^n}\frac{\left\|f^*\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}\\&=\operatorname*{ess\,inf}_{0\leq s<t}\sup_{\tau>s}\frac{\left\|f^*\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}\\&=\sup_{\tau>t}\frac{\left\|f^*\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır. $\boxdot$

Lemma 6.8 ve 6.12 nin kombinasyonundan aşağıdaki ana teorem elde edilir.

Teorem 6.13. $0 < p, q < \infty,\ 0 < r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu $(0, \infty)$ kuasi-artan fonksiyon olsun. $X\ \ r.i.$ uzayı alt r-kestirim uzay olmak üzere

(a) $M_{\phi,X}$ in $\Lambda^p(v)$ den $\Lambda^q(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\|M_{\phi,X} f\right\|_{\Lambda^q(w)} \leq C\|f\|_{\Lambda^p(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{\tau>t} \frac{\left\|\psi\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{1/q} \leq C\left(\int_0^\infty \psi(t)^p v(t)dt\right)^{1/p}$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^+((0, \infty), \downarrow)$ için doğru olmasıdır.

(b) $M_{\phi,X}$ in $\Lambda^p(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\|M_{\phi,X} f\right\|_{\Lambda^{q,\infty}(w)} \leq C\|f\|_{\Lambda^p(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{t>0} W^{1/q}(t) \sup_{\tau>t} \frac{\left\|\psi\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)} \leq C\left(\int_0^\infty \psi(t)^p v(t)dt\right)^{1/p}$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^+((0, \infty), \downarrow)$ için doğru olmasıdır.

(c) $M_{\phi,X}$ in $\Lambda^{p,\infty}(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\|M_{\phi,X} f\right\|_{\Lambda^{q,\infty}(w)} \leq C\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{t>0} W^{1/q}(t) \sup_{\tau>t} \frac{\left\|\psi\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)} \leq C \sup_{t>0} V^{1/q}(t)\psi(t)$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty),\downarrow)$ için doğru olmasıdır.

(d) $M_{\phi,X}$ in $\Lambda^{p,\infty}(v)$ den $\Lambda^q(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\|M_{\phi,X} f\right\|_{\Lambda^{q}(w)} \leq C\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(\int_0^\infty \left[\sup_{\tau>t} \frac{\left\|\psi\chi_{[0,\tau)}\right\|_{\bar{X}}}{\phi(\tau)}\right]^q w(t)dt\right)^{1/q} \leq C \sup_{t>0} V^{1/q}(t)\psi(t)$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty),\downarrow)$ için doğru olmasıdır.

Şimdi ana sonuçlar verilecektir.

6.1. $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)} : \Lambda^p(v) \to \Lambda^q(w)$, $0 < p,q < \infty$ Operatörünün Sınırlılığı

Teorem 6.14. $0 < p,q < \infty$, $0 < \alpha \leq r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. $0 < B(t) < \infty$, $t > 0$, $B(\infty) = \infty$, $B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}$ nin $\Lambda^p(v)$ den $\Lambda^q(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)} f\right\|_{\Lambda^{q}(w)} \leq C\|f\|_{\Lambda^{p}(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{n})$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left\|T_{B/\phi^{\alpha},b}\psi\right\|_{q/\alpha,w,(0,\infty)} \leq C^{\alpha}\|\psi\|_{p/\alpha,v,(0,\infty)} \tag{6.10}$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^{+}((0,\infty),\downarrow)$ için sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 6.13 (a) da $X = \Lambda^{\alpha}(b)$ alınarak ispat yapılır.

Teorem 6.15. $0 < p,q < \infty$, $0 < \alpha \leq r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ kuasi-artan fonksiyon olsun. $0 < B(t) < \infty$, $t > 0$, $B(\infty) = \infty$, $B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b,v,w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}$ nin $\Lambda^{p}(v)$ den $\Lambda^{q}(w)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\alpha < p \leq q$ ve $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{A}_1 := \sup_{x>0}\left(\phi^{-q}(x)W(x) + \int_x^{\infty}\phi^{-q}(t)\,w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^x\left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{\frac{p}{p-\alpha}} v(y)dy\right)^{\frac{p-\alpha}{p\alpha}}$$

$$\mathcal{A}_2 := \sup_{x>0}\left(\left[\sup_{x\leq\tau<\infty}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^{2}(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}} W(x) + \int_x^{\infty}\left[\sup_{t\leq\tau<\infty}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^{2}(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}} w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^x V^{\frac{p}{p-\alpha}}\, v\right)^{\frac{p-\alpha}{p\alpha}}$$

ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}\right\|_{\Lambda^{p}(v)\to\Lambda^{q}(w)} \approx \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ dir.

