

BİLYALI RULMAN HASARLARININ NEDEN OLDUĞU TİTREŞİMLERİN MODELLENMESİ

Hakan ARSLAN, Sadettin ORHAN ve Nizami AKTÜRK*

Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Kırıkkale Üniversitesi,
Yahşihan 71450 Kırıkkale, arslan71@yahoo.com, sadettinorhan@yahoo.com

* Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Gazi Üniversitesi,
Maltepe 06570 Ankara, nakturk@gazi.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, sağlam ve hasarlı durumdaki açısız temaslı bilyalı rulmanların titreşimini incelemek üzere bir şaft-rulman modeli oluşturulmuştur. Modelde şaft-rulman ikilisi kütle-yay sistemi olarak modellenmiş ve ilave olarak bilyaların titreşimini incelemek için, bilyalar da kütleli olarak kabul edilmiştir. Sistemin dinamik şartlar altında doğrusal olmayan bir davranış gösterdiği bilinmektedir. Şaft ve bilyalar için hareket denklemleri elde edilmiş ve bu denklemler geliştirilen bilgisayar programı yardımıyla radyal ve eksenel yönde çözülmüştür. Simülasyon programından şaft ve bilyalar için bulunan sonuçlar zaman ve frekans tanım bölgesinde incelenmiş ve rulman bilyalarının kütleli olarak kabul edilmesinin şaftın genel titreşimini pek fazla etkilemediği görülmüştür. Simülasyon programı kullanılarak rulman elemanları çalışma yüzeylerindeki (iç bilezik, dış bilezik, bilya) bölgesel kusurların şaft ve bilyaların titreşimine olan etkisi de araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmalarla karşılaştırıldığında göreceli olarak bir uyum içerisinde oldukları gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Titreşim, bilyalı rulmanlar, bölgesel kusurlar

MODELING OF THE VIBRATIONS CAUSED BY BALL BEARING DEFECTS

ABSTRACT

In this study a shaft-ball bearing system is modeled in order to investigate the vibrations of ball bearings with running surfaces defects. Shaft and bearing was modeled as mass-spring system and balls were assumed have masses in order to investigate the effects of the balls on the overall vibrations. It is well known that the behaviour of the system has a nonlinear character under dynamic conditions.

Equations of motion were obtained and solved with a computer program developed in order to study the radial and axial vibrations. The results obtained from simulation program for shaft and balls were analyzed both time and frequency domains. The ball masses are shown not to have a significant effect on the overall vibration behaviour of the shaft bearing system. The vibrations of shaft and the ball bearing system have been observed to have sensitivity for different working conditions. The effects of localized defects on bearing running surfaces (i.e. surfaces of inner and outer rings and balls) on the shaft-ball bearing vibrations were investigated by using the simulation program. When the results obtained from the computer simulation have been compared with previous studies available in the literature, a reasonably good agreement has been observed.

Keywords: Vibration, ball bearing, localized defects

1. GİRİŞ

Rulmanlar makinaların vazgeçilmez parçaları olarak uzun süredir kullanılmaktadır. Dönen makina elemanlarındaki bozukluklar bütün endüstri dallarında gözle görülebilir bir üretim düşmesine ve yüksek bakım-onarım masraflarına yol açmakta ve ayrıca çalışma zamanı açısından da büyük kayıplara sebep olmaktadır. Rulmanlarda imalat sırasında yüzeylerde üretim hataları, yanlış montaj ve işletme sırasında değişik sebeplerden kaynaklanan hatalar oluşabilir. Bu hatalar rulmanın vazifesini yaparken sistemin titreşmesine ve gürültüye, bazı durumlarda da işlevini tam olarak yerine getirememesine sebep olabilir. Rulmanlarda oluşan hataların tehlikeli bir boyuta ulaşmadan tespit edilmesi ve tedbir alınması gerekir. Bu hataları tespit etmenin değişik metotları vardır. Bu metotlardan titreşim gözlemeleme metodu, üretimi durdurmadan bakım işlemlerini yapmamıza olanak sağlar [1].

Rulmanlardaki hataların bu metotla tespitine yönelik şimdiye kadar yapılan çalışmalara baktığımızda, dağınık kusurlara (dalgalılık, düzgünsüzlük, pürüzlülük, eksen kaçıklığı, radyal açıklık, dengesizlik v.b.) yönelik çalışmalar, bölgesel kusurlara oranla daha fazladır. Bölgesel hataları inceleyen araştırmacıların çoğu deneysel bir inceleme yapmışlar, bazı araştırmacılar ise kusurlar için model oluşturmuş ve bu modelden buldukları sonuçları deney sonuçları ile kıyaslama yoluna gitmişlerdir. Fakat araştırmalarında bilyaları titreşimini dikkate almamışlardır. Bu araştırmacıardan, Aktürk [2] açısız temaslı iki rulman ile yataklanmış mil-rulman sisteminde sağlam ve hatalı rulmanlardan kaynaklanan aksel ve radyal yöndeki titreşimleri incelemek için matematiksel bir model oluşturmuştur. Aktürk ve Gohar [3] iki açısız bilyeli rulman ile yataklanmış bir mil-rulman sisteminde bilye boyutundaki değişimin milin aksel ve radyal titreşimlerine olan etkisi incelemişlerdir. McFadden ve Smith [4,5] rulman iç bileziğindeki tek ve çoklu hasarları modelleyerek hasarlar yüzünden oluşan titreşimleri incelemiş ve sonuçların geçerliliğini deneysel sonuçlarla doğrulamışlardır. Taylor [6] rulman iç bileziğinde, dış bileziğinde, yuvarlanma

elemanlarında oluşan tek hasarın, rulmanın birden fazla elemanında oluşan hasarın frekans analizi ile belirlenmesi araştırmıştır.

Tandon ve Choudhury [7] radyal ve eksenel yük altındaki dış bilezik, iç bilezik veya yuvarlanma elamanlarının üzerindeki yerel kusurlar yüzünden oluşan önemli frekans bileşenlerinin genliği ve makaralı rulmanların titreşim frekanslarını tahmin için analitik bir model sunmuşlardır. Su vd. [8] silindirik bilyeli rulmanlarda yüzey pürüzlülüğünün oluşturduğu titreşim modellenmiş ve deneysel sonuçlarla modelin doğruluğu ortaya konulmuştur.

Gad v.d. [9] bilyalı yatakların dinamik özelliklerinin araştırılması için şaft kütesinin de göz önüne alındığı bilyalı yatak için bilgisayar simülasyon modeli kullanmışlardır. Doğal frekans civarındaki kararsızlıklara değinmişlerdir. Igarashi v.d. [10], bilyalı yataklarda bölgesel kusurların sebep olduğu titreşimleri araştırmışlardır.

Gohar v.d., çeşitli makalelerinde, bilyalı yatak titreşimlerinin değişik yönlerini araştırmışlardır. Rahnejat ve Gohar [11] rulman rijitlik hesaplamaları ile şaft hareketini ilişkilendirerek, derin oluklu bilyalı rulmanlar tarafından desteklenen yatay rijit bir şaftın titreşim davranışları üzerine çalışmışlardır. Ayrıca yuvarlanma elamanları ile bilezikler arasındaki yağ filminin elasto-hidrokinamik sönümleme davranışının etkilerini incelemişlerdir. Matsubara v.d. [12] bilyalı yataklar tarafından desteklenen esnek bir şaftı incelemişlerdir. Aini v.d. [13] bilyalı yataklar tarafından desteklenen taşıma milini modellemiş, Franco v.d. [14] ise yatak üzerindeki çoklu hataları, Aktürk v.d. [15]'de bilya yolu titreşimlerini incelemişlerdir.

