

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEIGH DAĞILIMDA İSTATİSTİKSEL SONUÇ
ÇIKARIMI

İhsan KÖPRÜLÜ

EKİM 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

İstatistik Anabilim Dalında İhsan KÖPRÜLÜ tarafından hazırlanan Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımında İstatistiksel Sonuç Çıkarımı adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Sevgi Yurt ÖNCEL
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Cenker BİÇER
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan: Doç. Dr. Rukiye DAĞALP

Üye (Danışman): Doç. Dr. Cenker BİÇER

Üye : Dr. Öğrt. Üyesi Hayrinisa DEMİRCİ BİÇER

...../...../.....

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEIGH DAĞILIMDA İSTATİSTİKSEL SONUÇ ÇIKARIMI

KÖPRÜLÜ, İhsan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Doç. Dr. Cenker BİÇER

Ekim 2019,43 sayfa

Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı fen ve mühendislikten sağlık bilimlerine kadar birçok farklı alanda çarpık verilerin modellenmesinde geniş bir uygulama alanına sahip bir olasılık dağılım modelidir. Oldukça güzel istatistiksel özelliklere sahip olan Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ile gerçek hayat problemlerinde gözlenen verileri modellerken model parametrelerinin tahmin edilmesi problemi ile karşılaşmaktadır. Bu çalışmada, Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının parametreleri için tahmin probleminin çözümü için en çok olabilirlik, momentler, L-momentler, en küçük kareler ve en büyük aralık gibi farklı tahmin metodolojileri kullanılarak çeşitli tahmin ediciler verilmektedir. Verilen tahmin edicilerin tahmin performansları yapılan kapsamlı Monte-Carlo simülasyon çalışmaları ile değerlendirilmiştir. Buna ek olarak, Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını kullanarak veri modellemeyi göstermek için gerçek bir veri seti üzerinde bir uygulama sunulur.

Anahtar kelimeler: Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı, En çok olabilirlik tahmin edicileri, En küçük kareler tahmin edicileri, L-momentler tahmin edicileri, Simülasyon.

ABSTRACT

STATISTICAL INFERENCE WITH GENERALIZED RAYLEIGH DISTRIBUTION

KÖPRÜLÜ, İhsan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics, Master Thesis

Supervisor: Assoc Prof Cenker BİÇER

October 2019,43 pages

The Generalized Rayleigh distribution is a probability distribution model which has a wide range of applications in the modeling of skewed data observed in many different fields from science and engineering to health sciences. When modeling the data observed in real-life problems with the generalized Rayleigh distribution, which has nice statistical properties, it is encountered that the estimation problem of the model parameters. In this study, various estimators are given by using different estimation methodologies such as maximum likelihood, moments, L-moments, least squares and maximum range to solve the estimation problem of the parameters of Generalized Rayleigh distribution. The prediction performances of the given estimators are evaluated with extensive Monte-Carlo simulation studies. In addition, an application is presented on an actual data set to illustrate data modeling using the Generalized Rayleigh distribution.

Key Words: Generalized Rayleigh distribution, Maximum likelihood estimators, Least-square estimators, L-moments estimators, Simulation.

TEŞEKKÜR

Eđitim öğretim hayatım süresince her an yanımda olup, bana destek veren annem Sare Köprülü'ye, babam Ahmet Köprülü'ye, ablam Tuba Çevik'e ve tez çalışmam süresince hep yanımda olan, tüm kararlarımaya saygı duyup, beni sabırla destekleyen sevgili eşim Bilge Öztürk Köprülü'ye sonsuz teşekkürü borç bilirim.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine her danıştığımdaya bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla, faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen, gelecekteki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanabileceğimden emin olduğum kıymetli danışman hocam sayın Doç. Dr. Cenker Biçer'e teşekkürü bir borç biliyor ve saygılarımı sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR	VIII
1. GİRİŞ	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEIGH VE İLGİLİ DAĞILIMLAR	4
2.1. Rayleigh Dağılımı	4
2.2. Genelleştirilmiş Üstel Dağılım.....	7
2.3. Burr Type –X Dağılımı	10
2.4. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımı	13
3. BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ	18
3.1. En çok Olabilirlik Tahmin Edicileri.....	18
3.2. Momentler Tahmin Edicileri.....	19
3.3. En Küçük Kareler Tahmin Edicileri	20
3.4. L-Momentler Tahmin Edicileri	21
3.5. En Büyük Aralık Tahmin Edicileri	22
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEİGH DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ	23
4.1. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri	23

4.2. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin Momentler Tahmin Edicileri.....	25
4.3. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin En Küçük Kareler Tahmin Edicileri	27
4.4. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin L-momentler Tahmin edicileri	28
4.5. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımın Parametrelerinin En Büyük Aralık Tahmin Edicileri	29
5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	30
6. UYGULAMA.....	37
7. SONUÇ.....	39
KAYNAKÇA	41

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>ÇİZELGE</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 5. 1. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 0.25$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.....	31
Çizelge 5. 2. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 0.50$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.....	32
Çizelge 5. 3. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 1.0$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.....	33
Çizelge 5. 4. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 3.0$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.....	34
Çizelge 5. 5. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 5.0$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.....	35
Çizelge 6. 1. 7913 numaralı uçağın klima arıza veri seti için parametre tahminleri ve test sonuçları.....	38

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2-1: Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	5
Şekil 2-2: Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği	5
Şekil 2-3: Farklı α değerleri ve $\lambda=2$ için Genelleştirilmiş Üstel dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	8
Şekil 2-4: Farklı α değerleri ve $\lambda=2$ için Genelleştirilmiş Üstel dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği	9
Şekil 2-5: Farklı α değerleri için Burr Type-X dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	11
Şekil 2- 6: Farklı α değerleri için Burr Type-X dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği	12
Şekil 2-7: Farklı α değerleri ve $\lambda=0.50$ için Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği	15
Şekil 2-8: Farklı α değerleri ve $\lambda=0.50$ için Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği	16

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
α	Alfa
λ	Lambda
ψ	Psi
Γ	Gama

Kısaltmalar	Açıklama
MLE	En çok olabilirlik tahmin edicisi
LME	L-moment tahmin edicisi
MME	Moment tahmin edicisi
LSE	En küçük kareler tahmin edicisi
MSE	Hata kareler ortalaması

1. GİRİŞ

Rayleigh dağılımı tek parametreye sahip bir olasılık dağılım modelidir. Dağılım, ilk kez akustik üzerine Lord Rayleigh tarafından yapılan bir çalışma ile literature kazandırılmıştır. Pozitif değerli verileri güçlü bir modelleme yeteneğine sahip Rayleigh, fen ve mühendislikten sağlığa kadar bilimin birçok dalında yaygın uygulama alanlarına sahip bir olasılık dağılımdır. Dağılımın parametresi, dağılımın çeşitli davranışlarını betimlemede hayati bir rol oynamaktadır ancak kimi zaman çeşitli türlerdeki verilerin tatminkar bir düzeyde modellenmesinde tek bir parametre yetersiz kalabilmektedir.

Günümüze kadar bir çok araştırmacı Rayleigh dağılımının tek parametreye sahip olmasından kaynaklanan modelleme başarı yetersizliğini giderebilmek için dağılımın çeşitli genelleştirmeleri üzerinde çalışmıştır. Genelleştirilmiş Rayleigh, iki parametrelili Rayleigh, alfa kuvvet dönüştürülmüş Rayleigh, Üstelleştirilmiş Rayleigh, Kumaraswamy üstelleştirilmiş Rayleigh, inverse Rayleigh dağılımları literatürde mevcut ve sıkça veri modellemede başvurulan Rayleigh dağılımı genelleştirmeleri olmakla birlikte bu genelleştirmeler arasında Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı en popüler olanıdır.

Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ilk olarak Surles ve Padgett (2001) tarafından Burr Type X dağılımının ölçeklendirilmesi ile literature kazandırılmış iki parametrelili bir olasılık dağılımıdır. Surles ve Padgett (2001) tarafından ölçeklendirilmiş Burr Type X dağılımı olarak tanıtılan dağılım daha sonraları Kundu ve Raqab (2005) tarafından Genelleştirilmiş Rayleigh olarak adlandırılmıştır. Rayleigh dağılımında olduğu gibi pozitif değerli ve çarpık verilerin modellemesinde kullanılabilen dağılım Rayleigh dağılımından daha esnek ve daha çok türden veri modelleme yeteneğine sahiptir Kundu ve Raqab (2006)

Literatürde Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ile ilgili geniş bir çalışma yelpazesi mevcuttur. Bu çalışmaların bir kısmı dağılımın istatistiksel özelliklerinin araştırılması üzerine odaklanırken diğer bir kısmı da bilimin farklı alanlarından veri setlerini modellemede kullanımı üzerine hazırlanmış çalışmalardır. Ayrıca önemli bir

kısım çalışmada Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının veri modelleme başarımını artırabilmek için dağılımın çeşitli uzantıların tanıtılması üzerinedir.

Mervoci (2014) Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının yeni bir genelleştirmesi olarak transmuted Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını önermiştir.

Tsai ve Wu (2006) yaptıkları çalışma ile yaşam sürelerinin Genelleştirilmiş Rayleigh olduğu durum için budanmış yaşam testi için kabul örnekleme planı önermişlerdir.

Nofal ve Abd El Hadi (2015) dört parametrelili bir olasılık dağılım modeli olarak transmuted Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını önermiş ve çeşitli istatistiksel özelliklerini yaptıkları çalışma ile ortaya koymuştur.

Raqab ve Madi (2011) verilerin II. tip ilerletilmiş sansürlü olması durumunda Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının parametrelerinin tahmin edilmesi probleminin çözümünü araştırmıştır.

Iriarte ve arkadaşları (2017) Slashed Generalized Rayleigh dağılımı adını verdikleri yüksek kurtosisli pozitif veri setlerini modellemeye uygun yeni bir dağılım ailesi olarak Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının yeni bir formunu sunmuşlardır.

Kundu ve Raqab (2007) bir veri seti için uygun olduğu düşünülen Genelleştirilmiş Rayleigh ve Log-Normal dağılımları arasındaki ayırım problemini incelemişleridir.

Al-Khedhairi ve arkadaşları (2007) Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etme üzerine hazırladıkları çalışmada en çok olabilirlik tahmin edicileri için asimptotik güven bölgesini belirlenmesi üzerine çalışmışlardır.

Kundu ve Ragab (2015) aynı üç parametrelili Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımlı rasgele değişkenler için, gerilme dayanımı olasılığının hesaplanması üzerine çalışmışlardır.

