

**T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

ALFA KUVVET DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ RAYLEIGH DAĞILIMI

HAKAN KIZILKAYA

MART 2021

KABUL VE ONAY SAYFASI

İstatistik Anabilim Dalında Hakan KIZILKAYA tarafından hazırlanan **Alfa Kuvvet Dönüştürülmüş Rayleigh Dağılımı** adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Cenker BİÇER
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN
Üye (Danışman) : Doç. Dr. Cenker BİÇER
Üye : Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILMAZ

02/03/2021

Bu Tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylanmıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZET

ALFA KUVVET DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ RAYLEIGH DAĞILIMI

KIZILKAYA, Hakan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi

Danışman: Doç. Dr. Cenker BİÇER

Mart 2021, 77 sayfa

Rayleigh dağılımı, Lord Rayleigh (1880) tarafından tanıtılmasından günümüze kadar geniş uygulama alanı olan ve birçok araştırmaya konu olmuş bir olasılık dağılımıdır. Bu dağılımının tek parametresi ölçek parametresidir ve dağılımın çeşitli davranışlarını betimlemede hayati bir rolü vardır. Fakat farklı yapılardaki verileri modellemede tek bir parametre her zaman yeterli olmayabilmektedir. Dağılımın modelleme yeteneğini artırmak için çeşitli yöntemler altında bazı genelleştirmeleri sunulmuştur. Bu çalışma, Rayleigh dağılımından ve bilinen bazı genellemelerinden daha esnek bir modelin türetilmesine odaklanmaktadır. Bu amaçla, pozitif değerli ve çarpık verileri modellemek için, alfa kuvvet dönüştürülmüş Rayleigh ve alfa kuvvet dönüştürülmüş iki parametrelili Rayleigh dağılımları alfa kuvvet dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edilir.

Çalışmada türetilen dağılımların karakteristik fonksiyon, moment çıkaran fonksiyon, momentler, yüzdellik fonksiyon, medyan gibi bazı temel özellikleri de elde edilmektedir. Buna ilave olarak, türetilen dağılımların bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için en çok olasılık, en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler ve momentler tahmin edicileri elde edilmektedir. Bu tahmin edicilerin tahmin performansları, gerçekleştirilen Monte-Carlo simülasyon çalışmaları aracılığıyla kapsamlı şekilde değerlendirilmektedir. Ayrıca, alfa Kuvvet dönüştürülmüş Rayleigh ve alfa kuvvet dönüştürülmüş iki-parametrelili Rayleigh dağılımlarını kullanarak veri

modellemeyi göstermek için gerçek bir veri seti üzerinde bir uygulamaya yer verilmektedir.

Anahtar kelimeler: Rayleigh Dağılımı, İki-parametrelili Rayleigh Dağılımı, Alfa Kuvvet dönüşüm, Parametre tahmini, En çok olabilirlik, Momentler, En küçük kareler, Simülasyon.



ABSTRACT

ALFA POWER TRANSFORMED RAYLEIGH DISTRIBUTION

KIZILKAYA, Hakan

Kırıkkale University

Institute of Science

Department of Statistics, Master thesis

Supervisor: Assoc. Dr. Cenker BİÇER

March 2021, 77 pages

The Rayleigh distribution is a probability distribution that has been widely applied and has been the subject of many researches since it was introduced by Lord Rayleigh (1880). The only parameter of this distribution is the scale parameter, and the single parameter has a vital role in describing the various behaviors of the distribution. However, a single parameter is not always sufficient for modeling data in different structures. In order to increase the modeling capability of the distribution, some generalizations are presented under various methods. This study focuses on the derivation of a more flexible model than the Rayleigh distribution and some of its known generalizations. For this purpose, to model the positive valued and skewed data, alpha power transformed Rayleigh and alpha power transformed two-parameter Rayleigh distributions are derived by using the alpha power transformation method.

Some basic features of the distributions derived in the study, such as characteristic function, moment generating function, moments, percentile function, and median are also obtained. In addition, the maximum likelihood, the least-squares, the weighted least-squares, and the moments estimators are obtained to estimate the unknown parameters of the derived distributions. The estimation performances of these estimators are extensively evaluated through the performed Monte-Carlo simulation studies. In addition, an application on a real dataset is included to demonstrate data modeling using the alpha power transformed Rayleigh and the alpha power transformed two-parameter Rayleigh distributions.

Keywords: Rayleigh Distribution, Two-Parameter Rayleigh Distribution, Alpha Power Transformation, Parameter Estimation, Maximum Likelihood, Moments, Least squares, Simulation.



TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımını esirgemeyen her konuda büyük desteği olan, tecrübesi ve bilgisiyle yol gösteren daima yanımda olan tez yöneticisi hocam Sayın Doç. Dr. Cenker BİÇER' e teşekkür ve minnettarlığımı sunarım. Manevi desteğini esirgemeyen fedakârlıkla bana her konuda bilgi ve tecrübesiyle yardımcı olan ve fikirlerine önem verdiğim dostum Fatih BUYRUL' a ve Dr. Osman ATEŐ' e destekleri ile bana yardımcı olan ağabeyim sayılan Galip Cihan YALÇIN' a yardım istediğimde çekinmeden ve gücenmeden severek ve isteyerek ellerinden geleni yapan arkadaşlarım Emir GÜLER' e, Hüseyin GÜDÜMEN' e, Zeynel Özkan ANKARALI' ya teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin birçok aşamasında yardım gördüğüm ve bana birçok konuda olduğu gibi tezimi hazırlama esnasında da yardımlarını esirgemeyen, fedakârlıklarıyla borcunu ödeyemeyeceğim biricik eşim Esra KIZILKAYA' ya ve son olarak bana her zaman varlığı ve enerjisi ile güç veren biricik kızım Zeynep KIZILKAYA' ya şükranlarımı ve minnettarlığımı sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. ALFA KUVVET DÖNÜŞÜMÜ	8
3. RAYLEIGH DAĞILIMI	11
3.1. Rayleigh Dağılımı	11
3.2. İki-Parametrelili Rayleigh Dağılımı	15
4. ALFA KUVVET DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ RAYLEIGH DAĞILIMI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ	21
4.1. APR Dağılımı	21
4.2. APR Dağılımının Temel Özellikleri.....	21
4.3. APTR Dağılımı.....	32
4.4. APTR Dağılımının Temel Özellikleri	32
5. BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ	49
5.1. En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi	49
5.2. En Çok Olabilirlik Yöntemi	50
5.3. Momentler Tahmin Yöntemi.....	51
6. APR VE APTR DAĞILIMLARI İÇİN PARAMETRE TAHMİNLERİ	53

6.1. APR Dağılımının Parametrelerinin En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicileri.....	53
6.2. APR Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	54
6.3. APR Dağılımının Parametrelerinin Momentler Tahmin Edicisi	55
6.4. APTR Dağılımının Parametrelerinin En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicileri.....	56
6.5. APTR Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	57
6.6. APTR Dağılımının Parametrelerinin Momentler Tahmin Edicisi	58
7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	60
8. UYGULAMA.....	69
9. SONUÇ.....	71
KAYNAKLAR	73

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3. 1. İki-parametrelili Rayleigh dağılımının temel karakteristik özellikleri ...	16
Çizelge 7.1. Farklı λ ve $\alpha = 0.25$ parametre değerlerinde APR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri.....	61
Çizelge 7.2. Farklı λ parametre değerlerinde ve $\alpha = 1.5$ APR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri.....	62
Çizelge 7.3. Farklı λ ve $\alpha = 0.25$, $\theta = 5$ parametre değerlerinde APTR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri.....	64
Çizelge 7.4. Farklı λ ve $\alpha = 0.25$, $\theta = 15$ parametre değerlerinde APTR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri.....	65
Çizelge 7.5. Farklı λ ve $\alpha = 1.5$, $\theta = 5$ parametre değerlerinde APTR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri.....	66
Çizelge 8. 1. Ortalama rüzgâr hızları veri seti için Rayleigh, iki-parametrelili Rayleigh, APR, APTR ve Weibul modellerine ait K-S, AIC ve parametre tahmin değerleri.....	69

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	14
Şekil 3.2. Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği..	14
Şekil 3.3. Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği	15
Şekil 3.4. $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	17
Şekil 3.5. $\theta = 5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	18
Şekil 3.6. $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği	18
Şekil 3.7. $\theta = 5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği	19
Şekil 3.8. $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	19
Şekil 3.9. $\theta = 5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	20
Şekil 4.1. $\alpha = 1.5$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	25
Şekil 4.2. $\alpha = 0.25$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	25
Şekil 4.3. $\lambda = 1$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	26
Şekil 4.4. $\lambda = 2$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	26
Şekil 4.5. $\alpha = 1.5$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	27

Şekil 4.6. $\alpha = 0.25$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği	28
Şekil 4.7. $\lambda = 1$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği	28
Şekil 4.8. $\lambda = 2$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği	29
Şekil 4.9. $\alpha = 1.5$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği	30
Şekil 4.10. $\alpha = 0.25$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği	30
Şekil 4.11. $\lambda = 1$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği	31
Şekil 4.12. $\lambda = 2$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği	31
Şekil 4.13. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	35
Şekil 4.14. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	36
Şekil 4.15. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	36
Şekil 4.16. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	37
Şekil 4.17. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	37
Şekil 4.18. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	38
Şekil 4.19. $\lambda = 2$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	38
Şekil 4.20. $\lambda = 2$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği	39
Şekil 4.21. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği	40

Şekil 4.22. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	40
Şekil 4.23. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	41
Şekil 4.24. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	41
Şekil 4.25. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	42
Şekil 4.26. $\lambda = 2$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	42
Şekil 4.27. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	43
Şekil 4.28. $\lambda = 2$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği.....	43
Şekil 4.29. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 0,5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	44
Şekil 4.30. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	45
Şekil 4.31. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	45
Şekil 4.32. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	46
Şekil 4.33. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	46
Şekil 4.34. $\lambda = 2$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	47
Şekil 4.35. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	47
Şekil 4.36. $\lambda = 2$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği.....	48
Şekil 8.1. Ortalama rüzgâr hızları verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve model dağılım fonksiyonları.....	70

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

α
 λ veya Λ
 θ veya Θ
 Γ
 ϵ
 $F^{-1}(\cdot)$
 $erf(\cdot)$
 $erfi(\cdot)$

Açıklamalar

Alfa
Lamda
Teta
Gamma
Elemanı
Dağılım Fonksiyonunun Tersisi
Hata Fonksiyonu
Sanal Hata Fonksiyonu

Kisaltmalar

APT
APR
APTR

 F
 f
 H
HKO
LS
 M
MÇF
ML
 $Q(\cdot)$
 S
WLS

Açıklamalar

Alfa Kuvvet Dönüşüm
Alfa Kuvvet Dönüştürülmüş Rayleigh
Alfa Kuvvet Dönüştürülmüş İki-Parametrelili
Rayleigh
Dağılım Fonksiyonu
Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
Bozulma (Hazard) Fonksiyonu
Hata Kareler Ortalaması
En Küçük Kareler
Medyan
Moment Çıkarıcı Fonksiyon
En Çok Olabilirlik
Yüzdelik (Kuantil) Fonksiyon
Yaşam Fonksiyonu
Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler

1. GİRİŞ

Rayleigh dağılımı ilk olarak 1880 yılında akustik alanındaki bir problemi modellemek amacıyla Lord Rayleigh tarafından, pozitif değerli tek bir ölçek parametresi kullanılarak tanıtılmış bir dağılımdır. Rayleigh dağılımı tanıtıldığı günden itibaren birçok araştırmacı tarafından araştırma konusu olmuş ve dağılımın birçok genellemesi üzerine çalışmalar yapılmıştır. Dağılım yoğun olarak fen, mühendislik, güvenilirlik analizi, haberleşme mühendisliği, rüzgâr hızı dağılımı üzerine yapılan çalışmalar, ömür boyu analizinde ve sağlık gibi farklı alanlarda, pozitif değerli ve çarpık verileri modellemede başarıyla kullanılmaktadır. Weibull dağılımının özel bir hali olarak da bilinen Rayleigh dağılımı, çarpık verilerin analizinde tek bir ölçek parametresine sahip olmasından dolayı kimi zaman Weibull dağılımına tercih sebebi olmaktadır. Örneğin rüzgâr hızının modellenmesinde, sadece ortalama rüzgâr hızı ile ilgilenildiğinde, Weibull dağılımına göre tercih sebebidir, bkz(Kurban vd. 2007; Gülersoy ve Çetin 2010). Haberleşme mühendisliğinde, herhangi bir alıcıya birden fazla yolla ulaşan dağınık sinyalleri modellemek için kullanılır. Rayleigh Dağılımı, Lord Rayleigh tarafından birçok farklı şekilde meydana gelen sesin genliğinden türetilmiştir. Rayleigh dağılımı “rastgele yürüme” (random walk) frekans dağılımı olarak da adlandırılır. Weibull dağılımı gibi Rayleigh dağılımı da rüzgâr hızı için bir model olarak kullanılır. Model, rüzgâr hızının dağılımını bir yıl boyunca verileri elde ederek açıklar. Bu tür bir analiz, bir rüzgâr türbininden enerji geri kazanımını tahmin etmek için kullanılır. Rayleigh dağılımına olasılık teorisi uygulamalarında da karşılaşılmaktadır (Aktaş, 2011).

Rayleigh dağılımının tek parametresi olan ölçek parametresi, dağılımın çeşitli davranışlarını betimlemede hayati bir rol oynamaktadır fakat tek bir parametre farklı yapılarıdaki verileri modellemede her zaman yeterli olamamaktadır. Bu durumu göz önüne alan birçok araştırmacı tarafından Rayleigh dağılımının, Genelleştirilmiş Rayleigh(Kundu ve Raqab, 2005), iki-parametrelili Rayleigh(Dey vd., 2014), Üstelleştirilmiş Rayleigh (Szynal ve Wolynski, 2012), Kumaraswamy üstelleştirilmiş Rayleigh (Ul Haq, 2016), ters Rayleigh (Rosaiah ve Kantam, 2010) gibi birçok

genellemesi, farklı senaryolar altında denenmiştir. Özellikle rüzgâr verilerinin modellenmesinde sıkça kullanılan Rayleigh dağılımı ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Dyer ve Whisenand (1973) yaptıkları çalışma ile II tip sansürleme durumunda Rayleigh dağılımının parametresi için en iyi yansız tahmin ediciyi elde etmiştir. Surlles ve Padgett (2001), Burr Type X dağılımının bir genelleştirilmesi olarak genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını tanıtmıştır. Salo vd. (2006) bağımsız Rayleigh rasgele değişkenlerinin çarpımlarının dağılımlarını elde etmiştir. Gomes vd (2014) yeni bir yaşam modeli olarak Kumaraswamy genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını önermişlerdir. Mahmoud ve Ghazal (2017) ikinci tip sansürlü hibrit sansürlü veriler için üstelleştirilmiş Rayleigh dağılımı için parametre tahmin problemini incelemiştir.

Rayleigh dağılımı ile ilgili literatürde çok geniş bir çalışma yelpazesi bulunmaktadır. Çalışmaların bir kısmı, dağılımın teorik ve istatistiksel özelliklerinin araştırılması üzerindeki çalışmalardır, diğer bir kısmı da veri setlerini modellemede kullanımı üzerine olan çalışmalardır.

Dyer ve Whisenand (1973) yaptıkları çalışma ile II. tip sansürleme durumunda Rayleigh dağılımının parametresi için en iyi yansız tahmin ediciyi elde etmiştir.

Çelik (2003), Türkiye'nin güney bölgesindeki rüzgâr enerjisi yoğunluğunu Weibull ve Rayleigh modellerini kullanarak incelemiştir.

Kaplan (2016), Türkiye gibi gelişmekte olan ülkelerin yenilenebilir enerji kaynaklarına yönelmesini ele almış ve bu konu ile ilgili olarak çalışmasında Osmaniye bölgesindeki rüzgâr enerjisini, Rayleigh ve Weibull dağılımlarını kullanarak modellemiştir.

Çağlar (2017), Antalya bölgesi için rüzgâr karakteristiğini incelemiş ve rüzgâr potansiyeli ile ilgili olay değerlendirmelerini Weibull ve Rayleigh gibi çeşitli dağılım modellerini kullanarak ele almıştır.

Balpetek ve Akpınar (2018) yaptıkları çalışmada, Weibull ve Rayleigh dağılım modellerini göz önüne alarak Elazığ ilinin rüzgâr enerji potansiyeli için çeşitli istatistiksel sonuçlar ortaya koymuşlardır.

Emeksiz vd. (2016), Tokat bölgesinin rüzgâr enerjisi potansiyelini değerlendirmek için hazırladıkları çalışmada, bölgenin rüzgâr enerji potansiyelini Weibull, Rayleigh, Log-normal ve Gama dağılım modellerini kullanarak modellemişler.

Gülersoy ve S. Çetin (2010) hazırladıkları çalışma ile Menemen bölgesi rüzgâr enerjisi potansiyelini Rayleigh ve Weibull dağılımlarını göz önüne alarak incelemişlerdir.

Mert vd. (2014), Antakya bölgesi rüzgâr karakteristiğini Weibull ve Rayleigh dağılımlarını kullanarak incelemişlerdir.

Bacanlı ve Köse (2007) yaptıkları çalışmada Rayleigh dağılımının parametresinin Wald'ın ardışık olasılık oran testi ile test edilebilmesi için gerekli karakteristik işlem ve ortalama örneklem sayısı fonksiyonlarını vermişlerdir.

D. Biçer ve Biçer (2017), iki-parametrelili Rayleigh dağılımlarının sonlu karmalarında mevcut bilinmeyen parametreler için parametre tahmini problemini yaptıkları çalışma ile ele almışlardır.

Dokur vd. (2019), Türkiye'nin altı farklı bölgesi (Gökçeada, Bozcaada, Bandırma, Bilecik, Yalova ve Sakarya) için rüzgâr hızlarını Rayleigh, iki-parametrelili Weibull ve ters Weibull dağılımlarını kullanarak modellemiş ve bazı karşılaştırmalı sonuçlar sunmuşlardır.

Dey vd. (2014), iki-parametrelili Rayleigh dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahmin edilmesi problemini hem frekansçı hem de Bayesci bakış açısı ile incelemişlerdir.

Paraschiv vd. (2019), Rayleigh dağılımını kullanarak Romanya'nın liman şehri olan Köstence'deki rüzgâr hızı verilerini analiz etmişlerdir.

Aktaş (2011), Rayleigh dağılımının yüzdellik fonksiyonunu ve diğer dağılımlarla ilişkisini incelemiştir.

Köse vd. (2015), Eskipazar yöresinin rüzgâr enerjisi potansiyelini modellemek için Rayleigh, Lognormal ve Weibull dağılımlarını kullanarak tahminlemesini incelemişlerdir.

Sarhan ve Zaindin (2009), Değiştirilmiş Weibull dağılımında doğrusal arıza oranı dağılımı ve verilerin analizi için Rayleigh dağılımı, Üstel dağılımı ve Weibull dağılımını kullanmışlardır.