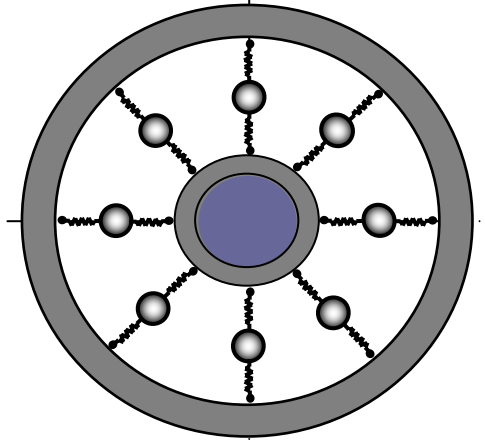
Gupta v.d. [16] yatakları silindirik koordinatlarda 6 serbestlik derecesinde modellemişlerdir. Şaftın kütesini değil de yuvarlanma elamanlarının kütlelerini göz önüne aldıklarından çalışmalarını bilya ve bilya kafes etkileşimleri ile oluşan titreşimler üzerinde yoğunlaştırmışlardır.

Bu çalışmada yapılan modellemede, şaft ve bilyaların kütle gibi, bileziklerin ise temas yayları gibi davrandığı varsayılmış ve bu modele göre sağlam rulman için bir simülasyon programı geliştirilmiştir. Bu programa rulman elamanları için bir kusur modeli de dahil edilerek geliştirilen simülasyon programı yardımıyla şaft ve bilyaların titreşim spektrumları elde edilmiştir. Böylece sağlam ve kusurlu durumdaki rulmanlar için elde edilen şaft ve bilyaların spektrumları karşılaştırılarak hatanın türünün ve yerinin tespitine çalışılmıştır.

2. SİSTEMİN MODELLENMESİ

Sistemin modellenmesinde şaft-rulman ikilisi kütle-yay sistemi olarak düşünülmüş ve ilave olarak bilyaların titreşimini incelemek için, bilyalar da kütleli olarak kabul

edilmiştir. Ayrıca modellemede Şekil 1’de görüldüğü gibi iç ve dış bilezik bilya yolları kütesiz non linear temas yayları ile gösterilmiştir.



Şekil 1. Bilyalı rulman için oluşturulan elastik model

Sistemin dinamik şartlar altında doğrusal olmayan bir davranış gösterdiği bilinmektedir. Öyleyse yerel Hertz temas teoremine göre bilya-bilya yolu arasındaki nokta teması yüklemesi durumunda yük ezilme arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir [17].

$$W = K \cdot \delta^{3/2} \quad (1)$$

Burada iç bileziğin Rijitlik Katsayısı:

$$K_i = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)}{\left(\sum \rho_i\right)^{1/2}} \left(\frac{1}{\delta_i^*}\right)^{3/2} \quad (2)$$

Dış bileziğin Rijitlik Katsayısı:

$$K_d = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)}{\left(\sum \rho_d\right)^{1/2}} \left(\frac{1}{\delta_d^*}\right)^{3/2} \quad (3)$$

ifadelerinden elde edilir [2]. Böylece yük-ezilme bağıntısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W = \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)}{\left(\sum \rho \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\delta^*} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^{\frac{3}{2}} \delta^* \quad (4)$$

Burada Boyutsuz ezilme miktarı (δ^*):

$$\delta^* = \frac{2\aleph}{\pi} \left(\frac{\pi}{2\aleph^2 \Im} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

şeklinde hesaplanır. Burada \aleph eliptik eksantriklik parametresi, \aleph^* ve \Im ise tamamen eliptik integrallerdir. \aleph , bilyanın iç ve dış bilezikle olan temasına göre elips şeklinde oluşan izin a ve b boyutlarının oranıdır. Bu integrallerin nasıl hesaplanacağı [1] nolu referansta Arslan H. tarafından ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

2.1. Ezilme Miktarlarının Hesabı

Şaft ve bilyaya etki eden temas kuvvetlerinin hesaplanabilmesi için i 'inci bilyanın ezilmesinin hesaplanması gerekir. Dönme esnasında bilyalar sürekli olarak bileziklerin farklı noktalarında yüzeye temas eder. Şekil 2'de görüldüğü gibi bilya bileziklere temas halindeyken O_i , O_d iç ve dış bilezik oluşu eğrilik merkezidir ve bilyalarla beraber hareket ederler. Moment için dış bileziği sabit kabul edersek o zaman O_d sabit eksen olarak alınabilir [14, 15]. Burada $O_i O_d = B.D_b$ olup iç ve dış bilezik eğrilik merkezleri arasındaki ilk mesafe olarak adlandırılır. Böylece O_i (ön yük olmadığı zaman) noktası, O_d noktasından itibaren $B.D_b$ ve α_0 ile tanımlanabilir.

Ön yük uygulandığında O_i noktası z_0 kadar hareket edecek $(O_i)_1$ noktasına gelecek ve yeni temas açısı α_p ve ön yük ezilmesi δ_p tüm bilyalar için aynı olacaktır. Dış eksenel ve radyal yük bileşenleri altında $(O_i)_1$ noktası z eksen boyunca z kadar hareket ederek $(O_i)_2$ noktasına gelecek, radyal yük bileşenlerinin etkisiyle radyal yönde δ_r kadar ilerleyerek Şekil 2'de gösterildiği gibi $(O_i)_3$ noktasına gelecektir.

Daha sonra bilya merkezi, dış bilezik yönünde z_{bd} kadar hareket ederek $(O_i)_4$ noktasına gelir ve radyal yük bileşenlerinin etkisi ile λ_{rad} kadar ilerleyerek $(O_i)_5$ noktasına ulaşır. $\delta_i \lambda_{bi}$ kabul edildiği için bilya iç bilezik yönünde $(\delta_i - \lambda_{bi})$ kadar bir ezilmeye maruz kalır. Bu işlemin detaylı anlatımı N. Aktürk [2]'ün tezinde bulunabilir.

$$\text{Burada } Bd_b = r_{go} + r_{gi} - d_b \text{ ve } z_0 = Bd_b \left(\frac{\sin(\alpha_p - \alpha_0)}{\cos(\alpha_p)} \right) \quad (10)$$

formüllerinden hesaplanabilir.

Tek bir bilyanın ezilmesi yüzünden oluşan kuvvet bulunabilir ve o zaman iç bileziğe etkiyen toplam kuvvet, bu bilyanın iç bilezik etrafında dönmesi ile oluşan kuvvetler toplanarak hesaplanabilir.

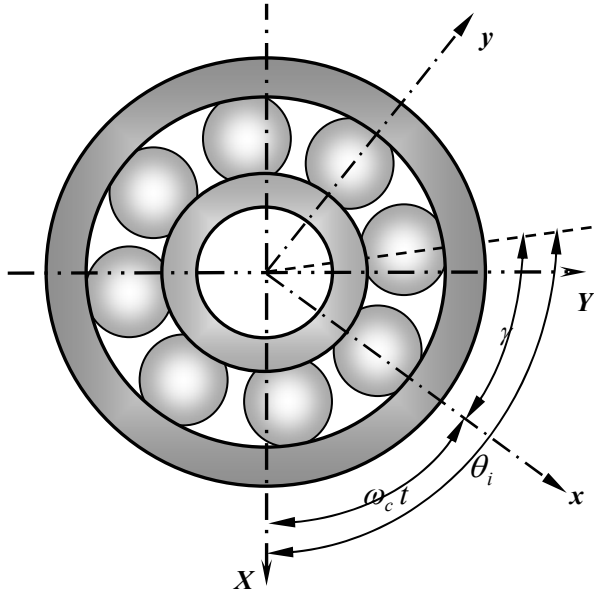
Şaft merkezinin hareketi sonucu iç bilezikte oluşan ezilmeleri bulmak için önce toplam kuvvetlerin hesaplanması gerekir.

x, y, z yönündeki toplam kuvvetler;

$$W_X = W_\eta \cdot \cos(\theta_i), \quad W_Y = W_\eta \cdot \sin(\theta_i), \quad W_Z = W_{ai} \quad (11)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada W_η i 'inci bilyaya etkiyen normal kuvvet, θ_i ise i 'inci bilyanın x eksenine yaptığı açıdır. θ açısı Şekil 3'te gösterildiği gibi farklı açılarının kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir. Şekilde x, y, z eksenleri rotorla beraber hareket etmekte fakat onunla beraber dönmemektedir. Bu tezde X, Y ve Z eksenleri uzayda sabitlenmiş ve X eksenine yer çekimi kuvveti doğrultusunda olacak şekilde