Abd-Elfattah (2011) yaptığı çalışma ile Anderson-Darling test istatistiğine dayalı olarak Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımına uygunluğun test edilmesi üzerine çalışmıştır.

Esemen ve Gürler (2018) sıralı küme örnekleme temelinde Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasının kalan kısımları şu şekilde düzenlenmiştir. Tezin ikinci kısmında Rayleigh dağılımı ve Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı hakkında temel bilgiler verilmektedir. Bunun yanı sıra yine ikinci bölümde Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ile ilgili dağılımlara değinilmektedir.

Üçüncü kısımda Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılacak tahmin yöntemleri açıklanacaktır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının bilinmeyen parametreleri için üçüncü bölümde açıklanan tahmin yöntemleri kullanılarak çeşitli tahmin ediciler elde edilmektedir.

Elde edilen tahmin edicilerin tahmin performanslarını çeşitli ölçütlere göre karşılaştıran Monte-Carlo simülasyon çalışmalarına, bu tez çalışmasının beşinci bölümünde yer verilmektedir.

Altıncı bölümde, Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımında parametre tahminini açıklama amaçlı olarak bir gerçek yaşam veri seti üzerinde gerçekleştirilen analizlere yer verilmektedir.

Çalışmanın altıncı bölümü olan son bölümde elde edilen bulgular detayları olarak tartışılmaktadır.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEIGH VE İLGİLİ DAĞILIMLAR

Bu kısımda, ilk olarak Rayleigh dağılımı verilmektedir. Rayleigh dağılımının daha genel bir hali olarak Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ve temel karakteristikleri incelenmektedir. Bunun yanı sıra Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ile ilişkili olan Burr Type X ve Genelleştirilmiş Üstel dağılıma yine bu kısımda değinilmektedir.

2.1. Rayleigh Dağılımı

Rayleigh dağılımı ilk olarak Lord Rayleigh tarafından tanıtılan tek bir parametreye sahip bir dağılım olarak tanıtılmıştır. Rayleigh tarafından tanıtılmasından günümüze kadar fen bilimleri ve mühendislikten, sağlık ve iletişime kadar bilimin birçok alanında uygulamalara sahiptir.

Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \lambda) = 2\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2}, x > 0 \quad (2.1.1)$$

ve dağılım fonksiyonu

$$F(x; \lambda) = 1 - e^{-(\lambda x)^2}, x > 0 \quad (2.1.2)$$

biçiminde verilir. Burada $\lambda > 0$ dağılımın ölçek parametresidir. Ayrıca Rayleigh dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma (hazard) fonksiyonu sırasıyla;

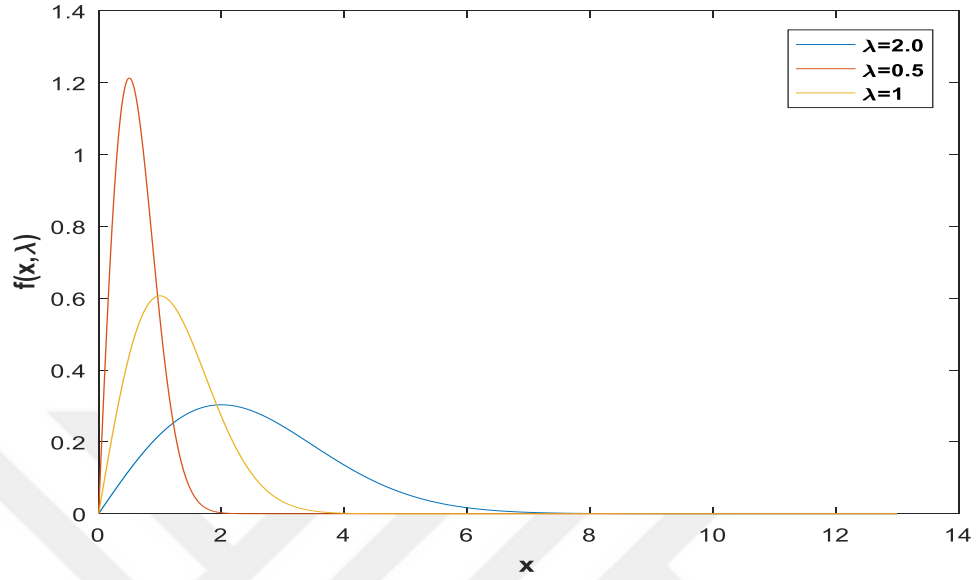
$$S(x; \lambda) = e^{-(\lambda x)^2}, x > 0 \quad (2.1.3)$$

ve

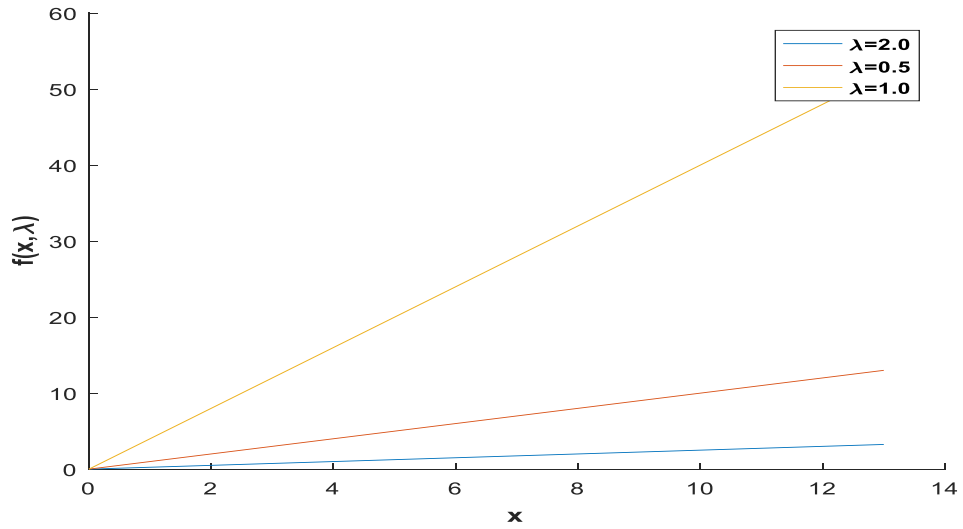
$$H(x; \lambda) = 2\lambda^2 x, \quad x > 0 \quad (2.1.4)$$

biçimindedir.

Dağılımın davranışını gösterebilmek amacıyla, λ parametresinin farklı değerleri için Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun ve bozulma fonksiyonunun grafikleri Şekil 2-1 ve Şekil 2-2 ile verilmiştir.



Şekil 2-1: Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2-2: Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği

Rayleigh dağılımının r . momentini (2.1.5) eşitliği ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun göz önünde bulundurulmasıyla

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \quad (2.1.5)$$

$$= \int_0^{+\infty} x^r 2\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2} dx \quad (2.1.6)$$

$$= 2\lambda^2 \int_0^{+\infty} x^r x e^{-(\lambda x)^2} dx \quad (2.1.7)$$

olarak yazılır. Son eşitlikte elde edilen integral $u = \lambda^2 x^2$ dönüşümü yardımıyla

$$= 2\lambda^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda^2}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-u} \frac{1}{2\lambda^2} du \quad (2.1.8)$$

$$= \frac{1}{\lambda^r} \int_0^{+\infty} u^{\frac{r}{2}} e^{-u} du \quad (2.1.9)$$

$$= \frac{1}{\lambda^r} \int_0^{+\infty} u^{\left(\frac{r}{2}\right)} e^{-u} du \quad (2.1.10)$$

$$= \frac{1}{\lambda^r} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) \quad (2.1.11)$$

biçiminde kolayca çözülür, burada $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonunu ifade etmektedir, bakınız (Abramowitz ve Stegun, 1965). Böylece (2.1.11) ile elde edilen r . momentin kullanılmasıyla, Rayleigh dağılımının beklenen değeri

$$E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda} \quad (2.1.12)$$

ve varyansı

$$Var(X) = \frac{4 - \pi}{4\lambda^2} \quad (2.1.13)$$

olarak yazılır.

2.2. Genelleştirilmiş Üstel Dağılım

X pozitif değerli bir rasgele değişken olmak üzere; X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha \quad x > 0; \alpha, \lambda > 0 \quad (2.2.1)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}, \quad x > 0; \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (2.2.2)$$

biçiminde ise X rasgele değişkenine Genelleştirilmiş üstel dağılıma sahiptir denir ve $X \sim GE(\alpha, \lambda)$ biçiminde işaret edilir.

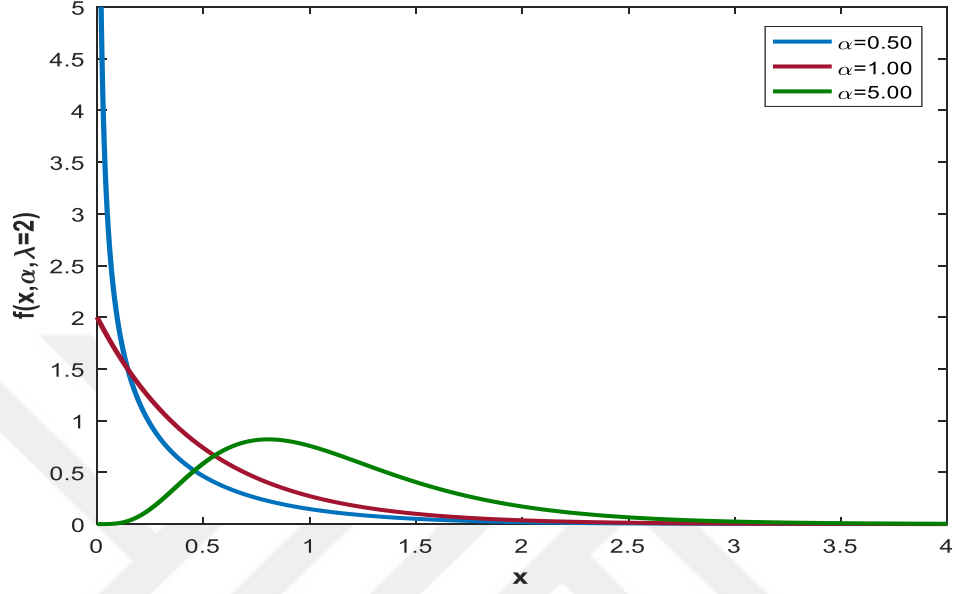
Genelleştirilmiş üstel dağılımın yaşam fonksiyonu ve bozulma fonksiyonu sırasıyla;

$$S(x, \alpha, \lambda) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha \quad (2.2.3)$$