Korukçu (2011), Bababurnu, Belen, Datça ve Gökçeeda yörelerinin rüzgâr enerji potansiyelini ve güç yoğunluğunu Rayleigh dağılımı ile modellemiştir.

Badr (2019), Bileşik Rayleigh dağılımı için gerçek verilere uygunluk testleri yapmıştır.

Al-Omari ve Zamanzade (2016) yaptıkları çalışmada basit rastgele örnekleme ve sıralı küme örnekleme tekniklerine dayanarak Rayleigh dağılımı için farklı uyum iyiliği testlerini incelemişlerdir.

Best vd. (2010), Rayleigh dağılımı için kolayca uygulanan uyum iyiliği testini incelemişlerdir.

Rayleigh dağılımı üzerine hazırlanan çalışmaların diğer bir kısmı da dağılımın veri modelleme başarımını artırabilmek için çeşitli genelleştirmelerinin tanıtılması üzerinedir. Farklı yapılardaki verileri modellemede tek parametre her zaman yeterli olmayacağı görüşüne sahip birçok araştırmacı Rayleigh dağılımının farklı senaryolar altında çeşitli genelleştirilmeleri üzerine çalışmalar hazırlamışlardır.

Mahmoud ve Ghazal (2017), Genelleştirilmiş Tip II hibrit sansürlü veriler için üstelleştirilmiş Rayleigh dağılımından parametre tahmin problemini incelemiştir.

Surles ve Padgett (2001), Burr Type X dağılımının bir genelleştirilmesi olarak genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını tanıtmıştır.

Ashour vd. (2018), Gamma-Rayleigh Dağılımı ile Gamma dağılımının ve Rayleigh dağılımının yeni bir genellemesini düşünerek bu modelin esnekliğini ve potansiyelini incelemişlerdir.

Afify (2011), Tip I ilettilmiş sansür altında karma Rayleigh Dağılımı parametrelerini tahminini ve karışık Rayleigh dağılımı adı verilen yeni bir istatistiksel modeli incelemiştir.

Salo vd. (2006), Bağımsız Rayleigh rasgele değişkenlerinin çarpımlarının dağılımlarını elde etmiştir.

Gomes vd (2014), yeni bir yaşam modeli olarak Kumaraswamy genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını önermişlerdir.

Kundu ve Raqab (2005), İki-Parametrelili Burr Type X dağılımını Genelleştirilmiş Rayleigh olarak adlandırmışlardır.

Biçer (2019), Yeni bir Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımının özelliklerini ve çıkarımlarını incelemiştir.

Ahsan (2016), dört-parametrelili Kumaraswamy Üstel Ters Rayleigh Dağılımını incelemiştir.

Köprülü (2019), genelleştirilmiş Rayleigh dağılımı için istatistiksel sonuç çıkarımını farklı prensiplere göre incelemiştir.

Alfa kuvvet dönüşüm yöntemi mevcut bir dağılım ailesini temel dağılım olarak, temel dağılıma yeni ek bir parametre ekleyerek temel dağılımdan daha esnek yeni bir dağılım türeten bir yöntemdir. Yöntem ilk olarak Mahdavi ve Kundu (2017) tarafından yapılan çalışma ile ortaya konmuştur. Metot sürekli dağılım ailelerine başarılı bir şekilde uygulanabilirliğe sahiptir. Özellikle üstel dağılım ailelerine yeni bir parametre ekleyerek, yeni dağılımın temel dağılıma göre daha esnek olmasını sağlamaktadır, bkz (Mahdavi ve Kundu, 2017). Yöntem her ne kadar yeni de olsa, literatürde alfa kuvvet dönüşüm yöntemi kullanılarak türetilmiş dağılımlar mevcuttur.

Hassan vd. (2019), alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Lindley dağılımını tanıtmışlar ve istatistiksel çıkarımlarını incelemiştir.

Nassar vd. (2017), alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Weibull dağılımını ele almışlar ve istatistiksel çıkarımlarını incelemiştir.

Dey vd. (2019), alfa kuvvet dönüşüm metodunu Lindley dağılımı kullanarak ele almışlar ve deprem verileri üzerinde bir uygulama ile çıkarımları incelemiştir.

Dey vd. (2019), alfa kuvvet dönüşüm metodunu ters Lindley dağılımı kullanarak ele almışlar ve bir uygulama ile çıkarımları incelemişlerdir.

Hassan vd. (2018), alfa kuvvet dönüştürülmüş genişletilmiş üstel dağılımı tanıtmışlar ve çıkarımlarını incelemişlerdir.

D. Biçer (2019), alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Genelleştirilmiş Rayleigh dağılımını ele alarak istatistiksel sonuç ve çıkarımlarda bulunmuştur.

Ünal vd. (2018), alfa kuvvet dönüşüm metodu ile Ters Üstel dağılımını ele almışlar ve bir uygulama ile esnekliğini ve önemini incelemişlerdir.

Nassar vd. (2019), Marshall-Olkin alfa kuvvet dönüşüm ailesini tanıtmışlardır. Bu yeni dağılımın Marshall-Olkin genelleştirilmiş Lindley, Marshall-Olkin genelleştirilmiş üstel, Marshall-Olkin ile karşılaştırıldığında daha uygun olduğunu göstermişlerdir.

Efe-Eyefia vd. (2020), Weibull Alfa kuvvet ters Üstel dağılımının teorik analizini ele almışlar ve bu dağılımın özelliklerini incelemişlerdir.

Bu tez çalışmasının temel amacı, Rayleigh ve iki-parametrelili Rayleigh dağılımları temel dağılımlar alınarak, alfa kuvvet dönüşüm yöntemine göre iki yeni olasılık dağılım modeli tanıtmaktadır.

Bu bağlamda çalışmanın ikinci bölümünde, Mahdavi ve Kundu (2017) tarafından verilen alfa kuvvet dönüşüm yöntemi incelenmektedir.

Üçüncü bölümde, Rayleigh ve iki-parametrelili Rayleigh dağılımları ve bu dağılımların temel özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ikinci bölümde ele alınan alfa kuvvet dönüşüm yöntemi ve üçüncü bölümde incelenen Rayleigh ve iki-parametrelili Rayleigh dağılımları göz önünde bulundurularak, alfa kuvvet dönüştürülmüş Rayleigh ve alfa kuvvet dönüştürülmüş iki-parametrelili Rayleigh dağılımları türetilmektedir. Ayrıca türetilen dağılımların temel istatistiksel karakteristikleri elde edilmektedir.

Beşinci bölümde, tez çalışması ile türetilen alfa kuvvet dönüştürülmüş Rayleigh ve alfa kuvvet dönüştürülmüş iki-parametrelili Rayleigh dağılımlarında mevcut bilinmeyen parametrelerin tahmin edilmesi üzerinde durulmaktadır. Bu kapsamda beşinci bölümde ilk olarak, literatürde mevcut olan en küçük kareler yöntemi, momentler yöntemi ve en çok olabilirlik yöntemi gibi bazı tahmin edici elde etme yöntemleri verilmektedir.

Altıncı bölümde verilen yöntemlere dayalı olarak türetilen dağılımların bilinmeyen parametrelerinin tahmin edicileri elde edilmektedir.

Tez çalışmasının yedinci bölümünde, altıncı bölümde elde edilen tahmin edicilerin bilinmeyen parametreleri tahmin etmedeki performanslarını ortaya koymak için gerçekleştirilen kapsamlı Monte-Carlo simülasyon çalışmalarına yer verilmektedir.

Sekizinci bölümde türetilen dağılımların gerçek dünya verileri üzerinde uygulanabilirliklerini göstermek için yapılan uygulamalara yer verilmektedir.

Son bölüm olan dokuzuncu bölümde ise çalışma ile ulaşılan sonuçlar tartışılmaktadır.

2. ALFA KUVVET DÖNÜŞÜMÜ

Bu kısımda, Mahdavi ve Kundu (2017) tarafından tanıtılan alfa kuvvet dönüşüm(APT) yöntemi açıklanmaktadır.

Varsayalım X , $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip mutlak sürekli bir rasgele değişken olsun. $F(x)$ temel dağılım fonksiyonunu göz önünde bulundurarak, APT dağılımın dağılım fonksiyonu

$$F_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{F(x)} - 1}{\alpha - 1} & , \alpha > 0 , \alpha \neq 1 \\ F(x) & , \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

biçiminde verilir. (2.1) eşitliği ile verilen $F_{APT}(x)$ fonksiyonu dağılım fonksiyonu olma özelliklerini taşıyan bir fonksiyondur. Eğer temel dağılımın dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'e karşılık gelen olasılık yoğunluk fonksiyonu olan $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise, $F_{APT}(x)$ 'e karşılık gelen $f_{APT}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu da sürekli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olur ve

$$f_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\log \alpha f(x) \alpha^{F(x)}}{\alpha - 1} & , \alpha > 0 , \alpha \neq 1 \\ f(x) & , \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

olarak verilir (Dey, Ghosh, vd., 2019; Dey, Nassar, vd., 2019; Mahdavi ve Kundu, 2017; Ünal vd., 2018). Aşikâr olarak $\alpha \neq 1$ iken; $f_{APT}(x), f(x)$ 'in ağırlıklı bir fonksiyonu gibidir,

$$w(x) = \alpha^{F(x)} \quad (2.3)$$

bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere; $f_{APT}(x)$

$$f_{APT}(x) = \frac{f(x)w(x; \alpha)}{c} \quad (2.4)$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (2.4) de verilen c sabiti ağırlıklandırılmış fonksiyonun beklenen değeridir, yani $c = E(w(x))$ dir. Bu durumda bu ağırlaştırılmış fonksiyon $\alpha > 1$ durumuna ve $\alpha < 1$ durumuna bağlı olarak azalan veya artan olabilir.

Temel dağılımın dağılım fonksiyonu $F(x)$ göz önünde bulundurularak APT yöntemi ile türetilen dağılımın yaşam fonksiyonu (Survival Function) $S_{APT}(x)$,

$$S_{APT}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha - 1} (1 - \alpha^{F(x)-1}) & , \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1 - F(x) & , \quad \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

biçiminde, bozulma oranı fonksiyonu (Hazard Rate Function- HRF) $H_{APT}(x)$,

$$H_{APT}(x) = \begin{cases} \log \alpha f(x) \frac{\alpha^{F(x)-1}}{1 - \alpha^{F(x)-1}} & , \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1 \\ 1 - F(x) & , \quad \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

biçiminde elde edilir. y_p ile $F_{APT}(x)$ ' in p . çeyrekliği gösterilmek üzere; $\alpha \neq 1$ için dönüştürülmüş dağılımın p . yüzdeliği

$$y_p = F^{-1} \left(\frac{\log(1 + (\alpha - 1)p)}{\log \alpha} \right) \quad (2.7)$$

biçiminde elde edilir. Burada $F^{-1}(\cdot)$ temel dağılımın dağılım fonksiyonunun tersini ifade etmektedir. Eğer x_p , ile temel dağılımın p . yüzdeliği gösterilirse, eşitlik (2.7) göz önünde bulundurulmasıyla $\alpha \neq 1$ için

$$y_p \leq x_p \text{ için } \frac{\log(1 + (\alpha - 1)p)}{\log \alpha} \leq p \quad (2.8)$$

yazılabilir. Böylece dönüştürülmüş dağılımın medyanı eşitlik (2.7) de $p = 0.5$ yazılarak

$$y_p = F^{-1}\left(\frac{\log(2 + (\alpha - 1)) - \log 2}{\log \alpha}\right) \quad (2.9)$$

olarak elde edilir.



3. RAYLEIGH DAĞILIMI

Çalışmanın bu bölümünde Rayleigh dağılımı ile iki-parametrelili Rayleigh dağılımına ve temel karakteristiklerine genel bir bakış yapılmaktadır.

3.1. Rayleigh Dağılımı

X rasgele değişkeni negatif değerler almayan mutlak sürekli bir rasgele değişken olmak üzere; X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla,

$$F(x, \lambda) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, \quad x > 0, \lambda > 0 \quad (3.1.1)$$

ve

$$f(x, \lambda) = \frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, \quad x > 0, \lambda > 0 \quad (3.1.2)$$

biçiminde ise X rasgele değişkenine Rayleigh dağılımına sahiptir denir. Esasında Rayleigh dağılımı, Weibull dağılımının özel bir halidir. Weibull dağılımına sahip bir Y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla,

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha}, \quad y > 0, \lambda > 0, \alpha > 0 \quad (3.1.3)$$

ve

$$f(y, \alpha, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^\alpha}, \quad y > 0, \lambda > 0, \alpha > 0 \quad (3.1.4)$$

biçiminde verilir. Burada λ , dağılımın ölçek parametresi ve α ise şekil parametresidir. (3.1.3) ve (3.1.4) eşitliklerinde şekil parametresi $\alpha = 2$ olarak

seçilirse, dağılım Rayleigh dağılımına döner. Rayleigh dağılımının tek parametresi olması ve parametre tahmininde karşılaşılan kolaylıktan dolayı, farklı araştırmalarda Weibull dağılımına karşı tercih sebebi olmuştur (Balpetek ve Akpınar, 2017).

X Rayleigh dağılımına sahip bir rasgele değişken ve $p \in (0,1)$ reel bir değer olmak üzere x_p ile Rayleigh dağılımının p . yüzediği gösterilsin. Bu durumda

$$x_p = Q(p, \lambda) = F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R}; p \leq F(x)\} \quad (3.1.5)$$

olmak üzere eşitlik (3.1.5) kullanılarak Rayleigh dağılımının p . yüzdeliği

$$x_p = \lambda \sqrt{-2 \ln(1-p)} \quad (3.1.6)$$

olarak elde edilir. Eşitlik (3.1.6) da $p = 0.5$ olarak seçilirse Rayleigh dağılımının medyanı (M)

$$M = Q(0.5, \lambda) = \lambda \sqrt{2 \ln(2)} \quad (3.1.7)$$

olarak elde edilir.

$r > 0$ bir tamsayı olmak üzere; Rayleigh dağılımının r . momentini $E(X^r)$, eşitlik (3.1.2) ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonu göz önünde bulundurularak,

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = \int_0^{\infty} x^r \frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} dx \quad (3.1.8)$$

integralinin çözümünden elde edilir. Eşitlik (3.1.8) integralini çözebilmek için $u = \frac{x^2}{2\lambda^2}$ dönüşümü göz önüne alınırsa, Rayleigh dağılımının r . momentini

$$E(X^r) = \int_0^{\infty} (u\lambda^2)^{\frac{r}{2}} e^{-u} du = \lambda^r \int_0^{\infty} (u)^{\frac{r}{2}} e^{-u} du = \lambda^r \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) \quad (3.1.9)$$

olarak elde edilebilir. Burada $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} (u)^{a-1} e^{-u} du = (a-1)!$ olup gamma fonksiyonunu ifade etmektedir bkz (Abramowitz ve Stegun 1965). Böylece Rayleigh dağılımının beklenen değeri (3.1.9) eşitliğinde $r = 1$ alınmasıyla,

$$E(X) = \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (3.1.10)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.1.9) eşitliğinde $r = 2$ alınması ve eşitlik (3.1.10)'nın göz önünde bulundurulmasıyla, Rayleigh dağılımının varyansı ve standart sapması sırasıyla,

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{4 - \pi}{2} \lambda^2 \quad (3.1.11)$$

$$Standart Sapma = \sigma = \lambda \sqrt{\frac{4 - \pi}{2}} \quad (3.1.12)$$

olarak elde edilir.

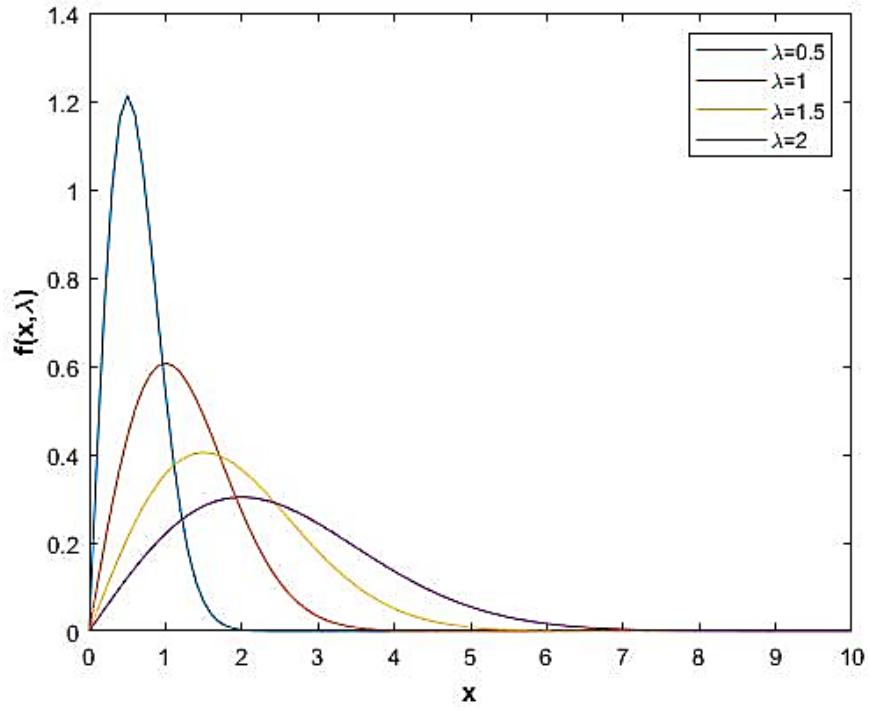
Rayleigh dağılımının yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu ise sırasıyla

$$S(x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, \lambda > 0, \quad x > 0 \quad (3.1.13)$$

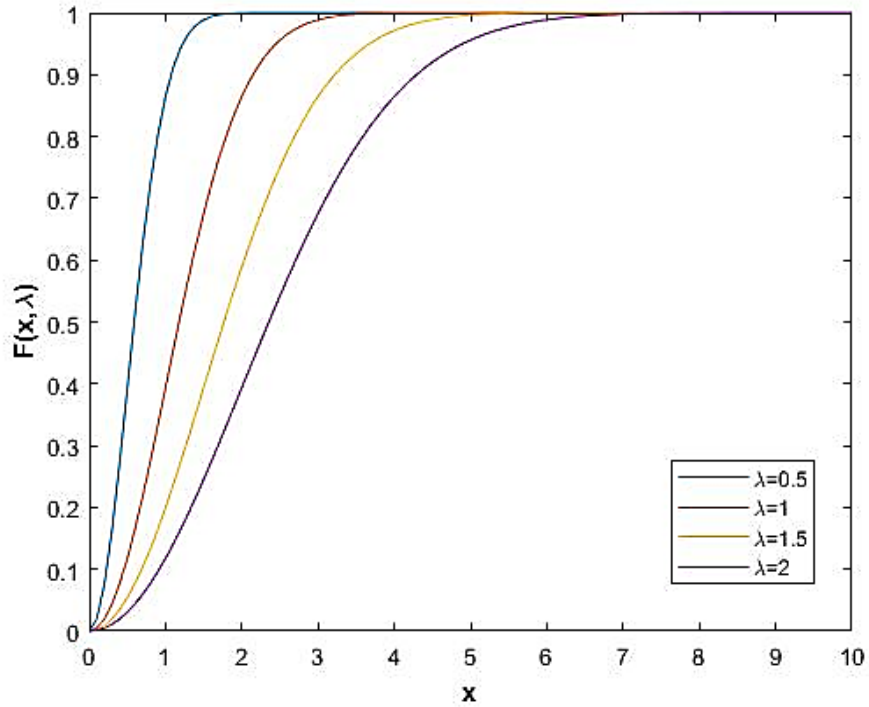
$$H(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{x}{\lambda^2}, \lambda > 0, \quad x > 0 \quad (3.1.14)$$

biçiminde verilir.