Şekil 3. Bilyalı rulmanda seçilen referans eksenler

seçilmiştir. Normal şartlarda tüm bilyalar iç bileziğin etrafında kafes hızında bir kafesin içinde dönerler ve bu eksen seti de kafes hızıyla döner. İkinci referans eksenle bilya eksenleri arasındaki açı $\omega_c \cdot t$ olup iki bilya arasındaki açı ise γ ile tanımlanır.

$$\gamma = \frac{2\pi}{m} \quad (12)$$

şeklinde ifade edilir. Burada m rulmandaki bilya sayısıdır. Buna göre θ açısı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\theta = \omega_c t + i\gamma \quad (13)$$

Burada kafes hızı:

$$\omega_c = \frac{1}{2} \omega_i \left[1 - \frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha) \right] + \frac{1}{2} \omega_d \left[1 + \frac{d_b}{d_m} \cos(\alpha) \right] \quad (14)$$

bağıntısından hesaplanır ve $\omega_i = \frac{2\pi n_i}{60}$ ve $\omega_d = \frac{2\pi n_d}{60}$ 'dır [17].

2.2. Hareket Denklemleri

İki açısız temaslı bilyalı rulman tarafından desteklenen rijit bir şaftın dinamiğini incelemek üzere bir modelleme yapılmıştır. Bu modellemede aşağıdaki gibi bazı kabuller yapılarak şaft ve bilyalar için hareket denklemleri elde edilmiştir.

1. Şaftın radyal yönde (x, y) ve eksenel yönde (z) olmak üzere 3 serbestlik derecesine sahip olduğu kabul edildi.
2. Şaftın x ve y eksenleri etrafında dönme yapmadığı kabul edildi. Rulmanların eş zamanlı ve simetrik hareket ettikleri kabul edildiğinden bu hareket kolayca sağlanmıştır.
3. Bilyalar kütleli kabul edilmiş ve bilyaların sadece radyal yöndeki titreşimleri dikkate alınmıştır.
4. Bilezikler eğilmez (rijit) kabul edilmiş, sadece temas gerilmeleri yüzünden yerel ezilmelere uğradığı kabul edilmiştir. Ezilmeler Hertz Elastiklik teorisine uygun olarak gerçekleştirilmektedir.
5. İç bileziğin ezilme miktarının bilya merkezinin ivmesinden kaynaklanan ezilme miktarından daha büyük olduğu ve buna bağlı olarak ezilme farkının $(\delta - \lambda_{bi}) < 0$ olduğu durumda $(\delta - \lambda_{bi}) = 0$ alınmıştır.
6. Bilya merkezinin ivmesinden kaynaklanan ezilme $\lambda_{bi} < 0$ olduğu durumda λ_{bi} pozitifte dönüştürülmüştür.
7. Yuvarlanma elamanları iç bileziğin etrafına eşit aralıkta yerleştirilmiş ve aralarında hiç etkileşim olmadığı kabul edilmiştir.
8. Dış bileziğin dönmediği ve şaftın bir parçası olduğu kabul edilmektedir.

Yukarıda yapılan kabullere göre Şaft için x , y , z yönündeki hareket denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{x} + \sum_{i=1}^m K_i^j (\delta_i^R - \lambda_{bi}^R)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^R \cos \theta_i^R + \sum_{i=1}^m K_i^j (\delta_i^L - \lambda_{bi}^L)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^L \cos \theta_i^L + Q_x - Mg &= 0 \\
 m_s \ddot{y} + \sum_{i=1}^m K_i^j (\delta_i^R - \lambda_{bi}^R)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^R \sin \theta_i^R + \sum_{i=1}^m K_i^j (\delta_i^L - \lambda_{bi}^L)^{\frac{3}{2}} \cos \alpha_i^L \sin \theta_i^L + Q_y &= 0 \\
 m_s \ddot{z} + \sum_{i=1}^m K_i^j (\delta_i^R - \lambda_{bi}^R)^{\frac{3}{2}} \sin \alpha_i^R - \sum_{i=1}^m K_i^j (\delta_i^L - \lambda_{bi}^L)^{\frac{3}{2}} \sin \alpha_i^L + Q_z &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Rulmanlarda 8'er tane bilya olduğu düşünülerek, bilyalar için radyal yöndeki hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

Sol taraftaki rulman bilyaları için hareket denklemleri:

$$\begin{aligned}
 m_{b1} \ddot{\lambda}_{b1}^L + K_1^O (\lambda_{b1}^L)^{3/2} - K_1^I (\delta_1^L - \lambda_{b1}^L)^{3/2} &= 0 \\
 m_{b2} \ddot{\lambda}_{b2}^L + K_2^O (\lambda_{b2}^L)^{3/2} - K_2^I (\delta_2^L - \lambda_{b2}^L)^{3/2} &= 0 \\
 m_{b3} \ddot{\lambda}_{b3}^L + K_3^O (\lambda_{b3}^L)^{3/2} - K_3^I (\delta_3^L - \lambda_{b3}^L)^{3/2} &= 0 \\
 m_{b4} \ddot{\lambda}_{b4}^L + K_4^O (\lambda_{b4}^L)^{3/2} - K_4^I (\delta_4^L - \lambda_{b4}^L)^{3/2} &= 0 \\
 m_{b5} \ddot{\lambda}_{b5}^L + K_5^O (\lambda_{b5}^L)^{3/2} - K_5^I (\delta_5^L - \lambda_{b5}^L)^{3/2} &= 0 \\
 m_{b6} \ddot{\lambda}_{b6}^L + K_6^O (\lambda_{b6}^L)^{3/2} - K_6^I (\delta_6^L - \lambda_{b6}^L)^{3/2} &= 0 \\
 m_{b7} \ddot{\lambda}_{b7}^L + K_7^O (\lambda_{b7}^L)^{3/2} - K_7^I (\delta_7^L - \lambda_{b7}^L)^{3/2} &= 0 \\
 m_{b8} \ddot{\lambda}_{b8}^L + K_8^O (\lambda_{b8}^L)^{3/2} - K_8^I (\delta_8^L - \lambda_{b8}^L)^{3/2} &= 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

2.3. Yuvarlanma Yüzeylerindeki Bölgesel Kusurlar

Bölgesel hasarlar; yuvarlanma yüzeylerindeki çatlaklar, küçük delik şeklinde korozyon ve kabarmalardır. Rulmanlarda sık rastlanan hasar, yorulma çatlaklarının sebep olduğu bilezikler ve yuvarlanma elemanlarındaki kabarmalardır. Bölgesel hasarlı bir eleman diğer elemanla çalıştığında iç yüzeydeki temas gerilmelerinde düzensiz değişimler olur. Bu durum çok kısa süreli bir darbe sinyalinin üretilmesine neden olur. Bölgesel hasarlara yorulma ve çarpma izleri sebep olabilir. Yorulma, yüzeyin altında belli derinlikte küçük bir çatlak olarak başlar ve aşamalı olarak pullanma oluşmasına neden olur. Eğer titreşimler doğru olarak izlenirse, bu çatlak

yüzeye erişmeden önce belirlenebilir. Çünkü rulman elemanlarındaki yorulma olayıyla ilişkili yapısal değişimler rulman geometrisini etkilemese de titreşim spektrumunu etkiler. Bu durum, temas halindeki rulmanın rijitlik ve sönümlenmesindeki değişimlerden kaynaklanmaktadır [18].

Rulman tesisatının izlenmesi iki önemli amaca hizmet edebilir. Birincisi, rulmanlar makineden sökülmeden sürekli bir sağlamlık taraması yapılabilir. İkincisi, rulman bozulma safhasının başında taranabilir ve böylece bozulmanın ciddi sonuçlarından kaçınılmış olur. Rulmanlarda iç veya dış bilezik ve yuvarlanma elamanlarından birindeki bir hata yüksek frekanslı ve düşük enerjili titreşimlere sebep olur.