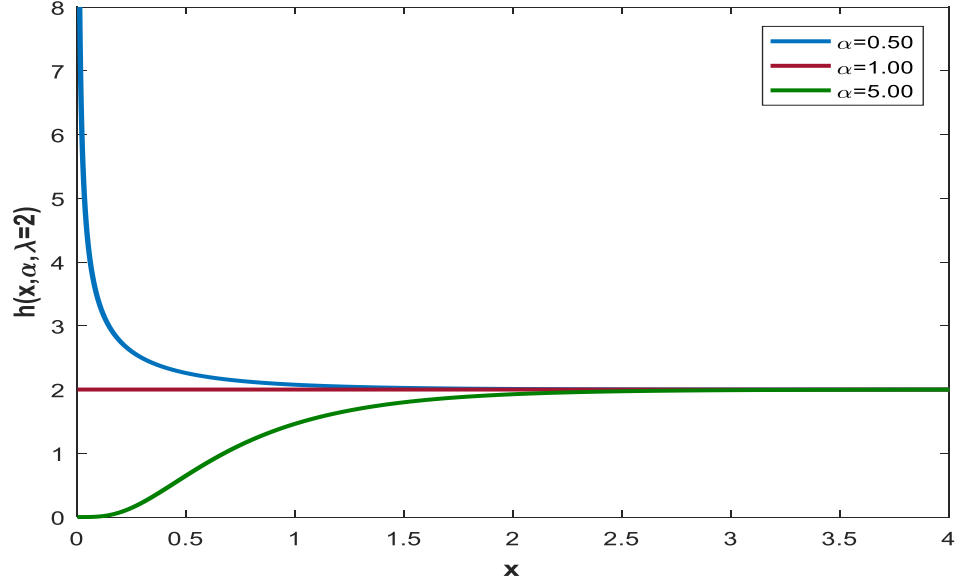
ve

$$h(x, \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha} \quad (2.2.4)$$

biçiminde olup, olasılık yoğunluk ve bozulma fonksiyonunun değişik parametre değerlerindeki davranışını gösterebilmek için Genelleştirilmiş üstel dağılımda $\lambda = 2$ seçilerek şekil parametresi α 'nın farklı değerleri için olasılık yoğunluk ve bozulma oran fonksiyonu Şekil 2-3 ve 2-4 ile verilmiştir.



Şekil 2-3: Farklı α değerleri ve $\lambda=2$ için Genelleştirilmiş Üstel dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2-4: Farklı α değerleri ve $\lambda=2$ için Genelleştirilmiş Üstel dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği

Genelleştirilmiş üstel dağılımın moment çıkarıcı fonksiyonu eşitlik (2.2.2) ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu dikkate alınarak

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (2.2.5)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \alpha \lambda (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \quad (2.2.6)$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} e^{tx} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} \lambda e^{-\lambda x} dx \quad (2.2.7)$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 - e^{-\lambda x} = u \Rightarrow (1 - u)^{-\frac{1}{\lambda}} \\ \lambda e^{-\lambda x} dx = du \end{array} \right) \quad (2.2.8)$$

$$\alpha \lambda \int_0^1 (1 - u)^{-t/\lambda} u^{\alpha-1} du \quad (2.2.9)$$

$$= \frac{\alpha \lambda \Gamma(\alpha) \Gamma\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(\alpha + 1 - \frac{t}{\lambda}\right)} \quad (2.2.10)$$

biçiminde elde edilir. Moment çıkaran fonksiyondan yararlanarak beklenen değer ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} (\Psi(\alpha + 1) - \Psi(1)) \quad (2.2.11)$$

ve

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} (\Psi'(1) - \Psi'(\alpha + 1)) \quad (2.2.12)$$

Burada $\psi(\cdot)$ ve $\psi'(\cdot)$ sırasıyla digamma ve polygamma fonksiyonlarını ifade etmektedir, bakınız (Abramowitz ve Stegun 1965).

2.3. Burr Type –X Dağılımı

X pozitif değerli bir rasgele değişken olmak üzere; X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x; \alpha) = (1 - e^{-x^2})^\alpha \quad x > 0; \alpha > 0 \quad (2.3.1)$$

biçiminde ise X rasgele değişkenine Burr Type-X dağılımına sahiptir denir ve $X \sim BurrX(\alpha)$ şeklinde gösterilir. Burada α dağılımın şeklini düzenleyen şekil parametresidir. Burr Type-X dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha) = 2\alpha x e^{-x^2} (1 - e^{-x^2})^{\alpha-1}, \quad x > 0 \quad (2.3.2)$$

biçiminde verilir (Burr, 1942). Burr Type-X dağılımı tek tepeli bir olasılık dağılımı olup $\alpha \leq \frac{1}{2}$ parametre değerleri için dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu monoton azalan ve $\alpha > \frac{1}{2}$ parametre değerlerinde ise sağa çarpık bir dağılımdır.

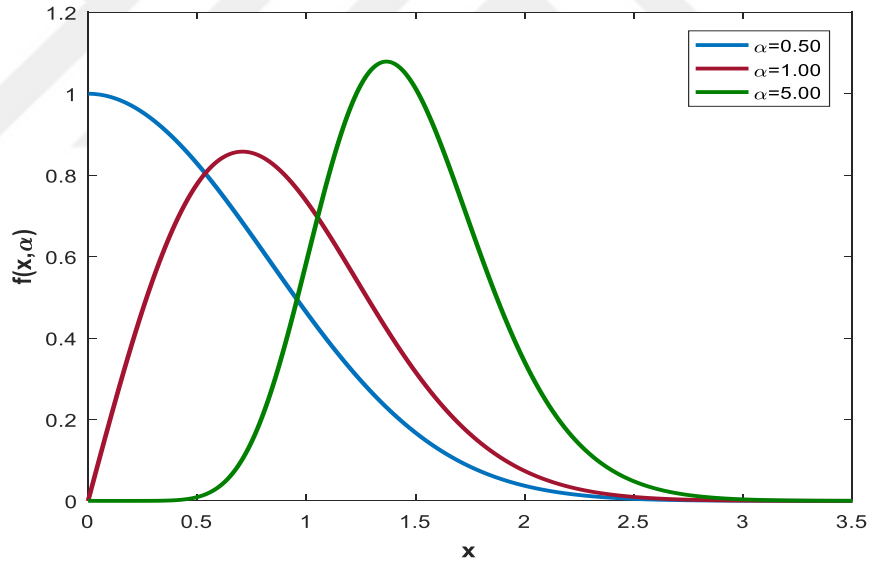
Burr Type- X dağılımının yaşam ve bozulma fonksiyonları sırasıyla

$$S(x; \alpha, \lambda) = 1 - (1 - e^{-x^2})^\alpha \quad (2.3.3)$$

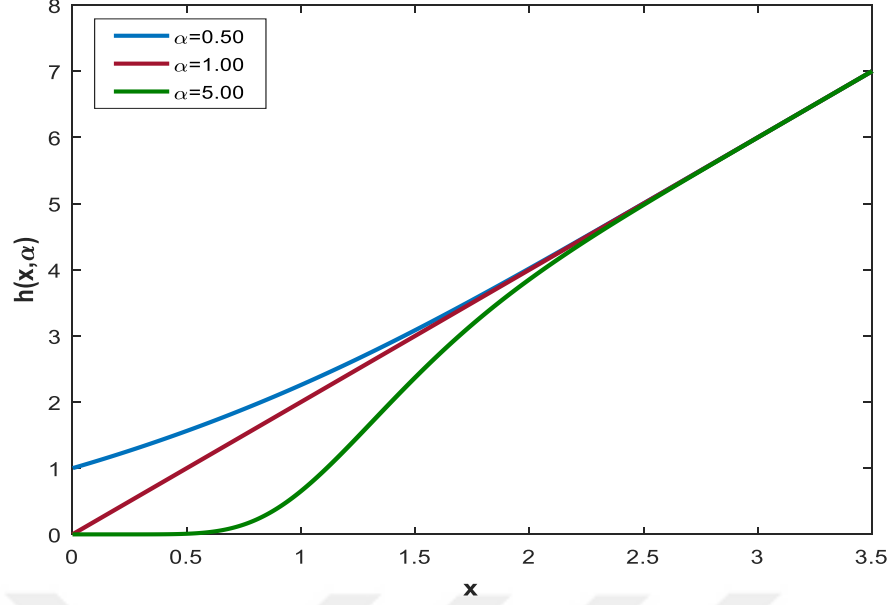
ve

$$H(x; \alpha, \lambda) = \frac{2\alpha x e^{-x^2} (1 - e^{-x^2})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-x^2})^\alpha} \quad (2.3.4)$$

eşitlikleri ile verilir. Dağılımın biçimini ve bozulma fonksiyonun davranışını açıklama amaçlı olarak, farklı değerleri α değerleri için Burr Type-X dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun ve bozulma fonksiyonlarının grafikleri Şekil 2-5 ve Şekil 2-6 da verilmiştir.



Şekil 2-5: Farklı α değerleri için Burr Type-X dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2- 6: Farklı α değerleri için Burr Type-X dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği

Teorem 2.1 $X \sim GE(\alpha, 1)$ olmak üzere; $Y = X^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü ile tanımlanan Y rasgele değişkeninin dağılımı $Y \sim BurrX(\alpha)$ 'dir.

İspat Y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_Y(y)$ biçiminde gösterilmek üzere

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) \quad (2.3.5)$$

$$= P\left(X^{\frac{1}{2}} \leq y\right) \quad (2.3.6)$$

$$= P(X \leq y^2) \quad (2.3.7)$$

olmak üzere, (2.2.2) eşitliği ile verilen Genelleştirilmiş üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alınarak

$$P(X \leq y^2) = \int_0^{y^2} \alpha e^{-\theta x} (1 - e^{-x})^{\alpha-1} dx \quad (2.3.8)$$

yazılabilir. $u=(1 - e^{-x})^\alpha$ dönüşümü ile (2.3.8) integrali,

$$\int_0^{y^2} \alpha e^{-x} (1 - e^{-x})^{\alpha-1} dx = \int_0^{(1-e^{-y^2})^\alpha} 1 du \quad (2.3.9)$$

biçiminde kolayca yazılabilir. Böylece Y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu (2.3.9) integralinin çözümünden

$$F_Y(y, \alpha) = (1 - e^{-y^2})^\alpha, y > 0 \quad (2.3.10)$$

olarak bulunur. (2.3.10) eşitliği ile elde edilen dağılım fonksiyonu, α parametreleriyle Burr-Type X dağılımının dağılım fonksiyonu olduğu açıkça görülür.

Teorem 2.1 ile verilen ilişkinin bir sonucu olarak $r = 2,4,6, \dots$ için Burr-Type X dağılımının r . momentini açık biçimde kolayca ifade edilebilir.

