

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

127380

MAKİNE ANA BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

127380

DİKEY BİR LEVHADA LAMİNER ŞARTLARDA DOĞAL ISI
TAŞINIMININ İNCELENMESİ

E.C. YÜKSEK LİSANS TEZİ
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

BATTAL DOĞAN

TEMMUZ 2002

Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans Tezi olarak uygun bulunmuştur.

...../...../2002

Yüksek Lisans Derecesini tamamlamak için tezin yeterli olduğunu onaylarım.

Bu tezi okuduk. Bizim açımızdan tezin kapsamı ve kalitesi Yüksek Lisans Derecesini tamamlamak için yeterli ve uygundur.

Yardımcı Danışman

Tez Jürisi Üyeleri

Prof.Dr. İlhan KOCAARSLAN

Prof.Dr. Veli ÇELİK

Yrd.Doç.Dr. İbrahim UZUN

ÖZET

DİKEY BİR LEVHADA LAMİNER ŞARTLARDA DOĞAL ISI TAŞINIMININ İNCELENMESİ

DOĞAN, Battal

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd.Doç.Dr. İbrahim UZUN

Temmuz 2002, 66 sayfa

Bir levha sıcaklığı kendi sıcaklığından farklı olan bir akışkan içinde bulunuyorsa ısı geçişinden dolayı levhaya dik doğrultuda sıcaklık basamağı meydana gelir. Bu sıcaklık basamağı yoğunluk farkına, yoğunluk farklılığı da doğal ısı taşınımına sebep olur. Doğal taşınımında yüzeyle akışkan arasında sınır tabaka oluşur. Sınır tabaka denklemlerinin çözümü sonucunda sıcaklık ve hız dağılımı elde edilir. Bu çalışmada dikey bir levhada meydana gelen doğal taşınım sınır tabakası incelenmiştir. Bu sınır tabakaya ait süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin çözümünü yapılmıştır. Çözümleri yaparken analitik olarak benzerlik ve integral metodları, sayısal olarak sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Üç yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğal taşınım, dikey levha, benzerlik, integral, sonlu farklar

ABSTRACT

INVESTIGATION OF NATURAL HEAT CONVECTION ON A VERTICAL PLATE IN LAMINER FLOW CONDITIONS

DOĞAN,Battal

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Division of Mechanical Engineering, M.Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. İbrahim UZUN

July 2002, 66 pages

As a plate comes to contact with a fluid at a different temperature, it experiences heat gradient in the vertical direction to the plane due to their temperature difference. This gradient depends on density variation of the fluid which, in fact, causes natural heat convection. During this process, a boundary layer occurs between the plate and the fluid. The solution of the boundary layer equations provides the temperature and velocity variations in space. In this study, the boundary layer of the natural heat convection on a vertical plate was investigated. For the boundary layer, the continuity, momentum and energy equations were solved using both analytical and numerical methods. For the analytic solutions the similitude and integral methods were employed and for the numerical solutions finite difference techniques were used. The three different solutions were studied comparatively.

Key words: Natural heat convection, vertical plate, similitude, integral method, finite difference techniques.

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın her aőamasında değerli bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim saygı değer hocam Yrd.Do.Dr. İbrahim UZUN Bey'e, Makine Mühendislięi Bölümündeki değerli hocalarıma, tezimi hazırlamam esnasında yardımlarını esirgemeyen Fatih ERGENOęLU'na ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.



SİMGELER DİZİNİ

A	Kesit Alanı(m ²)
Ψ	Akım Fonksiyonu
α	Isıl Yayılım Katsayısı
β	Hacimsel Genleşme Katsayısı
c_p	Özgül Isı [kJ/kg.K]
ΔT	Sıcaklık Farkı [K]
δ	Hız Sınır Tabaka kalınlığı [m]
δ_T	Isıl Sınır Tabaka kalınlığı [m]
g	Yerçekimi Kuvveti [m/s ²]
Gr	Grashof Sayısı
h	Isı Taşınım Katsayısı [$\bar{W}/m^2.K$]
k	Isı İletim Katsayısı [W/m.K]
L	Uzunluk [m]
η	Benzerlik Parametresi
μ	Dinamik Viskozite [Pa.s]
Nu	Nusselt (yerel) Sayısı
P	Basınç[Pa]
Pr	Prandtl Sayısı
q	Geçen Isı Miktarı[W]
\dot{q}	Isı Akısı[W/m ²]
Ra	Rayleigh Sayısı

Re	Reynold Sayısı
θ	Boyutsuz Sıcaklık
ρ	Yoğunluk [kg/m ³]
σ	Stefan-Boltzman Sabiti [W/m ² K ⁴]
T	Sıcaklık [K]
T_w	Yüzey Sıcaklığı [K]
T_∞	Akışkan Sıcaklığı [K]
t	Zaman
τ	Kayma Gerilmesi [Pa]
u	x yönü hız bileşeni [m/s]
v	y yönü hız bileşeni [m/s]
ν	Kinematik Viskozite [m ² /s]
*	Boyutsuz sayıları gösterir

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

1.1. Isı Geçişinin Gösterimi	3
2.1. Isı Taşınımının Gösterimi	6
2.2. Düz Bir Levhada Hız Sınır Tabakanın Gösterimi	12
2.3. Düz Bir Levhada Isıl Sınır Tabaka Gösterimi	13
2.4. Farklı Sıcaklıklara Sahip Levhalar arasındaki Isı Geçişi	15
3.1. Dikey Sıcak Levhada Hız ve Sıcaklık Profili	21
3.2. Dikey Bir Levhada Hız ve Sıcaklık Profilleri	49
3.3. Sonlu Fark Yaklaşımında Düğüm Noktalarının Gösterimi	50
3.4. Dikey Bir Levha İçin Grid Sistemi	52
3.5. Akış Diyagramı	53
4.1. Nusselt Sayılarının Karşılaştırılması	57
4.2. Hız Dağılımlarının Karşılaştırılması	58
4.2. Sıcaklık Dağılımlarının Karşılaştırılması	58

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. ISI GEÇİŞİ.....	3
1.1.1. ISI İLETİMİ.....	4
1.1.2. ISI TAŞINIMI.....	5
1.1.3. ISI IŞINIMI.....	5
2. METERYAL VE YÖNTEM.....	6
2.1. ISI TAŞINIMI.....	6
2.1.1. ISI TAŞINIMINDA GENEL DENKLEMLER.....	7
2.1.1.1. SÜREKLİLİK DENKLEMİ.....	9
2.1.1.2. MOMENTUM DENKLEMİ.....	9
2.1.1.3. ENERJİ DENKLEMİ.....	10
2.2. TEMEL DENKLEMLERİN TARTIŞILMASI.....	10
2.3. TAŞINIM SINIR TABAKALARI.....	12
2.3.1. HIZ SINIR TABAKASI.....	12
2.3.2. ISIL SINIR TABAKA.....	12

2.4. DOĞAL ISI TAŞINIMI.....	13
2.4.1. DOĞAL TAŐINIMLA ISI GEÇİŞİ.....	14
2.4.2. BELİRLEYİCİ DENKLEMLER.....	16
2.5. BÜYÜKLÜK ANALİZİ.....	18
3. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	21
3.1. DİKEY BİR LEVHADA LAMİNER DOĞAL ISI TAŞINIMI.....	21
3.2. İNTEGRAL METODU.....	22
3.3. İNTEGRAL METODUYLA DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ.....	23
3.4. BENZERLİK YAKLAŞIMI.....	38
3.5. SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜM	50
4. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	56
KAYNAKLAR.....	60
EK-1.....	62

1. GİRİŞ

Bir akışkan farklı sıcaklıkta bir yüzeyle temasa geçtiğinde akışkan içinde sıcaklık farkları meydana gelir. Sıcaklığı fazla olan akışkan zerrelerinin yoğunluğu azaldığından yukarı doğru hareket etmeye başlar. Akışkan içindeki sıcaklık farklarının sonucu olarak akışkan yoğunluğundaki değişimin meydana getirdiği hareket doğal taşınımıdır.

Doğal ısı taşınımının etkili olduğu bir çok uygulama vardır. Doğal taşınım, çeşitli elektronik cihazlardan olan ısı geçişini etkilediği kadar, borulardan ve dağıtım hatlarından olan ısı geçişini de etkiler. Elektrikli ısıtıcılardan veya radyatörlerden oda havasına aktarılan ısı veya bir soğutma ünitesinin yoğuşturucu serpantinden çevreye verilen ısı, hep doğal taşınımın etkisiyle olur.

Bir levha sıcaklığı kendi sıcaklığından farklı olan bir akışkan içinde bulunuyorsa ısı geçişinden dolayı levhaya dik doğrultuda sıcaklık basamağı oluşur. Bu sıcaklık basamağı yoğunluk farkına , yoğunluk farklılığı da doğal ısı taşınımına sebep olur. Doğal taşınımında zorlanmış taşınımında olduğu gibi yüzeyle akışkan arasında sınır tabaka oluşur. Sınır tabaka denklemlerinin çözümü sonucunda sıcaklık ve hız dağılımı elde edilir. Sınır tabaka çözümlerinde Prandtl sınır tabaka teorimi kullanılmaktadır. Bu teoreme göre belirli koşullar altında levha yüzeyinin hemen yakınlığında hız gradyeni büyük olduğu için o bölgede viskoz kuvvetlerin önemi vardır.

By Volad Noshadi ve Wilhelm Schneider^[1] dikey bir levha için sınır tabaka denklemlerini FIDAP programı aracılığıyla $Pr=1$ için çözmüştür. Programa girilen

sınır şartları için çözümler yapılırken Pr sayısı 1 alınmış ve değişik Prandtl sayıları için sonuçları elde etmemiştir.

1988 yılında Tsuji ve Nagano^[2] izotermal dikey bir levha için deneysel çalışmalar yapmıştır. Türbülanslı akış şartlarında çözüm yapmışlardır. Deneysel sonuçların karşılaştırma unsuru olarak 1946 yılında Ostrach tarafından yapılan benzerlik çözümlerini kullanmışlar ve analitik çözümlerle uğraşmamışlardır.

I.Mulolani ve M. Rahman^[3] dikey bir levha için derişiklik sınır tabaka denklemlerini benzerlik metoduyla çözmüştür. Değişik durumlar için diferansiyel eşitlikleri elde etmişler ve 5 durum için çözüm yapmışlardır. Bu çalışmada benzerlik metodu dışında bir metod kullanılmamış ve karşılaştırma yapılmamıştır.

Dochan Kwak^[4] ve arkadaşları tarafında dikey bir levha için sınır tabaka denklemleri nümerik metodlarla yapılmıştır. Bu çözümlerde bazı basitleştirmeler kullanılmış elde edilen denklem takımları Jacobian matris metoduyla çözülmüştür.

Bu çalışmaların ışığında dikey bir levhada meydana gelen sınır tabaka incelenmiştir. Bu sınır tabakaya ait süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin çözümünü yapılmıştır. Çözümleri yaparken benzerlik, integral ve sonlu farklar metodlarını kullanılmıştır. Üç çözümlerle elde edilen sonuçlar karşılaştırılıp yaklaşık ve kesin çözümlerin birbirine ne kadar yakın olduğu görülmüştür.

1.1. Isı Geçişi

Üzerinde inceleme yapmak üzere sınırlar içine alınan madde topluluğuna sistem, dışındakilere de çevre denir. Sistemin sınırlarında enerji geçerken ya iş yada ısı biçimindedir. Isı; Aralarında sıcaklık farkı olan sistem ile çevre veya sistemle başka bir sistem arasındaki enerji geçiştir. Yani ısı bir sistemin sınırını geçmekte olan ısı enerjidir ve yayılmasını sağlayan itici güç de sıcaklık farkıdır. Termodinamiğin ikinci kanununa göre Isı yüksek sıcaklıktan düşük sıcaklığa doğru kendiliğinden geçer. Termodinamik bu ısı geçişinin nasıl ve ne hızda olduğunu açıklamaz. Çünkü termodinamikte zaman bir değişken olarak ele alınmaz. Termodinamik denge durumundaki sistemlerle ilgilenir. Geçen ısı doğrudan doğruya ölçülemez ve gözlenemez ama meydana getirdiği tesirler gözlenebilir ve ölçülebilir.



Şekil 1.1 Isı geçişinin gösterimi

Isı geçişi bilim dalı termodinamiğin birinci ve ikinci, kütle korunumu ve Newton'un ikinci hareket kanunlarına ilave üç özel kanun yardımı ile, ısı geçişi olayının yapısını inceleyerek , ısı geçişini etkileyen büyüklükleri belirler ve bu büyüklükler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade eder. Çözüm yöntemi olarak da analitik, sayısal, deneysel ve benzeşim yöntemlerini kullanır.^[12]

Isı sistemin sınırlarında tanımlıdır ve bir geçişi ifade eder. Sistemlerin ısıları yoktur ama sınırda ısı geçişi vardır. Isı geçişi üç yolla olur.

1.1.1. Isı İletimi (Kondüksiyon)

Isı iletimi aynı katı, sıvı veya gaz ortamındaki farklı bölgeler arasında, veya doğrudan fiziki temas durumunda bulunan farklı ortamlar arasında, moleküllerin fark edilir bir yer değiştirmesi olmaksızın, moleküllerin doğrudan teması sonucunda oluşan ısı geçişi işlemidir. Isı iletiminin genel denklemi Fourier tarafından aşağıdaki formülle verilmiştir:

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \quad (1.1)$$

Burada $\frac{dT}{dx}$ terimi x yönündeki sıcaklık gradyeni göstermektedir. Isı geçişi tek boyutlu varsayılarak (1.1) eşitliğinin integrali alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$q = kA \frac{(T_1 - T_2)}{L} \quad (1.2)$$

Burada;

q : İletimle geçen ısı miktarı, (W)

A : Isı iletiminin gerçekleştiği alan, (m²)

L : Isının iletiminin gerçekleştiği malzemenin kalınlığı, (m)

T₁, T₂ : Isı iletiminin gerçekleştiği malzemenin duvar sıcaklıkları, (K)

k : Malzemenin ısı iletim katsayısı, (W/m.K)

1.1.2. Isı Taşınımı (Konveksiyon)

Bir yüzey üzerinden veya bir boru içerisinde akan akışkanın sıcaklığı yüzey sıcaklığından farklı ise akışkan hareketi sonucu akışkan ile yüzey arasındaki ısı transferi olayı ısı taşınımı olarak adlandırılır. Newton'un soğutma kanunu olarak da bilinen ısı taşınımı aşağıdaki eşitlikle ifade edilebilmektedir.

$$q = hA(T_w - T_\infty) \quad (1.3)$$

Burada;

h :Isı taşınım katsayısı, $(W/m^2 K)$

T_∞ :Yüzey sıcaklığı, (K)

T_w :Akışkan sıcaklığı, (K)

1.1.3. Isı Işınımı (Radyasyon)

Herhangi bir temas ve akışkan hareketi olmaksızın elektro manyetik dalgalar vasıtası ile olan ısı transferi olayına ısı ışınımı denir. Işınım yoluyla gerçekleşen ısı transferi Stefan-Boltzman eşitliği olarak aşağıdaki şekilde tarif edilmektedir.

$$q = F.\epsilon.\sigma.A.T^4 \quad (1.4)$$

Burada;

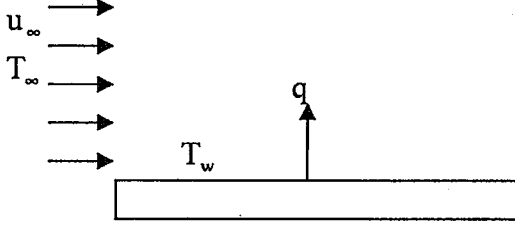
σ :Stefan-Boltzman sabiti $(\sigma=5.67.10^{-8} W/m^2K^4)$