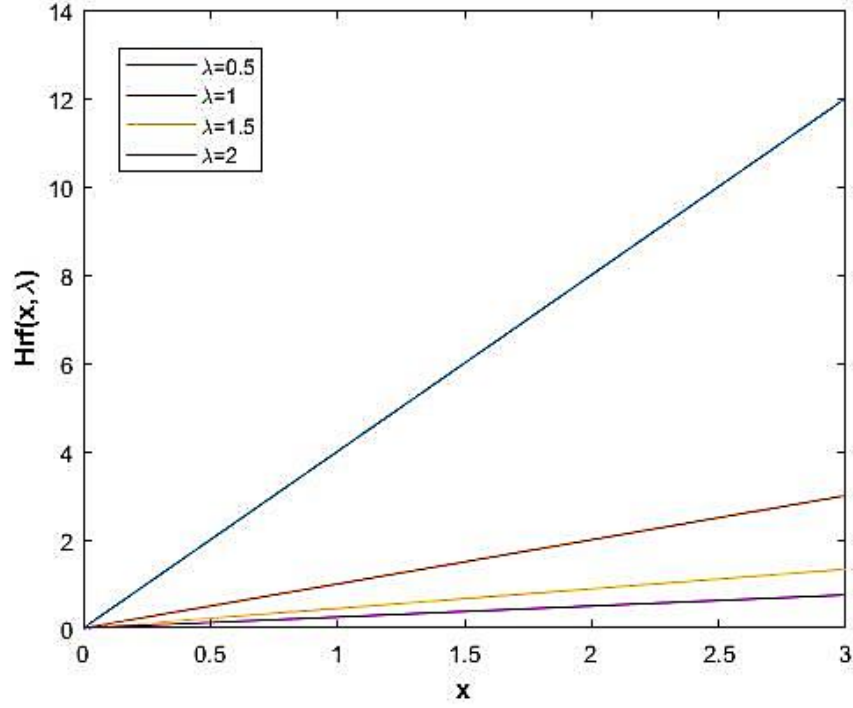
λ parametresinin farklı değerleri için dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun, dağılım fonksiyonunun ve bozulma oranı fonksiyonunun davranışları şekil 3.1. – 3.3. ile örneklendirilmektedir.



Şekil 3.1. Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



Şekil 3.2. Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



Şekil 3.3. Farklı λ değerleri için Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği

3.2. İki-Parametrelili Rayleigh Dağılımı

İki-parametrelili Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu sırasıyla,

$$F(x, \theta, \lambda) = 1 - e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}, \quad x > \theta, \lambda > 0, \theta \in R \quad (3.2.1)$$

ve

$$f(x, \theta, \lambda) = \frac{x - \theta}{\lambda^2} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}, \quad x > \theta, \lambda > 0, \theta \in R \quad (3.2.2)$$

olarak verilir.

Burada λ ölçek parametresi, θ ise dağılımın konum parametresidir. İki-parametrelili Rayleigh dağılımı üç parametrelili Weibull dağılımının özel bir halidir (Dey vd., 2014). İki-parametrelili Rayleigh dağılımının yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonu sırasıyla

$$S(X) = 1 - F(X) = e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}, \quad \lambda > 0, \quad x > \theta \quad (3.2.3)$$

ve

$$H(X) = \frac{f(x)}{S(X)} = \frac{(x-\theta)}{\lambda^2}, \quad \lambda > 0, \quad x > \theta \quad (3.2.4)$$

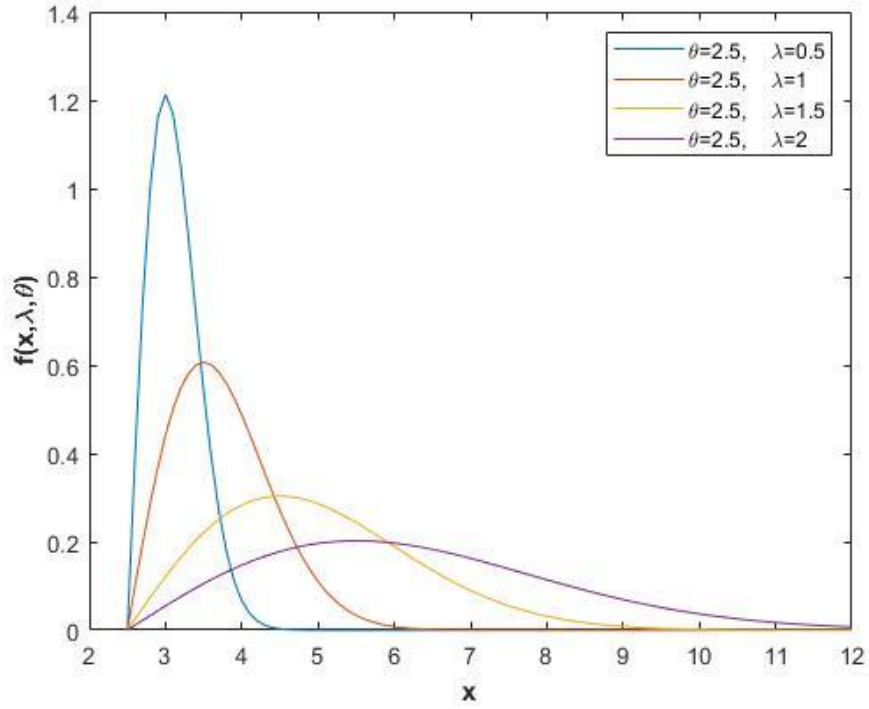
dır. Dağılımın diğer bazı temel karakteristikleri ise, Rayleigh dağılımının temel özellikleri göz önünde bulundurarak Çizelge 3.1. de verildiği biçimde elde edilir.

Çizelge 3. 1. İki-parametrelili Rayleigh dağılımının temel karakteristik özellikleri

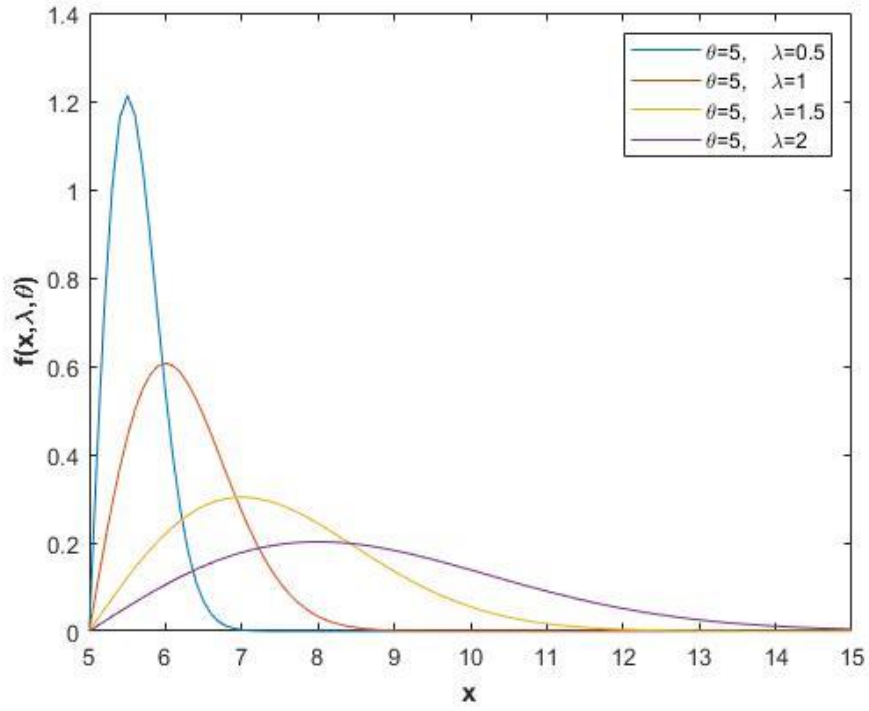
r . Moment $E(X^r)$	$\lambda^r \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) + \theta$
Beklenen Değer $E(X)$	$\lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \theta$
Varyans $Var(X)$	$\frac{4 - \pi}{2} \lambda^2$
Standart Sapma	$\lambda \sqrt{\frac{4 - \pi}{2}}$
p . Yüzdellik	$\lambda \sqrt{-2 \ln(1 - p)} + \theta$
Medyan	$\lambda \sqrt{2 \ln(2)} + \theta$
Tepe Değer	$\lambda + \theta$
Moment Çıkarıcı Fonksiyon $M_x(t)$	$\frac{e^{-\left(\frac{\theta^2}{2}\right)}}{2} + \frac{\lambda t}{2} e^{\theta t + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\theta + \lambda^2 t}{\lambda \sqrt{2}} \right) \right]$
Karakteristik Fonksiyon $\phi_x(t)$	$\frac{e^{-\left(\frac{\theta^2}{2\lambda^2}\right)}}{2} - \frac{\lambda t}{2} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 t^2 + i t \theta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{erfi} \left(\frac{i \theta + \lambda^2 t}{\lambda \sqrt{2}} \right) \right]$

Burada $erf(a) = \int_0^a e^{-t^2} dt$ şeklinde tanımlanan hata fonksiyonudur. Ayrıca, $erfi(a) = erf(ia)/i$ şeklinde tanımlanan sanal hata fonksiyonudur bkz (Bergsma, 2006)

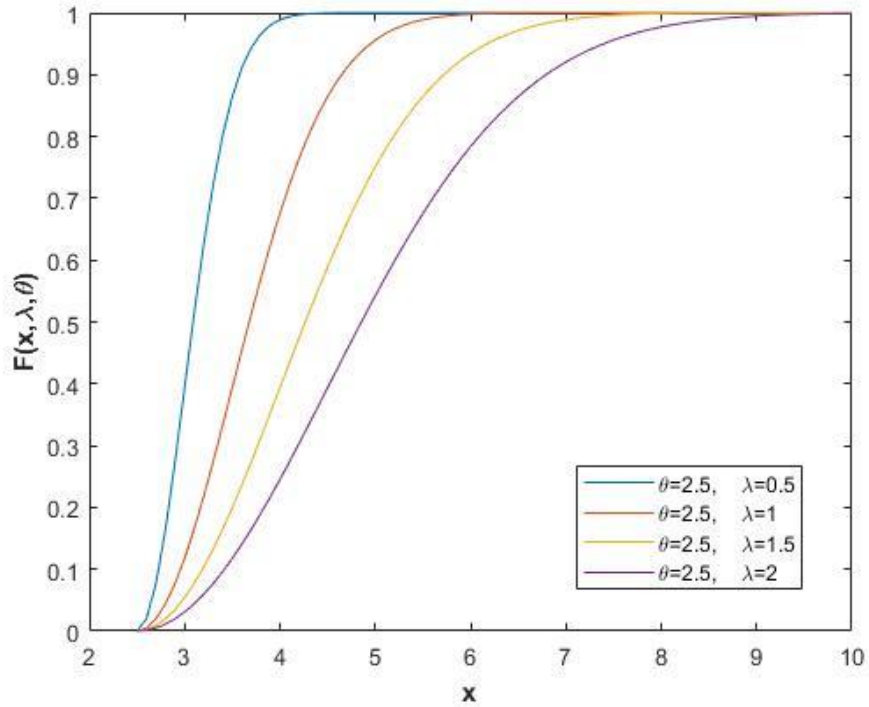
İki-parametrelili Rayleigh dağılımının λ ve θ parametresinin farklı değerleri için olasılık yoğunluk fonksiyonunun, dağılım fonksiyonunun ve bozulma oranı fonksiyonlarının davranışları şekil 3.4. – 3.9. ile verilen grafiklerde gösterilmiştir.



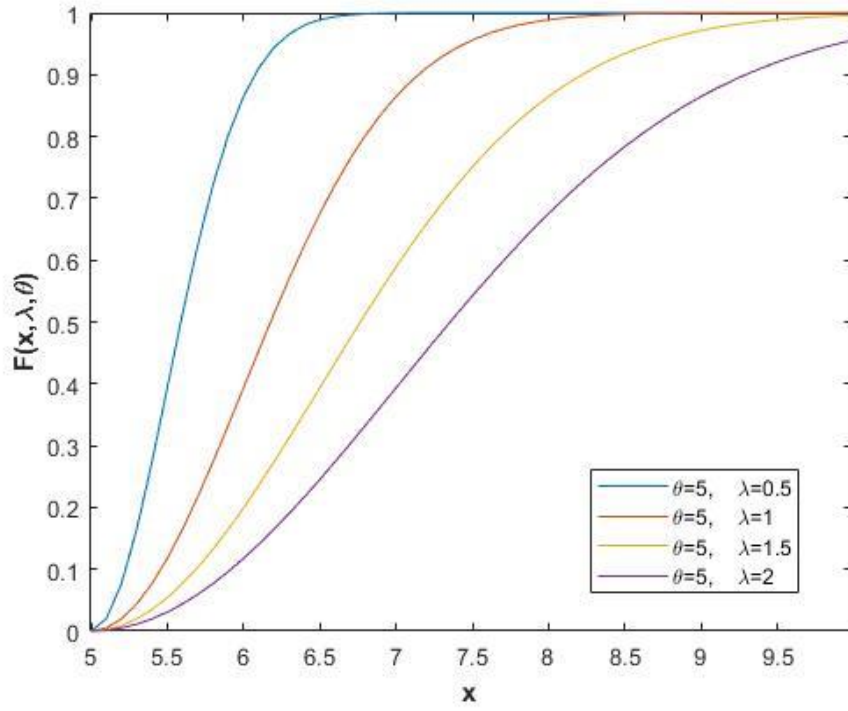
Şekil 3.4. $\theta =2.5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



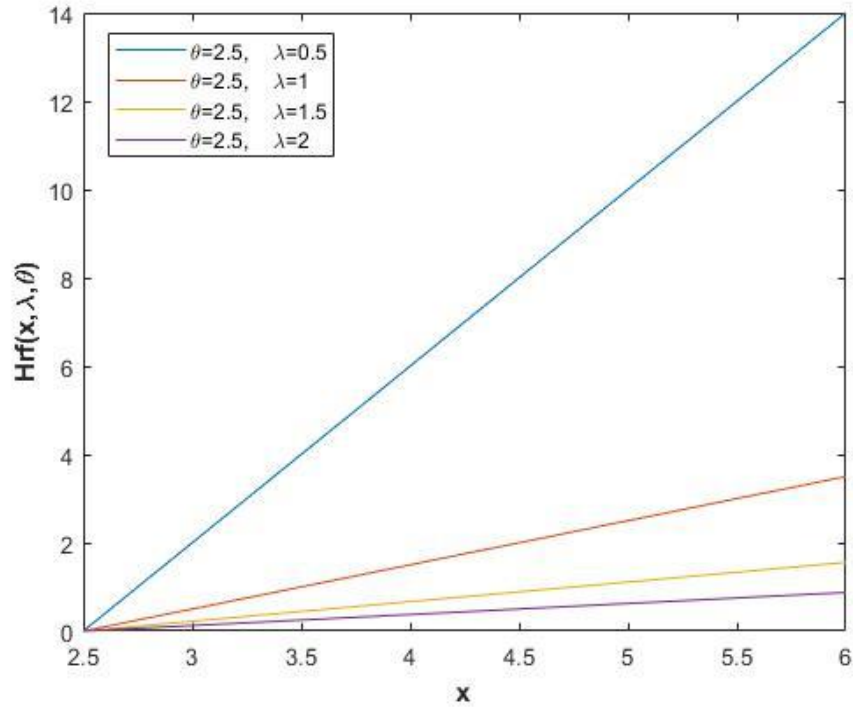
Şekil 3.5. $\theta = 5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



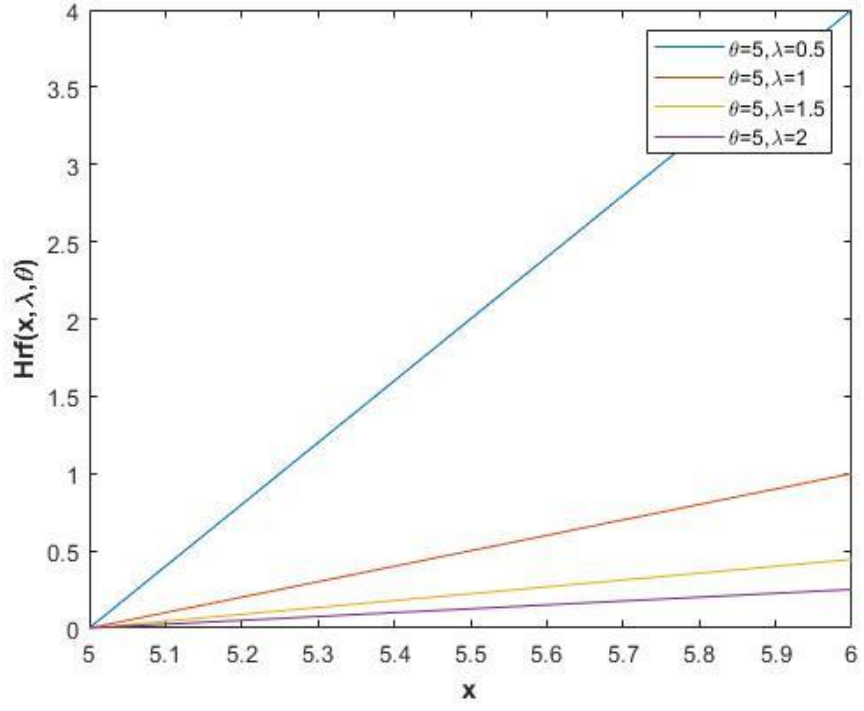
Şekil 3.6. $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



Şekil 3.7. $\theta = 5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



Şekil 3.8. $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



Şekil 3.9. $\theta = 5$ alındığında farklı λ değerleri için iki-parametrelili Rayleigh dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği

4. ALFA KUVVET DÖNÜŞTÜRÜLMÜŞ RAYLEIGH DAĞILIMI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde alfa kuvvet dönüştürülmüş Rayleigh (APR) dağılımı ve alfa kuvvet dönüştürülmüş iki-parametrelili Rayleigh (APTR) dağılımı türetilerek APR ve APTR dağılımlarının temel karakteristikleri elde edilmektedir.

4.1. APR Dağılımı

APT yönteminde temel dağılım olarak Rayleigh dağılımı seçildiğinde, Rayleigh dağılımına karşılık gelen APR dağılımının dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu, sırasıyla

$$F_{APR}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}} - 1}{\alpha - 1} & , \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} & , \alpha = 1, \lambda > 0, x > 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$f_{APR}(x) = \begin{cases} \frac{\log \alpha}{\alpha - 1} \frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \alpha^{1-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}} & , \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > 0 \\ \frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} & , \alpha = 1, \lambda > 0, x > 0 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

biçiminde elde edilir.