2.4. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımı

Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı, Surles ve Padgett (2001) tarafından Burr Type X dağılımı ile ilgili bir çalışma ile ortaya konmuştur. Aslında Surles ve Padgett (2001) yaptıkları çalışma ile Burr Type X dağılımından daha esnek bir dağılım ortaya koymak için iki parametrelili Burr Type X dağılımını önermişlerdir. Araştırmacılar tarafından önerilen dağılım daha sonraları Kundu ve Raqab (2005, 2006) tarafından Genelleştirilmiş Rayleigh olarak adlandırılmıştır.

Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu,

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-(\lambda x)^2})^\alpha, x > 0; \alpha, \lambda > 0 \quad (2.4.1)$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \lambda) = 2\alpha\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2} (1 - e^{-(\lambda x)^2})^{\alpha-1}, x > 0; \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (2.4.2)$$

biçiminde olup, $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ parametreleri sırasıyla dağılımın şekil ve ölçek parametreleridir. Buradan itibaren, $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ parametreleri ile Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımlı bir X rasgele değişkeni $X \sim GR(\alpha, \lambda)$ ile gösterilecektir. Özel olarak $\alpha = 1$ olduğunda dağılım λ parametrelili Rayleigh dağılımı olmaktadır. Ayrıca $\lambda = 1$ ise dağılım bir parametrelili Burr Type X dağılımına dönüşmektedir.

Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının yaşam ve bozulma fonksiyonları (2.4.1) ve (2.4.2) ifadeleri ile verilen dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonlarının kullanılmasıyla sırasıyla;

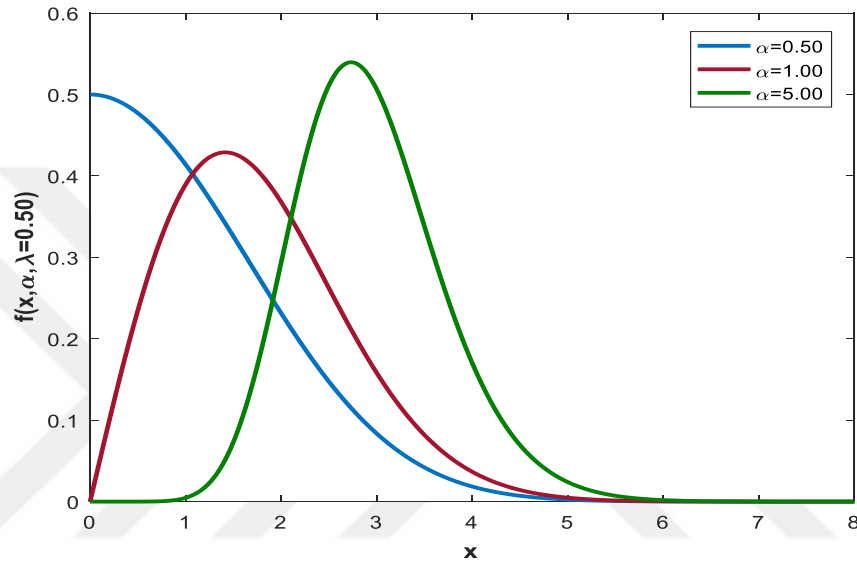
$$S(x; \alpha, \lambda) = 1 - (1 - e^{-(\lambda x)^2})^\alpha \quad (2.4.3)$$

ve

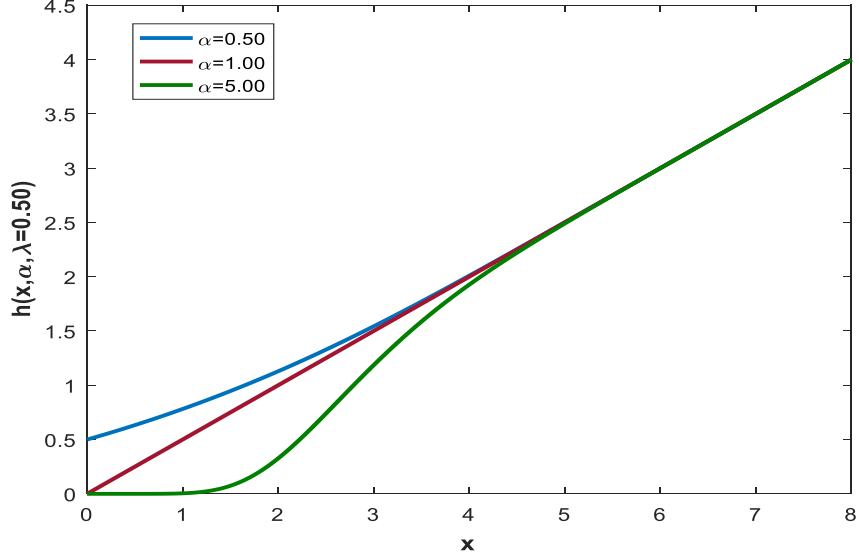
$$H(x; \alpha, \lambda) = \frac{2\alpha\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2} (1 - e^{-(\lambda x)^2})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-(\lambda x)^2})^\alpha} \quad (2.4.4)$$

biçiminde elde elde edilir. Kundu ve Raqab (2006) tarafından, Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının tek tepeli ve $\alpha \leq \frac{1}{2}$ için dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun azalan ve $\alpha > \frac{1}{2}$ için ise sağa çarpık olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, araştırmacılar Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının (2.4.4) eşitliği ile verilen bozulma fonksiyonunun şekil parametresi α 'nın farklı değerlerinde küvet tipi veya artan bir fonksiyon olabileceğini göstermişlerdir. Eğer $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ise $H(x; \alpha, \lambda)$ fonksiyonu küvet tipinde, $\alpha > \frac{1}{2}$ olduğunda ise artan bir fonksiyon şeklinde olmaktadır. Esasında Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı Surlles ve Padgett (2001)

tarafından da çalışıldığı üzere Burr Type-X dağılımının λ parametresi ile ölçeklendirilmiş halidir. Bu durumu açıklığa kavuşturmak için kısım 2.2 de, Şekil 2-5 ve Şekil 2-6 ile verilen Burr Type-X dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve bozulma fonksiyonunun grafiklerinin çiziminde kullanılan α parametre değerleri tekrar seçilmiş ve $\lambda = 0.50$ değeri alınarak Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk ve bozulma fonksiyonlarının grafikleri Şekil 2.7 ve Şekil 2.8 ile çizdirilmiştir.



Şekil 2-7: Farklı α değerleri ve $\lambda=0.50$ için Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2-8: Farklı α değerleri ve $\lambda=0.50$ için Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonunun grafiği

Şekil 2-7 ve Şekil 2-8'den açıkça görülebileceği gibi λ parametresi dağılımı ölçeklendirmektedir.

Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ile Genelleştirilmiş Üstel dağılım arasında güzel bir ilişki vardır. Bu ilişki Teorem 2.1 ile verilmektedir.

Teorem 2.2 $X \sim GE(\alpha, \lambda^2)$ olmak üzere; $Y = X^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü ile tanımlanan Y rasgele değişkeninin dağılımı $Y \sim GR(\alpha, \lambda)$ 'dir.

İspat Y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F_Y(y)$ biçiminde gösterilmek üzere

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) \quad (2.4.5)$$

$$= P\left(X^{\frac{1}{2}} \leq y\right) \quad (2.4.6)$$

$$= P(X \leq y^2) \quad (2.4.7)$$

olmak üzere, (2.4.2) eşitliği ile verilen Genelleştirilmiş üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önüne alınarak

$$P(X \leq y^2) = \int_0^{y^2} \alpha \lambda^2 e^{-\lambda^2 x} (1 - e^{-\lambda^2 x})^{\alpha-1} dx \quad (2.4.8)$$

yazılabilir. $u = (1 - e^{-\lambda^2 x})^\alpha$ dönüşümü ile (2.4.8) integrali,

$$\int_0^{y^2} \alpha \lambda^2 e^{-\lambda^2 x} (1 - e^{-\lambda^2 x})^{\alpha-1} dx = \int_0^{(1-e^{-\lambda^2 y^2})^\alpha} 1 du \quad (2.4.9)$$

biçiminde kolayca yazılabilir. Böylece Y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu (2.4.9) integralinin çözümünden

$$F_Y(y, \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda^2 y^2})^\alpha, y > 0 \quad (2.4.10)$$

olarak bulunur. (2.4.10) eşitliği ile elde edilen dağılım fonksiyonu, α ve λ parametreleriyle Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu olduğu görülmektedir.

Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının beklenen değeri analitik olarak yazılamamakta (Kundu) olduğundan dolayısıyla, varyansı da açık biçimde ifade edilememektedir. Ancak Teorem 2.2 ile verilen ilişki göz önünde bulundurularak $r = 2, 4, 6, \dots$ için momentleri açık biçimde ifade edilebilir.

3. BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Bu kısımda dağılımların bilinmeyen parametrelerini tahmin etmede sıkça tercih edilen en çok olabilirlik, momentler, en küçük kareler, L-momentler, MSP tahmin yöntemleri açıklanmaktadır.

3.1. En çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

En çok olabilirlik yönetimi ilk kez Sir Ronald A. Fisher'in çalışması ile ortaya konmuş ve ortaya çıkarılışından bu yana tahmin edici elde etme yöntemleri arasında neredeyse en çok olarak kullanılmaktadır. Yöntemin temel ilkesi olabilirlik fonksiyonunu en büyük yapacak biçimde parametrelerin belirlenmesine dayanmaktadır.

$X_1, X_2, \dots, X_n, f(x; \lambda)$ olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonlu bir kitleden alınmış rasgele bir örneklem ve $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ örnekleminin ortak olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda), \quad (3.1.1)$$

olmak üzere, θ parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicileri

$$\max_{\theta \in \Lambda} L(x_i, \lambda) \quad (3.1.2)$$

optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir. Burada Λ parametre kümesi, $L(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda)$ olabilirlik fonksiyonu olarak adlandırılır. Bazı durumlarda (3.1.2) ile verilen optimizasyon probleminin çözümü kolay olmamaktadır. Bu tür durumlarda en çok olabilirlik tahmin edicileri, olabilirlik fonksiyonunun en büyüklenmesi yerine, olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alınarak yazılan $\ln L(x_i, \lambda) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \lambda)$, logaritmik olabilirlik fonksiyonunu en büyükleyecek

$$\max_{\theta \in \Lambda} \ln L(x_i, \lambda) \quad (3.1.3)$$

optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir (Akdi, 2010).