ϵ :Isı Yayınım katsayısı

F :Geometrik biçim katsayısı

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Isı Taşınımı (Konveksiyon)



Şekil 2.1 Isı taşınımının düz bir levhada gösterimi

Taşınım ile ısı geçişi, sınır tabaka içindeki akışkanın hem rastgele moleküler hareketi, hemde kitle hareketi ile beslenir. Rastgele moleküller hareketin katkısı akışkan hızının düşük olduğu yüzeye yakın kısımda etkindir. Hatta yüzey ile akışkan arasındaki ara yüzeyde akışkan hızı sıfırdır ve ısı geçişi yalnız bu mekanizma ile olur. Akışkan kitle hareketinin katkısı akış bir doğrultuda gelişirken sınır tabakanın büyümesi olgusuna dayanır. Yani bu tabakaya iletimle geçen ısı, akış yönünde süpürülür ve sonuçta sınır tabaka dışındaki akışkana aktarılır. Taşınım ile ısı geçişinin anlaşılması için sınır tabaka kavramının iyi anlaşılması gerekir^[11]

Isı taşınımı akışın yapısına göre sınıflandırılır. Eğer akışkan herhangi bir pompa, vantilatör gibi benzeri cihazlar ile yada rüzgar tarafından etkilenmiyorsa bu akışkandaki ısı taşınımına doğal ısı taşınımı denir. Örnek olarak durgun hava içindeki sıcak devre elemanının kendiliğinden soğuması verilebilir. Eğer akışkan herhangi bir pompa, vantilatör gibi benzeri cihazlar ile yada rüzgar tarafından zorlanmış harekete maruz kalıyor ise bu akışkandaki ısı taşınımına zorlanmış ısı

taşınımı denir. Örnek olarak elektronik devre elemanlarının bir fanın oluşturduğu veya zorladığı akış sonucu taşınımınla soğutulması gösterilebilir. Akışkanın hareketi uygulanan basınç nedeni ile oluşuyorsa zorlanmış taşınımdan akışkan hareketi yoğunluk farkından oluşuyorsa doğal taşınımdan bahsedilir.^[12]

Zorlanmış taşınım ve doğal taşınım ayrı ayrı oluşabildiği gibi aynı anda da oluşabilirler. Taşınımınla ısı geçişinin tüm türleri için Newton'un soğuma kanunu $q = h.A.(T_w - T_\infty)$ şeklindedir. Burada geçen ısı miktarı $q(W)$, yüzey ve akışkan sıcaklıkları arasındaki fark $(T_w - T_\infty)$ ile doğru orantılıdır. Buradaki orantı katsayısı $h (W/m^2.K)$ ısı taşınım katsayısı olarak adlandırılır. Bu değer yüzey geometrisine, akışkan hareketinin türüne, akışkanın bazı termodinamik ve aktarım özelliklerine göre belirlenen sınır tabakadaki koşullara bağlıdır.

2.1.1. Isı Taşınımında Genel Denklemler

Akışkanın hareket hali ısı aktarımından bağımsız ise orada zorlanmış taşınım var demektir. Böyle durumlarda akışkan hareketi dış güçlere basınç farkı biçiminde oluşturulmuştur. Eğer akışkanın hareketinin sebebi akışkanın gövde içi güçlerinden ise ona doğal taşınım denir. Böyle bir durum bir katı yüzeyinden aktarılan ısının katıya yakın bölgelerde oluşturduğu yoğunluk farklılıklarından kaynaklanabilir.^[8]

Burada sürekli ortam durumundaki akışkanlar ele alınacaktır. Herhangi bir akışkan sürekli bir ortam oluşturabilir ve uygulanan kayma gerilimi ile gerilme hızı arasında lineer bir bağıntı bulunabilir. Böyle akışkanlara 'Newton akışkanı' denir. Bir kayma akışında kayma gerilimi ile gerilme hızı (hız gradyanı) arasında bir Newton akışkanı için verilen bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (2.1)$$

Burada hız bileşenlerinden yalnız birinin gradyanı sıfırdan farklıdır ve orantı sabiti olarak verilen μ “mutlak viskozite” , ”dinamik viskozite” yada basitçe “viskozite” olarak bilinir. Viskozite, her bir Newton akışkanı için belirli bir sıcaklık ve basınçta sabittir. Newton olmayan akışkanlarda ise belli bir sıcaklık ve basınçta viskozite gene hız gradyanının bir fonksiyonudur.

İdeal bir akışkan tanıma göre sıkıştırılamayan türden ve sıfır viskozitelidir. Gerçekte hiçbir akışkanın viskozitesi sıfırın civarında bile değildir fakat bu kavram çoğu hallerde gerçek akışkanlarda kabaca yaklaşımı sağlayan basit bir model olduğu için kullanışlıdır. İdeal bir akışkan üzerinden geçtiği katı sınırlardan kayar ki ideal akışkanla gerçek akışkan arasındaki en büyük fark budur. Taşınımın ısı geçişi teorisinin temel amacı bir katı yüzey ile dokunumu olan akışkan içinde sıcaklık dağılımı ve buna bağlı olarak da ısı akısının hesabını çıkarabilmektedir. Sınır,giriş ve ilk şartları belirlenmiş herhangi bir yüzeyde bu tür hesapların yapılabilmesi istenir. Verilen akış ve sıcaklık alanı için ilk ve sınır koşullar ve de akışkanın bu koşullardaki özellikleri biliniyorsa aşağıda diferansiyeli verilen ısı akısının yerel değerini kesin yada yaklaşık hesaplayabilmek için yalnızca matematik yöntemi bulmak kalır. Buna göre çeperden giren ısı akısı;

$$\dot{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

Akışkanın içinde sıcaklık dağılımının bulunmasındaki güçlükler matematiksel yapıdan kaynaklanmaktadır. Özellikle laminer taşınımına kıyasla geçiş ve türbülans taşınımına çalışırken çözüme giden matematiksel fonksiyonları için bir çok kabullerin

yapılması gerekir ki bazılarının deneylerle uyum içinde olabilmesi ya da matematiksel olarak ispatı mümkün değildir.

2.1.1.1. Süreklilik Denklemi

Akmakta olan akışkanın bir kontrol hacim elemanına uygulanan kütleinin korunumunun matematiksel ifadesine “Süreklilik Denklemi” denir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

2.1.1.2. Momentum Denklemi

Akışkanın hareketinin dinamik davranışı “Hareket Denklemleri” yada “Momentum Denklemleri” denilen bir dizi denklem ile ifade edilebilir. Bu denklemler Newton’un 2. Hareket yasasını akışkanın sonsuz küçük bir kütleine yada akışkanın sonsuz küçük kontrol hacmine uygulanarak elde edilir. İki boyutlu momentum denklemi aşağıdaki eşitliklerle ifade edilebilmektedir.

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - \rho g \quad (2.4)$$

$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \quad (2.5)$$

göstermektedir. Burada (u) ve (v) sırasıyla (x) ve (y) yönündeki hızları, (ρ) akışkanın yoğunluğunu, μ viskoziteyi göstermektedir.

2.1.1.3. Enerji Denklemi

Belirli bir koordinatta bulunan akışkan elemanına Termodinamiğin 1. Yasasını uygulayarak elde edilir. 1. Yasaya göre bu elemana aktarılan ısıdan elemanın yaptığı iş çıkarılınca bulunan değer o elemanın enerjisindeki artışı verir.

$$\rho \cdot c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.6)$$

İki boyutlu bir düzlemde geçerli olan eşitlik (2.6) akışkanın sıcaklık dağılımını vermektedir.

2.2. Temel Denklemlerin Tartışılması

Süreklilik, Momentum ve Enerji denklemleri hareket eden akışkanda enerji taşınımalarını geniş kapsamlı açıklamaktadır. Bununla beraber bu denklemler içeriklerindeki doğrusal olmayan terimler ve bunların eşzamanlı çözümü gerektirmeleri nedeniyle yoğun matematiksel güçlükleri getirmektedirler. Bu doğrusal olmayan örnek için $\left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ terimi gösterilebilir. Doğrusal olmama nedeniyle lineer diferansiyel denklemlerin süperpozisyon prensibinin burada uygulanması imkansızdır ve basit akışlardan karmaşık akımlara geçilememektedir. Bu denklemler için bazı basit akımları temsil eden kesin çözümler bulunmuştur. Böyle durumlarda sıkıntı veren doğrusal olmayan terimler ya çok küçük yada sıfıra yakındır.

Eğer viskozite etkisi ihmal edilir ve akış şekli düzgün kabul edilirse potansiyel akış için çözüm yapılabilir. Viskoz etkiler ihmal edildiğinde denklemlerin

mertebesi azaltılır ve bu durumda akışkanın bütün fiziksel sınır şartlarının karşılanabilmesi imkansızlaşır. Özel olarak yalnız bir sınırdan akmakta olan tanımlanmış şartlardaki akışın uygunluğu mümkündür ve bir sınır boyunca hızı sabitleştiren şartlar kolaylık getirmelidir.

Bu denklemlerdeki uğraştırıcı doğrusal olmayan terimler diğerleri yanında çok küçük kalıyorsa çözümler mümkündür. Bu çözümlerle temsil edilen akışlara “yavaş hareketler” denir. Bir akışkanda atalet kuvvetlerinin viskoz etkilerine oranını veren bir birimsiz sayı Reynolds sayısıdır. Bu miktar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Re = \rho \frac{u.L}{\mu} \quad (2.7)$$

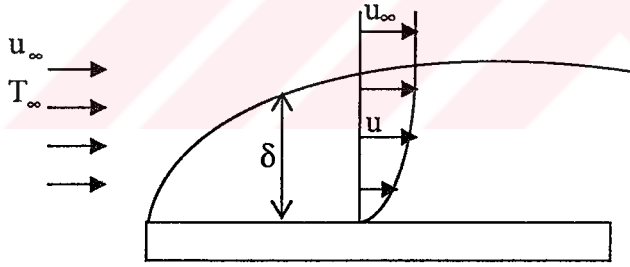
Yavaş akışlar için Reynolds sayıları ile karakterize edildiği halde gerçek akışların hemen çoğunda Reynolds sayıları 1'den çok daha büyüktürler. 1904'de L.Prandtl akışkanlar mekaniğine önemli bir ilerleme getirmiş sınır tabaka yaklaşımlarını ortaya atarak büyük Reynolds sayılı akışların da matematiksel olarak çalışılmasına olanak sağlamıştır. Sınır tabaka teorisini getirmiştir.

2.3. Taşınım sınır tabakaları

2.3.1. Hız (Hidrodinamik) Sınır Tabakası

Akışkan parçacıkları yüzeyle temas ettiklerinde hızları sıfır olur. Bu parçacıklar bitişik akışkan tabakaları içindeki parçacıkların hareketini yavaşlatır ve bu etki azalarak, $y = \delta$ uzaklığında göz ardı edebilir değere gelir. Bu bölgede akışkan hareketinin incelenmesine gerek yoktur.^[11]

δ büyüklüğü sınır tabaka kalınlığı olarak adlandırılır. Sınır tabaka hız profili sınır tabaka içinde u hızının y ile değişimini gösterir. Buna göre akış iki farklı bölgeye ayrılabilir. İnce akışkan tabakası (sınır tabaka); bu tabaka içinde hız gradyanı ve kayma gerilmeleri büyüktür. Sınır tabaka dışındaki bölge; bu tabaka içinde hız gradyanı ve kayma gerilmeleri göz ardı edilebilir.



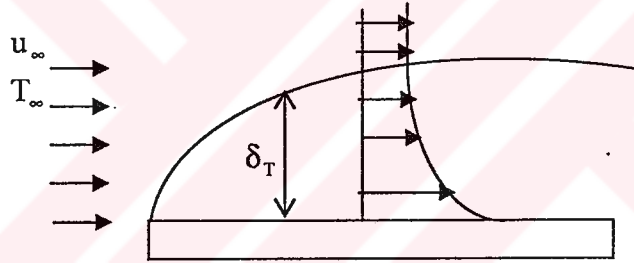
Şekil 2.2 Düz bir levhada hız sınır tabaka gösterimi

2.3.2. Isıl Sınır Tabaka

Isıl sınır tabaka içindeki bir kontrol hacmine enerji korunumunu uygulayabiliriz. Eğer akışkan sıcaklığı yüzey sıcaklığından düşükse sınır tabakanın dışında sıcaklık ortam sıcaklığına eşittir. Sınır tabakanın içinde sıcaklık yüzeye yaklaştıkça artar.

Isıl sınır tabakanın sıcaklık alanı sınır şartlarıyla hız bileşenlerinin yerleştirilmesiyle çözülebilir. Özellikler sabit kabul edildiğinde enerji denklemi lineer bir diferansiyel denkleme dönüşür. Bu nedenle sıcaklık dağılımını iki kısımda ifade etmek mümkündür. Birinci kısım hız sınır tabakasındaki viskoz iş kayıplarının sıcaklık dağılımına katılımı diğeri ise levhanın ısıtılma yada soğutulmasının sıcaklık dağılımına etkisidir.

Düşük hızlardaki akışlarda viskoz sürtünmelerin etkisi küçük olduğundan genelde ihmal edilir. Ayrıca serbest bölge sıcaklığı ile duvar sıcaklığı farkının da az olduğu durumlarda fiziksel özelliklerin sıcaklıkla değişimi ihmal edilir.



Şekil.2.3. Düz bir levhada ısıl sınır tabaka gösterimi

2.4. Doğal Isı Taşınımı

Dış etki sonucu yaratılmış hızın olmadığı ama akışkan içinde yinede taşınımın olduğu durumlar doğal veya serbest taşınım olarak adlandırılır. Doğal taşınım içinde sıcaklık gradyanlarının olduğu bir akışkan üzerine gövde kuvvetleri etkidiği zaman ortaya çıkar. Net etki doğal akışa neden olan kaldırma kuvvetidir. En

genel durumda, Yoğunluk gradyanı sıcaklık gradyanından kaynaklanır. Gövde kuvveti de yerçekiminden kaynaklanır.^[7]

Doğal taşınımında akış hızları genellikle zorlanmış taşınımına göre daha küçük olduğundan taşınımın ısı geçişi de daha yavaştır. Belki bu nedenle doğal taşınım daha az önemsenir. Farklı yollarla ısı geçişinin olduğu bir çok uygulamada doğal taşınım ısı geçişine en büyük direnci oluşturur. Bu nedenle sistemin tasarımında veya performansında önemli rol oynar. Isı geçişini azaltmak ve buna bağlı olarak işletme giderlerini en düşük düzeye indirmek söz konusu olduğunda doğal taşınım zorlanmış taşınımına tercih edilir.