4.2. APR Dağılımının Temel Özellikleri

APR dağılımının yaşam fonksiyonu $S_{APR}(x)$ ve bozulma oranı fonksiyonu $H_{APR}(x)$ eşitlik (4.2.1) ve eşitlik (4.2.2) 'de verildiği gibidir,

$$S_{APR}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \log \alpha}{\alpha - 1} \left(1 - \alpha^{-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}} \right), & \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > 0 \\ e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}, & \alpha = 1, \lambda > 0, x > 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

$$H_{APR}(x) = \begin{cases} \frac{\frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \alpha e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \log \alpha}{1 - \alpha^{-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > 0 \\ \frac{x}{\lambda^2}, & \alpha = 1, \lambda > 0, x > 0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

$x_p, F_{APR}(x)$ ' in p . çeyrekliğini göstermek üzere, $\alpha \neq 1$ için eşitlik (2.7) den

$$x_p = F^{-1} \left(\frac{\log(1 + (\alpha - 1)p)}{\log \alpha} \right) \quad (4.2.3)$$

olup, eşitlik (3.1.6) ile verilen Rayleigh dağılımının yüzdeler fonksiyonu göz önünde bulundurulursa

$$x_p = \lambda \sqrt{2 \ln \left(\frac{\ln \alpha}{\ln \frac{\alpha}{(p(\alpha - 1) + 1)}} \right)} \quad (4.2.4)$$

olarak bulunur. Dağılımın medyanı, (4.2.4) denkleminde $p = 1/2$ seçilip yerinde kullanılmasıyla

$$M = x_p = \lambda \sqrt{2 \ln \left(\frac{\ln \alpha}{\ln \frac{2\alpha}{(\alpha + 1)}} \right)} \quad (4.2.5)$$

olur.

Diğer taraftan dağılımın tepe değerini elde edebilmek için (4.1.2) eşitliğinin x ' e göre birinci türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesiyle,

$$\frac{\partial f_{APR}(x)}{\partial x} = \frac{\ln \alpha}{(\alpha - 1)\lambda^2} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \alpha^{1-e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}} (1 + x^2 + x \ln \alpha) = 0 \quad (4.2.6)$$

denkleminin sağlanabilmesi için (4.2.6) eşitliğinin sağlanabilmesi için

$$(1 + x^2 + x \ln \alpha) = 0 \quad (4.2.7)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Böylece (4.2.7.) eşitliğinin çözümünden dağılımın tepe değeri,

$$x = \frac{1}{2} \left[-\ln \alpha + \sqrt{\ln^2 \alpha - 4} \right], \quad \alpha \geq e^2 \quad (4.2.8)$$

olarak elde edilir.

X rasgele değişkeni α ve λ parametreleri ile APR dağılımına sahip bir rasgele değişken olmak üzere;

$$\alpha^{-u} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k u^k}{k!} \quad (4.2.9)$$

$$\int_0^{\infty} u^n (\log u)^m du = u^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m! (\log u)^{m-k}}{(m-k)! (n+1)^{k+1}} \quad (4.2.10)$$

açılımlarının dikkate alınmasıyla, $APR(\alpha, \lambda)$ dağılımının moment çıkarıcı fonksiyonu (MÇF) $t < \lambda$ için

$$M_{APR}(t) = \frac{\lambda \alpha}{1 - \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^{k+1}}{(k\lambda - t + \lambda)k!} \quad (4.2.11)$$

olarak elde edilir.

X^r rasgele değişkeninin r . ($r = 1, 2, \dots$) momenti (4.2.11) eşitliğinin göz önünde bulundurulmasıyla

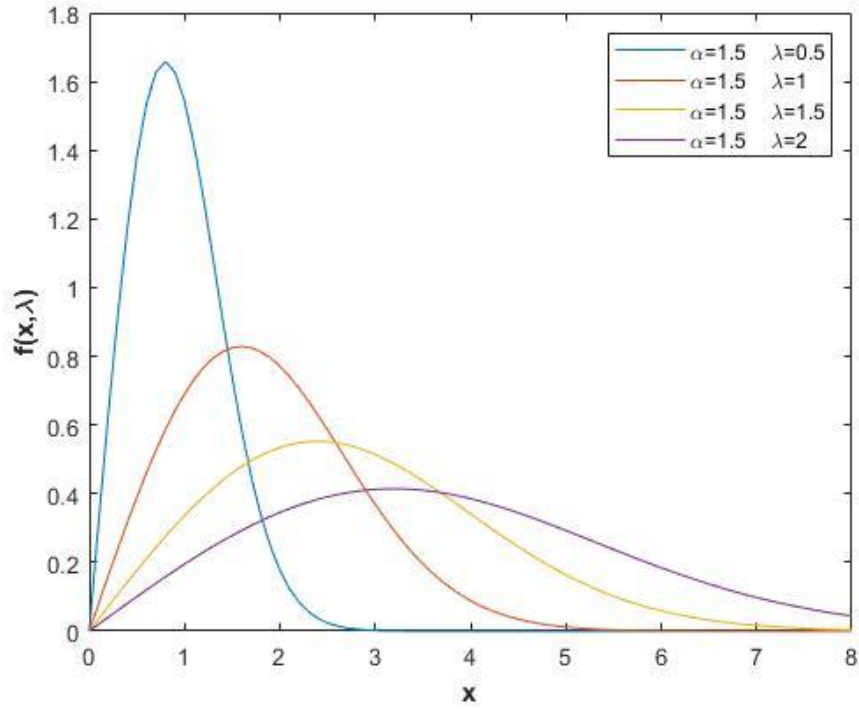
$$E(X^r) = \frac{\alpha r!}{\lambda r(1 - \alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k}{k^r k!} \quad (4.2.12)$$

olarak elde edilir. Böylece $APR(\alpha, \lambda)$ dağılımının beklenen değeri (4.2.12) eşitliğinde $r = 1$ alınmasıyla

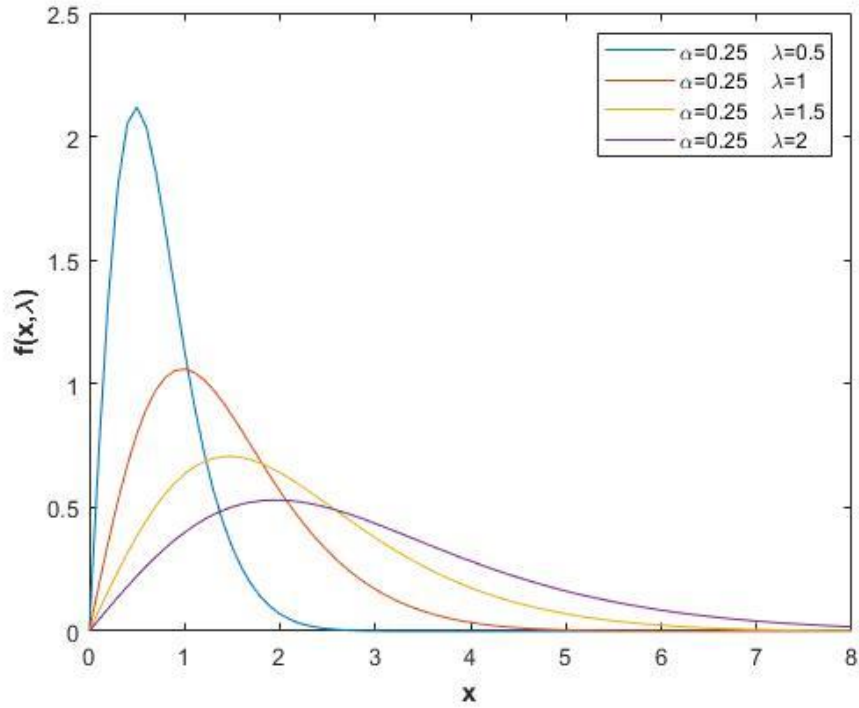
$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda(1 - \alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k}{k k!} \quad (4.2.13)$$

olarak bulunur.

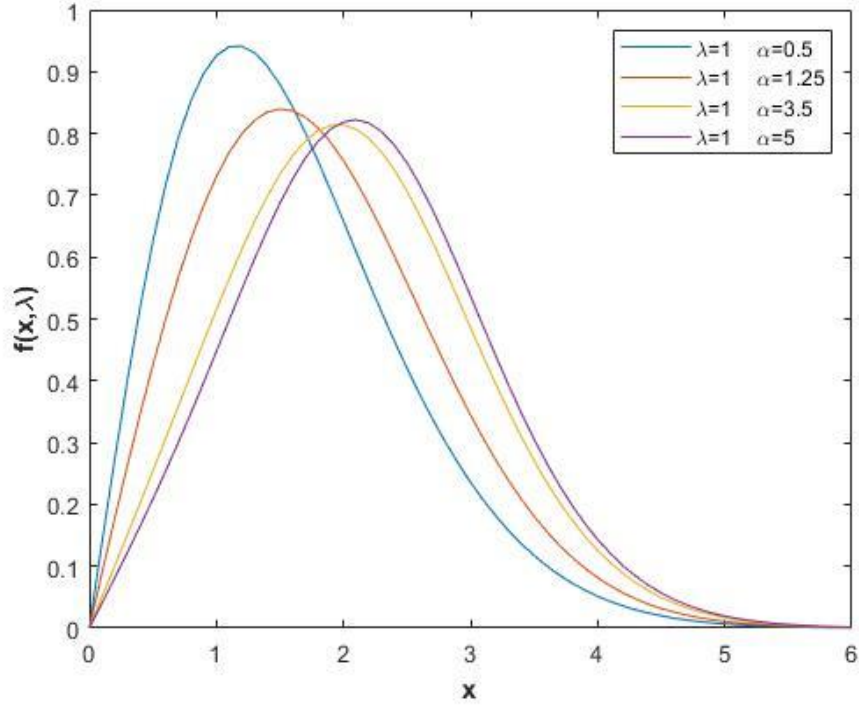
APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun davranışını gösterebilmek amacıyla λ ve α parametrelerinin farklı değerleri için çizilmiş olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 4.1. - 4.4. de verilmiştir.



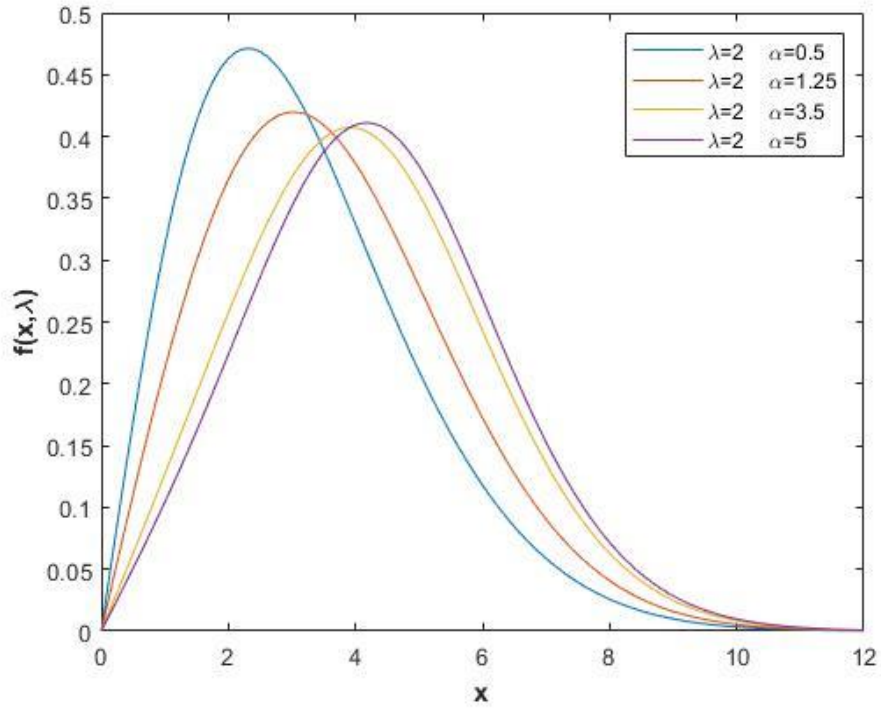
Şekil 4.1. $\alpha = 1.5$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



Şekil 4.2. $\alpha = 0.25$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

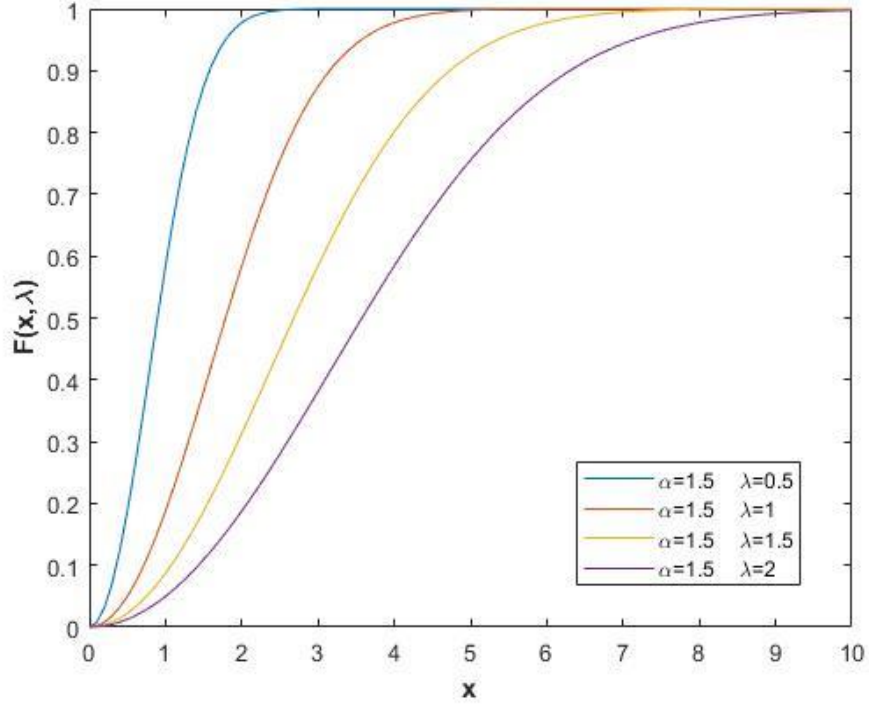


Şekil 4.3. $\lambda = 1$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

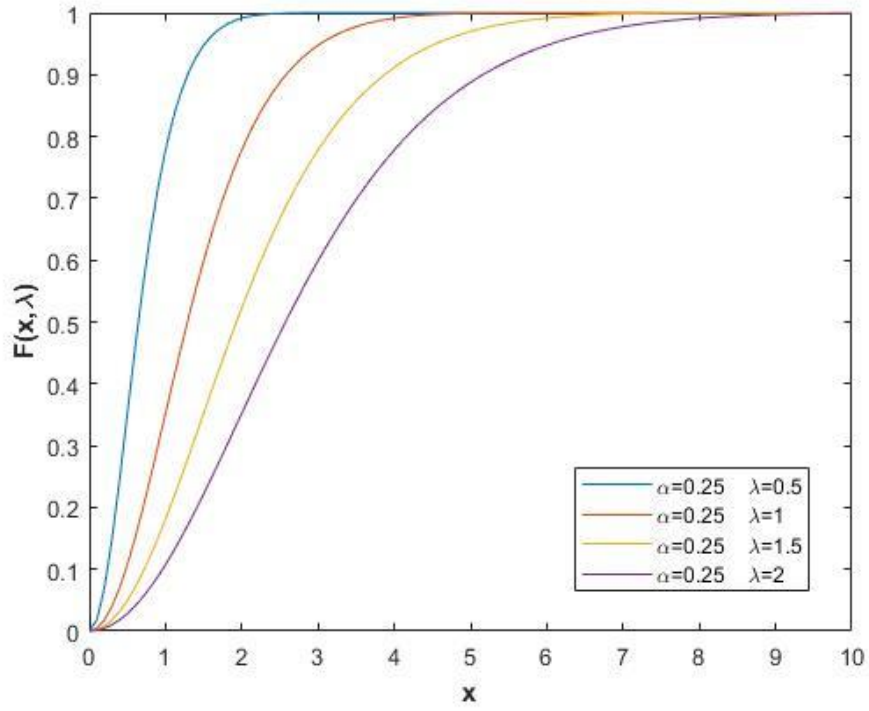


Şekil 4.4. $\lambda = 2$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

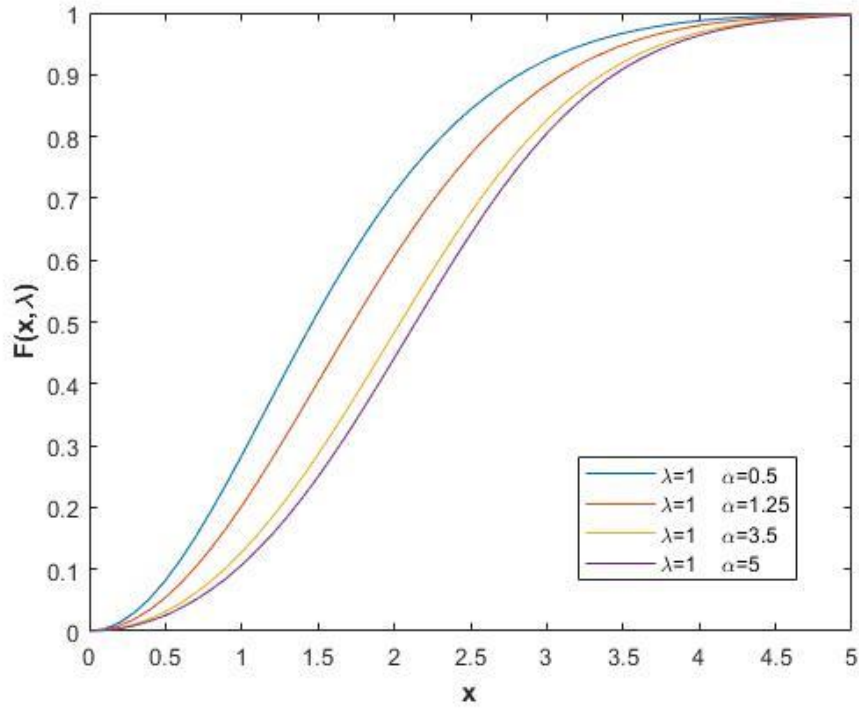
Şekil 4.5. -4.8. λ ve α parametrelerinin farklı değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonunun davranışını örneklendirmektedir.