3.2. Momentler Tahmin Edicileri

Parametre tahmin yöntemleri arasında neredeyse en eski yöntemlerden birisi olan momentler yönetimi 1800'lü yılların sonunda Karl Pearson tarafından önerilmiştir (Akdi, 2010). Momentler yöntemine göre dağılımın bilinmeyen parametrelerine ait tahmin edicilerin veya momentler tahminlerinin bulunabilmesi için kitle momentlerinden en az bilinmeyen parametre sayısı kadarının var olması gerekmektedir. Eğer parametre sayısından daha düşük sayıda kitle momenti mevcut ise bazı parametrelerin veya hiç bir parametrenin momentler tahmin edicisi veya momentler tahmini elde edilemez.

Momentler tahmin edicilerini elde etmedeki ana prensip; kitle momentlerini ilgili örneklem momentlerine eşitleyerek elde edilen denklem veya denklem sisteminin parametrelere göre çözülmesidir.

Varsayalım, X_1, X_2, \dots, X_n , olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x; \underline{\lambda})$ olan kitleden rasgele bir örneklem olsun. $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ biçiminde bilinmeyen parametrelerin bir vektörünü gösterebiliriz, $f(x; \underline{\lambda})$ fonksiyonu ile temsil edilen dağılıma ait momentler bu parametrelere bağlıdır. $f(x; \lambda)$ fonksiyonu sürekli halde iken ilgili dağılımın s . momentini ($s = 1, 2, 3, \dots, k$),

$$E_{\underline{\lambda}}(X^s) = \mu_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x; \underline{\lambda}) dx \quad (3.2.1)$$

biçiminde hesaplanır.

Benzer şekilde, $f(x; \underline{\lambda})$ fonksiyonu kesikli halde iken ilgili dağılımın s . momentini ($s = 1, 2, 3, \dots, k$),

$$E_{\underline{\lambda}}(X^s) = \mu_s = \sum_{x \in D_X} x^s f(x; \underline{\lambda}) \quad (3.2.2)$$

olarak hesaplanır.

Diğer taraftan, s . örneklem momenti m_s ile gösterilmek üzere;

$$m_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^s \quad (3.2.3)$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Böylece k tane kitle momentinin ilgili örneklem momentine eşitlenmesiyle elde edilen ve $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ parametrelerine göre k tane denklemden oluşan sisteminin çözülmesiyle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ parametrelerinin $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k$ biçiminde gösterilen momentler tahmin edicilerine ulaşılır. Burada, parametre sayısı kadar kitle momentini ile örneklem momentini hesaplanır. Kitlenin bir tane parametresi varsa, kitlenin beklenen değeri örneklem ortalamasına eşitlenir.

3.3. En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

Dağılımın bilinmeyen parametre veya parametreleri için en küçük kareler tahmin edicilerinin elde edilmesi ilk olarak Swain ve ark.(1988)'in çalışmasına dayanmaktadır. Swain ve ark.(1988) tarafından önerilen yöntem kısaca aşağıdaki gibi tarif edilebilir.

Varsayalım Y_1, \dots, Y_n rasgele değişkenleri $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)'$ parametrelili $G(y, \underline{\lambda})$ dağılımdan rasgele bir örneklem olsun ve ayrıca $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots, y_{(n)}$ ile de ilgili dağılımdan alınan örneklem için gözlenmiş sıralı gözlemler gösterilsin. Bu durumda, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ parametrelerinin en küçük kareler tahmin edicileri

$$\min_{\underline{\lambda}} \sum_{i=1}^n \left(G(y_{(i)}, \underline{\lambda}) - G^*(y_{(i)}, \underline{\lambda}) \right)^2 \quad (3.3.1)$$

optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir. Burada

$$G^*(y_{(i)}, \underline{\lambda}) = \frac{i}{n+1} \quad (3.3.2)$$

dir.

3.4. L-Momentler Tahmin Edicileri

L- momentler tahmin edicileri ilk kez Hosking (1990)'in çalışmasıyla momentler yöntemine alternatif ve dağılımın bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için dayanıklı bir tahmin yöntemi olarak öne sürülmüştür.

Varsayalım Y_1, \dots, Y_n rasgele değişkenleri, $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)'$ parametrelili $g(y, \underline{\lambda})$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip dağılımdan çekilmiş bir rasgele örneklem olsun ve ayrıca $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots, Y_{(n)}$ ile Y_1, \dots, Y_n örnekleminin sıra istatistikleri gösterilsin. Bu durumda $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ parametrelerinin L-momentler tahmin edicileri tıpkı momentler yönteminde olduğu gibi k tane kitle L-momentinin örneklem L-momentine eşitlenmesi sonucu elde edilen sistemin çözümünden elde edilir.

Hosking (1991) tarafından önerilen yöntemde kitlenin r . L-momentini

$$L_r = r^{-1} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} E(Y_{k-i:r}), r = 1, 2, \dots \quad (3.4.1)$$

eşitliği ile hesaplanabilmektedir. Ayrıca örneklem L-momentleri ise

$$l_r = \frac{1}{r \binom{n}{r}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{r-1}{j} \binom{i-1}{r-j-1} \binom{n-i}{j} X_{i:n} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4.2)$$

biçinde hesaplanır (Hosking,1990). Böylece, bilinmeyen $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ parametreleri için L- momentler tahmin edicileri, (3.4.1) eşitliği ile elde edilen ilk k tane kitle L- momentinin (3.4.2) eşitliği ile elde edilen örneklem L-momentlerine eşitlenmesiyle bulunan k tane denklemden oluşan denklem sisteminin çözümünden,

$$\tilde{\lambda}_1 = (X_1, X_2, \dots, X_n), \tilde{\lambda}_2 = (X_1, X_2, \dots, X_n), \dots, \tilde{\lambda}_r = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

olarak elde edilir. Burada \sim notasyonu parametrenin L-momentler tahmin edicisini ifade etmektedir.

3.5. En Büyük Aralık Tahmin Edicileri

En büyük aralık (Maximum Spacing) tahmin yöntemi Cheng ve arkadaşları (1983) ve Ranney (1984) tarafından birbirinden bağımsız olarak önerilmiş bir yöntemdir. Yöntem kısaca şöyle tarif edilir:

Varsayalım Y_1, \dots, Y_n rasgele değişkenleri $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)'$ parametrelili $G(y, \underline{\lambda})$ dağılım fonksiyonuna sahip dağılımdan rasgele bir örneklem olsun ve ayrıca $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \dots, y_{(n)}$ gözlenmiş sıralı gözlemleri gösterilsin. Bu durumda, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ parametrelerinin en büyük aralık tahmin edicileri

$$\max_{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)} \left(\sum_{i=1}^{i=n+1} \ln \left(G(y_{(i)}, \underline{\lambda}) - G(y_{(i-1)}, \underline{\lambda}) \right) \right) \quad (3.5.1)$$

Optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir. Yöntemde $G(y_{(0)}, \underline{\lambda}) = 0$ ve $G(y_{(n+1)}, \underline{\lambda}) = 1$ olarak alınır.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ RAYLEİGH DAĞILIMININ PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Tez çalışmasının bu bölümünde, Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahmin edicileri kısım 3 de verilen yöntemler göz önünde bulunudurularak elde edilmektedir.

4.1. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicileri

Bu bölümde, $GR(\alpha, \lambda)$ 'nın maksimum olabilirlik tahmin edicilerini (*MLEs*) ele alıyoruz.

Varsayalım X_1, X_2, \dots, X_n , $GR(\alpha, \lambda)$ dağılımından alınmış n birimlik bir örneklem olsun. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin logaritmik olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \lambda) = & C + n \ln \alpha + 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ & + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x)^2}) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

olarak yazılabilir. Burada C sabittir. Böylece (3.1.1) denklemi ile verilen optimizasyon probleminin bir çözümü için (4.1.1) eşitliği ile elde edilen logaritmik olabilirlik fonksiyonunun α ve λ parametrelerine göre türevlerini alıp sıfıra eşitleyerek,

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x)^2}) = 0 \quad (4.1.2)$$

ve

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{2n}{\lambda} - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\lambda(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-(\lambda x)^2}}{1 - e^{-(\lambda x)^2}} = 0 \quad (4.1.3)$$

olabilirlik denklemlerine ulaşılır. α ve λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri sırasıyla $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ ile gösterilmek üzere; $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ tahmin edicileri denklem (4.1.2) ve (4.1.3)'ün çözümünden elde edilir. Ancak, ne yazık ki; (4.1.2) ve (4.1.3) denklemlerinin analitik çözümleri mevcut değildir. Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri açık olarak elde edilememekle birlikte Newton-Raphson veya basit iterasyon (fixed point) gibi sayısal yöntemler kullanılarak bilinmeyen parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicilerinin tahmin değerleri sayısal olarak elde edilebilirler.

Eşitlik (4.1.2) den açıkça görülebileceği gibi α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi λ 'nın bir fonksiyonu olarak

$$\hat{\alpha}(\lambda) = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x)^2})} \quad (4.1.4)$$

biçiminde yazılabilir. $\hat{\alpha}(\lambda)$ tahmin edicisinin eşitlik (4.1.1) ile verilen logaritmik olabilirlik fonksiyonunda α yerine kullanılmasıyla,

$$g(\lambda) = \ln L(\hat{\alpha}(\lambda), \lambda) = \quad (4.1.5)$$

$$= C + n \ln \left(- \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x)^2}) \right) + 2n \ln \lambda - \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-(\lambda x)^2}) \quad (4.1.6)$$

logaritmik olabilirlik fonksiyonuna ulaşılır. Böylece (4.1.6) eşitliğinin λ parametresine göre en büyük yapılmasıyla $\hat{\lambda}$ tahmin edicisine ulaşılabilir. Kundu ve Ragab (2005) (4.1.6) ile verilen $g(\lambda)$ fonksiyonunu λ parametresine göre en büyükleme probleminin çözümü için

$$h(\mu) = \mu \quad (4.1.7)$$

seçerek $h(\mu^{(j)}) = \mu^{(j+1)}$ biçiminde bir iterasyon kullanarak basit iterasyon yöntemine göre $\hat{\lambda}$ tahmin edicisini

$$\hat{\lambda} = \sqrt{\hat{\mu}} \quad (4.1.8)$$

olarak elde etmiştir. Burada

$$h(\mu) = \left[\frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\mu x_i^2}}{1 - e^{-\mu x_i^2}}}{\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\mu x_i^2})} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\mu x_i^2}}{1 - e^{-\mu x_i^2}} \right]^{-1} \quad (4.1.9)$$

dır bkz (Kundu ve Ragab, 2005). $\hat{\lambda}_{ML}$ elde edildiğinde, α parametresinin en çok olabilirlik tahmini, (4.1.4) eşitliği göz önüne alınarak $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\lambda)$ olarak elde edilir.