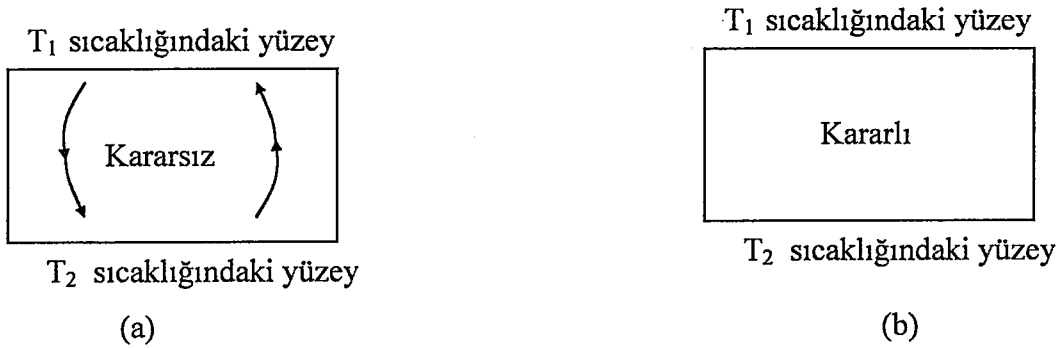
Doğal taşınımın etkili olduğu bir çok uygulama vardır. Elektronik cihazlardan borulardan ve dağıtım hatlarından olan ısı geçişini etkiler. Elektirikli ısıtıcılardan veya radyatörlerden oda havasına aktarılan ısı veya bir soğutma ünitesinin yoğunlaştırıcı serpantininden çevreye verilen ısı hep doğal taşınım etkisiyle olur.

2.4.1. Doğal Taşınımın Isı Geçişi

Doğal taşınımında akışkan hareketi akışkan içindeki kaldırma kuvvetleriyle oluşur oysa zorlanmış taşınımında dış etkiler tarafından yaratılır. Kaldırma akışkan içindeki yoğunluk gradyanı ile yoğunlukla orantılı bir gövde kuvvetinin birlikte olmalarının sonucu doğar. Gövde kuvveti genellikle yerçekimi kuvvetidir, ancak dönen bir turbo makinede merkezkaç kuvveti veya atmosfer ve okyanusla ilgili dönel hareketlerde coriolis kuvveti olarak ortaya çıkabilir.

Bir akışkan içerisinde yoğunluk gradyanını ortaya çıkarabilecek farklı durumlar olmakla birlikte en genel olanı bir sıcaklık gradyanına bağlı yoğunluk farklılığıdır. Gazların ve sıvıların yoğunluklarının sıcaklığa bağlı olduğu bilinmektedir. Yoğunluk genellikle artan sıcaklıkla birlikte azalır. Çünkü akışkan artan sıcaklıkla genişir. ($\partial\rho/\partial T < 0$)

Yerçekimsel bir alanda akışkan içerisinde yoğunluk gradyanının olması doğal taşınım akımlarının oluşmasını sağlamayabilir. Şekil 2.4'deki durumu göz önüne alalım. Bir akışkan farklı sıcaklıkta iki büyük levha arasında bulunmaktadır. (a) durumunda alt levhanın sıcaklığı daha yüksektir. Yoğunluk yerçekimi yönünde azalmaktadır. Eğer sıcaklık farkı kritik değeri geçerse koşullar kararsız olur ve kaldırma kuvvetleri sürtünme kuvvetlerinin engelleyici etkisini yenmeye başlar. Üst tabakadaki daha yoğun akışkan üzerine etkiyen yerçekimi kuvveti alt tabakalardaki daha hafif akışkan üzerine kuvvete baskın gelir. Böylece dolaşım başlar. Ağır akışkan aşağıya doğru iner ve ısınmaya başlar bu sırada hafif akışkan yükselir ve soğur. Ancak b durumunda $T_1 > T_2$ olsun. Yoğunluk yerçekimi kuvveti yönünde azalmamaktadır. Koşullar kararlıdır ve akışkan hareketi söz konusu değildir.



Şekil 2.4 Farklı sıcaklıklara sahip levhalar arasındaki ısı geçişi

Yukarıdaki şekilden anlaşılacağı üzere (a) durumunda ısı geçişi alt yüzeyden üst yüzeye doğru doğal taşınım ile (b) durumunda ise üstten aşağıya doğru iletimle gerçekleşir.

2.4.2. Belirleyici Denklemler

Doğal taşınımında momentum ve enerji geçişini tanımlayan denklemler korunum ilkelerinden elde edilirler. Atalet ve sürtünme kuvvetleri etkilidir. Enerji geçişi kütle hareketi ve yayılımlardır. Doğal taşınımında ana rol kaldırma kuvvetleri tarafından üstlenilir. Kaldırma kuvvetleri tarafından yaratılan bir laminar sınır tabaka akışı ele alınsın (Şekil 2.4). Sürekli iki boyutlu bir akışın olduğu, özelliklerin sabit kaldığı ve yerçekimi kuvvetinin eksi x yönünde etkidiği varsayalım. Akışkan sıkıştırılmaz olsun. Sınır tabaka için x-momentum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X \quad (2.8)$$

Burada X gövde kuvveti terimidir. Eğer bu kuvvete tek katkı yerçekimi tarafından yapılıyorsa birim hacim için gövde kuvveti $X = -\rho g$ olur. Burada g yerçekimi ivmesidir. Öngörülen kabullerle x-momentum denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

Bu durumda sınır tabaka içindeki herhangi bir noktada x-basınç gradyanı sınır tabaka dışındaki durgun bölge içindeki basınç gradyanına eşit olmalıdır. Ancak bu bölgede $u=0$ 'dır. Bu nedenle eşitlik(2.9)'daki $\partial p/\partial x$ terimi $\partial p/\partial x = -\rho_\infty g$ halini alır. Bu terim eşitlik (2.9) denkleminde yerine konursa doğal taşınımında her noktada geçerli aşağıdaki denklem elde edilir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{\rho} (\rho_\infty - \rho) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.10)$$

Eşitlik (2.10)'ün sağ tarafındaki ilk terim kaldırma kuvveti terimidir. Akış yoğunluğunun değişmesinden kaynaklanır. Bu değişim Hacimsel ısı genleşme katsayısının denkleme konmasıyla daha açık yazılabilir.

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (2.11)$$

Akışkanın bu termodinamik özelliği yoğunluğunun sabit basınçta sıcaklığa göre değişimini gösterir ve yaklaşık olarak

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T} \right) \quad (2.12)$$

$$(\rho_\infty - \rho) \approx \rho \beta (T - T_\infty)$$

şeklinde yazılabilir. Buda göz önüne alınarak momentum denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

Böylece akışkanın hareketini yaratan kaldırma kuvvetinin sıcaklık farkına bağlılığı açıkça gösterilmiş olur. Kaldırma kuvvetleri sadece momentum denkleminde etkilerler. Kütle ve enerjinin korunumu zorlanmış taşınımındaki denklemlerle aynıdır. Doğal taşınıma ait denklemler aşağıdaki gibidir.

Süreklilik Denklemi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Momentum Denklemi:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.15)$$

Enerji Denklemi:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

Enerji denklemi içindeki sürtünme kayıpları terimi göz ardı edilmiştir. Doğal taşınımında hızların düşük olduğu göz önüne alınırsa bunun akla yakın bir varsayım olduğu söylenebilir. Matematiksel olarak bakıldığında eşitlik (2.15) içindeki kaldırma terimi problemi güçleştirmektedir. Momentum denkleminin çözümü sıcaklığın bilinmesine ve bu nedenle de enerji denkleminin çözümüne bağlıdır. Böylece eşitlik (2.15) ve (2.16) birlikte çözülmek durumundadır.

Doğal taşınım etkilerinin genişleme katsayısı β 'ya bağlılığı söz konusudur.

β 'nın nasıl belirleneceği akışkan türüne bağlıdır. Mükemmel gaz için $\rho = \frac{P}{RT}$ olur

ve $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{\rho} \frac{P}{RT^2} = \frac{1}{T}$ bağıntısı yazılabilir, burada T mutlak sıcaklıktır.

2.5. Büyüklük Analizi

Boyut analizi yardımıyla aranan fonksiyonun bağlı olduğu değişkenler bulunur. Bilinmeyen sabitler ise genellikle bir katsayı ve kalamı üs şeklinde olup, deneylerle tespit edilirler. Doğal taşınım için kullanılan denklemler için boyut analizi yapacak olursak

$$U = \partial u, \quad V = \partial v, \quad L = \partial x, \quad \delta = \partial y, \quad \Delta T = T - T_\infty$$

Kabullerini yaparak denklemlerde yerine yazalım;

Süreklilik denkleminden ;

$$\frac{U}{L} + \frac{V}{\delta} = 0 \quad (2.17)$$

$$U = L \frac{V}{\delta} \text{ elde edilir.}$$

Momentum denkleminde ;

$$U \frac{U}{L} + V \frac{U}{\delta} = \beta \cdot g \cdot \Delta T + v \frac{U}{\delta^2} \quad (2.18)$$

Enerji denkleminde ;

$$U \frac{\Delta T}{L} + V \frac{\Delta T}{\delta} = \alpha \frac{\Delta T}{\delta^2} \quad (2.19)$$

elde edilir.

Süreklilik denkleminde elde edilen ifadeyi Momentum ve Enerji denklemlerinde yerine yazarsak;

$$L \frac{V}{\delta} \frac{L \frac{V}{\delta}}{L} + V \frac{L \frac{V}{\delta}}{\delta} = \beta \cdot g \cdot \Delta T + v \frac{L \frac{V}{\delta}}{\delta^2} \quad (2.20)$$

$$L \frac{V}{\delta} \frac{\Delta T}{L} + V \frac{\Delta T}{\delta} = \alpha \frac{\Delta T}{\delta^2} \quad (2.21)$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$L \frac{V^2}{\delta^2} + L \frac{V^2}{\delta^2} = \beta \cdot g \cdot \Delta T + v \frac{V}{\delta^2} \left(\frac{L}{\delta} \right)$$

$$\frac{V}{\delta} + \frac{V}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta^2}$$

elde edilir.

$$V = \frac{\alpha}{\delta} \text{ Enerji denkleminde elde edilen bu sonuçtur. Bu sonuç momentum}$$

denkleminde yerine yazıldığında;

$$L \frac{\alpha^2}{\delta^2} = \beta \cdot g \cdot \Delta T + v \frac{\alpha}{\delta^2} \left(\frac{L}{\delta} \right)$$

Dr. YÜKSEL ÖZGÜR
LONDRA İNŞAAT MÜHÜRÜ

$$\frac{L\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2}{\delta^2 \beta g \Delta T} = 1 + \nu \frac{\alpha}{\delta} \left(\frac{L}{\delta}\right) \frac{1}{\beta g \Delta T} \quad (2.22)$$

bulunur. Burada denklemler tekrar düzenlenirse boyutsuz sayılarla ifade edilen bir eşitlik haline dönüşmüş olur. Momentum denkleminin son hali

$$\left(\frac{L}{\delta}\right)^4 \frac{\alpha^2}{\beta g L^3 \Delta T} = 1 + \left(\frac{L}{\delta}\right)^4 \frac{\alpha \nu}{\beta g L^3 \Delta T} \quad (2.23)$$

Yukarıdaki eşitlikte $\left(\frac{\beta g L^3 \Delta T}{\alpha^2}\right)$ terimi Grashof sayısı $\left(\frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu^2}\right)$ ile

Prandtl $\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)$ sayısının çarpımı olarak görülebilir. $Ra\left(\frac{\beta g L^3 \Delta T}{\nu \alpha}\right)$ ve Pr

tanımlamalarıyla momentum denklemini tekrar düzenleyecek olursak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\underbrace{\left(\frac{L}{\delta}\right)^4 Ra^{-1} Pr^{-1}}_{\text{Atalet terimi}} = 1 + \underbrace{\left(\frac{L}{\delta}\right)^4 Ra^{-1}}_{\text{Viskoz terim}} \quad (2.24)$$

Atalet terimi

Eğer $Pr \ll 1$ ise $\frac{L^4}{\delta} Ra^{-1} Pr^{-1} = 1$ 'dir. Buradan Nusselt sayısı bulunulabilir.

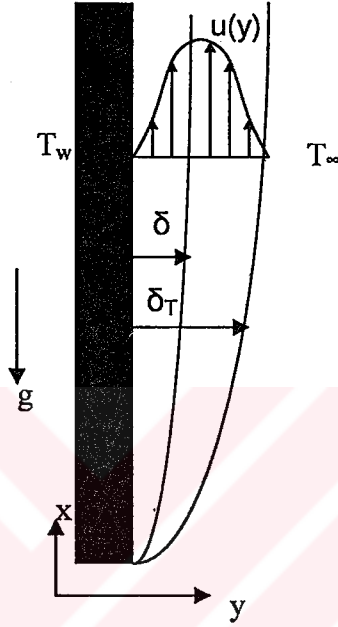
Matematiksel işlemlerini sonucunda $Nu = (Ra \cdot Pr)^{1/4}$ elde edilir.

Eğer $Pr \gg 1$ ise $\frac{L^4}{\delta} Ra^{-1} = 1$ 'dir. Nusselt sayısı $Nu = Gr^{1/4} Pr^{1/2}$ şeklinde

elde edilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Dikey Bir Levhada Doğal Isı Taşınımı



Şekil 3.1 Dikey sıcak levhada hız ve sıcaklık profili

Şekil 3.1'deki düz levhanın sıcaklığı levhayı çevreleyen havanın sıcaklığından daha yüksekse levhanın alt ucundan başlayarak levha üzerinde hız ve sınır tabakaları oluşur. Bunun sonucunda levhaya yakın olan akışkanın yoğunluğu uzakta olana göre daha azdır. Böylece kaldırma kuvvetleri bir doğal taşınım sınır tabakası oluşturur ve akışkan yukarıya doğru yükselirken onun yerinde durgun bölgedeki akışkan sınır tabaka içine girer. Burada ortaya çıkan hız dağılımı zorlanmış taşınım hız dağılımından çok farklıdır. Hız $y=0$ 'da olduğu gibi $y = \infty$ 'da da sıfır olur.

Akışkan sıcaklığı Levha üzerinde levha sıcaklığı T_w 'a Isıl sınır tabaka kenarında ortam sıcaklığı T_∞ 'a eşit olur. Hız sınır tabakası içerisinde hız dağılımı hem levha üzerinde hem de sınır tabaka kenarında sıfır olacak şekildedir. Dikey bir levha için aşağıdaki sınır şartları yazılabilir.

$$\begin{array}{lll} y = 0 & u = v = 0 & T = T_w \\ y \rightarrow \infty & u \rightarrow 0 & T = T_\infty \end{array}$$

Sınır tabaka denklemlerinin yukarıdaki sınır şartlarıyla çözümü üç değişik metodla yapılabilir. İntegral metodu, benzerlik yaklaşımı ve sonlu farklar kullanılarak dikey bir levha için sınır tabaka denklemleri çözülebilir.

3.2. İntegral Metodu

Genellikle sınır tabaka problemlerinin çözümü çok uğraştırıcı ve zaman alıcıdır. Az sayıda tam çözümü vardır. Bugün sınır tabaka denklemlerinin önceden belirlenen basınç değişimleri ve sınır şartları için çözümlerini bilgisayarla elde etmek mümkünse de diferansiyel denklemler nonlineer oldukları için hala çok çaba gereklidir.

Mühendislik uygulamaları seri ve pratik çözümleri gerektirdiğinden çözüm için gereken süre uzadığında yaklaşık çözümler daha elverişlidir. En kullanışlı yaklaşık yöntemlerden birisi 1921 yılında Van Karman tarafından önerilip Pohlhausen tarafından geliştirilen integral yöntemidir.^[8] İntegral sınır tabaka denklemleri sınır tabaka denklemlerini sınır tabaka içinde integre ederek yada genel prensipleri daha sonra bütün sınır tabakaya yayılacak olan küçük bir kontrol hacmine uygulayarak elde edilir.

İntegral yöntemi süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin sınır tabakanın her noktasına uygulanabilir olmasını ve bu koşulların sınır tabaka içindeki ortalama değerle de uygunluğunu sağlamak ister.