Yuvarlanma elamanı radyal ya da aksel bir yük altında yerel bir kusur üzerinden geçerken yuvarlanma elamanı ile sabit elaman arasındaki çarpışma yüzünden bir impuls üretilir. Bu impulsun genliği temas yükü, kusurun yeri ve şiddetine bağlıdır. Sabit hızlar için impuls periyodik olarak tekrarlanır. Bu tekrarlama frekansı kusurun yerine bağlı olup, bu frekansa “*karakteristik kusur frekansı*” denir. Bu frekans rulman geometrisinden $f_d = \frac{1}{T_d}$ formülü ile hesaplanabilir [19]. Bu frekansın genliği kusurun yerine bağlı olup kusur maksimum yükleme bölgesinde ise en büyük genlikte bir puls üretilir.

İlk model dış bilezik yüzeyinde tek bir kusur olması durumu için, sonraki model iç bilezikte tek bir kusur olması durumu ve son model ise bilya yüzeyindeki tek bir kusur durumu için oluşturulmuştur.

2.3.1. Dış bilezik yuvarlanma yüzeyindeki bir kusur

Rulman aşınması durumunda hasarlar ilk önce dış bilezikte kabarma şeklinde kendini gösterir. Kabarma daha da derinleştiğinde dış bilezik frekansının genliği artar. Arızanın son aşamasında yuvarlanma elemanları, kabarmayı iç bileziğe taşırlar ve iç bilezik frekansları artar. Bu sırada kısa süreli vuruntu sinyalleri daha büyük ve çok sık olur. Dış bilezik frekanslarının bağlı genliği ve iç bilezik frekanslarının varlığı arıza zamanını gösterecektir.

Rulmanın dış bileziğindeki bir kusur çoğu durumda bu bileziğin hareketi engellendiği için yeri de sabittir. Bununla beraber yuvarlanma elamanı ile bilezik arasındaki yükte sabittir ve yuvarlanma elemanları kusurun üzerinden geçerken aynı genlikte bir puls üretirler.

Bir dış bilezik hatası tipik olarak yükleme bölgesinin merkezinde yükün maksimum olduğu yerde meydana gelir. Kusur yüzünden belirli bir yük için mümkün olan maksimum genliğe sahip bir impuls üretilir. Bu sebeple bir dış bilezik kusurunu karşılaştırmalı olarak taramak kolaydır [20].

2.3.2. İç bilezik yuvarlanma yüzeyindeki bir kusur

Bir iç bilezik kusurunun sebep olduğu impulsun genliği sabit değildir. Bununla beraber kusur rulmanın üst yarısından geçiyorken ihmal edilebilecek mertebede impulslar üretir. Kusur yüklü bölgeye girdiğinde ise yuvarlanma elamanları ile bilezik arasındaki temas yükü artar. Bu sebeple kusur yükün maksimum olduğu noktaya ulaşınca kadar impulsun genliği sürekli olarak artar. Bu noktadan sonra impulsun genliği yük azalırken yavaş yavaş azalır ve sonunda kusur yükleme bölgesinden çıkınca da sıfır olur [20].

İç bilezik yüzeyinde bir kusur olduğu durumda bu kusur şaftın üzerine sıkı geçme olarak takılan iç bilezik gibi şaft hızında (ω) dönecektir. Eğer kusur açısı $\omega t \mp \frac{\omega_d}{2r_i}$ bilyalardan birinin açısı ($\omega_c t + i\gamma, i=1, m$) ile çakışırsa bilya üzerindeki ezilme Şekil 4'teki gibi:

$$\delta_{id} = \delta_i + \delta_d \quad (18)$$

olacaktır.

2.3.3. Bilya yüzeyindeki bir kusur

Kusurun bilya merkezinden geçen bir eksen etrafında döndüğü ve yatak eksenine paralel olduğu kabul edilmiştir. Böylece hata iç ve dış bilezik yuvarlanma yollarında aynı noktadan düzenli aralıklarla geçmektedir.

Buna göre Şekil 4'ten, $\omega_b t$ 'nin sinüsü 0 olduğu zaman bilya üzerindeki kusur yüzünden oluşan ezilme miktarı:

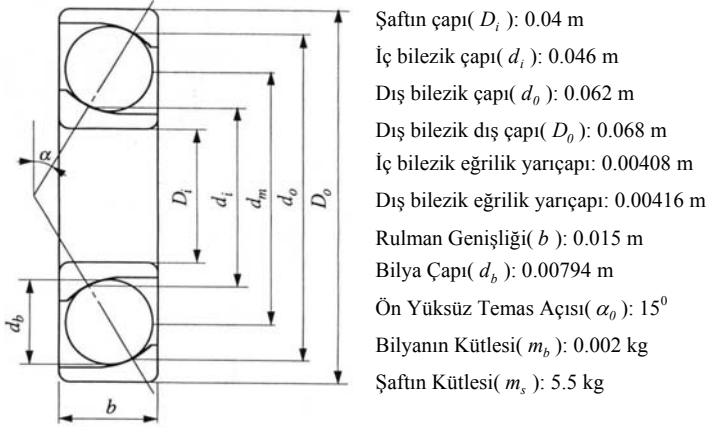
$$\delta_{id} = \delta_i + \delta_d \quad (19)$$

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde sağlam ve kusurlu rulmanlar için yazılan simülasyon programının doğruluğunu teyit etmek için, 5 serbestlik dereceli bir model kullanan Aktürk N. [2]'nin simülasyon programında kullandığı veriler (rulman boyutları, ön yükler, ilk şartlar, bilya sayıları, devir sayıları ve kusurla ilgili tanımlamalar) alınarak program çalıştırılmış ve her iki programdan şaft titreşimleri için elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Sistemde şaftın kütle merkezi ilk olarak $x_0 = 1\mu m, y_0 = 0,1\mu m, z_0 = 0,01\mu m$ yer değiştirdiği kabul edilmiş, sağlam rulman için eksenel ön yük 5 N, şaft dönme hızı 5000 d/d alınarak şaftın radyal yöndeki (x eksen) şaft salınımları bulunmuştur. Bu

hız için BGF 285 Hz ve sistemin tabii frekansı Şekil 6'da görüldüğü gibi 490 Hz civarındadır. Spektrumdaki diğer önemli frekanslar bilya geçiş frekansı (285 Hz) ve onun üst harmonikleri (e, f) ve z eksenindeki tabii frekans (a) ve ikinci harmoniği (c) Şekil 6'da görülmektedir.



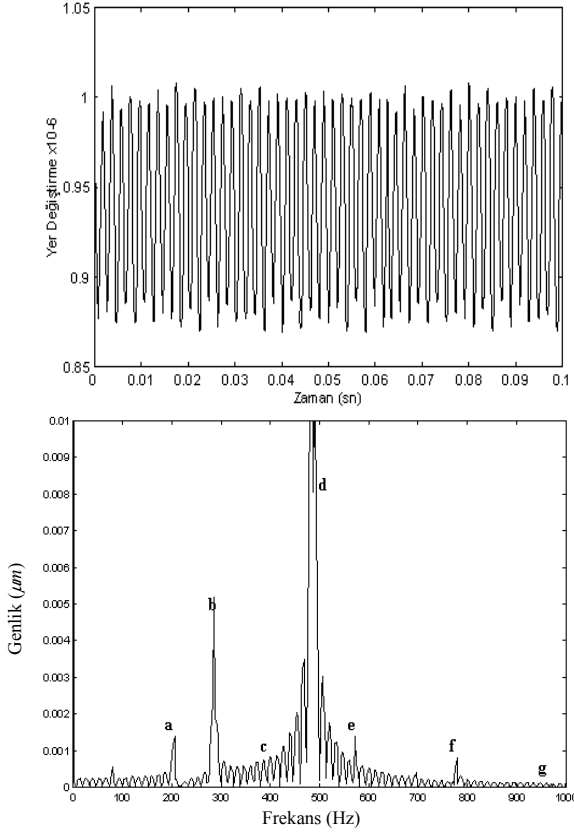
Şekil 5. Bilyalı rulman ve şaftla ilgili boyut tanımlamaları