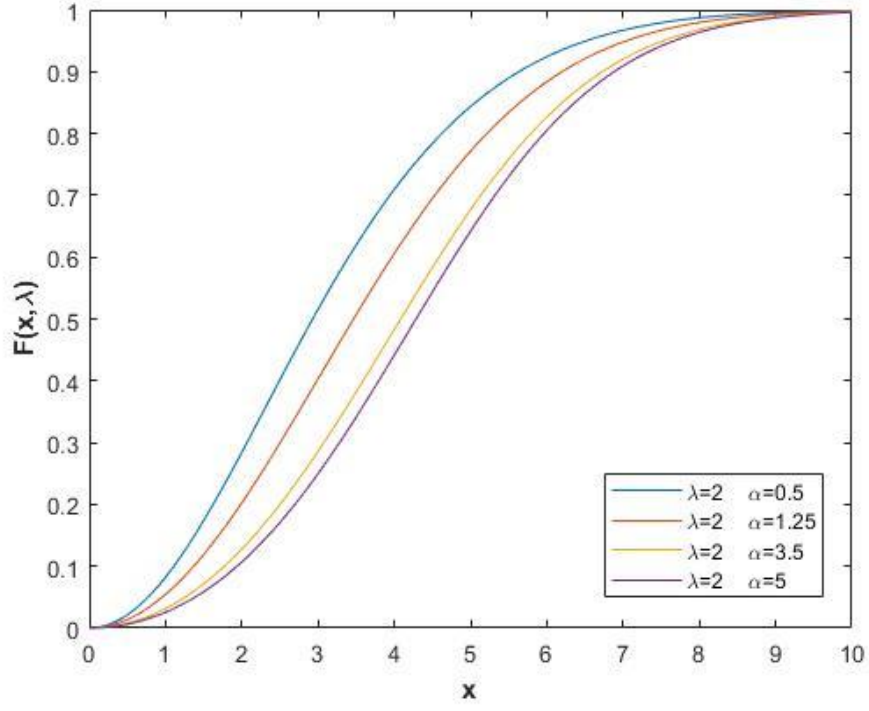
Şekil 4.5. $\alpha = 1.5$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



Şekil 4.6. $\alpha = 0.25$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği

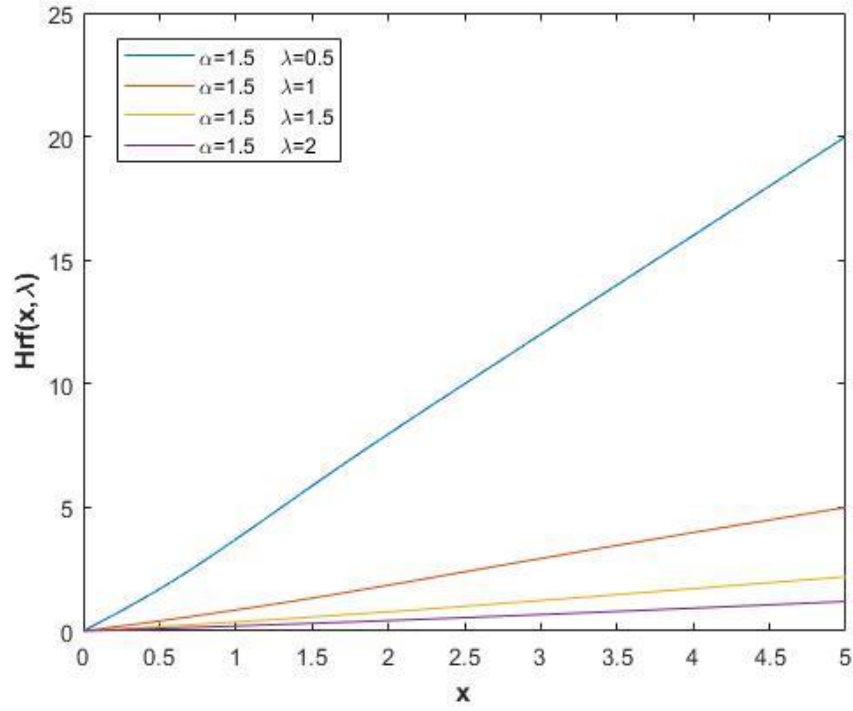


Şekil 4.7. $\lambda = 1$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği

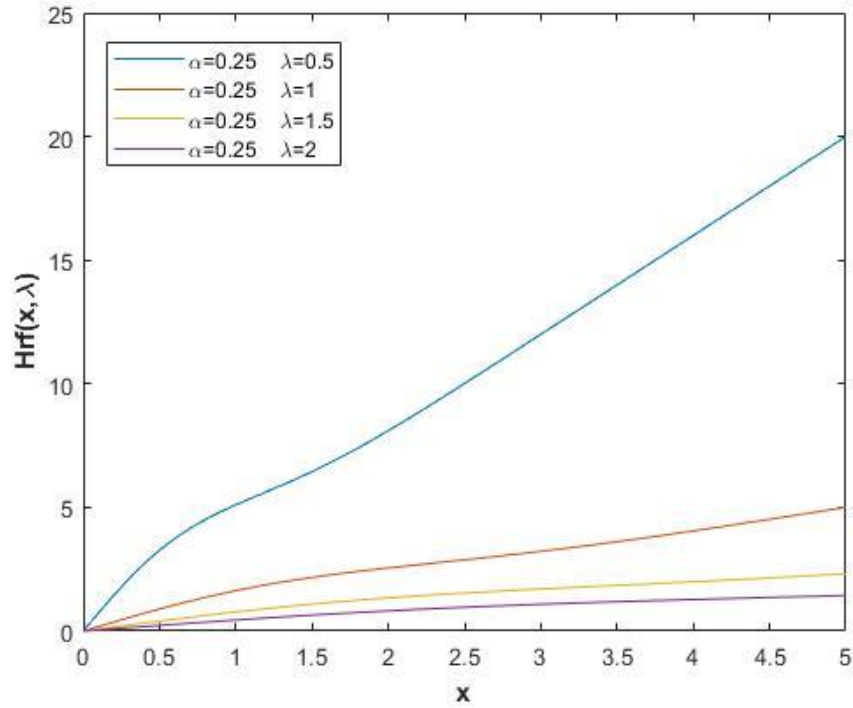


Şekil 4.8. $\lambda = 2$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği

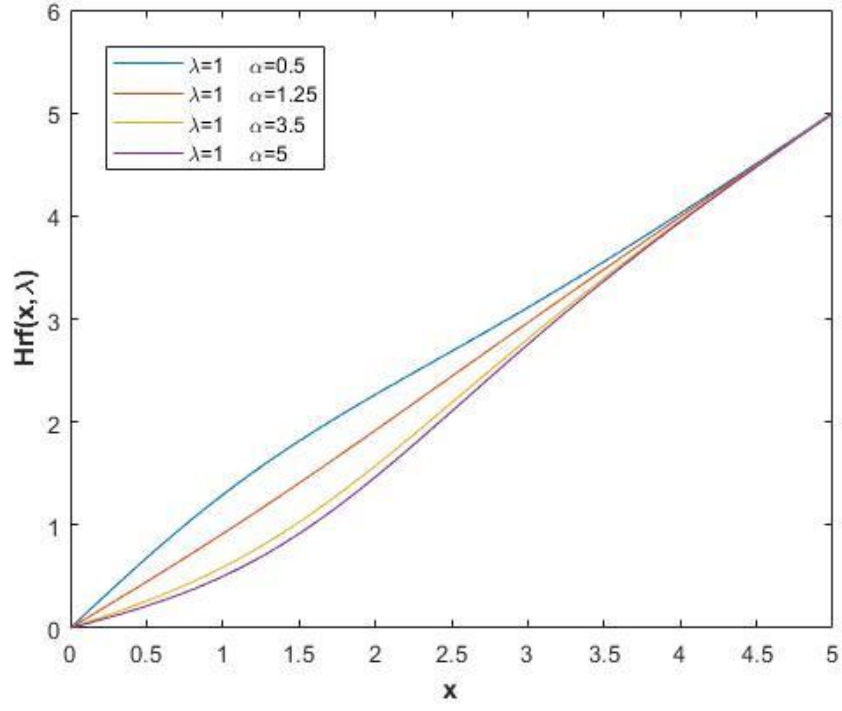
Şekil 4.9. -4.12. λ ve α parametrelerinin farklı değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonun davranışını örneklendirmektedir.



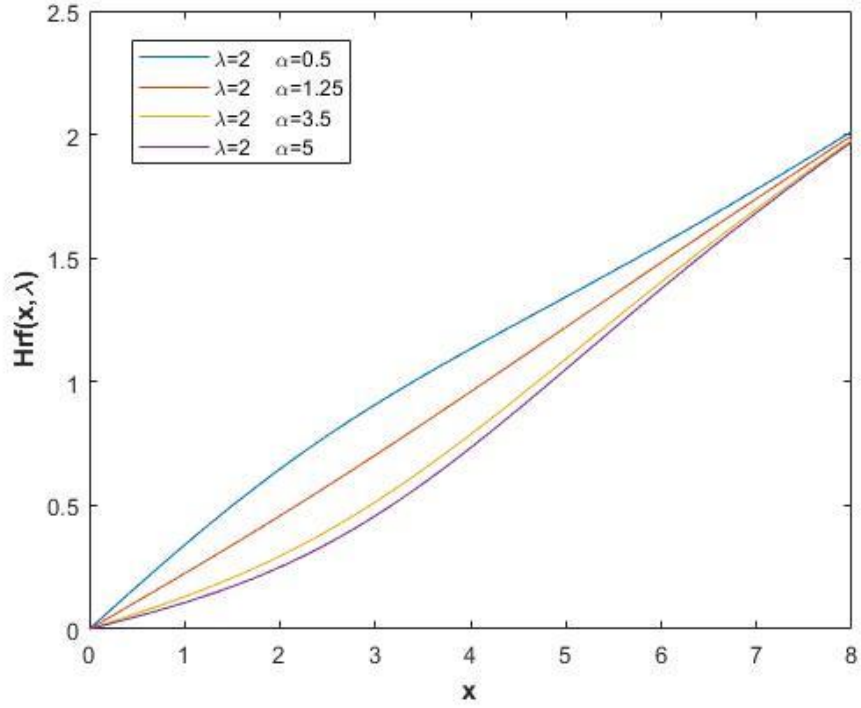
Şekil 4.9. $\alpha = 1.5$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



Şekil 4.10. $\alpha = 0.25$ alındığında farklı λ değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



Şekil 4.11. $\lambda = 1$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



Şekil 4.12. $\lambda = 2$ alındığında farklı α değerleri için APR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği

4.3. APTR Dağılımı

Bu bölümde, APT yönteminde temel dağılım olarak iki-parametrelili Rayleigh dağılımı seçilerek, iki-parametrelili Rayleigh dağılımına karşılık gelen APTR dağılımı türetilmektedir.

APTR dağılımının dağılım fonksiyonu (2.1) ile verilen eşitlikte (3.2.1) eşitliği ile verilen iki-parametrelili Rayleigh dağılımının dağılım fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$F_{APTR}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^{1-e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}} - 1}{\alpha - 1} & , \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > \theta \\ 1 - e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}} & , \alpha = 1, \lambda > 0, x > \theta \end{cases} \quad (4.3.1)$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu, eşitlik (2.2) de iki-parametrelili Rayleigh dağılımının (3.2.2) eşitliği ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$f_{APTR}(x) = \begin{cases} \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1} \frac{x - \theta}{\lambda^2} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}} \alpha^{1-e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}} & , \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > \theta \\ \frac{x - \theta}{\lambda^2} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}} & , \alpha = 1, \lambda > 0, x > \theta \end{cases} \quad (4.3.2)$$

biçiminde elde edilir.

4.4. APTR Dağılımının Temel Özellikleri

APTR dağılımının yaşam fonksiyonu $S_{APTR}(x)$ ve bozulma oranı fonksiyonu $H_{APTR}(x)$, (4.3.1) eşitliği ile verilen dağılım fonksiyonunu ve (4.3.2) eşitliği ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun göz önünde bulundurulmasıyla, sırasıyla

$$S_{APTR}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha - 1} \left(1 - \alpha^{-e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}} \right), & \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > \theta \\ e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}, & \alpha = 1, \lambda > 0, x > \theta \end{cases} \quad (4.4.1)$$

ve

$$H_{APTR}(x) = \begin{cases} \frac{\frac{(x-\theta)}{\lambda^2} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}} \alpha e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}} \ln \alpha}{1 - \alpha^{-e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\lambda^2}}}}, & \alpha > 0, \alpha \neq 1, \lambda > 0, x > \theta \\ \frac{(x-\theta)}{\lambda^2}, & \alpha = 1, \lambda > 0, x > \theta \end{cases} \quad (4.4.2)$$

biçiminde elde edilir.

x_p ile APTR dağılımının p . yüzdeliği gösterilsin, $\alpha \neq 1$ için Çizelge 3.1. de verilen iki-parametrelili Rayleigh dağılımının p . yüzdeliği ve (4.2.4) eşitliğinin dikkate alınmasıyla

$$x_p = \sqrt{2\lambda^2 \ln \left(\frac{\ln \alpha}{\ln \frac{\alpha}{(p(\alpha - 1) + 1)}} \right)} + \theta \quad (4.4.3)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (4.4.3) eşitliğinde $p = 1/2$ yazılarak, APTR dağılımının medyanı

$$M = x_p = \sqrt{2\lambda^2 \ln \left(\frac{\ln \alpha}{\ln \frac{2\alpha}{\alpha + 1}} \right)} + \theta \quad (4.4.4)$$

olarak elde edilir.

Lemma 1. Varsayalım X , (4.3.2) eşitliği ile verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. $a > 0, L > 0, r \geq 0$ ve $\delta \geq 0$, reel sayıları için

$$\xi(a, L, r, \delta) = \int_0^{\infty} x^{r+1} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2L}}\right)^2} \alpha^{1-e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2L}}\right)^2}} e^{\delta x} dx \quad (4.4.5)$$

integralinin sonucu

$$\begin{aligned} \xi(a, L, r, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \left\{ \frac{(\ln a)^i}{i!} (-1)^j \binom{i}{j} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2 (j+1)^{\frac{1}{2}(-r-3)} \times \right. \\ \left. \left(\delta \Gamma\left(\frac{r+3}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{r+3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\delta^2}{4(j+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2 (j+1)} {}_1F_1\left(\frac{r+2}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\delta^2}{4(j+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2L}}\right)^2}\right) \right) \right\} \quad (4.4.6) \end{aligned}$$

dır. Burada ${}_1F_1$ hipergeometrik fonksiyonu ifade etmektedir bkz(Abramowitz ve Stegun, 1965).

Lemma 1'in kullanılmasıyla APTR dağılımının r . momenti, $E(X^r)$

$$E(X^r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, r, 0) \right)^k \theta^{r-k} \quad (4.4.7)$$

moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t)$

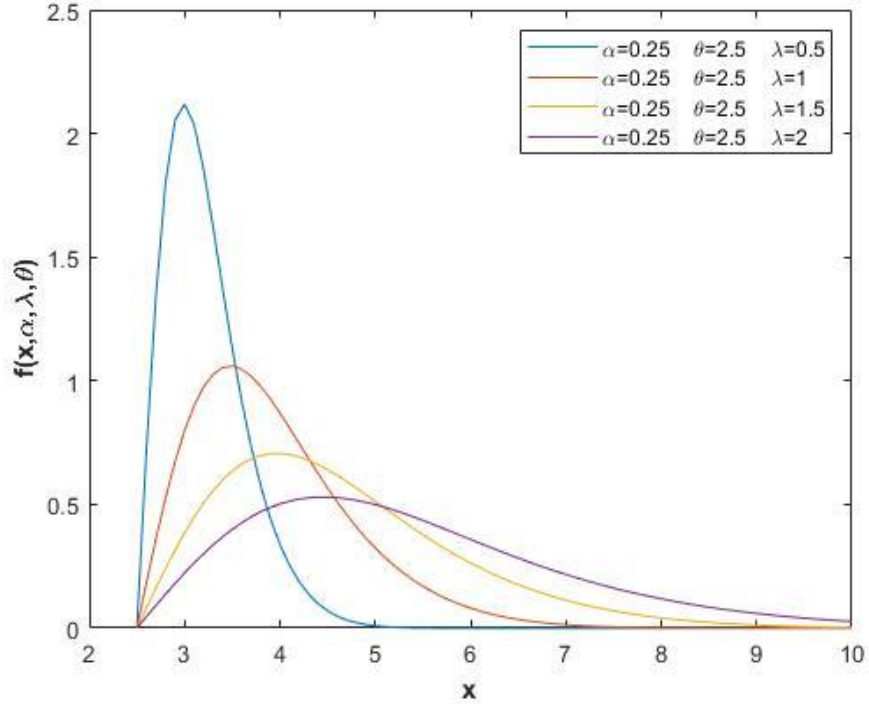
$$M_X(t) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 0, t) \right)^k \theta^{r-k} \quad (4.4.8)$$

ve karakteristik fonksiyonu $\phi_X(t)$

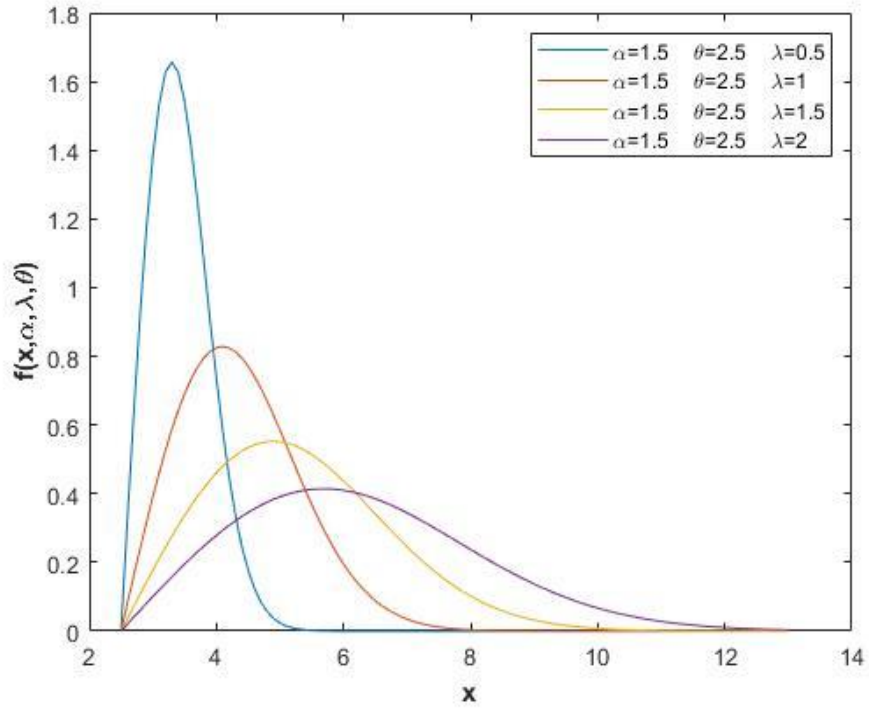
$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 0, it) \right)^k \theta^{r-k} \quad (4.4.9)$$

olarak hesaplanır.