(ii) $\alpha = p \leq q$ için $\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{B}_1 := \sup_{x>0}\left(\phi^{-q}(x)W(x) + \int_x^{\infty}\phi^{-q}(t)\,w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sup_{0<y\leq x}\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\mathcal{B}_2 \coloneqq \sup_{x>0}\left(\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^2(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}} W(x)+\int_x^{\infty}\left[\sup_{t\le\tau<\infty}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^2(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}} w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} V^{\frac{1}{\alpha}}(x)$$

ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}\right\|_{\Lambda^p(v)\to\Lambda^q(w)} \approx \mathcal{B}_1+\mathcal{B}_2$ dir.

(iii) $\max\{\alpha,q\}<p$ ve $\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\mathcal{C}_3+\mathcal{C}_4<\infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{C}_1 \coloneqq \left(\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}\phi^{-q}(t)w(t)dt\right)^{\frac{q}{p-q}}\phi^{-q}(x)\ \left(\int_0^x\left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{\frac{p}{p-\alpha}} v(y)dy\right)^{\frac{q(p-\alpha)}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{C}_2 \coloneqq \left(\int_0^{\infty} W^{\frac{q}{p-q}}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\phi^{-\alpha}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{\frac{p}{p-\alpha}} v(y)dy\right)^{\frac{p-\alpha}{p}}\right]^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{C}_3 \coloneqq \left(\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}\left[\sup_{t\le\tau}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^2(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}} w(t)dt\right)^{\frac{q}{p-q}}\left[\sup_{x\le\tau}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^2(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}}\left(\int_0^x V^{\frac{p}{p-\alpha}} v\right)^{\frac{q(p-\alpha)}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{C}_4 \coloneqq \left(\int_0^{\infty} W^{\frac{q}{p-q}}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\left[\sup_{\tau\le y<\infty}\frac{B(y)}{\phi^{\alpha}(y)V^2(y)}\right]\left(\int_0^{\tau} V^{\frac{p}{p-\alpha}} v\right)^{\frac{p-\alpha}{p}}\right]^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}\right\|_{\Lambda^p(v)\to\Lambda^q(w)} \approx \mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2+\mathcal{C}_3+\mathcal{C}_4$ dür.

(iv) $q<\alpha=p$ ve $\mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2+\mathcal{D}_3+\mathcal{D}_4<\infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{D}_1 \coloneqq \left(\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}\phi^{-q}(t)w(t)dt\right)^{\frac{q}{p-q}}\phi^{-q}(x)\left(\sup_{0<y\le x}\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{D}_2 := \left(\int_0^\infty W^{\frac{q}{p-q}}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\phi^{-\alpha}(\tau)\left(\sup_{0\le y<\tau}\frac{B(y)}{V(y)}\right)\right]^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{D}_3 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t\le\tau<\infty}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^2(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}} w(t)dt\right)^{\frac{q}{p-q}} \left[\sup_{x\le\tau<\infty}\frac{B(\tau)}{\phi^{\alpha}(\tau)V^2(\tau)}\right]^{\frac{q}{\alpha}} V^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}}(x)w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{D}_4 := \left(\int_0^\infty W^{\frac{q}{p-q}}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\left[\sup_{\tau\le y<\infty}\frac{B(y)}{\phi^{\alpha}(y)V^2(y)}\right]V(\tau)\right]^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}\right\|_{\Lambda^p(v)\to\Lambda^q(w)} \approx \mathcal{D}_1+\mathcal{D}_2+\mathcal{D}_3+\mathcal{D}_4$ dür.

(v) $p\le\min\{\alpha,\ q\}$ ve $\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2<\infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{E}_1 := \sup_{x>0}\left(\phi^{-q}(x)W(x)+\int_x^\infty \phi^{-q}(t)\,w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\sup_{0<y\le x}\frac{B^{\frac{1}{\alpha}}(y)}{V^{\frac{1}{p}}(y)}$$

$$\mathcal{E}_2 := \sup_{x>0}\left(\left[\sup_{x\le y<\infty}\frac{B^{\frac{1}{\alpha}}(y)}{\phi(y)V^{\frac{2}{p}}(y)}\right]^q W(x)+\int_x^\infty\left[\sup_{t\le y<\infty}\frac{B^{\frac{1}{\alpha}}(y)}{\phi(y)V^{\frac{2}{p}}(y)}\right]^q w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} V^{\frac{1}{p}}(x)$$

ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}\right\|_{\Lambda^p(v)\to\Lambda^q(w)} \approx \mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2$ dir.