4.2. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin Momentler Tahmin Edicileri

X_1, X_2, \dots, X_n , $GR(\alpha, \lambda)$ dağılımından alınmış n birimlik bir örneklem olmak üzere X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin tüm momentleri açık olarak ifade edilememektedir. Dolayısıyla bilinmeyen parametrelerin momentler tahminleri pek kolay elde edilememektedir. Bununla birlikte, Teorem 2.2 'nin göz önüne alınması ile 2,4,6,... momentleri açık olarak ifade edilebilmektedir. α ve λ parametrelerinin momentler tahmin edicileri açık ifade edilen bu momentler kullanılarak elde edilebilir. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri $GR(\alpha, \lambda)$ dağılımlı olduklarından Teorem 2.2' nin bir sonucu olarak $Y_i = X_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ rasgele değişkenleri (α, λ) parametrelili Genelleştirilmiş üstel dağılıma sahiptir. Böylece X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin 2. momenti eşitlik (2.2.6)'dan

$$E(Y_i) = E(X_i^2) = \frac{1}{\lambda^2} (\psi(\alpha + 1) - \psi(1)) \quad (4.2.1)$$

yazılabilir. Ayrıca eşitlik (2.2.7)'nin göz önünde bulundurulmasıyla $X_i, i = 1, 2, \dots, n$, rasgele değişkenlerinin 4. momenti

$$\begin{aligned} E(Y_i^2) &= E(X_i^4) \\ &= \frac{1}{\lambda^4} (\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\lambda^2} (\psi(\alpha + 1) - \psi(1)) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

biçiminde kolayca yazılabilir. Burada $\psi(\cdot)$ ve $\psi'(\cdot)$ sırasıyla digamma ve polygamma fonksiyonlarını göstermektedir (Abramowitz ve Stegun, 1965). Böylece bölüm 3.2 de verilen momentler tahmin edicilerinin elde edilmesi aşamaları kullanılarak bilinmeyen α ve λ parametrelerinin momentler tahmin edicileri şu şekilde elde edilebilir: ikinci ve dördüncü örneklem momentleri sırasıyla

$$U = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4.2.3)$$

ve

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 \quad (4.2.4)$$

biçiminde gösterilirsin. İkinci ve dördüncü örneklem momentleri ile birlikte kitle momentleri göz önünde bulundurularak

$$\frac{V - U^2}{U^2} = \frac{\psi'(1) - \psi'(\alpha + 1)}{(\psi'(\alpha + 1) - \psi(1))^2} \quad (4.2.5)$$

denkleminde ulaşılır. Byolece eşitlik (4.2.5)'nin sayısal üzümünden α parametresinin momentler tahminini $\hat{\alpha}_{MME}$ olarak elde edilir. $\hat{\alpha}_{MME}$ elde edildikten sonra, λ için ($\hat{\lambda}_{MME}$)'nin momentler tahmin edicisi eşitlik (4.2.6)'in üzümünden

$$\hat{\lambda}_{MME} = \sqrt{\frac{\psi(\hat{\alpha}_{MME} + 1) - \psi(1)}{U}}. \quad (4.2.6)$$

olarak bulunur.

4.3. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

Varsayalım X $GR(\alpha, \lambda)$ dağılımlı bir rasgele değişken olsun, ayrıca $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ ile bu dağılımdan gözlenmiş sıralı gözlemler ile gösterilsin. Bu durumda, kısımlar 3.3 de verilen (3.3.1) ve (3.3.2) eşitliklerinin ve Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının eşitlik (2.4.1) ile verilen dağılım fonksiyonunun göz önünde bulundurulması ile α ve λ parametrelerinin, sırasıyla $\hat{\alpha}_{LSE}$ ve $\hat{\lambda}_{LSE}$ biçiminde gösterilen en küçük karaler tahmin edicileri

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left(F(x_{(j)}) - \frac{j}{n+1} \right)^2 \\ & = \sum_{j=1}^n \left((1 - e^{-(\lambda x_{(j)})^2})^\alpha - \frac{j}{n+1} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

kareli ifadesini α ve λ 'ya göre minimum yapacak şekilde bulunur

4.4. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının Parametrelerinin L-momentler Tahmin edicileri

Varsayalım X_1, X_2, \dots, X_n , $GR(\alpha, \lambda)$ dağılımından alınmış n birimlik bir örneklem ve $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ de bu örneklemin sıra istatistiklerini gösterebilir. Momentler tahmin edicilerinde olduğu gibi Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının tüm L-momentleri açık biçim de ifade edilememektedir. $Y_i = X_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ dönüşümünün göz önüne alınması ile Teorem 2.2' nin bir sonucu olarak Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ rasgele değişkenleri (α, λ) parametrelili Genelleştirilmiş üstel dağılıma sahip olmaktadır. Böylece α ve λ parametrelerinin L-momentler tahmin edicileri Y_i rasgele değişkenleri göz önüne alınarak belirlenebilir.

Eşitlik (3.4.2)'nin kullanılması ile ilk iki örneklem L-momentleri

$$l_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{(i)} \quad (4.4.1)$$

ve

$$l_2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (i-1)y_{(i)} - l_1 \quad (4.4.2)$$

olarak kolayca hesaplanır. Öte taraftan (3.4.1) eşitliğinden Genelleştirilmiş Üstel dağılımın ilk iki popülasyon L- momentleri

$$L_1 = \frac{1}{\lambda} (\psi(\alpha + 1) - \psi(1)) \quad (4.4.3)$$

ve

$$L_2 = \frac{1}{\lambda} (\psi(2\alpha + 1) - \psi(\alpha + 1)) \quad (4.4.4)$$

dır, bkz (Kundu 2005). Böylece (4.4.1)-(4.4.4) eşitliklerinden

$$\frac{\psi(2\alpha + 1) - \psi(\alpha + 1)}{\psi(\alpha + 1) - \psi(1)} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (4.4.5)$$

yazılabilir. (4.4.5) doğrusal olmayan denklemin çözümü olarak, α parametresine ait L-momentler tahmin edicisi yani $\hat{\alpha}_{L-MOM}$ sayısal olarak elde edilebilir.

Elde edilen $\hat{\alpha}_{LME}$ tahmininin (4.4.5) eşitliğinde α yerinde kullanılmasıyla da λ' 'nın L-momentler tahmin edicisi $\hat{\lambda}_{L-MOM}$

$$\hat{\lambda}_{L-MOM} = \frac{\psi(\hat{\alpha}_{L-MOM} + 1) - \psi(1)}{l_1} \quad (4.4.6)$$

olarak elde edilir.

4.5. Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımın Parametrelerinin En Büyük Aralık Tahmin Edicileri

X rasgele değişkeni α ve λ parametreleri ile Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Ayrıca gözlenmiş sıralı gözlemler $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ ile gösterilsin. Bu durumda, α ve λ parametrelerinin en büyük aralık tahmin edicileri eşitlik (3.5.1)'i ve Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının eşitlik (2.4.1) ile verilen dağılım fonksiyonunu göz önüne alarak

$$\max_{(\alpha, \lambda)} \left(\sum_{i=1}^{i=n+1} \ln \left((1 - e^{-(\lambda x_{(i+1)})^2})^\alpha - (1 - e^{-(\lambda x_i)^2})^\alpha \right) \right) \quad (4.5.1)$$

Optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir. Yöntemde $F(x_{(0)}, \alpha, \lambda) = 0$ ve $F(x_{(n+1)}, \alpha, \lambda) = 1$ dır.

5. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Tez çalışmasının bu kesiminde, Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının bilinmeyen λ ve α parametrelerinin tahmin edilmesi için bir önceki kesimde elde edilen en çok olabilirlik, momenler, L-momentler, en küçük kareler ve en büyük aralık tahmin edicilerinin başarımları yapılan Monte-Carlo simülasyon çalışmaları ile detaylı bir şekilde incelenmektedir. Elde edilen tahmin edicilerin başarımlarının karşılaştırılmasında Yan ve hata kareler ortalaması (HKO) kriterleri kullanılmıştır.

Simülasyon çalışmasında bilinmeyen parametre değerleri $\lambda = 1$ ve $\alpha = 0.25, 0.5, 1, 2$ ve 5 olarak ayarlanmıştır. $n = 20, 30, 50, 100$ ve 200 örnek büyüklüklerinde 1000 tekrara dayanan simülasyon sonuçları Çizelge 5.1-5.5 ile çizelgelenmiştir.

Çizelge 5. 1. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 0.25$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.

n	Yöntem	$\hat{\lambda}$			$\hat{\alpha}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
20	MLE	1.27414	0.27414	1.01784	0.27007	0.02007	0.00429
	MOM	1.62320	0.62320	2.31232	0.33977	0.08977	0.02532
	LSE	1.25049	0.25049	1.89665	0.25238	0.00238	0.00423
	L-MOM	1.28303	0.28303	1.15345	0.25488	0.00488	0.00909
	MSE	1.22875	0.22875	1.16829	0.24727	-0.00273	0.00651
30	MLE	1.24266	0.24266	0.45746	0.26369	0.01369	0.00234
	MOM	1.44191	0.44191	0.98164	0.31076	0.06076	0.01548
	LSE	1.13297	0.13297	0.77465	0.25590	0.00590	0.00300
	L-MOM	1.17023	0.17023	0.53074	0.25465	0.00465	0.00579
	MSE	1.15548	0.15548	0.53014	0.24517	-0.00483	0.00400
50	MLE	1.14204	0.14204	0.21029	0.25975	0.00975	0.00135
	MOM	1.26109	0.26109	0.39226	0.28914	0.03914	0.00775
	LSE	1.06605	0.06605	0.30654	0.25291	0.00291	0.00235
	L-MOM	1.09828	0.09828	0.22539	0.25392	0.00392	0.00356
	MSE	1.08702	0.08702	0.26348	0.24560	-0.00440	0.00303
100	MLE	1.06552	0.06552	0.06720	0.25583	0.00583	0.00120
	MOM	1.12167	0.12167	0.12854	0.27136	0.02136	0.00428
	LSE	1.04780	0.04780	0.12272	0.25115	0.00115	0.00142
	L-MOM	1.03566	0.03566	0.07673	0.25125	0.00125	0.00238
	MSE	1.03207	0.03207	0.08362	0.24706	-0.00294	0.00199
200	MLE	1.04484	0.04484	0.04297	0.25226	0.00226	0.00030
	MOM	1.09803	0.09803	0.08270	0.26461	0.01461	0.00347
	LSE	1.02323	0.02323	0.07682	0.25057	0.00057	0.00111
	L-MOM	1.03049	0.03049	0.05033	0.25191	0.00191	0.00199
	MSE	1.02084	0.02084	0.06019	0.24892	-0.00108	0.00123