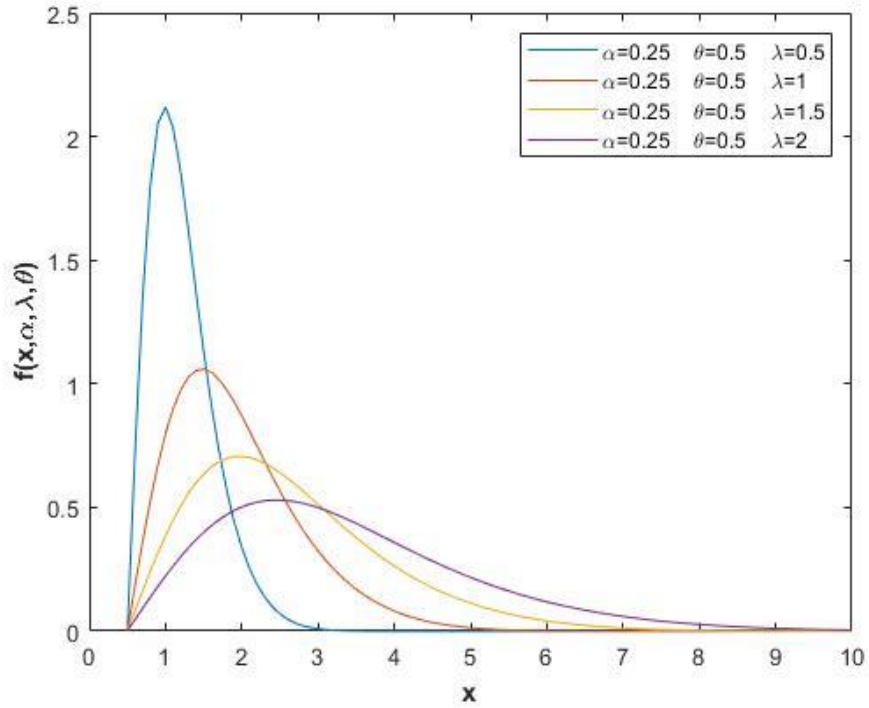
APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonunun davranışını gösterebilmek amacıyla λ , θ ve α parametrelerinin farklı değerleri için çizilmiş olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 4.13. - 4.20. de verilmiştir.



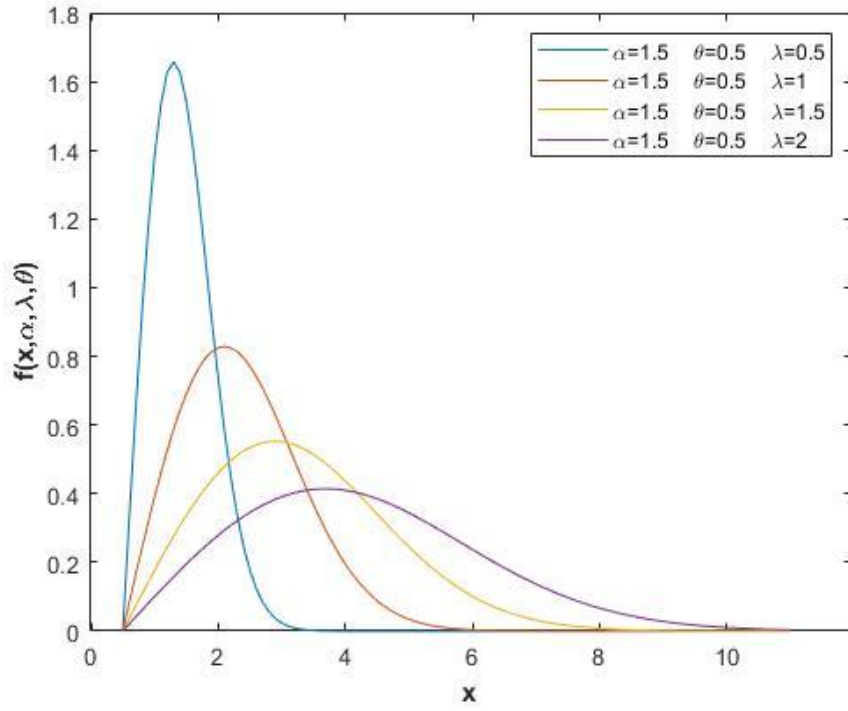
Şekil 4.13. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



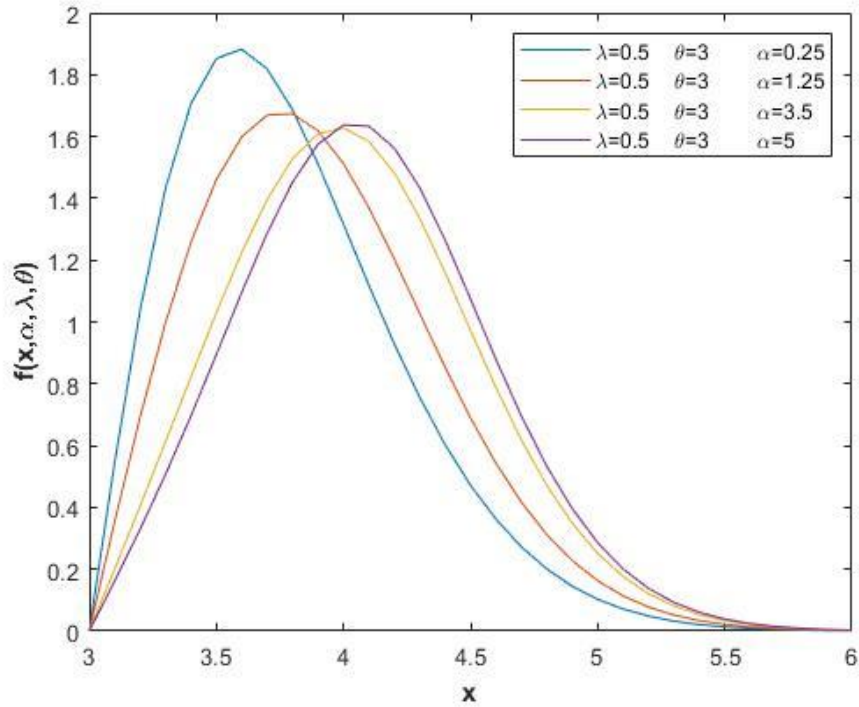
Şekil 4.14. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



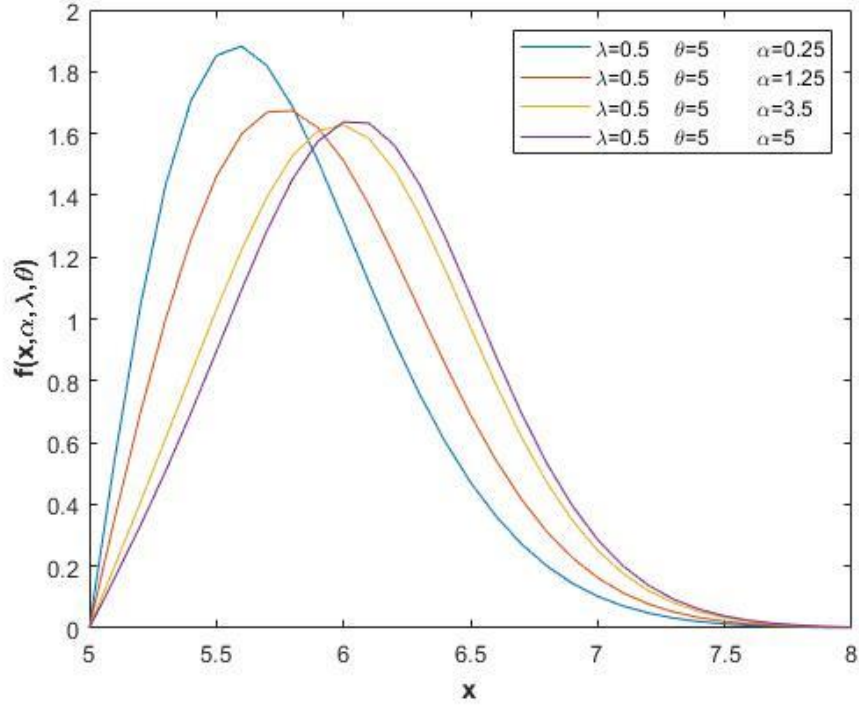
Şekil 4.15. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



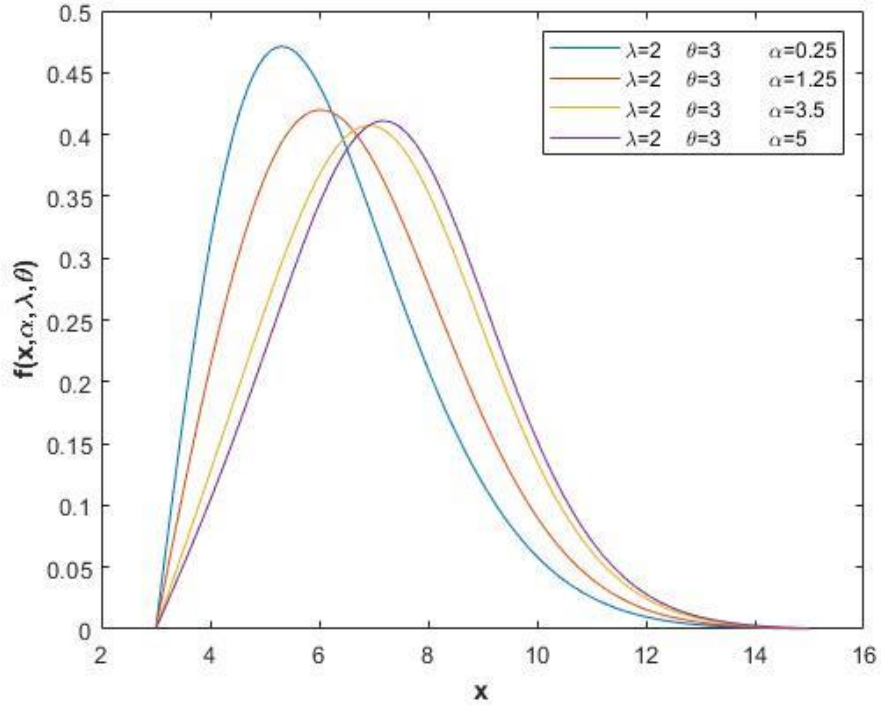
Şekil 4.16. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



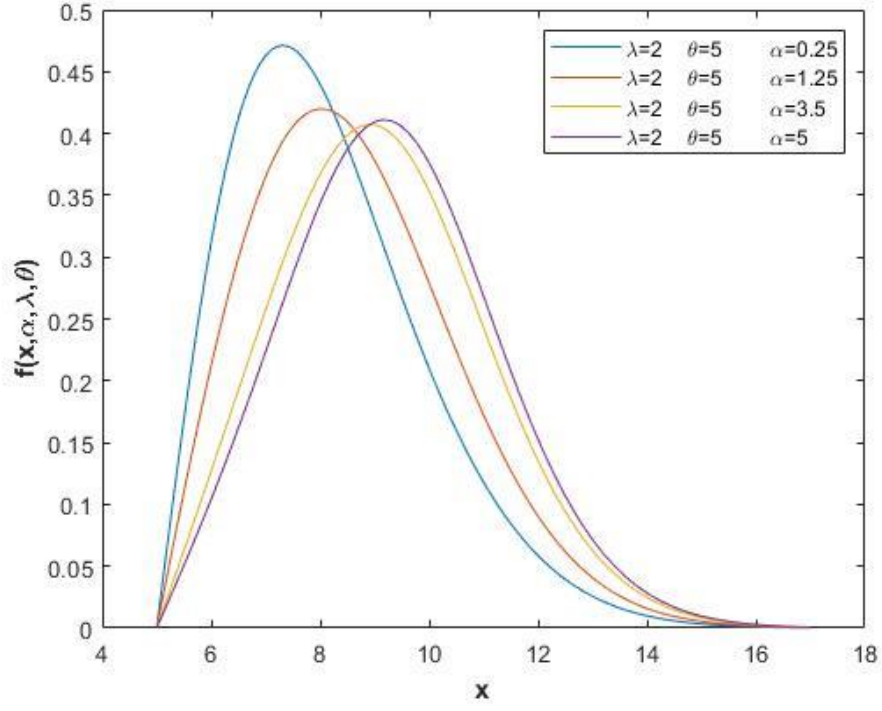
Şekil 4.17. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



Şekil 4.18. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

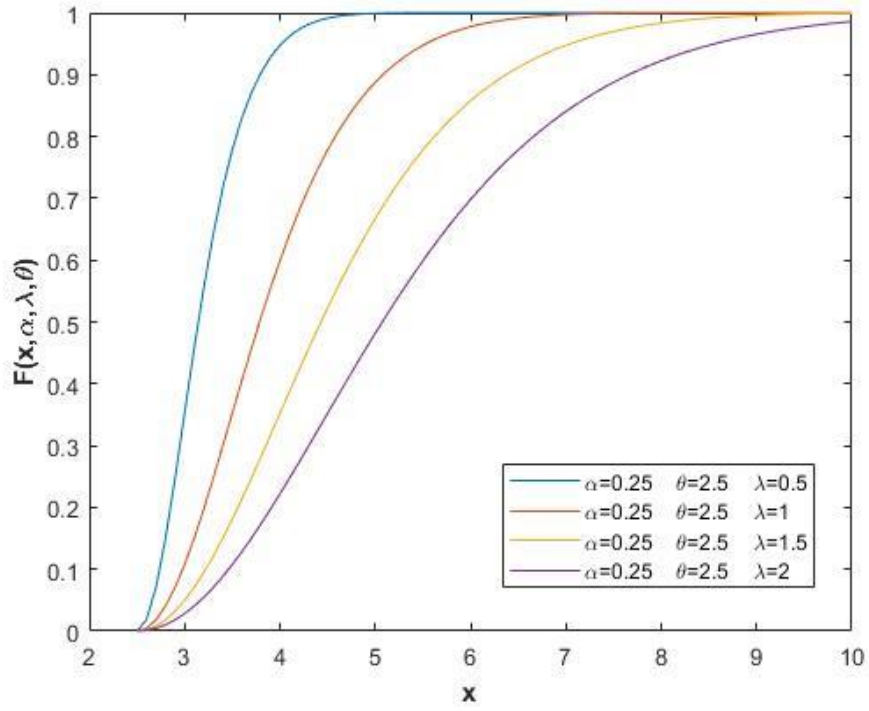


Şekil 4.19. $\lambda = 2$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

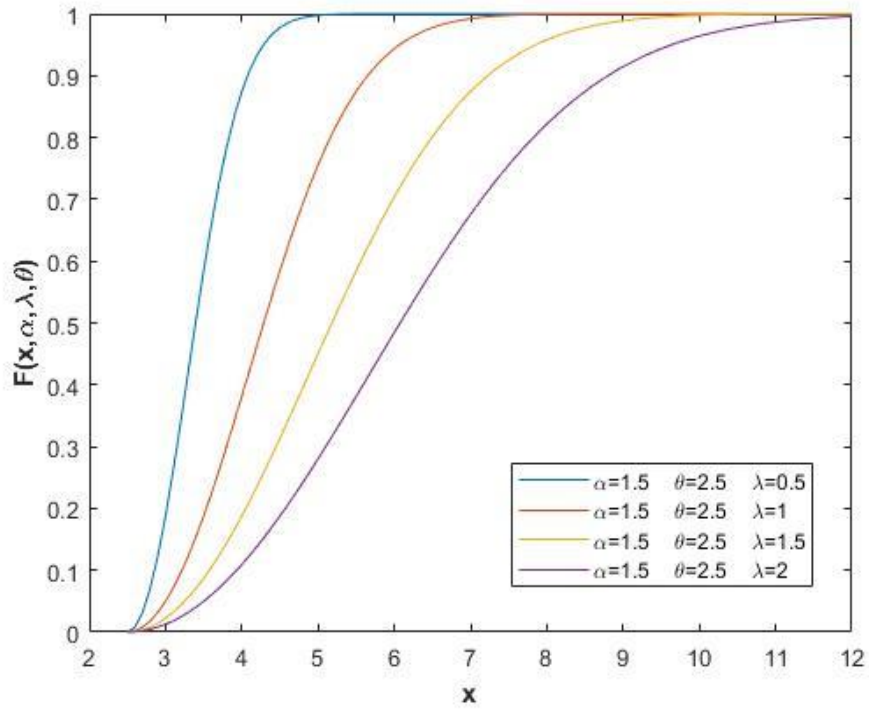


Şekil 4.20. $\lambda = 2$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği

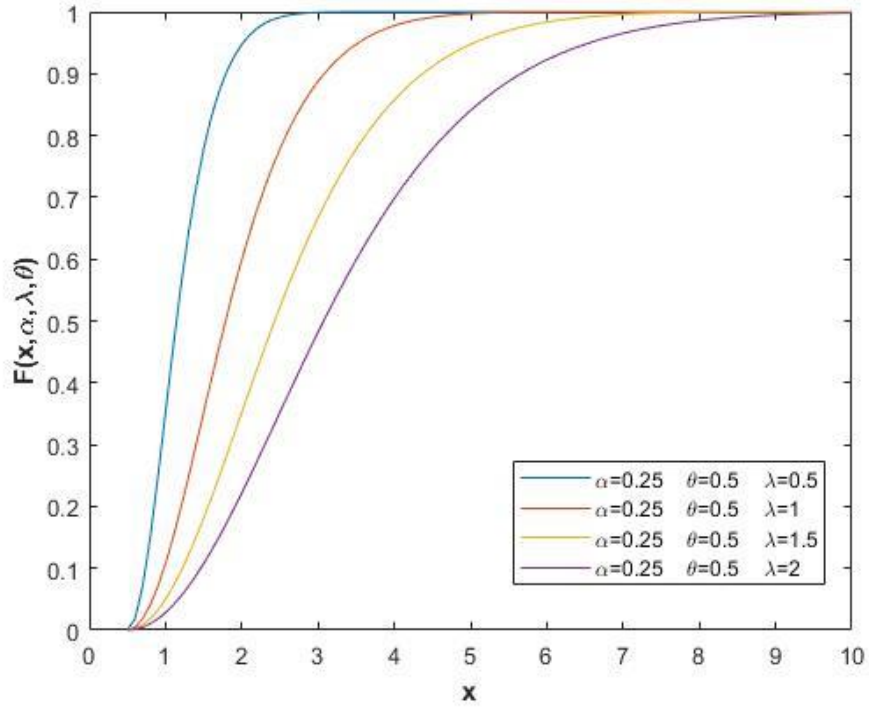
Şekil 4.21. -4.28. de λ , θ ve α parametrelerinin farklı değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonunun davranışını göstermektedir.