(vi) $q<p\le\alpha$ ve $\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2+\mathcal{F}_3+\mathcal{F}_4<\infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{F}_1 := \left(\int_0^\infty W^{\frac{q}{p-q}}(x)\left[\sup_{x\le\tau<\infty}\phi^{-q}(\tau)\left(\sup_{0<y\le\tau}\frac{B(y)}{V^{\frac{\alpha}{p}}(y)}\right)\right]^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}} w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{F}_2 := \left(\int_0^\infty\left(\int_x^\infty \phi^{-q}(t)\,w(t)dt\right)^{\frac{q}{p-q}}\left[\sup_{0<\tau\le x}\frac{B(\tau)}{V^{\frac{\alpha}{p}}(\tau)}\right]^{\frac{pq}{\alpha(p-q)}}\phi^{-q}(x)\,w(x)dx\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{F}_3 := \left(\int_0^\infty W^{\frac{q}{p-q}}(x) \left(\sup_{x \le \tau < \infty} \left[\sup_{\tau \le y < \infty} \frac{B^{\frac{1}{\alpha}}(y)}{\phi(y) V^{\frac{2}{p}}(y)} \right] V^{\frac{1}{p}}(\tau) \right)^{\frac{pq}{p-q}} w(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\mathcal{F}_4 := \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left[\sup_{t \le y < \infty} \frac{B^{\frac{1}{\alpha}}(y)}{\phi(y) V^{\frac{2}{p}}(y)} \right]^q w(t)dt \right)^{\frac{q}{p-q}} \left[\sup_{x \le y \le \infty} \frac{B^{\frac{1}{\alpha}}(y)}{\phi(y) V^{\frac{2}{p}}(y)} \right]^q V^{\frac{q}{p-q}}(x) w(x)dx \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

ve bu durumda $\left\| M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} \right\|_{\Lambda^p(v) \to \Lambda^q(w)} \approx \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4$ dür.

İspat: Teorem 6.14 ve Teorem 5.1 den ispat yapılır.

6.2. $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} : \Lambda^p(v) \to \Lambda^{q,\infty}(w),\ 0 < p,q < \infty$ Operatörünün Sınırlılığı

Teorem 6.16. $0 < p,q < \infty,\ 0 < \alpha \le r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. $0 < B(t) < \infty,\ t > 0,\ B(\infty) = \infty,\ B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}$ nin $\Lambda^p(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\| M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} f \right\|_{\Lambda^{q,\infty}(w)} \le C \|f\|_{\Lambda^p(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left\| T_{B/\phi^\alpha, b} \psi \right\|_{\infty, W^{\alpha/q}, (0,\infty)} \le C^\alpha \|\psi\|_{p/\alpha, v, (0,\infty)} \tag{6.11}$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty); \downarrow)$ için sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 6.13 (b) de $X = \Lambda^\alpha(b)$ alınarak ispat yapılır.

Teorem 6.17. $0 < p, q < \infty$, $0 < \alpha \leq r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. $0 < B(t) < \infty$, $t > 0$, $B(\infty) = \infty$, $B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}$ nin $\Lambda^{p}(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\alpha < p$ ve $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{G}_1 := \sup_{x>0}\left[\sup_{x \leq t < \infty} \frac{W^{\frac{1}{q}}(t)}{\phi(t)}\right]\left(\int_0^x \left(\frac{B(y)}{V(y)}\right)^{\frac{p}{p-\alpha}} v(y)dy\right)^{\frac{p-\alpha}{p\alpha}}$$

$$\mathcal{G}_2 := \sup_{x>0}\left[\sup_{x \leq t < \infty} \frac{W^{\frac{1}{q}}(t) B^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{\phi(t) V^{\frac{2}{\alpha}}(t)}\right]\left(\int_0^x V^{\frac{p}{p-\alpha}} v\right)^{\frac{p-\alpha}{p\alpha}}$$

dir ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}\right\|_{\Lambda^{p}(v)\to\Lambda^{q,\infty}(w)} \approx \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ dir.