Çizelge 5. 2. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 0.50$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.

n	Yöntem	$\hat{\lambda}$			$\hat{\alpha}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
20	MLE	1.19514	0.19514	0.30688	0.61857	0.11857	0.03548
	MOM	1.28710	0.28710	0.49289	0.68869	0.18869	0.11011
	LSE	1.09685	0.09685	0.41560	0.45954	-0.04046	0.03871
	L-MOM	1.16310	0.16310	0.30896	0.42954	-0.07046	0.04996
	MSE	1.14837	0.14837	0.34483	0.48964	-0.01036	0.03681
30	MLE	1.09821	0.09821	0.12889	0.55290	0.05290	0.01957
	MOM	1.18944	0.18944	0.24846	0.67202	0.17202	0.07172
	LSE	0.98062	-0.01938	0.15233	0.51569	0.01569	0.02409
	L-MOM	1.13428	0.13428	0.15476	0.47738	-0.02262	0.03377
	MSE	0.95395	-0.04605	0.14421	0.52291	0.02291	0.02356
50	MLE	1.04913	0.04913	0.06303	0.46458	-0.03542	0.00880
	MOM	1.12772	0.12772	0.11279	0.51965	0.01965	0.03047
	LSE	0.97346	-0.02654	0.08767	0.47531	-0.02469	0.01188
	L-MOM	1.06556	0.06556	0.07550	0.45363	-0.04637	0.01480
	MSE	1.02603	0.02603	0.08029	0.49215	-0.00785	0.01218
100	MLE	0.98628	-0.01372	0.02977	0.46580	-0.03420	0.00390
	MOM	1.07957	0.07957	0.05920	0.52762	0.02762	0.01742
	LSE	0.98739	-0.01261	0.03937	0.47868	-0.02132	0.00485
	L-MOM	1.00661	0.00661	0.03704	0.48901	-0.01099	0.00798
	MSE	0.97703	-0.02297	0.03627	0.47582	-0.02418	0.00526
200	MLE	1.02717	0.02717	0.01993	0.57076	0.07076	0.00326
	MOM	0.95259	-0.04741	0.03725	0.55612	0.05612	0.01037
	LSE	0.98398	-0.01602	0.02701	0.50475	0.00475	0.00365
	L-MOM	0.98712	-0.01288	0.02406	0.43035	-0.06965	0.00509
	MSE	0.96341	-0.03659	0.02392	0.41901	-0.08099	0.00369

Çizelge 5. 3. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 1.0$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.

n	Yöntem	$\hat{\lambda}$			$\hat{\alpha}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
20	MLE	1.13651	0.13651	0.13471	1.10875	0.10875	0.22864
	MOM	1.24891	0.24891	0.21228	1.27844	0.27844	0.48845
	LSE	1.01211	0.01211	0.15606	1.08863	0.08863	0.29704
	L-MOM	1.03436	0.03436	0.14461	1.19193	0.19193	0.26806
	MSE	1.01454	0.01454	0.14900	0.99857	-0.00143	0.23167
30	MLE	1.07451	0.07451	0.07832	1.21027	0.21027	0.09533
	MOM	1.10952	0.10952	0.12418	1.25540	0.25540	0.24826
	LSE	0.97221	-0.02779	0.10336	1.04593	0.04593	0.13760
	L-MOM	1.06333	0.06333	0.08867	1.04424	0.04424	0.13572
	MSE	1.11163	0.11163	0.09519	1.00417	0.00417	0.10845
50	MLE	1.03374	0.03374	0.04002	1.09634	0.09634	0.04860
	MOM	1.06977	0.06977	0.07140	1.09407	0.09407	0.14059
	LSE	0.88902	-0.11098	0.05225	0.99051	-0.00949	0.05824
	L-MOM	0.99487	-0.00513	0.04865	1.08568	0.08568	0.07113
	MSE	0.94884	-0.05116	0.04754	1.03850	0.03850	0.05122
100	MLE	1.00169	0.00169	0.01918	1.07184	0.07184	0.02008
	MOM	1.06498	0.06498	0.03154	1.08914	0.08914	0.09463
	LSE	1.07216	0.07216	0.02871	0.98426	-0.01574	0.02917
	L-MOM	1.10302	0.10302	0.02335	0.99181	-0.00819	0.03044
	MSE	1.00046	0.00046	0.02392	1.04652	0.04652	0.02483
200	MLE	0.99679	-0.00321	0.01263	0.98094	-0.01906	0.01267
	MOM	1.06538	0.06538	0.02153	1.09813	0.09813	0.03448
	LSE	1.02201	0.02201	0.01785	1.04154	0.04154	0.01796
	L-MOM	1.04756	0.04756	0.01510	1.02489	0.02489	0.01797
	MSE	1.04341	0.04341	0.01572	1.00376	0.00376	0.01572

Çizelge 5. 4. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 3.0$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.

n	Yöntem	$\hat{\lambda}$			$\hat{\alpha}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
20	MLE	1.07244	0.07244	0.09999	3.54054	0.54054	1.73743
	MOM	1.09878	0.09878	0.12703	3.64058	0.64058	2.68571
	LSE	0.97241	-0.02759	0.11894	3.27760	0.27760	2.49323
	L-MOM	1.08698	0.08698	0.09569	3.34184	0.34184	1.56538
	MSE	1.01990	0.01990	0.11560	3.27181	0.27181	1.79539
30	MLE	1.01822	0.01822	0.05789	3.28254	0.28254	0.60951
	MOM	1.10925	0.10925	0.07987	3.35354	0.35354	1.15214
	LSE	0.98233	-0.01767	0.06634	3.03861	0.03861	0.72282
	L-MOM	1.05808	0.05808	0.05962	3.19024	0.19024	0.67277
	MSE	1.02161	0.02161	0.06368	3.13477	0.13477	0.58724
50	MLE	1.05418	0.05418	0.02978	3.13474	0.13474	0.26268
	MOM	0.92468	-0.07532	0.04583	3.23999	0.23999	0.51260
	LSE	1.02259	0.02259	0.03749	3.08728	0.08728	0.32543
	L-MOM	1.11718	0.11718	0.03400	3.10905	0.10905	0.30042
	MSE	1.07206	0.07206	0.03243	3.07703	0.07703	0.26667
100	MLE	1.06194	0.06194	0.01274	3.08069	0.08069	0.11207
	MOM	1.00791	0.00791	0.02022	3.10376	0.10376	0.23588
	LSE	1.00725	0.00725	0.01768	2.98098	-0.01902	0.15472
	L-MOM	1.01951	0.01951	0.01494	3.07774	0.07774	0.14474
	MSE	1.01322	0.01322	0.01511	3.10955	0.10955	0.01068
200	MLE	0.97138	-0.02862	0.00932	3.02600	0.02600	0.07633
	MOM	0.99659	-0.00341	0.01494	3.16959	0.16959	0.16157
	LSE	0.99366	-0.00634	0.01315	3.01909	0.01909	0.11533
	L-MOM	0.98257	-0.01743	0.01061	3.02111	0.02111	0.09761
	MSE	1.05014	0.05014	0.01178	2.98922	-0.01078	0.08998

Çizelge 5. 5. $\lambda = 1.0$ ve $\alpha = 5.0$ parametre değerleri için tahmin edicilerin Yan ve HKO değerleri.

n	Yöntem	$\hat{\lambda}$			$\hat{\alpha}$		
		Tahmin	Yan	HKO	Tahmin	Yan	HKO
20	MLE	1.00831	0.00831	0.07262	5.57052	0.57052	1.93711
	MOM	1.09932	0.09932	0.10561	5.75699	0.75699	3.62110
	LSE	0.95802	-0.04198	0.09742	5.28992	0.28992	3.47759
	L-MOM	1.10881	0.10881	0.07714	5.21768	0.21768	1.96328
	MSE	0.96185	-0.03815	0.08084	5.23004	0.23004	1.85175
30	MLE	0.97948	-0.02052	0.05342	5.41830	0.41830	1.30555
	MOM	1.09017	0.09017	0.07303	5.51734	0.51734	2.16976
	LSE	1.05615	0.05615	0.06045	5.07100	0.07100	1.32964
	L-MOM	0.99766	-0.00234	0.05563	5.30045	0.30045	1.29267
	MSE	0.96912	-0.03088	0.06760	5.25414	0.25414	1.15719
50	MLE	1.03593	0.03593	0.02825	5.23447	0.23447	0.51177
	MOM	0.97448	-0.02552	0.04404	5.36877	0.36877	1.10609
	LSE	1.00737	0.00737	0.03512	5.05637	0.05637	0.70138
	L-MOM	1.07042	0.07042	0.03245	5.12992	0.12992	0.65076
	MSE	1.03469	0.03469	0.03128	5.10927	0.10927	0.51622
100	MLE	0.92064	-0.07936	0.01325	5.06331	0.06331	0.20751
	MOM	0.99686	-0.00314	0.02103	5.18699	0.18699	0.46152
	LSE	0.98290	-0.01710	0.01722	5.15786	0.15786	0.28768
	L-MOM	1.10048	0.10048	0.01536	5.04069	0.04069	0.27307
	MSE	1.05254	0.05254	0.01506	5.07437	0.07437	0.21705
200	MLE	1.00595	0.00595	0.00771	5.00698	0.00698	0.10613
	MOM	1.08277	0.08277	0.01309	5.18808	0.18808	0.25490
	LSE	0.94276	-0.05724	0.01029	4.96864	-0.03136	0.15422
	L-MOM	0.98889	-0.01111	0.00997	5.05114	0.05114	0.14867
	MSE	1.07153	0.07153	0.00843	4.99387	-0.00613	0.11436

Gerçekleştirilen Monte-Carlo simülasyon çalışmasının sonuçları incelendiğinde genel olarak tüm tahmin edicilerin tahmin başarımlarının oldukça tatminkâr olduğu görülmektedir. Gözlem sayısı n arttıkça tüm tahmin edicilerin Yan ve HKO değerlerinin düştüğü gözlenmektedir. Dolayısıyla söz konusu tahmin edicilerin asimptotik olarak yansız ve tutarlı oldukları söylenebilir. MLE tahmin edicilerinin hem α hem de λ parametresinin tahminindeki performansı tüm örneklem büyüklüklerinde göreceli olarak diğer tahmin edicilere daha iyi performans gösterdiği görülmektedir. MLE tahmin edicilerini takiben MSP tahmin edicilerinin de küçük örnek çaplarında diğer tahmin edicilerden daha iyi performans gösterdiği görülmektedir.