3.3. İntegral Metoduyla Denklemlerin Çözümü

İşlemleri biraz olsun basitleştirmek için Prandtl sayısını yaklaşık olarak bir ($Pr \cong 1$) alabiliriz. Bu varsayımın sonucu olarak hız sınır tabaka kalınlığı (δ) sıcaklık sınır tabaka kalınlığına (δ_T) eşit alınabilir. İntegral yöntemiyle çözümler aşağıdaki işlem adımlarıyla elde edilebilmektedir.

Süreklilik denkleminin her iki tarafı sınır tabaka boyunca integre edilecek olursa;

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0 \quad (3.1)$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} dv = 0$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + v \Big|_0^{\delta} = 0$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + v(\delta) - v(0) = 0$$

şeklinde bir sonuç elde edilir. Burada (y) yönü hız bileşeni (v) çekildiğinde aşağıdaki eşitlik (3.2) elde edilir.

$$v(\delta) = - \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (3.2)$$

Sınır tabaka içinde geçerli momentum denklemini eşitlik (3.3) gibi ifade edilebilir.

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - \rho g \quad (3.3)$$

Burada basınç gradyeninin sadece(x) yönünde olduğunu varsayarak ($\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx}$)

alınabilir. Ayrıca basınç gradyenini ($-\frac{dP}{dx} = \rho_{\infty} \cdot g$) şeklinde ifade edilebilir.

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + g(\rho_{\infty} - \rho) \quad (3.4)$$

Isıl genleşme katsayısı (β)'nın tanımından hareketle gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \cong -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\rho_{\infty} - \rho}{T_{\infty} - T} \right)$$

$$\rho_{\infty} - \rho = \beta \cdot g \cdot (T - T_{\infty})$$

Momentum denklemini basitleştirilmiş şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \beta \cdot g \cdot (T - T_{\infty}) \quad (3.5)$$

Momentum denkleminin her iki tarafı sınır tabaka boyunca integre edilecek olursa;

$$\int_0^{\delta} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \int_0^{\delta} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \nu \int_0^{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + g \cdot \beta \int_0^{\delta} (T - T_{\infty}) dy \quad (3.6)$$

Burada $u \frac{\partial u}{\partial x}$ terimi için bazı matematiksel basitleştirmeler kullanılabilir;

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^2}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.7)$$

$v \frac{\partial u}{\partial y}$ terimi için gerekli düzenlemeler yapılabilir.

$$v \frac{\partial u}{\partial y} dy = v(\delta) \cdot u_{\infty} - \int_0^{\delta} u \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad (3.8)$$

Süreklilik denkleminden $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ olduğundan bu eşitlik ($y=0$) ile ($y=y$)

arasında integre edildiğinde;

$$v(y) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (3.9)$$

elde edilir. Bu eşitlik (3.8) 'de yerine yazılarak yeniden düzenlenecek olursa;

$$\int_0^{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = -u_{\infty} \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

elde edilir. Momentum denkleminin sağ tarafındaki ilk terim ($\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$) için gerekli

integrasyon yapılacak olursa;

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_0^{\delta}$$

elde edilir. Terimler üzerinde yapılan bu matematiksel işlemlerin sonucunda elde edilen momentum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy - \int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u_{\infty} \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^{\delta} u \frac{\partial v}{\partial y} dy = v \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial y} dy + g\beta \int_0^{\delta} (T - T_{\infty}) dy$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy - \int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u_{\infty} \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\delta} u \frac{\partial u}{\partial x} dy = v \int_0^{\delta} \frac{\partial u}{\partial y} dy + g\beta \int_0^{\delta} (T - T_{\infty}) dy$$

Burada $\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)$ terimi düzenlenebilir. Leibniz kuralı kullanılabilir. Bu kurala göre;

Sürekli $f(x,t)$ fonksiyonunun $\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$ belirli integrali $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip ise

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx + f(b(t),t).b'(t) - f(a(t),t).a'(t) \quad \text{şeklinde ifade}$$

edilebilir. Bu kurala göre $\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)$ terimi için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x} dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - u(\delta) \frac{d\delta}{dx} + u(0) \frac{d\delta}{dx} \quad (3.10)$$

Yapılan düzenlemeler sonucunda momentum denklemi eşitlik (3.11) haline getirilir.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy = -v \left(\frac{du}{dy}\right)_0 + g.\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) dy \quad (3.11)$$

Eşitlik (3.11) momentum denkleminin integral çözümü için kullanılan en genel halidir. Bu denklemin çözümü için sınır şartları;

$$1) y=0 \quad u=0$$

$$2) y=0 \quad v \frac{d^2 u}{dy^2} = -g.\beta.(T - T_\infty)$$

$$3) y = \delta \quad u=0$$

$$4) y = \delta \quad \frac{du}{dy} = 0$$

şekindedir. Buradan $y=0$ Sınır şartı denklemde yerine yazılırsa;

$$u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} = v \frac{d^2 u}{dy^2} + g.\beta(T - T_\infty)$$

$$v \frac{d^2 u}{dy^2} = -g.\beta(T - T_\infty)$$

elde edilir.

İntegral momentum denkleminin çözümü için hız dağılımına ihtiyacımız vardır. Hız dağılımını bulmak için (u) hızı (y)'ye bağlı bir fonksiyon şeklinde tanımlanabilir. (x) yönü hız bileşeni (u) hızı için 3. Dereceden bir polinom varsayıldığında, bu polinomda 4 adet sabit katsayı vardır. Bu katsayılarını bulmak için sınır şartları kullanılabilir.

$$u(y) = a+by+cy^2+dy^3 \text{ şeklinde bir tanımlama yapılırsa;}$$

1) $y=0$ için $u=0$ sınır şartından;

$$u(0)=0=a+b(0)+c(0)^2+d(0)^3$$

($a=0$) bulunur.

2) $y=0$ için $v \frac{d^2u}{dy^2} = -g \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty})$ sınır şartından;

$$u(y) = a+by+cy^2+dy^3$$

$$\frac{du}{dy} = b + 2cy + 3dy^2$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 2c + 6dy$$

bulunur.

$$v[2c + 6d(0)] = -g \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty})$$

$$c = \frac{-g \cdot \beta \cdot (T - T_{\infty})}{2v}$$

$$c = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \beta \cdot \frac{\Delta T}{v} \quad (3.13)$$

elde edilir.

3) $y = \delta$ için $u=0$ sınır şartından;

$$u(\delta) = 0 = a + b\delta + c\delta^2 + d\delta^3$$

$$0 = b\delta + c\delta^2 + d\delta^3$$

$$0 = b + c\delta + d\delta^2$$

$$b = -c\delta - d\delta^2 \quad (3.14)$$

bulunur.

4) $y = \delta$ için $\frac{du}{dy} = 0$ sınır şartından;

$$\frac{du}{dy} = 0 = b + 2cy + 3dy^2 \Big|_{\delta}$$

$$b + 2c\delta + 3d\delta^2 = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir.

Eşitlik (3.14)'den elde edilen (b) eşitlik (3.15)'de yerine yazılacak olursa;

$$0 = b\delta + c\delta^2 + d\delta^3$$

$$b + 2c\delta + 3d\delta^2 = 0$$

$$-c\delta - d\delta^2 + 2c\delta + 3d\delta^2 = 0$$

$$2c + 2d\delta = 0$$

$$d = -\frac{c}{2\delta} \quad (3.16)$$

elde edilir.

Eşitlik(3.13)'den bulunan (c) Eşitlik (3.16)'da yerine yazılırsa;

$$d = \frac{1}{4} \cdot g \cdot \beta \cdot \frac{\Delta T}{v} \frac{1}{\delta} \quad (3.17)$$

elde edilir.

Hız dağılımında yer alan (b) terimini bulmak için eşitlik(3.14) ve (3.16) arasında düzenlemeler yapılabilir.

$$b = -c\delta - d\delta^2$$

$$b = -c\delta + \frac{c}{2\delta}\delta^2$$

$$b = \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}\delta \quad (3.18)$$

Bulunan katsayılar hız bağıntısında yerine yazılacak olursa;

$$u(y) = \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}\delta.y - \frac{1}{2}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}.y^2 + \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}\frac{1}{\delta} + \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}\frac{1}{\delta}.y^3$$

sınır tabaka içindeki hız ifadesi elde edilmiş olur. Gerekli düzenlemeler yapırsa;

$$u(y) = \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}(\delta.y - 2y^2 + \frac{y^3}{\delta})$$

$$u(y) = \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}.\delta^2(\frac{y}{\delta} - \frac{2y^2}{\delta^2} + \frac{y^3}{\delta^3})$$

$$u(y) = \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}.\delta^2\frac{y}{\delta}(1 - \frac{y}{\delta})^2 \quad (3.19)$$

(x) yönü hız bileşeni (u) elde edilir. Burada ifadeyi sadeleştirmek için V(x) katsayısı tanımlaması yapılabilir.

$$V(x) = \frac{1}{4}.g.\beta.\frac{\Delta T}{v}.\delta^2 \quad (3.20)$$

Böylece hız dağılımı ifadesi eşitlik (3.21) şeklinde bulunulabilir.

$$u(y) = V(x).\frac{y}{\delta}(1 - \frac{y}{\delta})^2 \quad (3.21)$$

Momentum denkleminin çözümü için sıcaklık dağılımı ifadesinin de bulunması gerekmektedir. Hız dağılımı ifadesinin bulunmasında takip edilen yol

burada da kullanılabilir. Sıcaklık Dağılımı ifadesinin bulunması için gerekli olan sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$1) y=0 \text{ için } T=T_w$$

$$2) y = \delta \text{ için } T = T_\infty$$

$$3) y = \delta \text{ için } \frac{dT}{dy} = 0$$

Sıcaklık dağılımını bulmak üzere sıcaklık (y)'ye bağlı bir fonksiyon şeklinde tanımlanabilir. Bu sıcaklık (T) ifadesi için 2. Dereceden bir polinom varsayımı yapılabilir. Bu polinomda 3 adet sabit katsayı vardır. Burada 3 adet sınır şartı var bu sınır şartlarını kullanarak sabit katsayılar bulunulabilir.

$T(y) = A + By + Cy^2$ şeklinde bir tanımlama yapılırsa;

$$1) y=0 \text{ için } T=T_w \text{ sınır şartından;}$$

$$T_w = A + B \cdot 0 + C \cdot 0^2$$

$$A = T_w$$

bulunur.

$$2) y = \delta \text{ için } T = T_\infty \text{ sınır şartından;}$$

$$T_\infty = A + B\delta + C\delta^2$$

$$T_\infty - T_w = B\delta + C\delta^2 \quad (3.22)$$

elde edilir.

$$3) y = \delta \text{ için } \frac{dT}{dy} = 0 \text{ sınır şartından;}$$

$$\left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=\delta} = B + 2C\delta = 0$$

$$B = -2C\delta \quad (3.23)$$

elde edilir.

Eşitlik (3.22) ve (3.23) düzenlenirse;

$$T_{\infty} - T_w = -2C\delta^2 + C\delta^2$$

$$C = \frac{T_w - T_{\infty}}{\delta^2} \quad (3.24)$$

$$B = -2 \frac{T_w - T_{\infty}}{\delta} \quad (3.25)$$

Bulunan katsayılar sıcaklık dağılımı ifadesinde yerine yazacak olursa;

$$T(y) = T_w - 2 \frac{T_w - T_{\infty}}{\delta} \cdot y + \frac{T_w - T_{\infty}}{\delta^2} \cdot y^2$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$T = T_w + (T_w - T_{\infty}) \left(-2 \frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) + (T_w - T_{\infty}) - (T_w - T_{\infty})$$

$$T = T_{\infty} + (T_w - T_{\infty}) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2$$

$$T - T_{\infty} = (T_w - T_{\infty}) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (3.26)$$

elde edilir. Sıcaklık ve hız dağılımı ifadeleri momentum denkleminde yerine yazılacak olursa ;

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u^2 dy = -v \left(\frac{du}{dy}\right)_0 + g\beta \int_0^{\delta} (T - T_{\infty}) dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left[V(x) \cdot \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \right]^2 dy = -v \left(\frac{du}{dy}\right)_0 + g\beta \int_0^{\delta} (T_w - T_{\infty}) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 dy$$

elde edilir. Gerekli matematiksel işlemler yapılırsa;

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} [V(x)]^2 \cdot \frac{y^2}{\delta^2} \cdot \left[1 - 4 \frac{y}{\delta} + 6 \frac{y^2}{\delta^2} - 4 \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}\right] dy = -v \left(\frac{du}{dy}\right)_0 + g\beta \cdot (T_w - T_{\infty}) \int_0^{\delta} \left(1 - 2 \frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} [V(x)]^2 \cdot \left[\frac{y^2}{\delta^2} - 4 \frac{y^3}{\delta^3} + 6 \frac{y^4}{\delta^4} - 4 \frac{y^5}{\delta^5} + \frac{y^6}{\delta^6} \right] dy = -v \cdot [V(x) \cdot \frac{y}{\delta} \cdot 2 \cdot (1 - \frac{y}{\delta}) \cdot \frac{-1}{\delta} + V(x) \cdot \frac{1}{\delta} (1 - \frac{y}{\delta})^2]_{y=0} + g \cdot \beta \cdot (T_w - T_{\infty}) \int_0^{\delta} (1 - 2 \frac{y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}) dy \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dx} \left[V(x)^2 \cdot \left[\frac{y^3}{3\delta^2} - 4 \frac{y^4}{4\delta^3} + 6 \frac{y^5}{5\delta^4} - 4 \frac{y^6}{6\delta^5} + \frac{y^7}{7\delta^6} \right]_0^{\delta} \right] = -v \cdot [V(x) \cdot \frac{1}{\delta}] + g \cdot \beta \cdot (T_w - T_{\infty}) \left[(y - 2 \frac{y^2}{2\delta} + \frac{y^3}{3\delta^2}) \right]_0^{\delta}$$

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} [V(x)]^2 \cdot \delta = -v \left[\frac{V(x)}{\delta} \right] + g \cdot \beta \cdot (T_w - T_{\infty}) \cdot \frac{\delta}{3} \quad (3.28)$$

elde edilir.

Enerji denkleminin çözümü için momentum denkleminin çözümünde takip edilen yol geçerli olacaktır. Enerji denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$\int_0^{\delta} (u \frac{dT}{dx}) dy + \int_0^{\delta} (v \frac{dT}{dy}) dy + = -\alpha \int_0^{\delta} \frac{d^2 T}{dy^2} dy$$

Burada $(u \frac{dT}{dx})$ doğrusal olamayan bir terimdir. Bu terim için matematiksel

düzenleme yapılırsa;

$$\frac{d(uT)}{dx} = u \frac{dT}{dx} + T \frac{du}{dx}$$

$$u \frac{dT}{dx} = \frac{d(uT)}{dx} - T \frac{du}{dx} \quad (3.29)$$

elde edilir.

Aynı şekilde $(v \frac{dT}{dy})$ terimi için matematiksel düzenleme yapılırsa;

$$\frac{d(vT)}{dy} = v \frac{dT}{dy} + T \frac{dv}{dy}$$

Dr. YÜKSEL GÜZEL
DOĞRUKAĞITCI
DOĞRUKAĞITCI

$$v \frac{dT}{dy} = \frac{d(vT)}{dy} - T \frac{dv}{dy} \quad (3.30)$$

elde edilir.