(ii) $p \leq \alpha$ ve $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 < \infty$ olmasıdır; burada

$$\mathcal{H}_1 := \sup_{x>0}\left(\sup_{0<y\leq x} B^{\frac{1}{\alpha}}(y)\left[\sup_{y \leq t < \infty} \frac{W^{\frac{1}{q}}(t)}{\phi(t)}\right]\right) V^{-\frac{1}{p}}(x)$$

$$\mathcal{H}_2 := \sup_{x>0}\left[\sup_{x \leq t < \infty} \frac{W^{\frac{1}{q}}(t)}{\phi(t)}\right]\frac{B^{\frac{1}{\alpha}}(x)}{V^{\frac{1}{p}}(x)}$$

dir ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^{\alpha}(b)}\right\|_{\Lambda^{p}(v)\to\Lambda^{q,\infty}(w)} \approx \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ dir.

İspat. Teorem 6.16 ve Teorem 5.5 den ispat yapılır.

6.3. $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}: \Lambda^{p,\infty}(v) \to \Lambda^{q,\infty}(w),\ 0 < p,q < \infty$ Operatörünün Sınırlılığı

Teorem 6.18. $0 < p,q < \infty,\ 0 < \alpha \le r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. $0 < B(t) < \infty,\ t > 0,\ B(\infty) = \infty,\ B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}$ nin $\Lambda^{p,\infty}(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\|M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} f\right\|_{\Lambda^{q,\infty}(w)} \le C\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left\|T_{B/\phi^\alpha,b}\psi\right\|_{\infty,\mathrm{W}^{\alpha/q},(0,\infty)} \le C^\alpha \|\psi\|_{\infty,\mathrm{V}^{\alpha/p},(0,\infty)}$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty),\downarrow)$ için sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 6.13 (c) de $X = \Lambda^\alpha(b)$ alınarak ispat yapılır.

Teorem 6.19. $0 < p,q < \infty,\ 0 < \alpha \le r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. $0 < B(t) < \infty,\ t > 0,\ B(\infty) = \infty,\ B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}$ nin $\Lambda^{p,\infty}(v)$ den $\Lambda^{q,\infty}(w)$ ye sınırlı olması için gerek ve koşul

$$I := \sup_{x>0}\left(\int_0^x \frac{b(y)}{\mathrm{V}^{\alpha/p}(y)}\,dy\right)^{1/\alpha} \frac{W^{1/q}(x)}{\phi(x)} < \infty$$

olmasıdır ve bu durumda $\left\|M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}\right\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)\to\Lambda^{q,\infty}(w)} \approx I$ dır.

İspat. Teorem 6.18 ve 5.6 dan ispat yapılır.

6.4. $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}: \Lambda^{p,\infty}(v) \to \Lambda^q(w),\ 0 < p,q < \infty$ Operatörünün Sınırlılığı

Teorem 6.20. $0 < p,q < \infty,\ 0 < \alpha \le r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. $0 < B(t) < \infty,\ t > 0,\ B(\infty) = \infty,\ B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}$ nin $\Lambda^{p,\infty}(v)$ den $\Lambda^q(w)$ ye sınırlı olması için yani

$$\left\| M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} f \right\|_{\Lambda^q(w)} \le C \|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(v)}, \qquad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left\| T_{B/\phi^\alpha, b} \psi \right\|_{q/\alpha, \mathrm{w}, (0,\infty)} \le C^\alpha \|\psi\|_{\infty, \mathrm{V}^{\alpha/p}, (0,\infty)}$$

eşitsizliğinin her $\psi \in \mathfrak{M}^+((0,\infty),\downarrow)$ için sağlanmasıdır.

İspat. Teorem 6.13 (d) de $X = \Lambda^\alpha(b)$ alınarak ispat yapılır.

Teorem 6.21. $0 < p,q < \infty,\ 0 < \alpha \le r < \infty$ ve $\phi \in \mathfrak{Q}_r$ fonksiyonu kuasi-artan olsun. $0 < B(t) < \infty,\ t > 0,\ B(\infty) = \infty,\ B \in \Delta_2$ ve $B(t)/t^{\alpha/r}$ kuasi-artan olmak üzere $b, v, w \in \mathcal{W}(0,\infty)$ ağırlık fonksiyonları için $M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)}$ nin $\Lambda^{p,\infty}(v)$ den $\Lambda^q(w)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{J} := \left(\int_0^\infty \left(\sup_{x \le \tau < \infty} \frac{1}{\phi^\alpha(\tau)} \int_0^\tau \frac{b(y)}{\mathrm{V}^{\alpha/p}(y)} dy \right)^{q/\alpha} w(x) dx \right)^{1/q} < \infty$$

olmasıdır ve burada $\left\| M_{\phi,\Lambda^\alpha(b)} \right\|_{\Lambda^{p,\infty}(w) \to \Lambda^q(w)} \approx \mathcal{J}$ dir.