$n = 200$ olarak belirlenen büyük örnek durumunda ise tüm tahmin edicilerin HKO değerlerinin, özellikle α parametresinin değerinin 1'den büyük olduğu durumlarda çok yakın oldukları görülmektedir. Bu durum kendisini özellikle de λ parametresinin tahmini değerlerinde göstermektedir.

Momentler ve L-momentler tahmin edicileri kendi aralarında karşılaştırıldığında L-Momentler tahmin edicilerinin daha küçük HKO değerleriyle momentler tahmin edicilerini geride bıraktığı görülmektedir. Hatta bazı durumlarda L-momentler tahmin edicilerinin tahmin performansı MLE tahmin edicilerini yakalamaktadır.

6. UYGULAMA

Bu bölümde tez çalışmasında göz önüne alınan Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımında sonuç çıkarım probleminin çözümün güncel hayattan bir problem de nasıl değerlendirilmesi gerektiğini ve çalışmada yapılanları açıklama amacıyla bir uçağın klima sistemindeki ardışık arıza zamanlarından oluşan veri kümesi üzerinde gerçekleştirilen bir örnek göz önüne alınmaktadır.

7913 numaralı uçağın klima arıza verisi: Veri seti orijinal olarak ilk kez Proschan (Proschan, 1963) tarafından çalışılmıştır ve Boeing 720 tipli bir uçağın klima sistemindeki ardışık 27 arızası arasında geçen süreler saat olarak 97,51, 11, 4, 141, 18, 142, 68, 77, 80, 1, 16, 106, 206, 82, 54, 31, 216, 46, 111, 39, 63, 18, 191, 18, 163, 24 olarak verilmiştir.

İlgili veri setinin modellenmesinin ilk aşamasında veri setinin Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı ile uyumlu olup olmadığı literatürde sıkça başvurulan Kolmogorov-Smirnov (K-S) istatistiği ile test edilecektir. Burada, simülasyon çalışmasından elde edilen bilgiler ışığında MLE tahmin edicileri kullanılacaktır. 7913 numaralı uçağın klima arıza verisinin optimal olarak modellenebilmesi için Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımına olası alternatifler olan Rayleigh, Weibull, Gamma ve Log-Normal dağılım modelleri ile kıyaslamalı olarak modellenecektir. Söz konusu dağılım modelleri arasından 7913 numaralı uçağın klima arızası veri seti için en olası modeli belirlemek için ise

$$AIC = 2k - 2\ln L \quad (6.1)$$

biçiminde hesaplanan Akaike bilgi kriterinin (AIC) sonucuna göre karar verilmektedir. Burada k modellerde bulunan parametre sayıları, $\ln L$ ise modelin logaritmik olabilirlik fonksiyonunu ifade etmektedir.

7913 numaralı uçağın klima arızası veri seti için elde edilen parametre tahmin değerleri ve test sonuçları Çizelge 6.1 de verilmiştir.

Çizelge 6. 1. 7913 numaralı uçağın klima arıza veri seti için parametre tahminleri ve test sonuçları

	Model			
	G. Rayleigh	Gamma	Weibull	Log-Normal
K-S Test	0.0777	0.0770	0.0883	0.1263
p -değeri	0.9926	0.9933	0.9721	0.7355
AIC	290.7572	292.1802	291.9125	299.2309
Parametre Tahmini	$\hat{\alpha}$: 0.4231	$\hat{\alpha}_G$: 1.1326	$\hat{\theta}_W$: 79.9239	$\hat{\mu}$: 3.8389
	$\hat{\lambda}$: 0.0074	$\hat{\beta}_G$: 67.8235	$\hat{\beta}_W$: 1.1231	$\hat{\sigma}$: 1.2330

Çizelge 6.1 de verilen K-S test sonuçlarına ve karşılık gelen p -değerlerine göre 7913 numaralı uçağın klima arızaları veri setini modellemek için uygun dağılımlar olduğu söylenebilir. Bununla birlikte en küçük AIC değerine ise Genelleştirilmiş Rayleigh sahip olmuştur. Dolayısıyla ilgili veri setinin modellenmesi için en olası modelin Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı olduğunu söyleyebiliriz.

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında sağlık ve fen bilimlerinden mühendisliğe kadar birçok alandan gözlemlenmiş veriyi modellemede kullanılan Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımında parametre tahmin problemi göz önüne alındı. Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı Rayleigh Burr Type X ve Genelleştirilmiş üstel dağılımla ilişkili bir dağılım olup yaşam verilerini modellemede sıkça başvurulan Weibull, Gamma ve Log-Normal gibi ünlü olasılık dağılım modellerine alternatif bir dağılımdır. Yoğun bir alandan veri modelleme potansiyeli bulunan Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımında bilinmeyen parametrelerin doğruya yakın bir biçimde tahmin edilmesi hem istatistik kuramı hemde diğer uygulamalı bilimler açısından önem teşkil etmektedir.

Tez çalışmasının amacı kapsamında Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahmin probleminin çözümü, literatürde sıkça başvurulan en çok olabilirlik, momentler, en küçük kareler L-momentler ve en büyük aralık yöntemleri çerçevesinde ele alınarak dağılımın bilinmeyen parametrelerinin tahminin de kullanılabilir beş farklı tahmin edici çalışılmıştır. Çalışılan tahmin edicilerin tahmin başarımları ise yapılan Monte-Carlo simülasyon çalışmalarıyla karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir.

Monte-Carlo simülasyon çalışmalarında elde edilen bilgiler ışığında çalışılan tahmin edicilerin hepsinin de her durumda oldukça tatminkâr tahminler ürettiğini söyleyebiliriz. Buna ek olarak örneklem çapı n arttıkça tahmin edicilerin yan ve HKO değerlerinin azaldığı gözlenmiştir. Dolayısıyla tahmin edicilerin hepsinin asimptotik olarak yansız ve tutarlı tahmin ediciler oldukları söylenebilir. Öte taraftan Monte-Carlo simülasyon çalışması sonuçlarından, tüm tahmin ediciler arasında en çok olabilirlik tahmin edicilerinin hem küçük örneklem hem de büyük örneklem çaplarında daha düşük yan ve HKO değerleri ile diğer tahmin edicilere göre daha iyi başarımlar gösterdiği görülmüştür.

Tez çalışmasında Monte-Carlo simülasyon çalışmalarını takiben göz önüne alınan bir uçağın klima sistemindeki ardışık arızaların sürelerinden oluşan bir veri seti Genelleştirilmiş Rayleigh, Weibull, Gamma ve Log-Normal dağılımları

kullanılarak modellenmiştir. Göz önüne alınan dağılımların hepsinde K-S testine göre veriler ile uyumlu modeller çıkmışlardır. Bunun yanısıra Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı en düşük AIC değeriyle diğer modellere göre veri setinin modellenmesinde daha olası bir model olarak değerlendirilebilir. Dolayısıyla Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımının pozitif çarpık verilerin modellenmesinde sıkça başvurulan Weibull, Gamma, Log-Normal gibi dağılımlara iyi bir alternatif olduğu söylenebilir.



KAYNAKÇA

- [1] Abd-Elfattah, A. M. (2011). Goodness of fit test for the generalized Rayleigh distribution with unknown parameters. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(3), 357-366.
- [2] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1965). *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55)*. Courier Corporation.
- [3] Akdi, Y., 2010. *Matematiksel İstatistiğe Giriş*, Gazi Kitabevi, Ankara
- [4] Al-Khedhairi, A., Sarhan, A. M., & Tadj, L. (2007). Estimation of the generalized Rayleigh distribution parameters. *International Journal of Reliability and Applications*, 8(2), 199.
- [5] Burr, I. W. (1942). Cumulative frequency functions. *The Annals of mathematical statistics*, 13(2), 215-232.
- [6] Cheng, R. C. H., & Amin, N. A. K. (1983). Estimating parameters in continuous univariate distributions with a shifted origin. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 45(3), 394-403.
- [7] Esemem, M., & Gürler, S. (2018). Parameter estimation of generalized Rayleigh distribution based on ranked set sample. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88(4), 615-628.
- [8] Hosking, J. R. M. (1990). L- moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 52(1), 105-124.
- [9] Iriarte, Y. A., Vilca, F., Varela, H., & Gómez, H. W. (2017). Slashed generalized Rayleigh distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 46(10), 4686-4699.

- [10] Kundu, D., & Raqab, M. Z. (2005). Generalized Rayleigh distribution: different methods of estimations. *Computational statistics & data analysis*, 49(1), 187-200.
- [11] Kundu, D., & Raqab, M. Z. (2006). Burr Type X distribution: Revisited. *J. Prob. Stat. Sci*, 4, 179-193.
- [12] Kundu, D., & Raqab, M. Z. (2007). Discriminating between the generalized Rayleigh and log-normal distribution. *Statistics*, 41(6), 505-515.
- [13] Kundu, D., & Raqab, M. Z. (2015). Estimation of $R= P [Y<X]$ for three-parameter generalized Rayleigh distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(4), 725-739.
- [14] Merovci, F. (2014). Transmuted generalized Rayleigh distribution. *Journal of Statistics Applications & Probability*, 3(1), 9.
- [15] Nofal, Z. M., & Abd El Hadi, N. E. (2015). Exponentiated transmuted generalized Raleigh distribution: A new four parameter Rayleigh distribution. *Pakistan journal of statistics and operation research*, 11(1), 115-134.
- [17] Proschan, F. (1963). Theoretical explanation of observed decreasing failure rate. *Technometrics*, 5(3), 375-383.
- [18] Ranneby, B. (1984). The maximum spacing method. An estimation method related to the maximum likelihood method. *Scandinavian Journal of Statistics*, 93-112.
- [19] Raqab, M. Z., & Madi, M. T. (2011). Inference for the generalized Rayleigh distribution based on progressively censored data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141(10), 3313-3322.
- [20] Surlles, J. G., & Padgett, W. J. (2001). Inference for reliability and stress-strength for a scaled Burr type X distribution. *Lifetime Data Analysis*, 7(2), 187-200..

- [21] Swain, J. J., Venkatraman, S., & Wilson, J. R. (1988). Least-squares estimation of distribution functions in Johnson's translation system. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29(4), 271-297.
- [22] Tsai, T. R., & Wu, S. J. (2006). Acceptance sampling based on truncated life tests for generalized Rayleigh distribution. *Journal of Applied Statistics*, 33(6), 595-600.