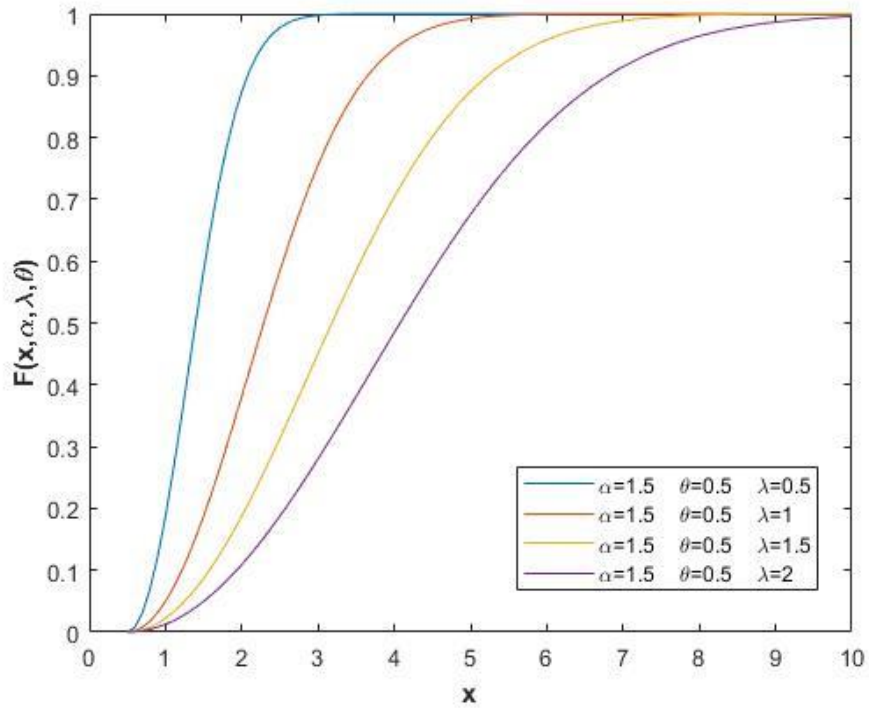
Şekil 4.21. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



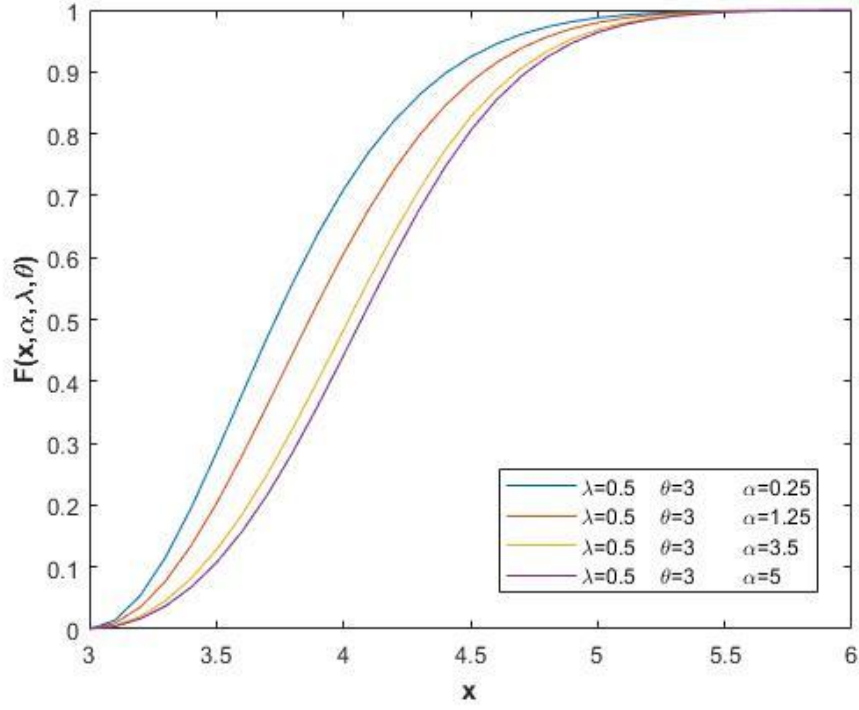
Şekil 4.22. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



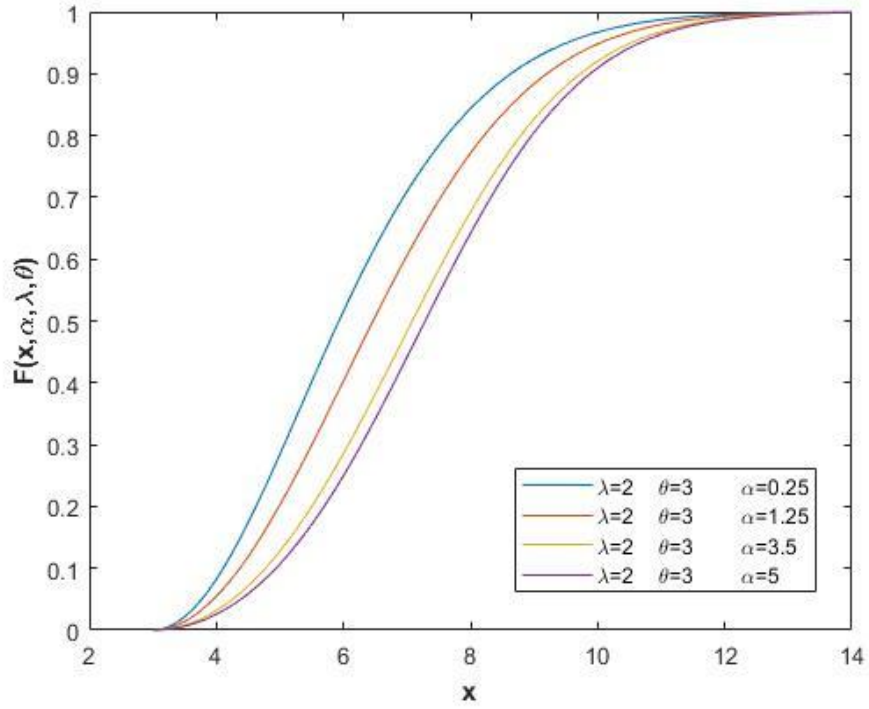
Şekil 4.23. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



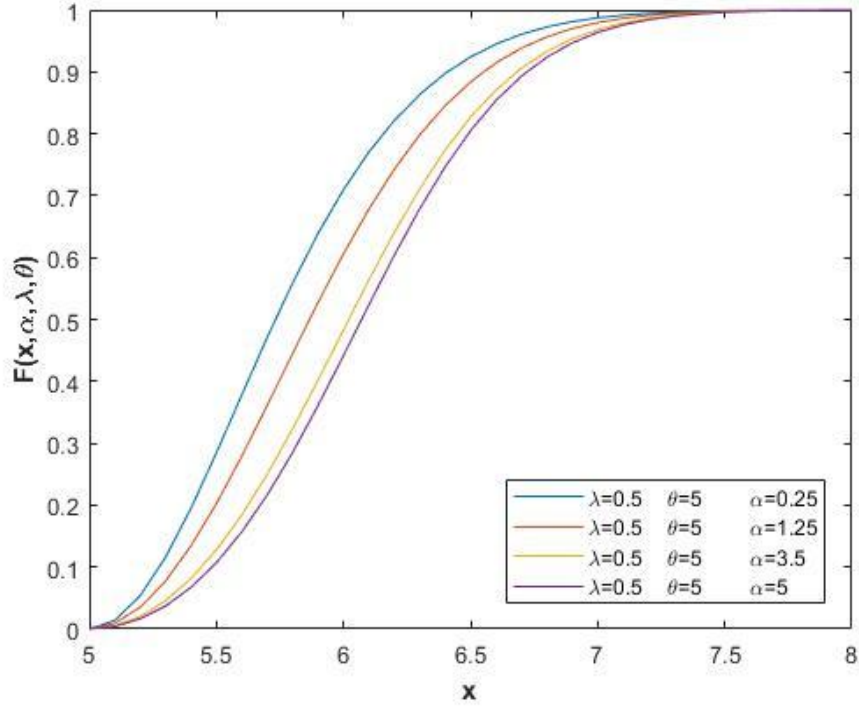
Şekil 4.24. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



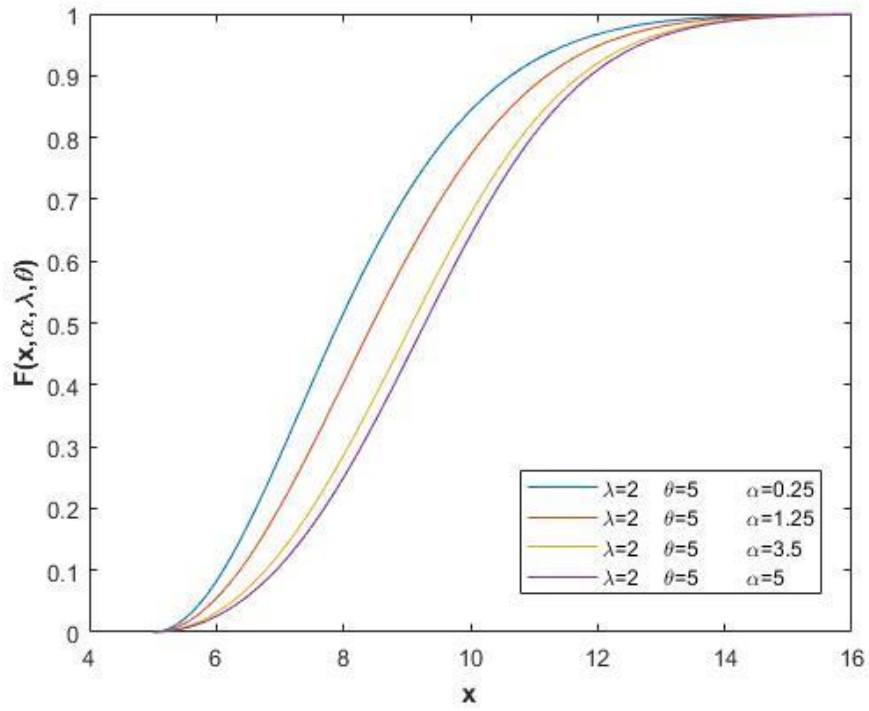
Şekil 4.25. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği



Şekil 4.26. $\lambda = 2$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği

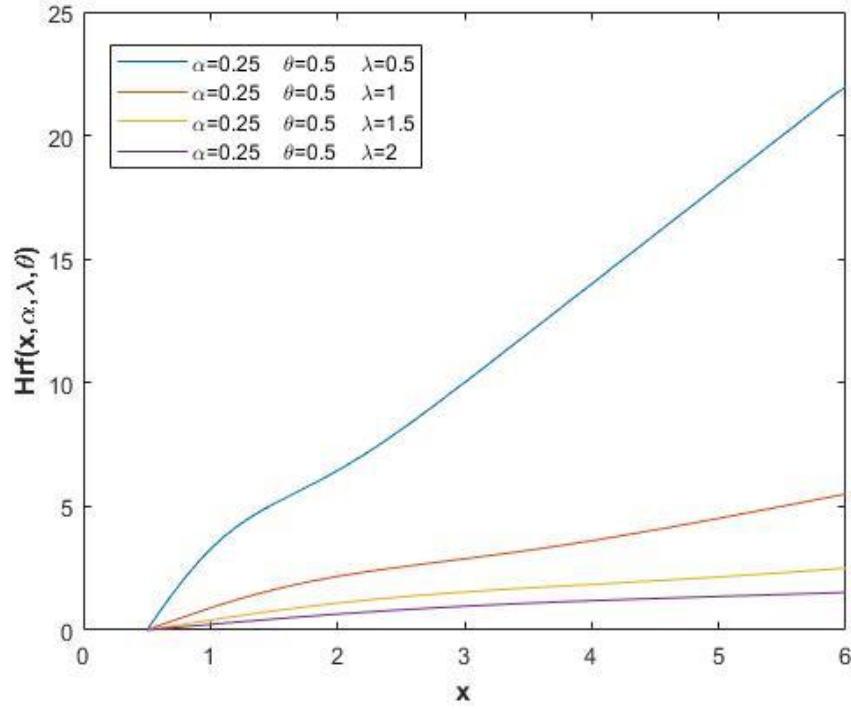


Şekil 4.27. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği

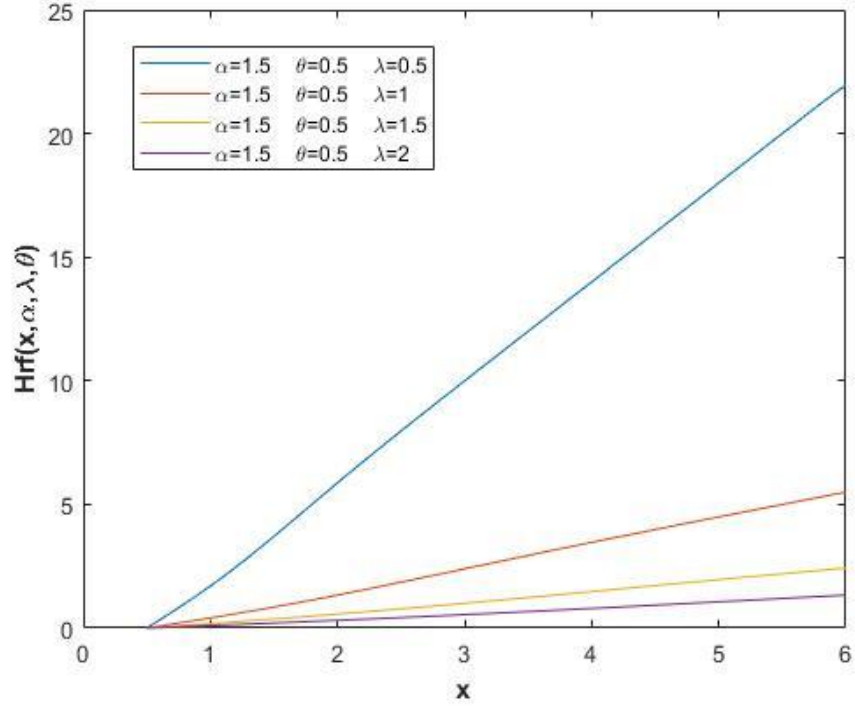


Şekil 4.28. $\lambda = 2$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının dağılım fonksiyonu grafiği

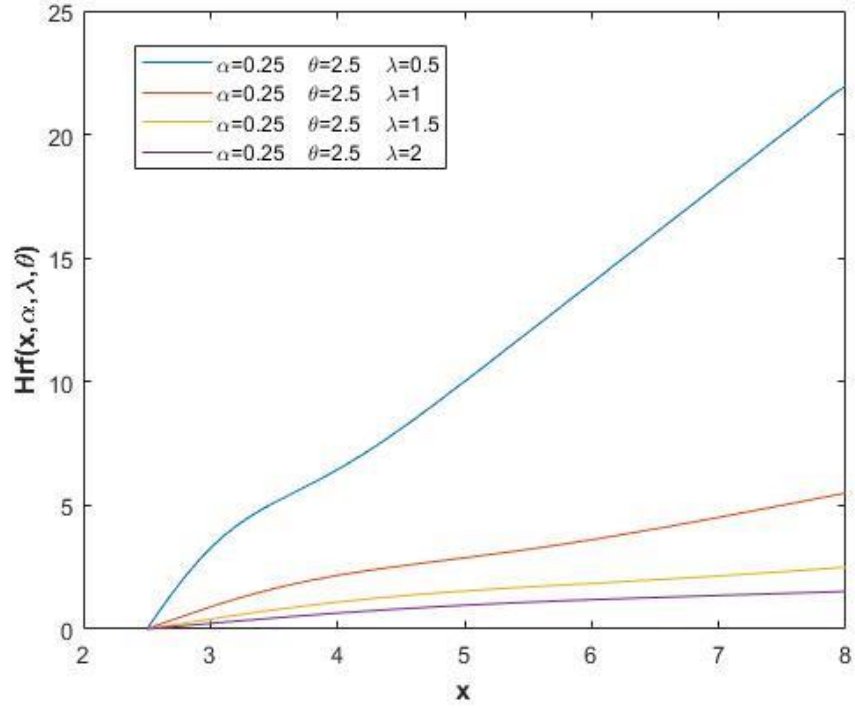
Şekil 4.29. -4.36. λ , θ ve α parametrelerinin farklı değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonunun davranışını örneklendirmektedir.



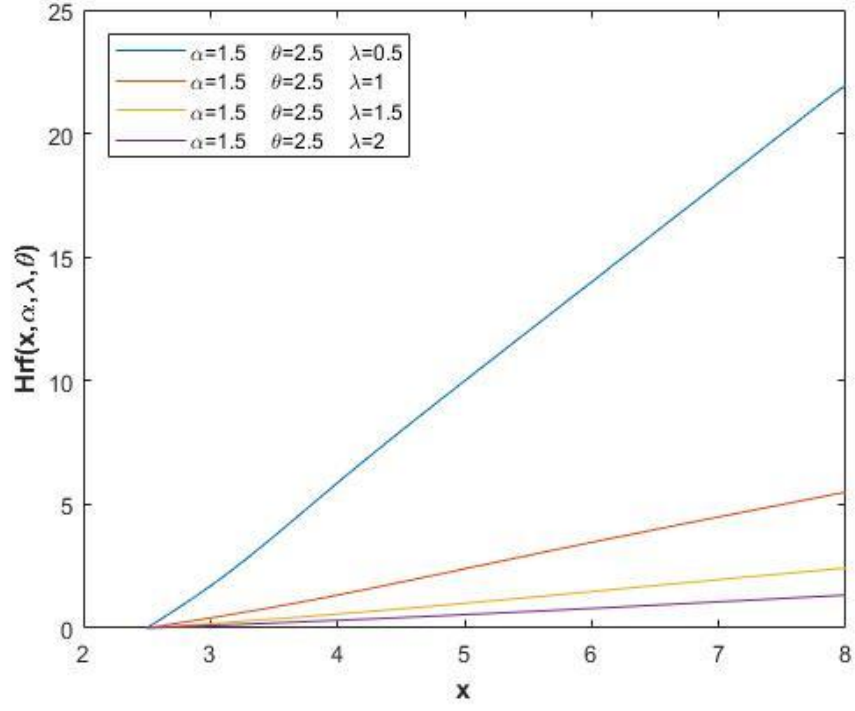
Şekil 4.29. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 0,5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



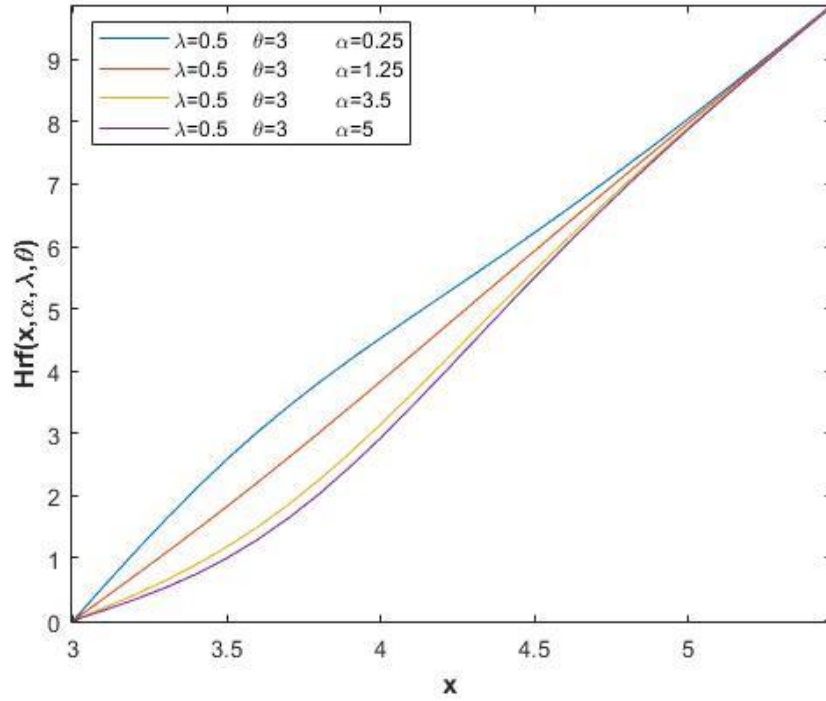
Şekil 4.30. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 0.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