İspat. Teorem 6.20 ve Teorem 5.7 den ispat yapılır.

7. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu doktora tezi kapsamında; X, n-boyutlu Öklid uzayı üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların bir kuasi-Banach fonksiyon uzayı olmak üzere, yeni $M_{\phi,X}$ genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörü tanımlanmış ve bu operatörün $\Lambda^p(w)$ ağırlıklı klasik Lorentz uzayları arasında, ağırlıklı klasik Lorentz uzayları ile $\Lambda^{p,\infty}(w)$ zayıf tipli ağırlıklı Lorentz uzayları arasında, ve zayıf tipli ağırlıklı Lorentz uzayları arasında sınırlılığının incelenmesi hedeflenmiştir. ϕ fonksiyonu ve X uzayı bazı doğal koşulları sağladığında, $M_{\phi,X}$ in bu uzaylar arasında sınırlılığının karakterizasyonu; $M_{\phi,X}$ in artmayan yeniden düzenleme fonsiyonu için elde edilmiş kesin eşitsizlikler yardımıyla, supremum içeren ağırlıklı iteratif Hardy tipli eşitsizliklerinin karakterizasyonuna indirgenmiştir. Literatürde, supremum içeren ağırlıklı iteratif Hardy tipli eşitsizliklerin karakterizasyonunun araştırılmadığı limit durumları da bu tezde tamamlanmıştır. X uzayı özel olarak olarak $\Lambda^\alpha(w)$ ağırlıklı klasik Lorentz uzayı olduğu durumda ise $M_{\phi,\Lambda^\alpha(w)}$ operatörünün yukarıda bahsedilen uzaylar arasında sınırlılığının tam karakterizasyonu yapılmıştır. $M_{\phi,\Lambda^\alpha(w)}$ maksimal fonksiyonu, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu, kesirli maksimal fonksiyonu ve bu fonksiyonun literatürde bilinen genelleştirmelerini, Stein maksimal operatörünü ve diğer maksimal operatörleri özel durumlarda içermektedir. Bu nedenle tezde alınmış sonuçların fonksiyon uzayları teorisinde, diferensiyellenebilme teorisinde, kısmi türevli diferensiyel denklemler teorisinde ve diğer dallarda çalışan matematikçiler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

Son yıllarda, bir çok matematikçi tarafından harmonik analizin klasik operatörlerinin, Γ ağırlıklı klasik Lorentz uzaylarında ve $G\Gamma$ genelleştirilmiş Lorentz uzaylarında incelenmesi yönünde araştırmalar yapılmış ve bu uzaylarda bulunan sonuçların matematiğin farklı dallarında uygulanabileceği gösterilmiştir. Bu nedenle tezde tanımlanan genelleştirilmiş kesirli maksimal operatörün Γ ve $G\Gamma$ uzaylarında sınırlılığının karakterizasyonu ileride çözülmesi hedeflenen problemlerdendir.

KAYNAKLAR

[1] Ariño, M.A., Muckenhoupt, B., Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions, Trans. Amer. Math. Soc. 320 (2): 727-735, 1990.

[2] Bastero, J., Milman, M., Ruiz, F.J., Rearrangement of Hardy-Littlewood maximal functions in Lorentz spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (1): 65-74, 2000.

[3] Bennett, G., Grosse-Erdmann, K.-G., Weighted Hardy inequalities for decreasing sequences and functions, Math. Ann. 334 (3): 489-531, 2006.

[4] Bennett, C., Sharpley, R., Interpolation of operators, Pure and Applied Mathematics, vol. 129, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[5] Boyd, D.W., The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces, Canad. J. Math. 19 (3): 599-616, 1967.

[6] Carothers, N.L., Rearrangement invariant subspaces of Lorentz function spaces II, Rocky Mountain J. Math. 17 (3): 607-616, 1987.

[7] Carothers N.L., Dilworth, S. J., Subspaces of $L_{p,q}$, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (2): 537-545, 1988.