Eşitlik (3.29) ve (3.30) enerji denklemine yazılırsa;

$$\int_0^{\delta} \left[\frac{d(uT)}{dx} \right] dy - \int_0^{\delta} \left[T \frac{du}{dx} \right] dy + \int_0^{\delta} \left[\frac{d(vT)}{dy} \right] dy - \int_0^{\delta} \left[T \frac{dv}{dy} \right] dy = -\alpha \int_0^{\delta} \frac{d^2 T}{dy^2} dy$$

bulunur. Enerji denkleminin sağ tarafındaki $\left(\frac{d^2 T}{dx^2} \right)$ ifadesinin gerekli düzenlemeleri

yapılırsa;

$$\int_0^{\delta} \frac{d^2 T}{dy^2} dy = \left[\frac{dT}{dy} \right]_{\delta} - \left[\frac{dT}{dy} \right]_0 = - \left[\frac{dT}{dy} \right]_0$$

bulunur. Aynı şekilde $\left(\frac{d(vT)}{dy} \right)$ terimi için düzenleme yapılırsa;

$$\int_0^{\delta} \left[\frac{d(vT)}{dy} \right] dy = v(\delta)T(\delta) - v(0)T(0) = v(\delta)T_{\infty}$$

bulunur. Bulunulan bu değerler enerji denkleminde yazılırsa;

$$\int_0^{\delta} \left[\frac{d(uT)}{dx} \right] dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (uT) dy - u(\delta)T(\delta) \frac{d\delta}{dx} + u(0)T(0) \frac{d\delta}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (uT) dy$$

$$\int_0^{\delta} \frac{d(uT)}{dx} dy - \int_0^{\delta} \left[T \frac{du}{dx} \right] dy + \int_0^{\delta} \frac{d(vT)}{dy} dy - \int_0^{\delta} T \frac{dv}{dy} dy = -\alpha \int_0^{\delta} \frac{d^2 T}{dy^2} dy$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (uT) dy - \int_0^{\delta} \left(T \frac{du}{dx} \right) dy + \int_0^{\delta} \frac{d(vT)}{dy} dy + \int_0^{\delta} \left(T \frac{dv}{dy} \right) dy = -\alpha \int_0^{\delta} \frac{d^2 T}{dy^2} dy$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılacak olursa;

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(T - T_{\infty}) dy = \alpha \left(\frac{dT}{dy} \right)_0 \quad (3.31)$$

bulunur. Eşitlik (3.31) integral enerji denklemidir. Bu denklemin çözümü için gerekli olan sıcaklık ifadesi eşitlik (3.26)'dan hız ifadesi eşitlik (3.21)'den alınabilir. Bu ifadeler eşitlik (3.31)'de yazılırsa;

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} V(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 (T - T_{\infty}) \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 dy = \alpha (T_w - T_{\infty}) \left[2 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{-1}{\delta}\right]_{y=0}$$

elde edilir. Gerekli matematiksel işlemler yapılırsa;

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} V(x) \frac{y}{\delta} \left(1 - 4 \frac{y}{\delta} + 6 \frac{y^2}{\delta^2} - 4 \frac{y^3}{\delta^3} + \frac{y^4}{\delta^4}\right) (T - T_{\infty}) dy = -\frac{2\alpha}{\delta} (T_w - T_{\infty})$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} V(x) \left(\frac{y}{\delta} - 4 \frac{y^2}{\delta^2} + 6 \frac{y^3}{\delta^3} - 4 \frac{y^4}{\delta^4} + \frac{y^5}{\delta^5}\right) dy = -\frac{2\alpha}{\delta}$$

$$\frac{d}{dx} \left[V(x) \left(\frac{y^2}{2\delta} - 4 \frac{y^3}{3\delta^2} + 6 \frac{y^4}{4\delta^3} - 4 \frac{y^5}{5\delta^4} + \frac{y^6}{6\delta^5}\right) \right]_0^{\delta} = -\frac{2\alpha}{\delta}$$

$$\frac{d}{dx} \left[V(x) \left(\frac{1}{2} - 4 \frac{1}{3} + 6 \frac{1}{4} - 4 \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \delta \right] = -\frac{2\alpha}{\delta}$$

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} [V(x) \cdot \delta] = -\frac{2\alpha}{\delta} \quad (3.32)$$

bulunur. Bulunulan bu değer enerji denkleminde elde edilen sonuçtur. Momentum ve enerji denklemlerinin çözümü için aşağıdaki kabulleri yapalım. Bu kabuller denklemlerin çözümünü kolaylaştırmak için yapılmaktadır. V ve δ x'e bağlı birer ifade olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanabilir. Burada c_v, c_{δ}, m ve n sabit katsayılarıdır. Buna göre aşağıdaki kabulleri yapılırsa;

$$V(x) = c_v \cdot x^m \quad V=f(x)$$

$$\delta = c_{\delta} \cdot x^n \quad \delta = f(x)$$

bulunur. Bulunan bu değerler momentum ve enerji denklemlerinde yerine yazılırsa;

Momentum denklemini için:

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} [V(x)]^2 \cdot \delta = -v \frac{V(x)}{\delta} + \frac{1}{3} \cdot g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \delta$$

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dx} [c_v^2 x^{2m} c_\delta x^n] = -v \frac{c_v x^m}{c_\delta x^n} + \frac{1}{3} \cdot g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot c_\delta x^n$$

$$\frac{1}{105} c_v^2 c_\delta \frac{d}{dx} [x^{2m+n}] = -v \frac{c_v}{c_\delta} x^{m-n} + \frac{1}{3} \cdot g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) \cdot c_\delta x^n \quad (3.33)$$

Enerji denklemi için;

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} [V(x)\delta] = 2 \frac{\alpha}{\delta}$$

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dx} [c_v x^m c_\delta x^n] = 2 \frac{\alpha}{c_\delta x^n}$$

$$\frac{1}{30} c_v c_\delta \frac{d}{dx} [x^m x^n] = 2 \frac{\alpha}{c_\delta x^n} \quad (3.34)$$

elde edilir. Matematiksel düzenlemeler yapılırsa momentum denklemi eşitlik(3.35)

halini alır. Aynı şekilde enerji denklemi eşitlik (3.36) haline gelir.

$$\frac{2m+n}{105} c_v^2 c_\delta x^{2m+n-1} = \frac{1}{3} \cdot g \cdot \beta \cdot (T_w - T_\infty) c_\delta x^n - v \frac{c_v}{c_\delta} x^{m-n} \quad (3.35)$$

$$\frac{m+n}{30} c_v \cdot c_\delta \cdot x^{m+n-1} = 2 \frac{\alpha}{c_\delta} x^{-1} \quad (3.36)$$

Yukarıdaki eşitlik (3.35) ve (3.36) için eşitsizlikler için geçerli olan bir kabul yapılabilir. Böylece x'in üssündeki katsayıların eşitliği kabulü yapılabilir. Bu kabulün sonucu olarak;

$$2m+n-1 = n = m-n \quad \underline{m=1/2}$$

$$m+n-1 = -n \quad \underline{n=1/4}$$

elde edilir. Bulunan bu (m),(n) değerleri (V(x)) ve (δ) ifadelerinde yerine yazılırsa;

$$V(x) = c_v \cdot x^{1/2}$$

$$\delta = c_{\delta} \cdot x^{1/4}$$

elde edilir. Bu değerler eşitlik (3.35) ve (3.36)'da yerine yazılırsa;

$$\frac{1,25}{105} c_v^2 \cdot c_{\delta} = g \cdot \beta \cdot (T_w - T_{\infty}) \frac{1}{3} c_{\delta} - \frac{c_v}{c_{\delta}} \quad (3.37)$$

$$\frac{0,75}{30} c_v \cdot c_{\delta} = 2 \frac{\alpha}{c_{\delta}} \quad (3.38)$$

bulunur. Eşitlik (5.38)'den c_v terimi çekilirse $c_v = \frac{80 \cdot \alpha}{c_{\delta}^2}$ elde edilir. Bu c_v terimi

eşitlik (5.37)'de yerine yazılırsa;

$$\frac{1,25}{105} \cdot \frac{80^2 \cdot \alpha^2}{c_{\delta}^4} \cdot c_{\delta} = g \cdot \beta \cdot (T_w - T_{\infty}) \frac{1}{3} c_{\delta} - \frac{80 \cdot \alpha}{c_{\delta}^3} \quad (3.39)$$

elde edilir. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$3 \cdot \frac{1,25}{105} \cdot \frac{80^2 \cdot \alpha^2}{c_{\delta}^4} + 3 \cdot \frac{80 \cdot \alpha}{c_{\delta}^4} = g \cdot \beta \cdot (T_w - T_{\infty})$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmelerin sonucunda;

$$c_{\delta} = 3,93 \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{1/4} \left[\frac{g \cdot \beta (T_w - T_{\infty})}{v^2} \right]^{-1/4} Pr^{-1/2} \quad (3.40)$$

elde edilir. Bulunan bu değer $c_v = \frac{80 \cdot \alpha}{c_{\delta}^2}$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$c_v = 5,17 \cdot v \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-1/2} \left[\frac{g \cdot \beta (T_w - T_{\infty})}{v^2} \right]^{1/2} \quad (3.41)$$

elde edilir. Yaptığımız kabullere dayalı olarak bulduğumuz ifade $\delta = c_{\delta} \cdot x^{1/4}$ şeklinde

idi. Bu ifadeden $\frac{\delta}{x}$ terimi çekilirse;

$$\frac{\delta}{x} = 3,93 \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{1/4} \left[\frac{g \cdot \beta (T_w - T_{\infty})}{v^2} \right]^{-1/4} Pr^{-1/2} \quad (3.42)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{\delta}{x} = 3,93(0,952 + Pr)^{1/4} [Gr_x]^{-1/4} Pr^{-1/2} \quad (3.43)$$

elde edilir.

Sınır tabakanın kalınlığının (x) bağlı değişimi eşitlik (3.43) olduğu gibidir. Eğer Nusselt sayısı bulunmak istenirse $y=0$ için $q_{il}=q_{taş}$ sınır şartı kullanılmalıdır.

Daha önce bulduğumuz sıcaklık ifadesi $T(y) = T_{\infty} + (T_w - T_{\infty})(1 - \frac{y}{\delta})^2$ şeklinde idi.

Isı iletiminin ifadesi yazılırsa;

$$\ddot{q} = -k \left. \frac{dT}{dy} \right]_{y=0} \quad (3.44)$$

elde edilir. Burada $\frac{dT}{dy}$ teriminin bulunması için sıcaklık ifadesinin türevi alınırsa;

$$\left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = (T_w - T_{\infty}) \cdot 2 \cdot \frac{-1}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)$$

$$\left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0} = (T_w - T_{\infty}) \frac{-2}{\delta}$$

elde edilir. Bulunan bu ifade eşitlik(3.44)'de yerine yazılırsa;

$$\ddot{q} = -k \left. \frac{dT}{dy} \right]_{y=0}$$

$$\ddot{q} = \frac{2k}{\delta} (T_w - T_{\infty}) \quad (3.45)$$

elde edilir. Sınır şartı olan $y=0$ için $q_{il}=q_{taş}$ için taşınım ile geçen ısı miktarı

Newton'un soğuma kanunundan yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;;

$$h.(T_w - T_{\infty}) = k \left. \frac{dT}{dy} \right]_{y=0}$$

$$h = \frac{\frac{2k}{\delta}(T_w - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)}$$

$$h = \frac{2k}{\delta} \quad (3.46)$$

elde edilir. Burada h ısı taşınım katsayısıdır. Nusselt sayısının ifadesi $Nu = \frac{h.x}{k}$

şeklindedir. Burada ısı taşınım katsayısı eşitlik (3.46)'dan alınıp yerine yazılırsa;

$$Nu = \frac{h.x}{k} = \frac{\frac{2k}{\delta}.x}{k} = \frac{2x}{\delta} = \frac{2}{\delta/x}$$

$$Nu = \frac{2}{\delta/x} \quad (3.47)$$

bulunur. Burada $\frac{\delta}{x}$ terimini eşitlik (3.43)'de bulunmuştu. Eşitlik (3.47)'de yerine

yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$Nu = 0,508 \cdot \frac{(Gr_x)^{1/4} (\overline{Pr})^{1/2}}{(0,952 + \overline{Pr})^{1/4}} \quad (3.48)$$

Elde edilir. Buradan Nusselt sayısı; Grashof sayısı (Gr) ve Prandtl sayısının (Pr) bir fonksiyonudur sonucuna ulaşılır.

3.4. Benzerlik Yaklaşımı

Doğal taşınım akışını ve ısı geçişini belirleyen boyutsuz parametreler göz önüne alabiliriz. Momentum ve enerji denklemlerini boyutsuz sayı grupları kullanılarak çözüme gidilmesi ve sonuçta boyutlu hale dönüştürülmesi problemlerin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Bu yüzden denklemler önce boyutsuzlaştırılır

daha sonra çözüm yoluna gidilir. Boyutsuzlaştırma için aşağıdaki boyutsuz değişkenler kullanılır.

$$x^* = \frac{x}{L} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad u^* = \frac{u}{u_\infty} \quad v^* = \frac{v}{u_\infty} \quad \theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

Burada L karakteristik uzunluk ve u_∞ herhangi bir referans hızını göstermektedir. Bu değişkenler süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinde değişken dönüşümü yapılarak yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılarak aşağıdaki boyutsuz denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.49)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = g\beta(T_w - T_\infty) \frac{L\theta^*}{u_\infty^2} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (3.50)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L \cdot Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (3.51)$$

Reynold sayısı zorlanmış taşınım için çok önemli bir parametredir. Bir akışkan parçacığı üzerine etki eden atalet kuvvetlerinin sürtünme kuvvetlerine oranını belirtir. Aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Re = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu} \quad (3.52)$$

Momentum denklemindeki u_∞ bilinmeyen bir referans hızını göstermektedir. Bu yüzden kullanımı pek pratik değildir. Momentum denkleminde ikinci tarafın ilk terimini Re^2 ile çarpalım sonuçta Grashof sayısı elde edilir.

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2} \quad (3.53)$$

Grashof sayısı Reynold sayısının zorlanmış taşınımında üstlendiği rolün aynısını doğal taşınımında üstlenir. Grashof sayısı akışkan üzerine etki eden kaldırma kuvvetlerinin sürtünme kuvvetlerine oranıdır.

Yukarıda tanımlanan probleme ait benzerlik parametrelerini kullanarak değişkenlerin dönüşümünü sağlayıp süreklilik, momentum ve enerji denklemini çözebiliriz. Benzerlik parametresi aşağıdaki gibi tanımlanırsa x ve y yerine tek değişken kullanmış oluruz. Tek değişken kullanmak çözümü kolaylaştıracaktır.

$$\eta = \frac{y}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \quad (3.54)$$

Hız bileşenleri için aşağıdaki akım fonksiyonu tanımlanırsa süreklilik momentum ve enerji denklemlerinde de kullanılan hızlar için değişken dönüşümü yapılabilir.

$$\psi(x,y) = f(\eta) \left[4\nu \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} \right] \quad (3.55)$$

$Gr_x = [g\beta(T_w - T_\infty)x^3] / \nu^2$ idi. İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından bu sayıda bir basitleştirme yapılabilir. Böylece terim azaltması yoluna gidilecek ve işlemler daha sade olacaktır. $M = [g\beta(T_w - T_\infty)] / \nu^2$ tanımlaması yapılırsa $Gr_x = Mx^3$ haline gelir.