3.1. Dış Bilezikteki Bir Kusurdan Kaynaklanan Titreşimler

Yuvarlanma yüzeyinde bir çatlak veya aşınma parçacığı bulunduğu varsayılmakta ve bu kusurun yüksekliğinin $3\mu\text{m}$, genişliğinin ise 1° olduğu kabul edilmektedir. Eğer bu hata dış bileziğin yuvarlanma yüzeyinde ise titreşimlerin, sistemin tabii frekansı ve dış bilezik bilya geçiş frekansında oluşması beklenir. Bilya geçiş frekansı ve harmonikleri sistemin tabii frekansı ile çakıştığında şiddetli (genliği yüksek) titreşimler gözlenir. Düşük şaft hızlarında dış bilezik BGF'nin üst harmoniklerinden bir tanesinin tabii frekansla çakışması hemen hemen kesindir denebilir.

Şaft hızı 3000 d/d olduğunda ise BGF 172 Hz'dir. Bu hız için Şekil 7'deki gibi en büyük zirve tabii frekansa en yakın harmonik olan 516 Hz ($3 f_{BGF}$) dedir. Bununla beraber BGF'nin üçüncü ve dördüncü harmoniği de tabii frekansa yeteri kadar yakın olmadığı için tabii frekansta küçük bir zirve görünmektedir.

Yukarıda ortaya atılan görüşü desteklemek amacıyla şaft hızı artırılarak 7000 d/d'ya çıkarılmıştır. Bu durumda BGF 400 Hz ve $2 f_{BGF}$ 800 Hz olup her ikisi de tabii frekanstan oldukça uzaktadır. Şekil 8'de görüldüğü gibi bu hızdaki en baskın zirve bilya geçiş frekansındadır ve onun üst harmoniklerinde de zirveler ortaya çıkmaktadır. Spektrumda tabii frekansta da küçük bir zirve görülmektedir. Her iki



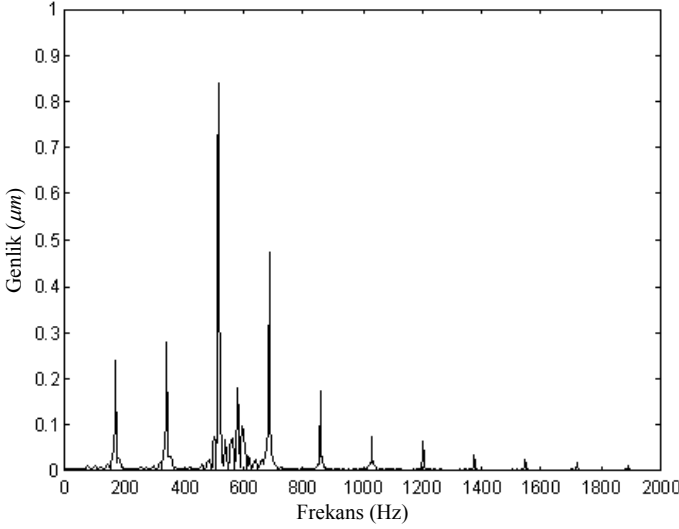
Şekil 6. Şaftın x eksenine göre titreşimi ve onun spektrumu

durum için zirve genliklerine baktığımızda 7000 d/d şaft hızındaki maksimum zirve genliği 3000 d/d şaft hızındaki maksimum zirve genliğinden daha küçüktür.

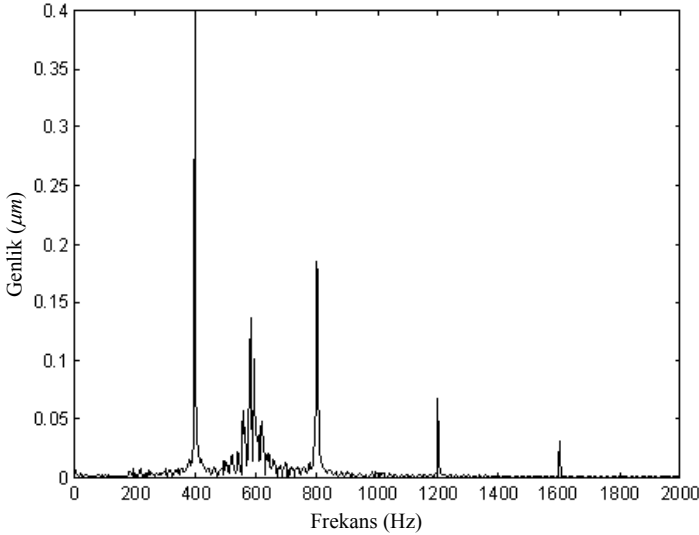
Dış bilezik kusuru bulunan rulmanda aynı şaft hızları için, [2] nolu referansta bulunan frekans zirveleri ile bu çalışmada bulunan frekans zirvelerinin karşılaştırılması aşağıda Tablo 1’de verilmiştir. Burada her iki çalışmada bulunan frekansların birbirine oldukça yakın değerlerde olduğu görülmektedir.

3.2. İç Bilezikteki Bölgesel Bir Kusurdan Kaynaklanan Titreşimler

Eğer hata iç bilezik yuvarlanma yüzeyinde ise daha karmaşık titreşimler görülür. Çünkü hatanın kendisi de şaft hızıyla dönmektedir. Bazı araştırmacılar bu durumun iç bilezik bilya geçiş frekansında titreşimler oluşturacağını ileri sürmüşlerdir [26-28]. Diğer bazı araştırmacılar [29-30] iç bilezik kusuru durumunda frekans spektrumunda zirvelerin şaft dönme frekansı, kafes frekansı iç bilezik bilya geçiş



Şekil 7. Dış bilezik kusuru bulunan rulmanda $n= 3000$ d/d şaft hızı için oluşan titreşimlerin spektrumu ($m= 8$, $P_R = 10$ N, $c = 300$ Ns/m, $f_{BGF} = 172$ Hz)



Şekil 8. Dış bilezik kusuru bulunan rulmanda $n= 7000$ d/d şaft hızı için oluşan titreşimlerin spektrumu ($m= 8$, $P_R = 10$ N, $c = 300$ Ns/m, $f_{BGF} = 400$ Hz)

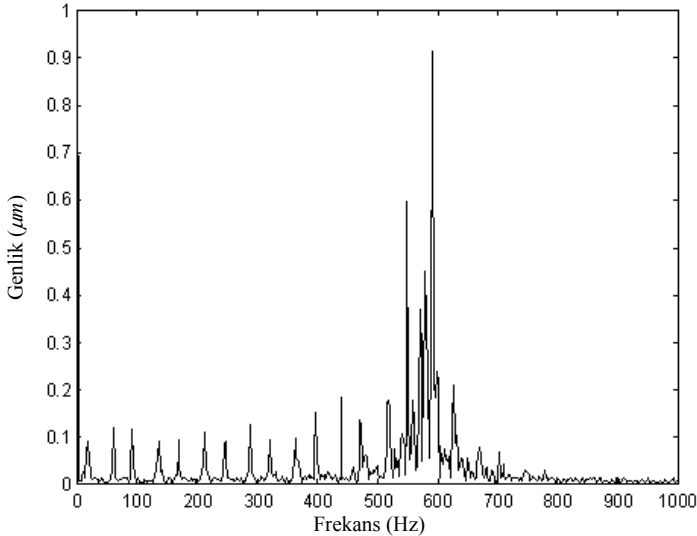
frekansları ve harmonikleri ile bunların kombinasyonlarında oluşacağını ileri sürmüşlerdir. Bu durum aşağıda farklı şaft hızları için çizdirilen frekans spektrumlarında da görülmektedir.