[8] Carro, M.J., Garcia del Amo, A., Soria, J., Weak-type weights and normable Lorentz spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (3): 849-857, 1996.

[9] Carro, M. J., Gogatishvili, A., Martin, J., Pick, L., Weighted inequalities two Hardy operators with applications to embeddings of function spaces, J. Operator Theory 59 (2): 309-332, 2008.

[10] Carro, M.J., Pick, L., Soria, J., Stepanov, V.D., On embeddings between classical Lorentz spaces, Math. Inequal. Appl. 4 (3): 397-428, 2001.

[11] Carro, M.J., Raposo, J.A., Soria, J., Recent developments in the theory of Lorentz spaces and weighted inequalities, Mem. Amer. Math. Soc. 187 (877): 128 pp., 2007.

[12] Carro M.J., Soria, J., Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator, J. Funct. Anal. 112 (2): 480-494, 1993.

[13] Carro M.J., Soria, J., Boundedness of some integral operators, Canad. J. Math. 45 (6): 1155-1166, 1993.

[14] Carro M., Soria, J., The Hardy-Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces, J. London Math. Soc. (2) 55 (1): 146-158, 1997.

[15] Chong K. M., Rice N. M., Equimeasurable rearrangements of functions, Queen's University, Kingston, Ont., 1971.

[16] Cianchi, A., Kerman, R., Opic, B., Pick, L., A sharp rearrangement inequality for the fractional maximal operator, Studia Math. 138 (3): 277-284, 2000.

[17] Ciesielski M., Kamińska, A., Lebesgue's differentiation theorems in R. I. quasi-Banach spaces and Lorentz spaces $\Gamma_{p,w}$, J. Funct. Spaces Appl., Art. İD 682960, 28, 2012,

[18] Cwikel M., Pustylnik, E., Weak type interpolation near endpoint spaces, J. Funct. Anal. 171 (2): 235-277, 2000.

[19] Doktorskii, R.Ya., Reiterative relations of the real interpolation method, Dokl. Akad. Nauk SSSR 321 (2): 241-245, 1991. (Russian); English transl., Soviet Math. Dokl. 44 (3): 665-669, 1992.

[20] Edmunds D.E., Opic, B., Boundedness of fractional maximal operators Between classical and weak-type Lorentz spaces, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 410: 50 pp., 2002.

[21] Edmunds D.E., Opic B., Alternative characterisations of Lorentz-Karamata spaces, Czechoslovak Math. J. 58 (133) (2), 517-540, 2008.

[22] Evans, W. D., Opic B., Real interpolation with logarithmic functors and reiteration, Canad. J. Math. 52 (5): 920-960, 2000.

[23] Figiel, T., Johnson, W.B., Tzafriri, L., On Banach lattices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorentz function spaces, J. Approximation Theory 13 (1): 395-412, 1975.

[24] Fiorenza, A., Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces, Collect. Math. 51 (2): 131-148, 2000.

[25] Fiorenza A., Karadzhov, G.E., Grand and small Lebesgue spaces and their analogs, Z. Anal. Anwendungen 23 (4): 657-681, 2004.

[26] Fiorenza A., Rakotoson, J.M., Some estimates in $G\Gamma(p,m,w)$ spaces, J. Math. Anal. Appl. 340 (2): 793-805, 2008.

[27] Fiorenza, A., Rakotoson, J.M., Zitouni, L., Relative rearrangement method for estimating dual norms, Indiana Univ. Math. J. 58 (3): 1127-1149, 2009.

[28] Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J.L., Weighted norm inequalities and Related topics, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[29] Genebashvili, I., Gogatishvili, A., Kokilashvili, V., Krbec, M., Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type, Pitman Monographs

and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 92, Longman, Harlow, 1998.

[30] Gogatishvili, A., Johansson, M., Okpoti, C.A., Persson, L.E., Characterisation of embeddings in Lorentz spaces, Bull. Austral. Math. Soc. 76 (1): 69-92, 2007.

[31] Gogatishvili, A., M. Kŕepela, Pick, L., Soudský, F., Embeddings of Lorentz-type spaces involving weihgted integral means, J. Func. Anal. 273 (9): 2939-2980, 2017.

[32] Gogatishvili A., Pick, L., Duality principles and reduction theorems, Math. Inequal. Appl. 3 (4): 4, 539-558, 2000.

[33] Gogatishvili A., Pick, L., Discretization and anti-discretization of rearrangement-invariant norms, Publ. Mat. 47 (2): 311-358, 2003.