Bu tanımlama yapıldıktan sonra (x) ve (y) yönü hız bileşenleri bulunulabilir. Tanımlanan akım fonksiyonuna göre (x) yönü hız bileşeni için aşağıdaki işlemler yapılırsa;

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = 4\nu (Mx^3/4)^{1/4} f'(\eta) \cdot \frac{1}{x} (Mx^3/4)^{1/4}$$

$$u = \frac{4\nu}{x} f'(\eta) (Mx^3/4)^{1/2} \quad (3.56)$$

elde edilir. Buradan (u) hızının (x) ve (y)' ye göre değişimi hesaplanabilir. Bu hesaplamalar için gerekli matematiksel işlemler yapıldığında;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{4v}{x} f'(\eta) (Mx^3/4)^{1/2} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f'(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{4v}{x} (Mx^3/4)^{1/2} - \frac{f'(\eta)}{x^2} 4v (Mx^3/4)^{1/2} \\ &+ \frac{4v}{x} f'(\eta) \left(\frac{1}{2} \right) (Mx^3/4)^{-1/2} \frac{3Mx^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{4v}{x} f''(\eta) (Mx^3/4)^{1/2} \left[-\frac{y}{x^2} (Mx^3/4)^{1/4} + \frac{y}{x} \frac{1}{4} \frac{3Mx^2}{4} (Mx^3/4)^{-3/4} \right] \\ &- \frac{f'(\eta)}{x^2} 4v (Mx^3/4)^{1/2} + \frac{3}{2} f'(\eta) M v x (Mx^3/4)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -4v \frac{y}{x^3} f''(\eta) (Mx^3/4)^{3/4} + \frac{3v}{4} M y f''(\eta) (Mx^3/4)^{-1/4} \\ &- \frac{f'(\eta)}{x^2} 4v (Mx^3/4)^{1/2} + \frac{3}{2} f'(\eta) M v x (Mx^3/4)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{4v}{x} f'(\eta) (Mx^3/4)^{1/2} \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f'(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{4v}{x} (Mx^3/4)^{1/2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f''(\eta) \frac{1}{x} (Mx^3/4)^{1/4} \frac{4v}{x} (Mx^3/4)^{1/2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f''(\eta) \frac{4v}{x^2} (Mx^3/4)^{3/4} \quad (3.58)$$

bulunur. Momentum denklemi için gerekli olan $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ terimini hesaplamak için

eşitlik (3.58)'in y'ye göre türevi alınır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[f''(\eta) \frac{4v}{x^2} (Mx^3/4)^{3/4} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial f''(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{4v}{x^2} (Mx^3/4)^{3/4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''''(\eta) \frac{1}{x} (Mx^3/4)^{1/4} \frac{4v}{x^2} (Mx^3/4)^{3/4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f'''(\eta) M v \quad (3.59)$$

Bulunan bu değerler (u) hızının momentum ve enerji denklemlerinde kullanılan değişim parametreleridir. Aynı işlemler (y) yönü, hız bileşeni (v) için yapılabilir. Akım fonksiyonuna göre tanımlanan (v) hızı için aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$-v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [f(\eta) \cdot 4v(Mx^3/4)^{1/4}]$$

$$-v = \frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot 4v(Mx^3/4)^{1/4} + f(\eta) \cdot 4v(Mx^3/4)^{-3/4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} Mx^2$$

$$-v = f'(\eta) \cdot 4v \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \cdot \left[-\frac{y}{x^2} (Mx^3/4)^{1/4} + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \right]$$

$$+ f(\eta) \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-3/4}$$

$$v = -f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} + f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-1/2}$$

$$+ f(\eta) \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-3/4}$$

$$v = f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} - f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-1/2}$$

$$- f(\eta) \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-3/4}$$

(3.60)

Bulunan (v) hızının (y)'ye göre değişimleri hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} - f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} \right. \\
&\quad \left. - f(\eta) \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \right] \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} + f''(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \\
&\quad - f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} - f''(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot y \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} \\
&\quad - f'(\eta) \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} + f''(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^3} \cdot (Mx^3/4)^{3/4} \\
&\quad - f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} - f''(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-1/4} \\
&\quad - f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot x \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Bu değişken dönüşümleri yapıldıktan sonra bunlar süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra çözümleri yapılabilir.

Süreklilik denklemi için eşitlik (3.57) ve (3.61) yazılırsa;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
-4v \frac{y}{x^3} f''(\eta) \cdot (Mx^3/4)^{3/4} + \frac{3v}{4} \cdot M \cdot v \cdot y \cdot f''(\eta) \cdot (Mx^3/4)^{-1/4} - \frac{f'(\eta)}{x^2} \cdot 4v \cdot (Mx^3/4)^{1/2} \\
+ \frac{3}{2} f'(\eta) \cdot M \cdot v \cdot x \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} + f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} + f''(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^3} \cdot (Mx^3/4)^{3/4} \\
- f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} - f''(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-1/4}
\end{aligned}$$

$$-f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot x \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} = 0$$

elde edilir. Böylece süreklilik denklemi sağlanmış olmaktadır. Momentum denklemi içerisindeki terimleri (u) ve (v) hızlarının değişimlerinden elde edilmişti. Bu değişimler denklemde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında momentum denkleminde benzerlik yaklaşımı için bir diferansiyel denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= g \beta(T - T_{\infty}) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \left[\frac{4v}{x} \cdot f'(\eta) \cdot (Mx^3/4)^{1/2} \right] \cdot \left[-4v \frac{y}{x^3} f''(\eta) \cdot (Mx^3/4)^{3/4} + \frac{3v}{4} \cdot M \cdot v \cdot y \cdot f''(\eta) \cdot (Mx^3/4)^{-1/4} \right. \\ &- \frac{f'(\eta)}{x^2} \cdot 4v \cdot (Mx^3/4)^{1/2} + \frac{3}{2} f'(\eta) \cdot M \cdot v \cdot x \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} \left. \right] + \left[f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} \right. \\ &- f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} - f(\eta) \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \left. \right] \cdot \left[f''(\eta) \cdot \frac{4v}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{3/4} \right] \\ &= g \beta(T - T_{\infty}) + v \cdot f'''(\eta) \cdot M \cdot v \\ &- f'(\eta) \cdot f''(\eta) \cdot 16 \cdot v^2 \cdot \frac{y}{x^4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{5/4} + 3 \cdot f'(\eta) \cdot f''(\eta) \cdot M \cdot v^2 \cdot \frac{y}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \\ &- [f'(\eta)]^2 \cdot 16 \cdot v^2 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot (Mx^3/4) + 6 \cdot [f'(\eta)]^2 \cdot M \cdot v^2 \\ &+ f'(\eta) \cdot f''(\eta) \cdot 16 \cdot v^2 \cdot \frac{y}{x^4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{5/4} - 3 \cdot f'(\eta) \cdot f''(\eta) \cdot M \cdot v^2 \cdot \frac{y}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \\ &- 3 \cdot [f'(\eta)]^2 \cdot M \cdot v^2 = g \beta(T - T_{\infty}) + v^2 \cdot f'''(\eta) \cdot M \end{aligned}$$

Bu eşitlik üzerinde gerekli sadeleştirmeler yapılarak momentum denklemi basit bir hale getirilebilir.

$$\begin{aligned} -4 \cdot [f'(\eta)]^2 \cdot M \cdot v^2 + 6 \cdot [f'(\eta)]^2 \cdot M \cdot v^2 - 3 \cdot f'(\eta) \cdot f''(\eta) \cdot M \cdot v^2 &= g \beta(T - T_{\infty}) + v^2 \cdot f'''(\eta) \cdot M \\ 2 \cdot [f'(\eta)]^2 - 3 \cdot f'(\eta) \cdot f''(\eta) &= g \beta(T - T_{\infty}) \cdot \frac{1}{M \cdot v^2} + f'''(\eta) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Eşitlik (3.62) için $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$ boyutsuz sıcaklık tanımı kullanılıp eşitlikte M

yerine değerini yazılırsa;

$$2. [f'(\eta)]^2 - 3.f(\eta).f''(\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} + f'''(\eta)$$

$$2. [f'(\eta)]^2 - 3.f(\eta).f''(\eta) = \theta + f'''(\eta) \quad (3.63)$$

elde edilir. Başlangıçta bir çok değişkene bağlı ve içerisinde doğrusal olmayan terimler ihtiva eden momentum denklemi yeni tanımlamalarla eşitlik (3.63) halini alır. Burada f ve θ sadece η 'nin fonksiyonudur. Dikkat edilirse f hız sınır tabakası için ana bağımlı değişken olup süreklilik denklemi akım fonksiyonunun tanımlanmasıyla kendiliğinden sağlanmaktadır.

Enerji Denkleminde önce boyutsuz sıcaklık tanımı kullanılarak T'nin (x) ve (y)'ye göre değişimleri hesaplanabilir.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

$$(T_w - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$(T_w - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$(T_w - T_\infty) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Hesaplanan bu terimlerden enerji denkleminde kullanılacak türevler elde edilmelidir.

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta' \cdot \left[-\frac{y}{x^2} (Mx^3/4)^{1/4} + \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \right]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\theta' \cdot \frac{y}{x^2} (Mx^3/4)^{1/4} + \theta' \cdot \frac{3}{16} \cdot M \cdot x \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta' \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\theta' \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \theta'' \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \theta'' \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} \quad (3.66)$$

Eşitlik (3.64), (3.65) ve (3.66) enerji denkleminde yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa enerji denkleminin benzerlik yaklaşımı ile çözümü için gerekli olan eşitlik elde edilir.

$$\left[\frac{4v}{x} \cdot f'(\eta) \cdot (Mx^3/4)^{1/2} \right] \cdot \left[-\theta' \cdot \frac{y}{x^2} (Mx^3/4)^{1/4} + \theta' \cdot \frac{3}{16} \cdot M \cdot x \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \right]$$

$$+ \left[f'(\eta) \cdot 4v \cdot \frac{y}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2} - f'(\eta) \cdot \frac{3}{4} \cdot M \cdot v \cdot x \cdot y \cdot (Mx^3/4)^{-1/2} \right]$$

$$- f(\eta) \cdot \frac{3Mx^2}{4} \cdot v \cdot (Mx^3/4)^{-3/4} \cdot \left[\theta' \cdot \frac{1}{x} \cdot (Mx^3/4)^{1/4} \right] = \alpha \cdot \theta'' \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (Mx^3/4)^{1/2}$$

$$f'(\eta).\theta'.4v.y.\frac{1}{x^3}.(Mx^3/4)^{3/4} + \frac{3}{4}.f'(\eta).\theta'.M.y.v.(Mx^3/4)^{-1/4}$$

$$+f'(\eta).\theta'.4v.y.\frac{1}{x^3}.(Mx^3/4)^{3/4} - \frac{3}{4}.f'(\eta).\theta'.M.y.v.(Mx^3/4)^{-1/4}$$

$$- \frac{3}{4}.f(\eta).\theta'.M.x.v.(Mx^3/4)^{-1/2} = \alpha.\theta''.\frac{1}{x^2}.(Mx^3/4)^{1/2}$$

$$- \frac{3}{4}.f(\eta).\theta'.M.x.v.(Mx^3/4)^{-1/2} = \alpha.\theta''.\frac{1}{x^2}.(Mx^3/4)^{1/2}$$

$$- \frac{3}{4}.f(\eta).\theta'.M.x^3.Pr.(Mx^3/4)^{-1/2} = \theta''.(Mx^3/4)^{1/2}$$

$$\theta'' + 3.Pr.f(\eta).\theta' = 0 \quad (3.67)$$

İşlemler sonucunda elde edilen diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir.

Burada ' ve ''' üst indisleri η 'ya göre ikinci ve üçüncü türevleri göstermektedir.

$$2.[f'(\eta)]^2 - 3.f'(\eta).f''(\eta) = \theta + f'''(\eta)$$

$$\theta'' + 3.Pr.f(\eta).\theta' = 0$$

. Benzerlik çözümünde η , 0 ile ∞ arasında değişmektedir. Bir k değişkeni tanımlı

yaparak aralık daraltılabilir. Bu tanımlama için $k = f(\eta)$ olsun.

$$k = 1 - \frac{1}{1 + c.\eta}$$

Burada c sabit bir katsayı olmak üzere k ile η arasında bir fonksiyon tanımlı

yapılabilir. Sınır şartlarını yeniden düzenleyecek olursak;

$$\eta = 0 \quad k=0$$

$$\eta = \infty \quad k=1$$

Sınır şartlarına baktığımızda $\eta(0, \infty)$ yerine k (0,1) alınabilir. Sonuç olarak

sınır şartları;

$$\begin{array}{lll} \eta = 0 & f = f' = 0 & \theta = 1 \\ \eta = \infty & f' = 0 & \theta = 0 \end{array}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu sınır şartları altında momentum ve enerji denklemlerinin çözümlerinden elde edilen sonuçlar şekil (3.2) 'de verilmiştir.

Nusselt sayısının elde edilmesinde bir önceki bölümde yapılan işlemler yapılabilir. Taşınımınla geçen ısı için Newton'un soğuma kanunu ifadesi kullanılabilir.

$$\dot{q} = h.(T_w - T_\infty)$$

Burada ısı taşınım katsayısı h denklemden çekilecek olursa;

$$h = \frac{\dot{q}}{(T_w - T_\infty)}$$

elde edilir. Nusselt sayısının ifadesinde ısı taşınım katsayısı yazılırsa;

$$Nu = \frac{h.x}{k}$$

$$Nu = \frac{\frac{\dot{q}}{(T_w - T_\infty)} x}{k}$$

elde edilir. İletimle geçen ısı miktarı için Fourier'in ısı iletim kanununun ifadesi yazılıp gerekli işlemler yapılırsa;

$$\dot{q} = -k \left. \frac{dT}{dy} \right]_{y=0}$$

$$\dot{q} = -k \left. \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} (T_w - T_\infty) \right]_{\eta=0}$$

$$\dot{q} = -k \frac{1}{x} \left(\frac{Gr_x}{4} \right)^{1/4} (T_w - T_\infty) \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right]_{\eta=0} \quad (3.68)$$

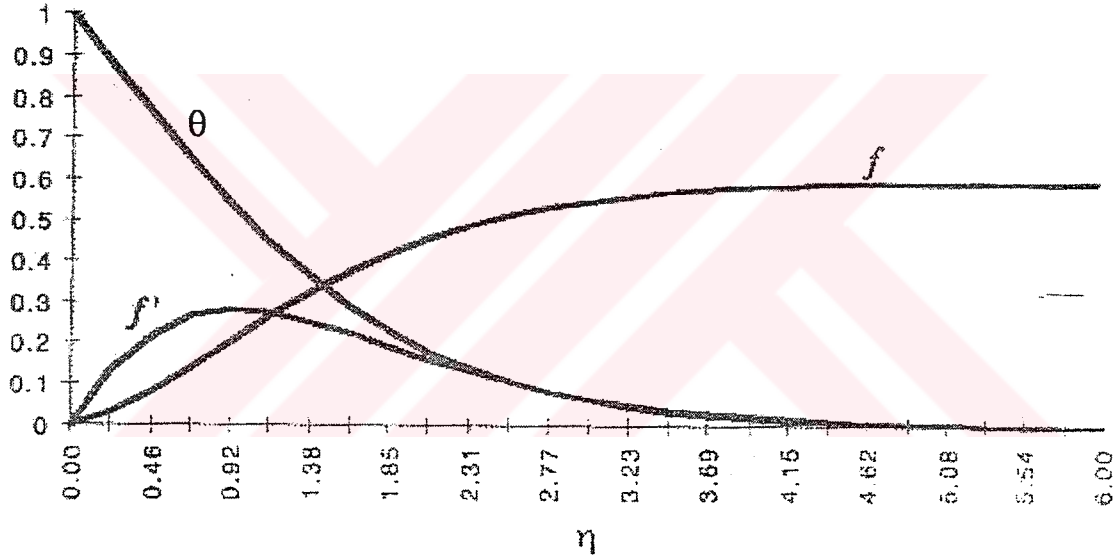
bulunur. Eşitlik(3.68) x/k oranı elde edilir. Bu oran Nusselt sayısının ifadesinde yerine yazılırsa;

$$Nu = \frac{h \cdot x}{k}$$

$$Nu = -\left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} \left. \frac{d\theta}{d\eta} \right|_{\eta=0}$$

$$Nu = \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} g(Pr) \quad (3.69)$$

elde edilir.