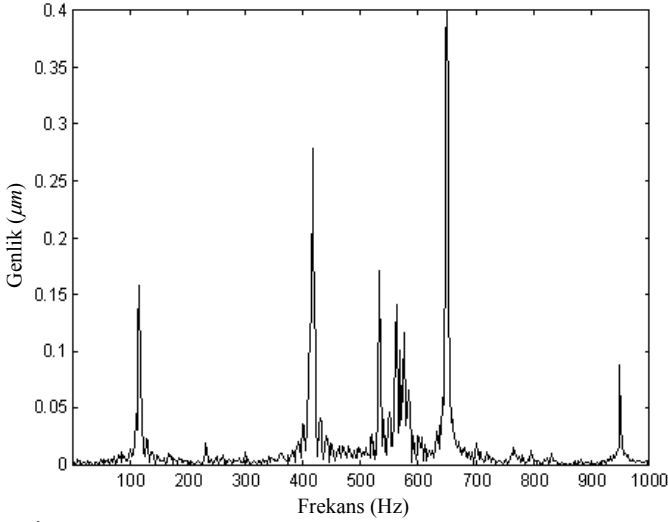
Tablo 1. Dış bilezik kusuru bulunan rulman için bulunan frekansların [2] nolu referanstaki frekanslarla karşılaştırılması

	Şaft Hızı	
	3000 d/d	7000 d/d
Bu çalışmada bulunan frekans zirveleri	$f_{BGF} = 172 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGF}, 3 \times f_{BGF} \dots$, $4 \times f_{BGF}, 5 \times f_{BGF}, \dots$, $f_n = 570 \text{ Hz}$	$f_{BGF} = 400 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGF}, 3 \times f_{BGF} \dots$, $4 \times f_{BGF}, 5 \times f_{BGF}, \dots$, $f_n = 570 \text{ Hz}$
Aktürk N'ün bulunduğu frekans zirveleri	$f_{BGF} = 168 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGF}, 3 \times f_{BGF} \dots$, $4 \times f_{BGF}, 5 \times f_{BGF}, \dots$, $f_n = 560 \text{ Hz}$	$f_{BGF} = 390 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGF}, 3 \times f_{BGF} \dots$, $4 \times f_{BGF}, 5 \times f_{BGF}, \dots$, $f_n = 560 \text{ Hz}$

Önce düşük bir shaft hızı olan 1000 d/d shaft hızı olarak simülasyon programı çalıştırıldığında elde edilen frekans spektrumu Şekil 9'da görülmektedir. Bu hız için oluşan frekans zirveleri, shaft dönme frekansı (17 Hz), iç bilezik bilya geçiş frekansı ($m(f - f_c) = 77 \text{ Hz}$) ve bu frekansların harmoniklerinde ve iç bilezik BGF'nin harmoniklerinin yan bantlarında oluşmaktadır. Bunların bazıları tabii frekansla çakıştığından Şekil 9'da görüldüğü gibi 570 Hz tabii frekansta rezonans oluşur.

Şaft hızı 7000 d/d alındığında (Şekil 10), çizdirilen frekans spektrumunda tabii

**Şekil 9.** İç bilezik kusuru bulunan rulmanda $n = 1000$ d/d shaft hızı için oluşan titreşimlerin spektrumu ($m = 8$, $P_R = 10 \text{ N}$, $c = 300 \text{ Ns/m}$, $f_{BGF1} = 77 \text{ Hz}$)



Şekil 10. İç bilezik kusuru bulunan rulmanda $n=7000$ d/d shaft hızı için oluşan titreşimlerin spektrumu ($m=8$, $P_R=10$ N, $c=300$ Ns/m, $f_{BGF}=536$ Hz)

frekans iç bilezik bilya geçiş frekansı ($m \times (f - f_c) = 536$ Hz) ile çakıştığından rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Fakat yine de en baskın zirveler yan bantlarda ($f_{BGF} - f_s = 419$ Hz, $f_{BGF} + f_s = 653$ Hz) oluşmaktadır. Spektrumdaki diğer frekans zirveleri ise shaft dönme frekansında (117 Hz) ve iç bilezik BGF'nin ikinci harmoniğinin birinci yan bantında ($2 \times f_{BGF} - f_s = 955$ Hz) görülmektedir.

Tablo 2'de görüldüğü gibi iç bilezik kusuru bulunan rulmanda aynı shaft hızları için, bu çalışmada bulunan frekans zirveleri ile [2] nolu referansta bulunan frekans zirveleri karşılaştırıldığında her iki çalışmada bulunan frekansların birbirine oldukça yakın değerlerde olduğu görülmektedir.

3.3. Bilya Yüzeyindeki Bölgesel Bir Kusurdan Kaynaklanan Titreşimler

Şafta takılı olan iki bilyalı rulman yüzeyinde de $3\mu\text{m}$ derinliğinde bir çizik hatası bulunduğu ve bu çizik bilyanın merkezinden geçen bir eksen etrafında döndüğü ve yatak eksenine paralel olduğu kabul edilmiştir. Böylece çizik iç ve dış bilezik yuvarlanma yollarında aynı noktadan düzenli aralıklarla geçmektedir. Hatanın neden olduğu titreşimler bilya dönme frekansının (f_b) iki katında olacaktır. Çünkü her yarım dönüşte aynı miktarda kuvvet uygulanmaktadır.

İlk olarak shaft dönme hızını 2000 d/d aldığımızda, bilya dönme frekansı 111 Hz'dir. $5 f_b$ (555 Hz) değeri sistemin tabii frekansına (570 Hz) çok yakın olduğu için sistem

Tablo 2. İç bilezik kusuru bulunan rulman için bulunan frekansların [2] nolu referanstaki frekanslarla karşılaştırılması

	Şaft Hızı	
	1000 d/d	7000 d/d
Bu çalışmada bulunan frekans zirveleri	$f_S = 17 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGFI} = 144 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} + f_S = 94 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} - f_S = 60 \text{ Hz}$ $3 \times f_{BGFI} + 2 \times f_S = 265 \text{ Hz}, \dots$, $f_n = 570 \text{ Hz}$	$f_S = 117 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} = 536 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} - f_S = 419 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} + f_S = 653 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGFI} - f_S = 955 \text{ Hz}$, $f_n = 570 \text{ Hz}$
Aktürk N'ün bulduğu frekans zirveleri	$f_S = 17 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGFI} = 144 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} + f_S = 94 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} - f_S = 60 \text{ Hz}$ $3 \times f_{BGFI} + 2 \times f_S = 265 \text{ Hz}, \dots$, $f_n = 540 \text{ Hz}$	$f_S = 117 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} = 544 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} - f_S = 423 \text{ Hz}$, $f_{BGFI} + f_S = 657 \text{ Hz}$, $2 \times f_{BGFI} - f_S = 963 \text{ Hz}$, $f_n = 540 \text{ Hz}$

555 Hz'de rezonansa girmektedir. Spektrumdaki diğer zirveler $2 f_b$ ve onun üst harmoniklerinde (222 Hz, 444 Hz, 666 Hz, 888 Hz,...) görülmektedir. Yani sistem için gerçek zorlama frekansı $2 f_b$ ve onun üst harmonikleridir (Şekil 11).