[34] Gogatishvili A, Pick, L., A reduction theorem for supremum operators, J. Comput. Appl. Math. 208 (1): 270-279, 2007.

[35] Gogatishvili, A., Pick, L., Soudský, F., Characterization of associate spaces weighted Lorentz spaces with applications, Studia Math. 224 (1): 1-23, 2014.

[36] Gogatishvili A., Stepanov V.D., Integral operators on cones of monotone functions, Dokl. Akad. Nauk 446 (4): 367-370, 2012.

[37] Gogatishvili A., Stepanov V.D., Operators are cones of monotone functions Dokl. Akad. Nauk 445 (6): 618-621, 2012 (Russian); English transl., Dokl. 86 (1): 562-565, 2012.

[38] Gogatishvili A., Stepanov, V.D., Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions, J. Math. Anal. Appl. 405 (1): 156-172, 2013.

[39] Gogatishvili, A., Mustafayev, R.Ch., Persson, L.-E., Some new iterated Hardy-type inequalities: the case $\theta = 1$, J. İnequal. Appl., 515 (1): 29 pp., 2013.

[40] Gogatishvili A., Mustafayev R.Ch., Weighted iterated Hardy-type inequalities, Math. Inequal. Appl. 20 (3): 683-728, 2017.

[41] Gogatishvili A., Mustafayev R.Ch., Iterated Hardy-type inequalities involving suprema, Math. Inequal.Appl. 20 (4): 901-927, 2017.

[42] Gogatishvili, A., Opic, B., Pick, L., Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema, Collect. Math. 57 (3): 227-255, 2006.

[43] Gogatishvili A., Pick, L., A reduction theorem for supremum operators, J. Comput. Appl. Math. 208 (1): 270-279, 2007.

[44] Gogatishvili A., Stepanov, V.D., Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions, Uspekhi Mat. Nauk 68 (4): (412), 3-68, 2013. (Russian); English transl., Russian Math. Surveys 68 (4): 597-664, 2013.

[45] Goldman, M.L., Sharp estimates for the norms of Hardy-type operators on cones of quasimonotone functions, Tr. Mat. İnst. Steklova 232, 2001. Funkts. Prostran., Garmon. Anal., Differ. Uravn., 115-143 (Russian); English transl., Proc. Steklov Inst. Math. (232) (1), 109-137, 2001.

[46] Goldman, M.L., Order-sharp estimates for Hardy-type operators on the cones of functions with properties of monotonicity, Eurasian Math. J. 3 (2): 53-84, 2012.

[47] Goldman, M.L., Order-sharp estimates for Hardy-type operators on cones of quasimonotone functions, Eurasian Math. J. 2 (3): 143-146, 2011.

[48] Grafakos, L., Classical Fourier analysis, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 249, Springer, New York, 2008.

[49] Grafakos, L., Modern Fourier analysis, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 250, Springer, New York, 2009.

[50] Guzmán, M., Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 481, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[51] Heinig H.P., Stepanov V.D., Weighted Hardy inequalities for increasing functions, Canad. J. Math. 45 (1): 104-116, 1993.

[52] Iwaniec T., Sbordone, C., On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses, Arch. Rational Mech. Anal. 119 (2): 129-143, 1992.

[53] Johansson, M., Stepanov, V.D., Ushakova, E.P., Hardy inequality with three measures on monotone functions, Math. Inequal. Appl. 11 (3): 393-413, 2008.

[54] Kaminska A., Maligranda, L., Order convexity and concavity of Lorentz Spaces $\Lambda^p(w),\ 0 < p < \infty,$ Studia Math. 160 (3): 267-286, 2004.

[55] Kerman R., Pick, L., Optimal Sobolev imbeddings, Forum Math. 18 (4): 535-570, 2006.

[56] Krasnosel'skii M.A., Rutickii, Ja.B., Convex functions and Orlicz spaces, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[57] Krein, S.G., Petunin, Yu.I., Semenov, E.M., Interpolation of linear operators, Translations of Mathematical Monographs, vol.54, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1982.

[58] Kufner, A., Persson, L.-E., Weighted inequalities of Hardy type, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[59] Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.-E., The Hardy inequality, Vydavatelsky Servis, Plzeñ, 2007.

[60] Lai, S., Weighted norm inequalities for general operators on monotone functions, Trans. Amer. Math. Soc. 340 (2): 811-836, 1993.