Şekil 3.2 Dikey bir levha üzerinde hız ve sıcaklık profilleri

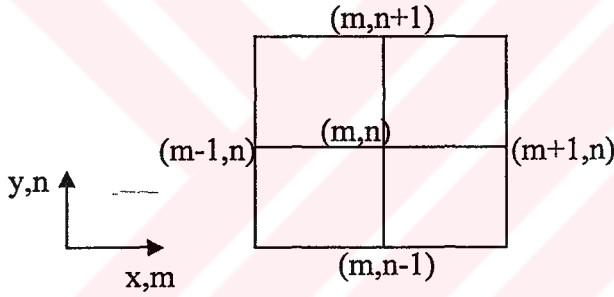
Buna göre yüzeydeki sıcaklık gradyanı Prandtl sayısının bir fonksiyonudur. Şekil 3.2'de inceleme yapıldığı zaman bu açıkça görülmektedir. Bir oranlamayla $g(Pr)$ bulunur ve denkleme yazılırsa ;

$$Nu = \left(\frac{Gr_x}{4}\right)^{1/4} \frac{0.75 Pr^{1/2}}{(0,609 + 1,221 Pr^{1/2} + 1,238 Pr)^{1/4}} \quad (3.70)$$

3.5. Sonlu Farklar Metodu İle Çözüm

Isı transferi problemlerinde genellikle analitik çözümlere ulaşmak zordur. Analitik çözümleri bulmak için genelde basit geometri ve sınır koşulları kullanmak gerekmektedir. Bununla birlikte genelde kullanılan geometriler karmaşıktır. Bu gibi durumlarda en iyi çözüm sonlu-fark gibi sayısal yöntemleri kullanmaktır.^[2]

Çözüm bölgesinin her noktasında sıcaklığın belirlenmesine olanak sağlayan analitik çözüme karşı, sayısal çözüm sıcaklığın sadece ayırık noktalarda belirlenmesini öngörür. Bundan dolayı herhangi bir sayısal çözümde ilk adım bu noktaları seçmektir. Referans noktası genelde düğüm noktası olarak adlandırılır.



Şekil 3.3 Sonlu fark yaklaşımında düğüm noktalarının gösterimi

Sayısal olarak sıcaklık ve hız dağılımının bulunması, sıcaklıkları ve hızları belli olmayan her düğüm noktasında uygun denge eşitliğinin yazılmasını gerektirir. Bulunan denklem takımı, her noktadaki sıcaklık ve hız için birbirlerine bağlı olarak çözülür.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right] \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (3.71)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right] \approx \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{\Delta x} \quad (3.72)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad (3.73)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{m,n} \approx \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad (3.74)$$

Böylece m,n noktası için gerçekte bir diferansiyel denklem olan eşitlikler yaklaşık olarak cebirsel eşitliğe indirgenir. Sonlu fark eşitlikleri kullanılarak çözümlerin elde edilmesi için süreklilik, momentum ve enerji denklemleri aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (3.77)$$

Bu denklemlerin çözümü için kullanılan sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x = 0 \quad u = v = \theta = 0$$

$$y = 0 \quad u = v = 0, \theta = 1$$

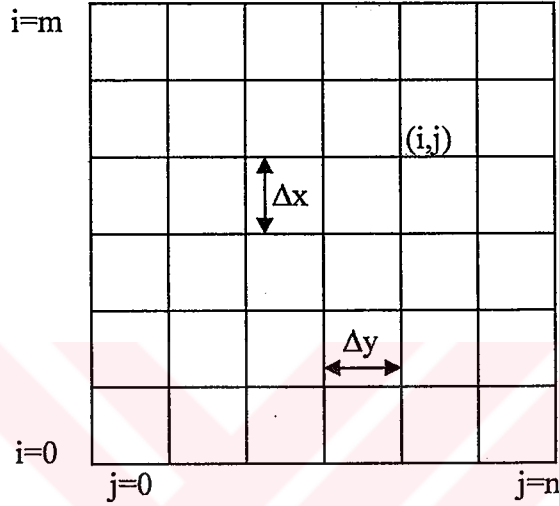
$$y = \infty \quad u = v = \theta = 0$$

$$\tau = 0 \quad u = v = \theta = 0$$

Burada θ boyutsuz sıcaklık, y yönündeki hız bileşeni v, x yönündeki hız bileşeni u ve τ boyutsuz zaman olarak gösterilmektedir. Belli zaman aralıkları

sonucunda elde edilen sıcaklık ve hız değerleri sonlu farklar kullanılarak hesap edilebilir.

İşlemler sırasında süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin çözülmesi gerekmektedir. Bu denklemlerin çözülmesiyle hız ve sıcaklık değerleri elde edilmektedir.



Şekil 3.4. Dikey bir levha için grid sistemi

Grid sisteminde her düğüm noktası için denklemler yazılıp, bu denklemler çözülürse bu düğüm noktalarına ait sıcaklık ve hız değerleri bulunur. Süreklilik, momentum ve enerji denklemleri sonlu farklar için aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

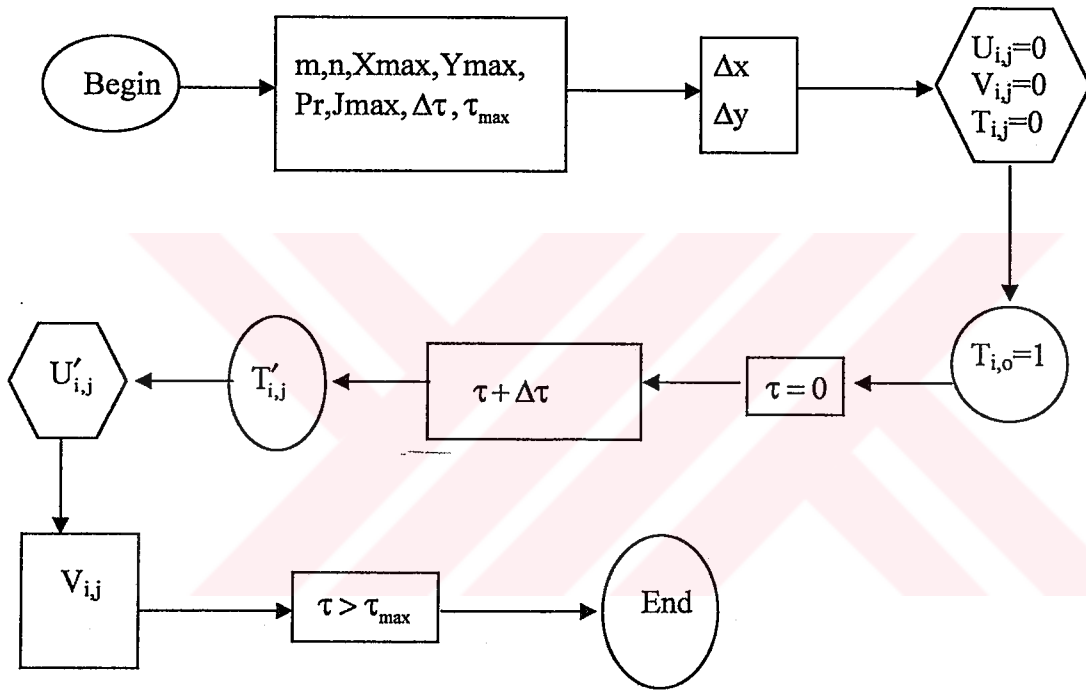
Eşitlik (3.75),(3.76) ve (3.77) 'de verilen süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin sonlu farklardaki karşılığı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{u'_{i,j} - u'_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{v'_{i,j} - v'_{i,j-1}}{\Delta y} = 0 \quad (3.78)$$

$$\frac{u'_{i,j} - u_{i,j}}{\Delta \tau} + u_{i,j} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + v \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} = \theta' + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.79)$$

$$\frac{\theta'_{i,j} - \theta_{i,j}}{\Delta\tau} + u_{i,j} \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta y} = \frac{1}{Pr} \frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.80)$$

Yukarıdaki denklemler zamana bağlı olduğundan uygun bir zaman artımı için çözülebilir. Bu zamana bağlı sonuçların uzun bir zaman sonraki değerleri kararlı durum için kullanılabilir. Bu işlemleri yapan bilgisayar programı Ek-1'de verilmiştir. Bu programa ait akış diyagramı Şekil 3.5'da verilmiştir.



Şekil 3.5 Akış Diyagramı

Her bir düğüm noktası için bu ifadeler yazılıp denklem takımları oluşturulduktan sonra bu denklemlerin çözümü yapılabilir. Böylece ele alınan geometri için hız ve sıcaklık değerleri bulunmuş olur. Bu Bilgisayar programıyla elde edilen u, v ve T değerleri zaman adımları için düzenlenmiştir.

Sonlu farklar bilgisayar ortamında çalışmayı sevenler için çok kullanışlı bir metottur. Bu çalışmada zamana bağlı bir problem için çözümler yapan bilgisayar programı yazılmıştır. Sonlu farklar metodu için yapılan bilgisayar programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir. Hız ve sıcaklık için verilen değerler grid sisteminde belli sayıda nokta içindir. Bulunulan sonuçlar u,v hızları ve sıcaklık için verilmiştir.

u hızına ait sonuçlar;

0	4,4696	5,0272	4,0668	2,8621	1,8549	1,1230	0,6276	0,3083	0,1123	0
0	4,2687	4,7128	3,7481	2,5979	1,6605	0,9924	0,5480	0,2662	9,6008	0
0	4,0496	4,3768	3,4145	2,3265	1,4640	0,8624	0,4697	0,2253	8,0304	0
0	3,8082	4,0153	3,0644	2,0478	1,2660	0,7335	0,3933	0,1859	0,0653	0
0	3,5385	3,6234	2,6957	1,7614	1,0668	0,6063	0,3193	0,1484	5,1370	0
0	3,2319	3,1947	2,3062	1,4675	0,8674	0,4818	0,2483	0,1131	3,8433	0
0	2,8751	2,7201	1,8931	1,1666	0,6694	0,3615	0,1814	8,0623	2,6778	0
0	2,4459	2,1870	1,4538	0,8603	0,4754	0,2477	0,1201	5,1697	1,6679	0
0	1,9039	1,5768	0,9863	0,5530	0,2903	0,1439	6,6592	2,7424	8,5042	0
0	1,1641	0,8610	0,4933	0,2553	0,1239	5,6922	2,4464	9,4115	2,7465	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

v hızına ait sonuçlar

0	-5,022	-0,128	-0,208	-0,274	-0,323	-0,355	-0,375	-0,386	-0,390	-0,390
0	-5,476	-0,138	-0,222	-0,290	-0,339	-0,371	-0,391	-0,401	-0,405	-0,405
0	-6,035	-0,150	-0,238	-0,307	-0,357	-0,389	-0,408	-0,418	-0,422	-0,422
0	-6,741	-0,165	-0,257	-0,329	-0,378	-0,410	-0,429	-0,438	-0,442	-0,442
0	-7,664	-0,183	-0,281	-0,354	-0,404	-0,435	-0,453	-0,462	-0,465	-0,465
0	-8,920	-0,207	-0,311	-0,386	-0,435	-0,465	-0,482	-0,490	-0,493	-0,493
0	-0,107	-0,240	-0,350	-0,426	-0,475	-0,503	-0,519	-0,526	-0,529	-0,529
0	-0,135	-0,288	-0,404	-0,481	-0,528	-0,554	-0,567	-0,573	-0,575	-0,575
0	-0,184	-0,363	-0,487	-0,561	-0,603	-0,624	-0,635	-0,639	-0,641	-0,641
0	-0,291	-0,506	-0,629	-0,693	-0,724	-0,738	-0,744	-0,747	-0,747	-0,747
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

T sıcaklık değerleri;

1	0,7044	0,4503	0,2691	0,1545	8,6526	4,7242	2,4734	0,0118	4,3411	0
1	0,6956	0,4373	0,2568	0,1451	8,0060	4,3125	2,2300	1,0528	3,8316	0
1	0,6854	0,4225	0,2433	0,1349	0,0732	3,8849	1,9811	9,2353	3,3233	0
1	0,6732	0,4055	0,2281	0,1239	6,5990	3,4406	1,7267	7,9336	2,8183	0
1	0,6584	0,3855	0,2111	0,1119	5,8288	2,9783	1,4673	6,6286	2,3197	0
1	0,6397	0,3616	0,1916	9,8687	5,0060	2,4974	1,2035	5,3287	1,8318	0
1	0,6148	0,3321	0,1689	8,3927	4,1236	1,9978	9,3705	4,0475	1,3613	0
1	0,5793	0,2938	0,1416	6,7271	3,1740	1,4814	6,7112	2,8083	9,1841	0
1	0,5220	0,2409	0,1078	4,8173	2,1521	9,5475	4,1244	1,6521	5,1991	0
1	0,4055	0,1589	6,3533	0,0259	1,0667	4,3813	1,7591	6,5866	1,9535	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Isı taşınım problemlerinin çözümü kullanılan momentum ve enerji denkleminin çözümü oldukça zordur. Bu denklemlerin çözümü için geçerli olan analitik ve sayısal metodlar bir çok kabule dayalıdır. Bu kabullerin doğru yapılması ve sınır şartların düzgün tespit edilmesi en önemli aşamadır. Bu aşamadan sonra yapılacak işlem uygun bir metod seçimidir. Lakin bu seçim içinde çok fazla seçenek bulunmamaktadır. Bu çalışma da kullanılabilir metotlardan en yaygın olan üç tanesi kullanılmıştır.

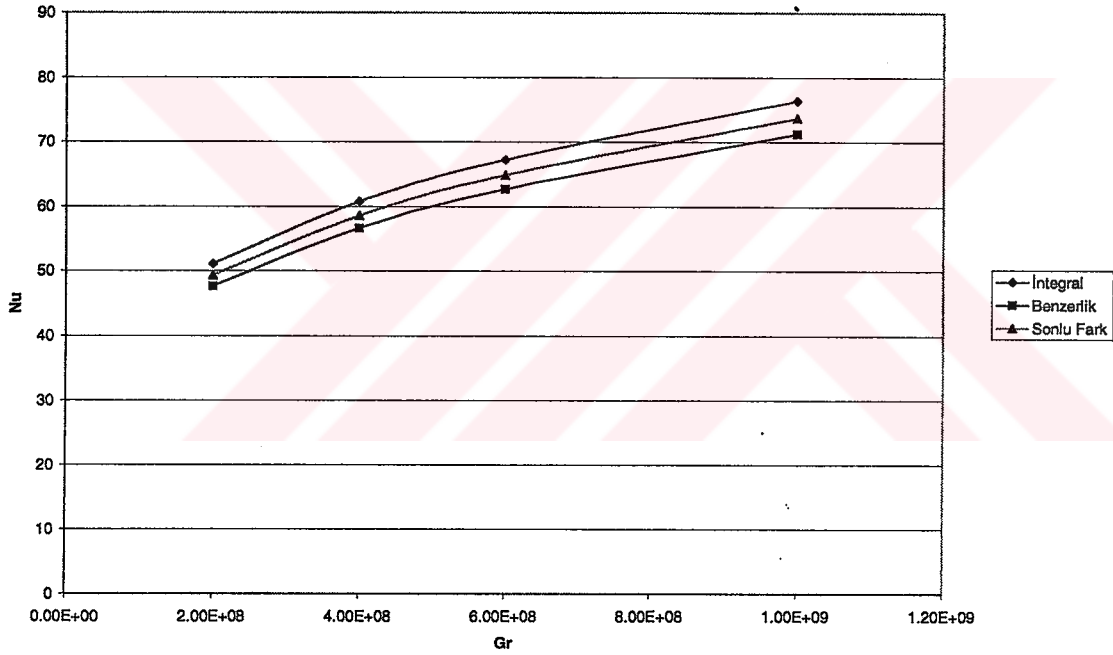
Doğal ısı taşınım denklemleri zorlanmış ısı taşınımına göre daha karmaşıktır. Doğal taşınım denklemlerinde kullanılan terimler doğrusal olmayan türdendir. Momentum ve enerji denklemlerinde ikinci ve üçüncü dereceden türevler en önemli problemi teşkil etmektedir.