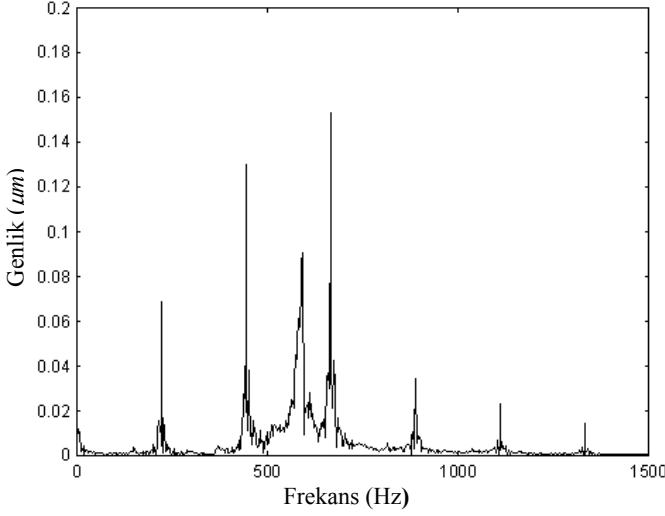
Şaft dönme hızı 5000 d/d'ya çıkarıldığında ise bilya dönme frekansı 277 Hz olup $2 f_b$ (555 Hz) esas tahrik kuvvetidir ve tabii frekansa yakındır. Bu yüzden oluşan titreşimler sistemin tabii frekansı civarında olup, $2 f_b$ 'nin üst harmoniği olan $4 f_b$ (1110 Hz) frekansında da bir zirve görülmektedir (Şekil 12).

Tablo 3'te görüldüğü gibi bilya yüzeyi kusuru bulunan rulmanda aynı şaft hızları için, bu çalışmada bulunan frekans zirveleri ile [2] nolu referansta bulunan frekans zirveleri karşılaştırıldığında her iki çalışmada bulunan frekansların birbirine oldukça yakın değerlerde olduğu görülmektedir.

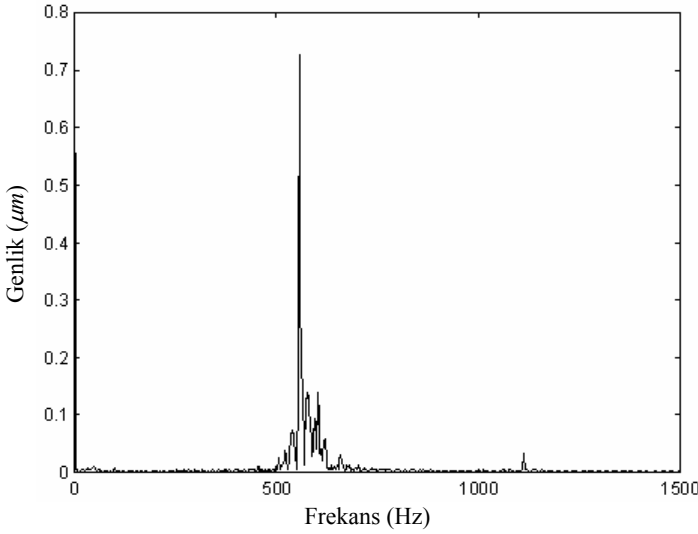
Simülasyon modelinden elde edilen sonuçlar Yhland E. ve Johansson L. [21], Braun S. ve Danter B. [22], Igarashi T.v.d. [10, 23, 24], McFadden P. D. ve Smith J. D. [5], Karakurt M. C. [25] tarafından elde edilen deneysel sonuçlara ve ayrıca Aktürk N. [2] tarafından simülasyon modelinden bulunan sonuçlara oldukça benzemektedir.

4. SONUÇLAR

Sağlam ve kusurlu durumdaki açılmalı temaslı bilyalı rulmanların titreşimini



Şekil 11. Bilya yüzeyinde kusur bulunan rulmanda $n= 2000$ d/d şaft hızı için oluşan titreşimlerin spektrumu ($m= 8$, $P_R = 10$ N, $c = 300$ Ns/m, $f_b = 111$ Hz)



Şekil 12. Bilya yüzeyinde kusur bulunan rulmanda $n= 5000$ d/d şaft hızı için oluşan titreşimlerin spektrumu ($m= 8$, $P_R = 10$ N, $c = 300$ Ns/m, $f_b = 277$ Hz)

incelemek üzere geliştirilen simülasyon programı yardımıyla şaftın radyal yöndeki titreşimleri frekans tanım bölgesinde incelenmiştir. Modelin doğruluğunu teyit etmek üzere 5 serbestlik dereceli model kullanan Aktürk N. [2]'ün simülasyon

Tablo 3. Bilya yüzeyi kusuru bulunan rulman için bulunan frekansların [2] nolu referanstaki frekanslarla karşılaştırılması

	Şaft Hızı	
	2000 d/d	5000 d/d
Bu çalışmada bulunan frekans zirveleri	$2 \times f_b = 222 \text{ Hz}$, $4 \times f_b, 6 \times f_b, 8 \times f_b, \dots$, $f_n = 570 \text{ Hz}$	$2 \times f_b = 555 \text{ Hz}, 4 \times f_b = 1110 \text{ Hz}$ $f_n = 570 \text{ Hz}$
Aktürk N'ün bulunduğu frekans zirveleri	$2 \times f_b = 222 \text{ Hz}$, $f_b, 3 \times f_b, 5 \times f_b, 7 \times f_b$, $4 \times f_b, 6 \times f_b, 8 \times f_b, \dots$, $f_n = 550 \text{ Hz}$	$2 \times f_b = 555 \text{ Hz}, 4 \times f_b = 1110 \text{ Hz}$

programında kullandığı veriler (rulman boyutları, ön yükler, ilk şartlar, bilya sayıları ve devir sayıları) programa girdi olarak verilmiş ve her iki simülasyon programından elde edilen sonuçlar (radyal yöndeki shaft titreşimleri) karşılaştırılmıştır. Önce kusursuz bir rulman için bilya geçiş frekansının etkisi araştırılmıştır. Bilya geçiş frekansı shaftın hızına bağlı olarak değişmekte ve sistemin tabii frekansı ile çakışırca rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden sistemin çalışma hızları rezonanstan kaçınmak için dikkatli bir şekilde seçilmelidir.

Açısal temaslı bilyalı rulmanların çalışma yüzeylerindeki (iç bilezik, dış bilezik, bilya) bölgesel kusurların shaftın titreşimine olan etkisi aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Dış bilezik yuvarlanma yüzeyinde bir kusur olması halinde, shaft titreşimleri bilya geçiş frekansı ve onun katlarında oluşmaktadır. Düşük shaft hızlarında tabii frekansla bilya geçiş frekansının üst harmonikleri çakışmakta ve rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Dış bilezik yuvarlanma yüzeyinde kusur bulunan rulmanlar için elde edilen titreşim genliği, iç bilezik ve yuvarlanma elamanı kusuru için bulunan genliklerle karşılaştırıldığında oldukça yüksek bulunmuştur.
2. İç bilezik yuvarlanma yüzeyinde bir kusur olması durumunda shaft titreşimleri shaft dönme frekansı, kafes frekansı, iç ve dış bilezik bilya geçiş frekansları ile kombinasyonlarında ve üst harmoniklerinde oluşmaktadır. Bu frekanslardan herhangi biri sistemin tabii frekansı ile çakışması halinde rezonans meydana gelmektedir.
3. Bilya yüzeyi kusuru bulunan rulmanda shaft titreşimleri bilya dönme frekansının iki katında oluşur. Eğer f_b veya $2f_b$ ya da bunların üst harmonikleri doğal frekansla çakışır veya yeteri kadar yaklaşırsa rezonans meydana gelir ve oluşan titreşimler tabii frekansta gerçekleşir.

Sonuç olarak bilyalı rulmanlar için geliştirilen modelden elde edilen sonuçlar, daha önceki çalışmalarla karşılaştırıldığında göreceli olarak bir uyum içerisinde oldukları gözlemlenmiştir. Bu çalışmada bulunan frekans değerleri, aynı sistem kullanan Aktürk N. [2]'ün bulduğu değerlerle karşılaştırıldığında, birbirlerine oldukça yakın oldukları görülmüştür.