[61] Leckband M.A., Neugebauer, C.J., Weighted iterates and variants of the Hardy-Littlewood maximal operator, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1): 51-61, 1983.

[62] Lerner, A.K., A new approach to rearrangements of maximal operators, Bull. London Math. Soc. 37 (5): 771-777, 2005.

[63] Lindenstrauss J., Tzafriri, L., Classical Banach spaces. II, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. 97, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[64] Lorentz, G.G., On the theory of spaces Λ, Pacific J. Math. 1 (3): 411- 429, 1951.

[65] Mastyło M., Pérez, C., The Hardy-Littlewood maximal type operators between Banach function spaces, Indiana Univ. Math. J. 61 (3): 883-900, 2012.

[66] Matuszewska W., Orlicz, W., On certain properties of φ- functions, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1): 39-443. 1960

[67] Neugebauer, C.J., Iterations of Hardy-Littlewood maximal functions, Proc. Amer. Math. Soc. 101 (2): 272-276, 1987.

[68] Opic, B., On boundedness of fractional maximal operators between classical Lorentz spaces, Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Pudasj$\ddot{a}$rvi, 1999), Acad. Sci. Czech Repub., Prague, 187-196, 2000.

[69] Opic B., Kufner, A., Hardy-type inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990.

[70] Opic B., Trebels, W., Bessel potentials with logarithmic components and Sobolev-type embedding, Anal. Math. 26 (4): 299-319, 2000.

[71] Opic B., Trebels, W., Sharp embeddings of Bessel potential spaces with logarithmic smoothness, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 134 (2): 347-384, 2003.

[72] Pick, L., Supremum operators and optimal Sobolev inequalities, Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Pudasj$\ddot{a}$rvi, 1999), Acad. Sci. Czech Repub., Prague, 207-219, 2000.

[73] P$\acute{e}$rez, C., On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy- Littlewood maximal operator between weighted L_p-spaces with different weights, Proc. London Math. Soc. (3) 71 (1): 135-157, 1995.

[74] Pick, L., Optimal Sobolev embeddings - old and new, Function spaces, interpolation theory and related topics (Lund, 2000), de Gruyter, Berlin, 403-411, 2002.

[75] Popova, O. V., Hardy-type inequalities on cones of monotone functions, Sibirsk. Mat. Zh. 53 (1), 187-204, 2012 (Russian); English transl., Sib. Math. J. 53 (1): 152-167, 2012.

[76] Pustylnik, E., Optimal interpolation in spaces of Lorentz-Zygmund type, J. Anal. Math. 79 (1): 113-157, 1999.

[77] Sawyer, E., Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces, Studia Math. 96 (2): 145-158, 1990.

[78] Sinnamon, G., Embeddings of concave functions and duals of Lorentz spaces, Publ. Mat. 46 (2): 489-515, 2002.

[79] Sinnamon, G., Transferring monotonicity in weighted norm inequalities, Collect. Math. 54 (2): 181-216, 2003.

[80] Sinnamon G., Stepanov, V.D., The weighted Hardy inequality: new proofs and the case p = 1, J. London Math. Soc. (2) 54 (1): 89-101, 1996.

[81] Soria, J., Lorentz spaces of weak-type, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 49 (193): 93-103, 1998.

[82] Stepanov, V.D., The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions, Trans. Amer. Math. Soc. 338 (1): 173-186, 1993.

[83] Stepanov, V.D., Integral operators on the cone of monotone functions, J. London Math. Soc. (2) 48 (3): 465-487, 1993.

[84] Stein, E.M., Editor's note: the differentiability of functions in $\mathbb{R}^n$, Ann. Math. (2) 113 (2): 383-385, 1981.

[85] Stein, E.M., Singular integrals and differentiability properties of functions, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[86] Stein, E. M., Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[87] Torchinsky, A., Real-variable methods in harmonic analysis, Pure and Applied Mathematics, vol. 123, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nevin BİLGİÇLİ
Doğum Tarihi : 02.12.1980
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü, 1999-2004

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Öğretmenliği A.B.D., 2005-2006

Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü,
İşletme A.B.D., 2007-2008

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik A.B.D., 2009-2011

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar:

MEB, 2008 -

Yayınları (SCI) :

1. Mustafayev, R.Ch., Bilgiçli, N., Generalized fractional maximal functions in Lorentz spaces Λ, Journal of Mathematical Inequalities (yayına kabul edilmiştir).