Benzerlik metodunda benzerlik parametresi bir kolaylaştırmadır ancak çözümlerin ileri safhasında ortaya çıkan olumsuzluklar analitik olarak çalışmayı engellemektedir. Belli bir safhadan sonra sayısal çözümlenmektedir. Lakin bu metodla yapılan çözüm gerçek çözümdür.

İntegral metod Belli bir kontrol hacmine uygulanan ve daha sonra tüm geometriye uyarlanan bir çözüm şeklidir. Bu kuralın işlemleri sırasında integral ve türev kurallarını ustalıkla kullanmak gerekmektedir. Benzerlik metoduna göre çok yakın sonuçlar vermekle birlikte bu kural bir kolaylaştırmadır ve gerçek değerden bir sapmayı ifade eder.

Sonlu farklar metodu bilgisayar programlarına uyarlaması kolay olan ve günümüzde en yaygın kullanım alanına sahip bir çözüm şeklidir.

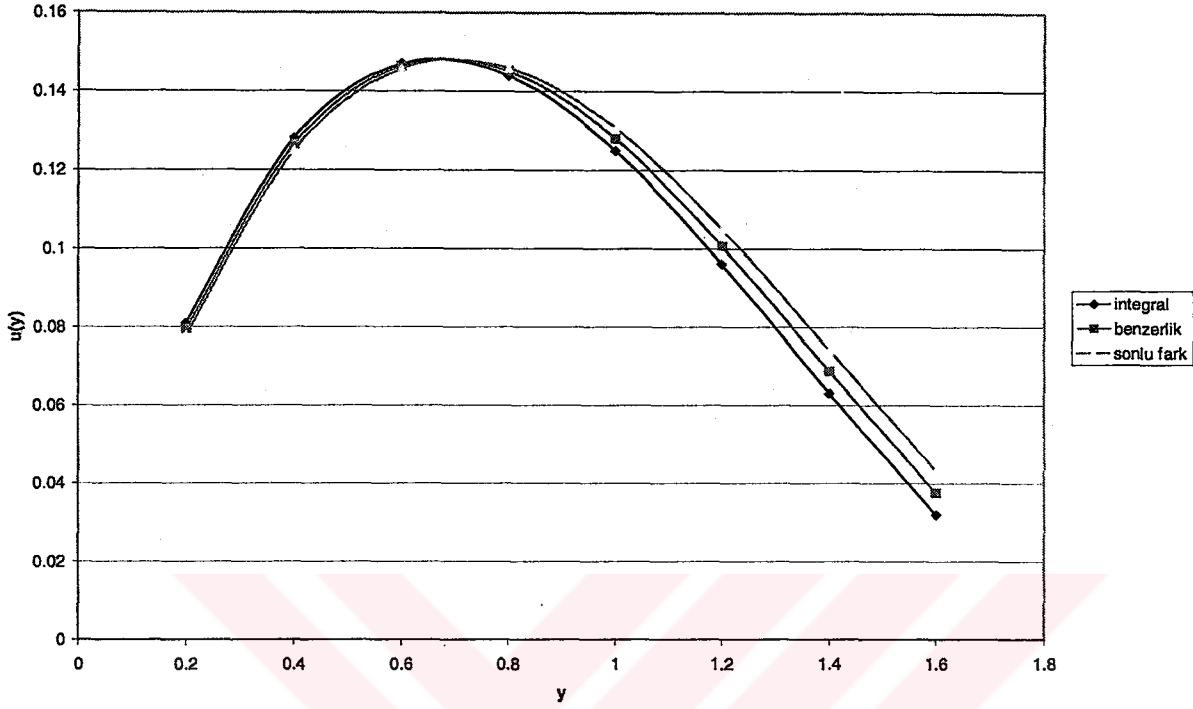
Benzerlik ve integral kurallarına göre yapılmış çözümler bölüm 3'te verilmişti. Bulunulan Nusselt sayısının benzerlik ve integral metoduna göre elde edilmiş grafikleri Şekil 4.1'de verilmiştir. Sonuçlara bakıldığında bu iki çözüm şeklide rahatlıkla kullanılabilir. Birini diğerine göre tercih etmekle fazla hata yapılmamış olur.



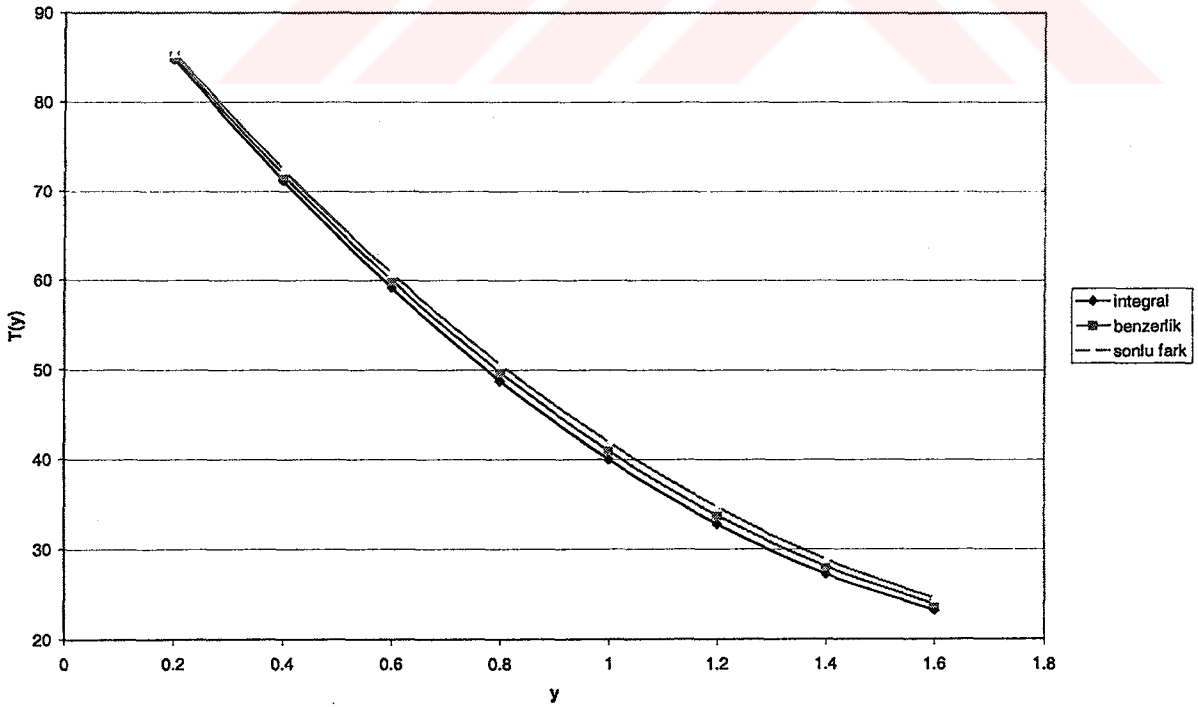
Şekil 4.1. Nusselt sayılarının karşılaştırılması

Benzerlik ve integral metodu kullanılarak elde edilen hız dağılımları Şekil (4.2)'de verilmiştir. Bu hız dağılımından hareketle integral metodunda sınır şartları kullanılarak bulunulan hız dağılımının gerçek hız dağılımına çok yakın olduğu

görülmektedir. İntegral metoduyla yapılan çözümler benzerlik metoduyla çok yakın sonuçlar vermektedir.



Şekil 4.2 Hız dağılımlarının karşılaştırılması



Şekil 4.3 Sıcaklık dağılımlarının karşılaştırılması

İntegral metoduyla benzerlik metodu arasında karşılaştırma yapmak için son olarak şekil (4.3)'deki sıcaklık dağılımına bakılabilir. Burada levhanın yüzey sıcaklığı $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, ortam sıcaklığı $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ olarak alınmıştır. Şekilden anlaşılacağı gibi sıcaklık dağılımı için iki metotta yaklaşık olarak aynı sonuçları vermektedir.

Doğal ısı taşınımı problemlerinde çözüm için benzerlik veya integral metotlarından herhangi birisi kullanılabilir. Bu metotlardan alınan sonuçlar çok küçük hatalarla birbiriyle örtüşmektedir.

Bilgisayar ortamında yapılan çözümler için kullanılan en önemli metot sonlu farklar metodudur. Sonlu farklar metodu ile yapılan çözümlerden elde edilen çözümler analitik çözümlere oldukça yakındır.

KAYNAKLAR

1. I. Mulolani, M. Rahman, Vol 23, Haziran 1998, pp. 319-334
- 2.H.I. Abu-Mulaweh, B.F.Armaly,Trans.Asme Ser.C.J.Heat Transfer,vol 117, 1995, pp.895-901,
- 3.By Valod Noshadi, Wilhelm Schneider, İnstitute of Fluid Dynamics and Heat Transfer, Viena, 1999
- 4.Park,K.A., and Berlegs, A.E., Asme Journal of Heat Transfer, vol 109, Viena, 1987, pp. 90-96
5. Afrid,M., and Zebib, A., Numerical Heat Transfer, vol 15, pp.1-8, 1987
6. Jaluria,Y., Asme Journal of Heat Transfer, vol 104, 1998, pp.223-229
- 7.H.I.Abu-Mulaweh,B.F.Armaly,and T.S.Chen, Trans.ASME Ser.C J.Heat Transfer vol 117, 1995, pp.895 –901.
8. D.Angirasa,G.P.Peterson,and I.Pop,*Combined*, Int.J.Heat Mass Transfer, vol 40, 1997, pp275 –282
9. A.Bejan and J.L.Lage, J.Heat Transfer, vol 112, 1990, pp.787 –790.
- 10.Yunus A Çengel,"Mühendislik Yaklaşımı ile Termodinamik, Literatür Yayıncılık, İstanbul,1996
11. Frank P. Incropera , "Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri" Literatür Yayıncılık, İstanbul, 2001
12. Gönenç Arın, "Yavaş Akımlarda Isı aktarımı" Bilim Yayıncılık, Ankara, 1998
13. S. Kakaç, Y.Yener, "Convective Heat Transfer" Crc Press, Inc., Florida, 1995
14. J.P. Holman, "Heat Transfer" Mc Graw-Hill,Inc , New York, 1981

15. F.Halıcı ,M.Gündüz ,”Örneklerle Isı GeçiŖi”, Nil Matbaacılık, Sakarya, 1998
16. M. Balcı, “Matematik Analiz”, Ankara Üniversitesi, Ankara, 1996
17. İ. Uzun,”Nümerik Analiz”, Beta Yayıncılık, İstanbul, 1998



EK 1.**Bilgisayar programında kullanılan terimler**

Değişken Adı	Sembolü	Tanımı
ZADIM	$\Delta\tau$	Zaman Adımı
DX,DY	$\Delta x, \Delta y$	Mesafe Artışı
I,J	i, j	Grid noktasının konumu
SAYAC		Zaman Adımı Sayacı
ADIMS		Zaman adımlarının sayısı
JMAX		Max Genişlik
M,N	m, n	x ve y koordinatları grid noktası sayısı
T		Sıcaklık
YENİZ		Zaman Adımı sonunda meydana gelen sıcaklık
ZAMAN		Zaman
MAXZAM		En Büyük Zaman Değeri
YENİU		Zaman Adımı Sonundaki u Hızı
XMAX		Maximum x Büyüklüğü
YMAX		Maximum y Büyüklüğü

Sonlu farklar metodunun çözümünde kullanılan bilgisayar programı aşağıdaki gibidir.

Dim u(41, 41), yeniu(41, 41), v(41, 41), t(41, 41), yeniz(41, 41) As Single

Private Sub Command1_Click()

1

m = CDb1(Text1.Text)

n = CDb1(Text2.Text)

adims = CDb1(Text3.Text)

jmax = CDb1(Text4.Text)

xmax = CDb1(Text5.Text)

ymax = CDb1(Text6.Text)

pr = CDb1(Text7.Text)

zadim = CDb1(Text8.Text)

maxzam = CDb1(Text9.Text)

jmaxp1 = jmax + 1

mp1 = m + 1

np1 = n + 1

flm = m

fln = n

dx = xmax / flm

dy = ymax / fln

dysq = dy * dy

dysqpr = dysq * pr

yoverx = dy / dx

'Hız ve sıcaklıkların incelenmesi...

sayac = 0

For i = 1 To mp1

For j = 1 To np1

u(i, j) = 0

yeniu(i, j) = 0

v(i, j) = 0

t(i, j) = 0

yeniz(i, j) = 0

Next j

Next i

For i = 1 To mp1

t(i, 1) = 1

Next i

'zaman adımlarının tespiti

zaman = 0

4 zaman = zaman + zadımı

sayac = sayac + 1

'yeni sıcaklık değerlerinin hesabı...

For i = 2 To mp1

For j = 2 To n

yeniz(i, j) = t(i, j) + zadım * (((t(i, j + 1) - 2 * t(i, j) + t(i, j - 1)) / dysqpr) - (u(i, j) * (t(i, j) - t(i - 1, j)) / dx) - (v(i, j) * (t(i, j + 1) - t(i, j)) / dy))

Next j

Next i

'yeni u hızlarını hesabı

For i = 2 To mp1

For j = 2 To n

$$\text{yeniu}(i, j) = u(i, j) + \text{dtau} * (((u(i, j + 1) - 2 * u(i, j) + u(i, j - 1)) / \text{dysq}) - (u(i, j) * (u(i, j) - u(i - 1, j)) / \text{dx}) - (v(i, j) * (u(i, j + 1) - u(i, j)) / \text{dy}) + \text{yeniz}(i, j))$$

Next j

Next i

'Yeni v hızlarının hesabı..

For i = 2 To mp1

For j = 2 To np1

$$v(i, j) = v(i, j - 1) + \text{yoverx} * (\text{yeniu}(i - 1, j) - \text{yeniu}(i, j))$$

Next j

Next i

'u ve t hesabı...

For i = 2 To mp1

For j = 2 To n

$$u(i, j) = \text{yeniu}(i, j)$$

$$t(i, j) = \text{yeniz}(i, j)$$

Next j

Next i

'print u,v and t fields when appropriate

If sayac <> sayac Then GoTo 13

sayac = 0

Show

Print zaman

Print

For k = 1 To mp1

i = mp1 - k + 1

Print u(i, j);

Next k

Print

For k = 1 To mp1

i = mp1 - k + 1

Print v(i, j);

Next k

Show

Print

For k = 1 To mp1

i = mp1 - k + 1

Show

Print t(i, j);

Next k

13 If zaman - maxzam <= 0 Then GoTo 4

End Sub

**PC. YÜSEF ÖZGÜRİM KUDULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**