SİMGELER

a	Temasta oluşan izin uzunluğu
b	Temasta oluşan izin genişliği
B	Toplam eğrilik
d_i	İç bileziğin çapı
d_m	Ortalama çap
d_d	Dış bileziğin çapı
D	Bilya çapı
E	Elastisite modülü
f_{BGF}	Dış Bilezik Bilya geçiş frekansı
f_{BGF_i}	İç Bilezik Bilya geçiş frekansı
f_c	Kafes dönme frekansı
f_n	Doğal frekans
$F(\rho)$	Eğrilik farkı
$F(\rho)_i$	Bilya ile iç bileziğin temasındaki eğrilik farkı
$F(\rho)_d$	Bilya ile dış bileziğin temasındaki eğrilik farkı
g	Yer çekimi ivmesi
G	Kayma modülü
K	Temas Rijitlik Faktörü
K^i	İç bileziğin bilya ile temasındaki rijitlik kats.
K^d	Dış bileziğin bilya ile temasındaki rijitlik kats.
M	Şaftın kütlesi
m_b	Bilyanın kütlesi
m	Bilya sayısı
n	Şaft dönme devri
n_i	İç bileziğin dönme devri
n_d	Dış bileziğin dönme devri
N	Veri noktası sayısı
Q	Şafta gelen dış yük
P_R	Ön yük

r_{gi}	İç bilezik eğrilik yarıçapı
r_{gd}	Dış bilezik eğrilik yarıçapı
r_i	İç bilezik bilya yolu yarıçapı
r_d	Dış bilezik bilya yolu yarıçapı
t	Zaman
\ddot{x}	Şaftın x yönündeki ivmesi
\ddot{y}	Şaftın y yönündeki ivmesi
\ddot{z}	Şaftın z yönündeki ivmesi
λ_b	Bilya kütlelerinin ivmelenmesinin neden olduğu yer değiş.
δ_b	Ön yükleme sonucu bilya merkezinin yer değiştirmesi
$\dot{\lambda}_b$	Bilya kütlelerinin ivmelenmesinin neden olduğu hız
$\dot{\delta}_b$	Ön yükleme sonucu oluşan bilya merkezinin hızı
$\ddot{\lambda}_b$	Bilya merkezinin radyal yöndeki ivmesi

KISALTMALAR

BGF	Bilya Geçiş Frekansı
FFT	Hızlı Fourier Dönüşümü

KAYNAKLAR

1. Arslan, H., **Şaft-Rulman Sistemindeki Bilyalı Rulman Hasarlarının Titreşim Analizi Metodu İle Tespiti**, Doktora Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Anabilim Dalı, Kırıkkale, Ocak 2003.
2. Aktürk, N., **Rigid Shaft Supported by Angular Contact Ball Bearings**, PhD. Thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, London, April 1993.
3. Aktürk, N. and Gohar, R., “The Effect of Ball Size Variation on Vibrations Associated with Ball-Bearings”, **Proc. I.Mech.E.**, 212 Part J, 101-109, 1998.
4. McFadden, P. D. and Smith, J. D., “Model for the Vibration Produced by a Single Point Defect in a Rolling Element Bearing”, **Journal of Sound and Vibration**, 96(1a), 69-82, 1984.
5. McFadden, P. D. and Smith, J. D., “The Vibration Produced by a Multiple Point Defect in a Rolling Element Bearing”, **Journal of Sound and Vibration**, 98(2), 263-273, 1985.
6. Taylor, J. I., “Identification of Bearing Defects by Spectral Analysis”, **Journal of Mechanical Design**, vol. 102, 199-205, April 1980.
7. Tandon, N. and Choudhury, A., “A Review of Vibration and Acoustics Measurement Methods for the Detection of Defects in Rolling Element Bearings”, **Tribology International**, 32, 469-480, 1999.

8. Su, Y.T., Lin, M.H. and Lee, M.S., "The Effects of Surface Irregularities on Roller Bearing Vibrations", **J. Sound and Vibration**, 165(3), 455-466, 1993.
9. Gad E. H., Kandou T., Tamura H., "Spring Property of Ball Bearings", **Memoirs of the Faculty of Engineering**, Kyushu University, 43(3), 1983.
10. Igarashi T. and Hamada H., "Studies on The Vibration and Sound of Defective Rolling Bearings (First Report)", **Bulletin of JSME**, 25(204), 994-, 1982.
11. Rahnejat H. and Gohar R., "The Vibration of Radial Ball Bearings", **Proc. Inst. Mech. Eng.**, 199(3), 181-193, 1985.
12. Matsubara M., Rahnejat H., Gohar R., "Computational Modelling of Precision Spindles Supported by Ball Bearings", **Int. J. of Machine Tools & Manuf.**, 1988.
13. Aini R., Rahnejat H., Gohar R., "A Five Degrees of Freedom Analysis of Vibrations in Precision Spindles", **Ins. J. Mach. Tools for Manuf.**, 30(1), 1-18, 1990.
14. Franco J., Aktürk N. Gohar R., "Vibration of a Rigid Shaft Supported by Radial Ball Bearings with Several Defects", **Int. Gas Turbin and Aeroengine Cong. and Expo.**, Cologne, Germany, ASME Paper No: 92-GT-164, 1992.
15. Aktürk N., UneeB M., Gohar R., "Vibration of a Shaft Supported by Angular Contact Ball Bearings", **ESDA Joint Conf. on Eng. Sys. Des. and Analysis.**, İstanbul, Türkiye, ASME Paper: 47(5), 95-101, 1992,
16. Gupta P. K., Winn L. W., Wilcock, D. F., "Vibration Characteristic of Ball Bearings", **Trans. of ASME J. of Lubr. Tech.**, 98, 284-289, 1977.
17. Harris T. A., **Rolling Bearings Analysis**, John Wiley & Sons, USA, 1991.
18. Tiwari R., Vyas N. S., "Estimation of Non-Linear Stiffness Parametres of Rolling Element Bearings from Random Response of Rotor-Bearing Systems", **J. of Sound and Vibration**, 187(2), 229-239, 1995.
19. Schiltz R. L., "Forcing frequency identification of rolling element bearings", **Int. J. Sound Vibration**, 1619, 1990.
20. Pandit S. M., Paul D., Roth J. T., "Monitoring and Diagnosis of Bearing Defects Using Data Dependent Systems", **Integ. Comp.-Aided Eng.**, 3(4), 268-278, 1996.
21. Yhland E. and Johansson L., "Analysis of Bearing Vibration", **The Ball Bearing Journal**, 161, 1970.
22. Braun, S. and Datner, B., "Analysis of Roller/Ball Bearing Vibrations", **J. of Mechanical Design**, 101, 119-125, 1979.
23. Igarashi T. and Yabe S., "Studies on The Vibration and Sound of Defective Rolling Bearings (Second Report)", **Bull. JSME**, 26(220), 1791-, 1983.
24. Igarashi T. and Kato J., "Studies on The Vibration and Sound of Defective Rolling Bearings (Third Report)", **Bull. JSME**, 28(237), 1985-, 1985.
25. Karakurt M. C., **An Investigation into Rolling Element Bearing Diagnostics via Digital Signal Processing**, Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, Ankara, 1989.
26. Alfredson R. J., Aust M. I. E., Mathew J., "Time Domain Methods for Monitoring The Condition of Rolling Element Bearings", **Mech. Eng. Trans. Australia**, 10(2), 102-107, 1985.

27. Alfredson R. J., Aust M. I. E., Mathew J., “Frequency Domain Methods for Monitoring The Condition of Rolling Element Bearings”, **Mech. Eng. Trans. Australia**, 10(2), 108-112, 1985.
28. Harker R. G. and Sandy J. L., “Rolling Element Bearing Monitoring and Diagnostics Techniques”, *J. of Eng. Gas Turbines and Power*, 111, 251-256, 1989.
29. Wardle F. P., “Vibration Forces Produced by Waviness of The Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearings, Part 1: Theory”, **Proc. I.MechE.**, 202(C5), 305-, 1988.
30. Kim P. Y., “A Review of Rolling Element Bearing Monitoring (III): Preliminary Test Results on Eddy Current Transducer Technique” **Proc. of Third Int. Conf. on Vib. in Rotating Machinery, ImechE**, York, England, 119-125, 1984.
31. Aktürk, N., “The Effect of Waviness on Vibrations Associated with Ball Bearings”, **Trans. ASME, J. of Tribology**, Vol.121, October, 1999, pp. 667-677.