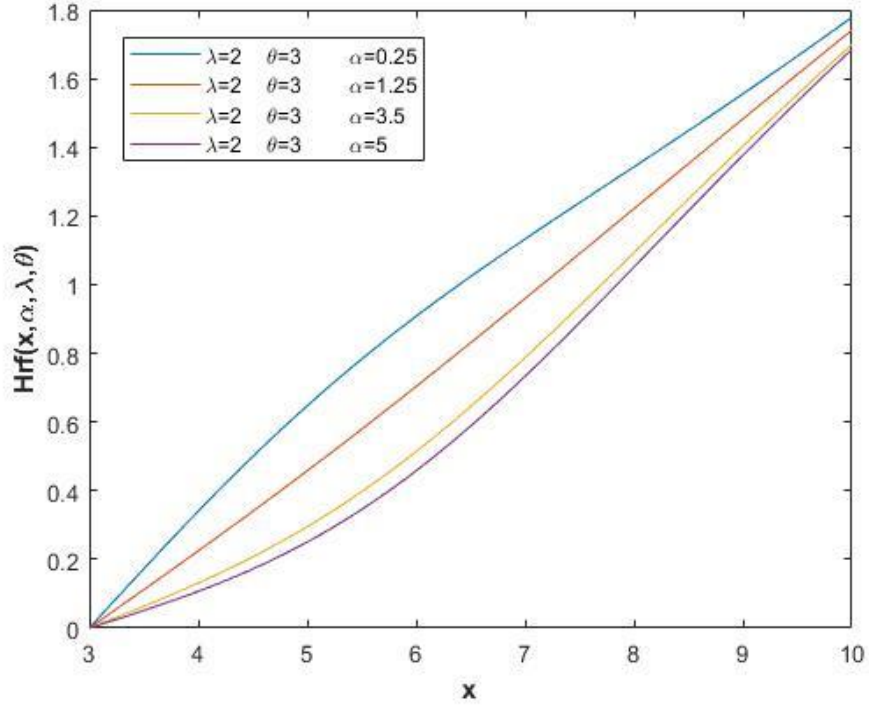
Şekil 4.31. $\alpha = 0.25$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



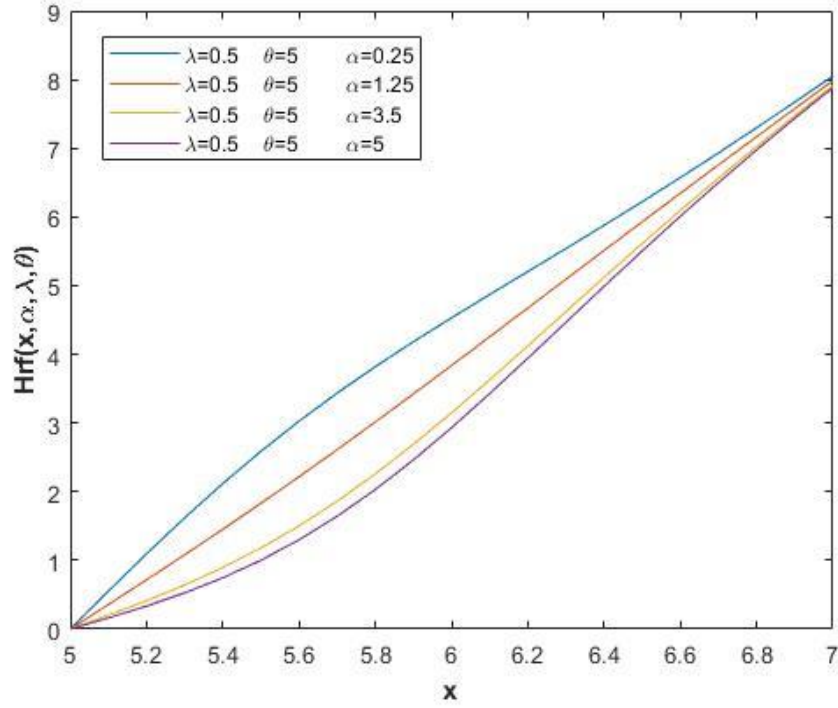
Şekil 4.32. $\alpha = 1.5$ ve $\theta = 2.5$ alındığında farklı λ değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



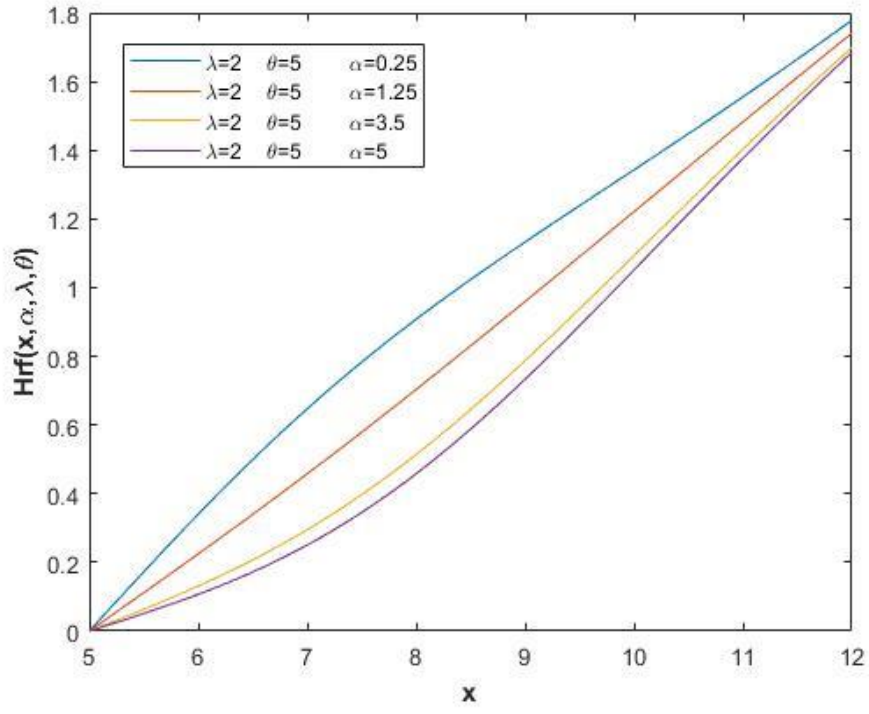
Şekil 4.33. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



Şekil 4.34. $\lambda = 2$ ve $\theta = 3$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



Şekil 4.35. $\lambda = 0.5$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği



Şekil 4.36. $\lambda = 2$ ve $\theta = 5$ alındığında farklı α değerleri için APTR dağılımının bozulma fonksiyonu grafiği

5. BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Bu kısımda en küçük kareler, ağırlıklandırılmış en küçük kareler, momentler ve en çok olabilirlik tahmin yöntemleri açıklanmaktadır.

5.1. En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler tahmin yöntemi ilk kez Swain ve arkadaşları (1988) tarafından yapılan bir çalışma ile önerilmiş bir parametre tahmin yöntemidir.

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j]'$ parametrelili $F(x, \underline{\lambda})$ dağılımından seçilmiş rasgele bir örneklem olduğu varsayılın ve $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ ile de bu dağılımdan alınan örneklem için sıralı gözlemler gösterilsin. Bu varsayımlar ile $\underline{\lambda}$ parametre vektörünün en küçük kareler tahmin edicisi

$$Q = \min_{\underline{\lambda}} \sum_{i=1}^n (F(x_{(i)}, \underline{\lambda}) - P_i^*)^2 \quad (5.1.1)$$

optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir. Burada

$$P_i^* = \frac{i}{n+1} \quad (5.1.2)$$

dır. Ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicileri ise

$$Q_w = \min_{\underline{\lambda}} \sum_{i=1}^n w_i \left(F(x_{(i)}, \underline{\lambda}) - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (5.1.3)$$

biçiminde verilen optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir. Burada w_i, i . nokta için ağırlıklar olup

$$w_i = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \quad (5.1.4)$$

dır.(Dey vd., 2014)

5.2. En Çok Olabilirlik Yöntemi

$\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j]' \in \Lambda$, $\Lambda \subset R^j$, parametre vektörü ve X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri $f(x; \lambda)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonlu dağılımdan alınmış rasgele bir örneklem olsun. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleminin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) \quad (5.2.1)$$

biçiminde olmak üzere

$$L(\lambda; x) = f(x; \lambda) \quad (5.2.2)$$

biçiminde yazılan $L(\lambda; x)$ ifadesine $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ için λ nın olabilirlik fonksiyonu denmektedir. (5.2.2) eşitliği kullanılarak λ parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmin edicileri

$$L(\lambda; x) = \max_{\lambda \in \Lambda} \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) \quad (5.2.3)$$

optimizasyon probleminin çözümünden elde edilir. Diğer bir ifadeyle (5.2.2) ile verilen olabilirlik fonksiyonunu Λ parametre kümesi üzerinde maksimum yapan $\hat{\lambda}$ değerine, var olması durumunda λ nın en çok olabilirlik tahmini ve $\hat{\lambda}$ istatistiğine de λ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi denir (Öztürk, 2006).

Bazı durumlarda (5.2.3) denklemi ile verilen optimizasyon probleminin çözümü zor olmaktadır. Bu tür durumlarda en çok olabilirlik tahmin edicileri, olabilirlik fonksiyonunun en büyüklenmesi yerine, olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması alınarak yazılan

$$\ln L(\lambda; x) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i; \lambda)) \quad (5.2.4)$$

log-olabilirlik fonksiyonunun en büyüklenmesi ile elde edilmeye çalışılır. (5.2.4) eşitliğinde verilen optimizasyon problemini çözmek çoğu durumda (5.2.3) ile verilen optimizasyon problemini çözmekten daha kolaydır. Bundan dolayı genellikle, olabilirlik fonksiyonu yerine onun doğal logaritması olan log-olabilirlik fonksiyonu en büyüklenmeye çalışılır. Analitik olarak çözüm elde edilemediğinde en çok olabilirlik tahmin edicisi biçimsel olarak bilinmemektedir, kısaca örneklemin bir fonksiyonu olarak açık biçimde yazılamamaktadır. Böylesi durumlarda, optimizasyon problemi belli bir sayısal algoritma ile çözülür ve parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri elde edilir (Akdi, 2010; Öztürk, 2006).

5.3. Momentler Tahmin Yöntemi

Momentler yöntemi, Karl Pearson tarafından 1800'lü yılların sonuna doğru tanıtılan bir yöntemdir(Öztürk, 2006). Bu yöntemi kullanabilmek için en az dağılımın parametre sayısı kadar kitle momentinin var olması gerekir. Aksi halde parametrelerin momentler tahmin edicileri elde edilemez(Akdi, 2010).

Varsayalım ki, X_1, X_2, \dots, X_n olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x; \underline{\lambda})$ olan dağılımdan rasgele bir örneklem olsun ve $\underline{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]'$ dağılımın bilinmeyen parametrelerinin vektörünü göstereyin.

X rasgele değişkeninin kesikli olduğu durumlarda $f(x; \underline{\lambda})$ olasılık fonksiyonuyla temsil edilen dağılımın r . ($r = 1, 2, \dots, k$) kitle momenti

$$E_{\underline{\lambda}}(X^r) = \mu_r = \sum_{x \in D_x} x^r f(x; \underline{\lambda}) \quad (5.3.1)$$

biçiminde hesaplanır.

X rasgele değişkeninin sürekli olduğu durumlarda da $f(x; \underline{\lambda})$ olasılık yoğunluk fonksiyonuyla temsil edilen dağılımın r . ($r = 1, 2, \dots, k$) kitle momenti ise

$$E_{\underline{\lambda}}(X^r) = \mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x; \underline{\lambda}) \quad (5.3.2)$$

biçiminde hesaplanır.

M_r ile r . ($r = 1, 2, \dots, k$) örneklem momenti gösterilmek üzere;

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \quad (5.3.3)$$

biçiminde hesaplanır.

Böylece $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ parametreleri için momentler tahmin edicileri k tane kitle momenti ile karşılık gelen örneklem momentlerinin eşitlenmesiyle elde edilecek denklem sisteminin çözümünden elde edilir.(Akdi, 2010)

6. APR VE APTR DAĞILIMLARI İÇİN PARAMETRE TAHMİNLERİ

Bu bölümde APR dağılımı ve APTR dağılımının bilinmeyen parametrelerini tahmin edebilmek için en küçük kareler, ağırlıklı en küçük kareler, momentler ve en çok olabilirlik yöntemlerine dayalı tahmin ediciler elde edilmektedir.

6.1. APR Dağılımının Parametrelerinin En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

Varsayalım X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme $APR(\alpha, \beta)$ dağılımından alınmış rasgele bir örneklem olsun ve $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ ile sıralı gözlemler gösterilsin. Bilinmeyen α ve λ parametrelerinin en küçük kareler tahminleri eşitlik (4.1.1) ile verilen APR dağılımının dağılım fonksiyonunun ve eşitlik (5.1.1)'in göz önüne alınmasıyla

$$Q = \min_{\alpha, \lambda} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha e^{1 - \frac{x_{(i)}^2}{2\lambda^2}} - 1}{\alpha - 1} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (6.1.1)$$

olarak yazılan Q fonksiyonunu α ve λ parametrelerine göre minimum yapacak şekilde (6.1.1) ile verilen minimizasyon probleminin çözümünden elde edilir.

Benzer şekilde eşitlik (5.1.4) göz önünde bulundurularak APR dağılımının α ve λ parametreleri için ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicileri,

$$Q = \min_{\alpha, \lambda} \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{\alpha e^{1 - \frac{x_{(i)}^2}{2\lambda^2}} - 1}{\alpha - 1} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (6.1.2)$$

minimizasyon probleminin α ve λ parametrelerine göre çözümünden elde edilir.

6.2. APR Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme $APR(\alpha, \lambda)$ dağılımından alınmış rasgele bir örneklem olsun. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri için log-olabilirlik fonksiyonu eşitlik (5.2.4)'ün göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \lambda) &= n \ln(\ln \alpha) - n \ln(\alpha - 1) + \ln \prod_{i=1}^n x_i^2 - \\ & 2n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\lambda^2} + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}}\right) \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (6.2.1) ile elde edilen log-olabilirlik fonksiyonunun α ve λ parametrelerine göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial l(\alpha, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha \ln \alpha} - \frac{n}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}}\right) = 0 \quad (6.2.2)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{2n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \ln \alpha \frac{1}{\lambda^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}}\right) = 0 \quad (6.2.3)$$

olabilirlik denklemlerine ulaşılır. Böylece α ve λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (6.2.2) ve (6.2.3) eşitlikleri ile oluşturulan denklem sisteminin çözümünden elde edilir. Ne yazık ki, elde oluşturulan denklem sistemi analitik olarak çözülememektedir. Fakat parametrelere ait en çok olabilirlik tahmin değerleri (6.2.2) ve (6.2.3) denklemlerini eş zamanlı olarak sayısal bir yöntemin kullanılmasıyla çözümlenerek elde edilebilir.

α ve λ parametrelerin en çok olabilirlik tahminleri sırasıyla $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ ile gösterilir ise $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\lambda}$ tahminleri, Newton-Raphson metodu gibi standart bir sayısal yöntem kullanılarak elde edilebilir. Buna alternatif olarak (6.2.3) ile verilen olabilirlik denkleminde α parametresi, λ parametresinin bir fonksiyonu olarak

$$\hat{\alpha}(\lambda) = \exp \left\{ - \frac{2n\lambda^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}}} \right\} \quad (6.2.4)$$

biçiminde yazılabilir. (6.2.4) eşitliği ile verilen $\hat{\alpha}(\lambda)$ eşitlik (6.2.2) de α yerinde kullanılırsa

$$\frac{\hat{\alpha}(\lambda) - 1 - \hat{\alpha}(\lambda) \ln \hat{\alpha}(\lambda)}{(\hat{\alpha}(\lambda) - 1) \ln \hat{\alpha}(\lambda)} + \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{x_i^2}{2\lambda^2}} \right) = 0 \quad (6.2.5)$$

yazılabilir. Böylece λ parametresi için bir başlangıç değeri belirlenip eşitlik (6.2.4) göz önünde bulundurularak sabit nokta yönteminin işletilmesiyle $\hat{\alpha}(\lambda)$ tahminine ulaşılır. Diğer taraftan elde edilen $\hat{\alpha}(\lambda)$ tahmini kullanılarak (6.2.5) eşitliğini λ parametresine göre sayısal olarak çözerek, $\hat{\lambda}$ ' yı elde edebiliriz.

6.3. APR Dağılımının Parametrelerinin Momentler Tahmin Edicisi

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme $APR(\alpha, \lambda)$ dağılımından alınmış rasgele bir örneklem olsun. α ve λ parametrelerinin momentler tahmin edicilerini elde edebilmek için iki kitle momentinin karşılık gelen iki örneklem momentine eşitlenmesi gerekir. Eşitlik (4.2.12) göz önünde bulundurularak $APR(\alpha, \lambda)$ dağılımının ilk iki kitle momentini, sırasıyla

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k}{kk!} \quad (6.3.1)$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k}{k^2 k!} \quad (6.3.2)$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan ilk iki örneklem momentini de sırasıyla $M_1 = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$, $M_2 = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n}$ biçiminde gösterilsin. Böylece α ve λ parametrelerinin momentler

tahmin edicileri, ilk iki kitle momentinin karşılık gelen örneklem momentlerine eşitlenmesiyle

$$\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k}{kk!} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \quad (6.3.3)$$

$$\frac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log \alpha)^k}{k^2 k!} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} \quad (6.3.4)$$

oluşturulan denklem sisteminin çözümünden elde edilirler. (6.3.3) ve (6.3.4) eşitlikleri ile verilen denklem sisteminin açık çözümü mevcut olmamakla birlikte ilgili parametrelere ait momentler tahmin değerleri söz konusu denklem sisteminin sayısal olarak çözümlenmesi ile elde edilir.

6.4. APTR Dağılımının Parametrelerinin En Küçük Kareler ve Ağırlıklandırılmış En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenleri $APTR(\alpha, \theta, \lambda)$ dağılımından alınmış rasgele bir örneklem olsun ve $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ ile bu örnekleme ait sıralı gözlemler gösterilsin Bu varsayımlar ile α, θ ve λ parametrelerinin en küçük kareler tahminler (5.1.2) ve (5.1.3) 'ün göz önünde bulundurulmasıyla yazılan

$$Q = \min_{\alpha, \lambda, \theta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha e^{1 - \frac{(x_i - \theta)^2}{2\lambda^2}} - 1}{\alpha - 1} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (6.4.1)$$

fonksiyonu α, θ ve λ parametrelerine göre minimum yapacak şekilde sayısal olarak çözerek elde edilir.

Benzer şekilde (5.1.4) eşitliğinden yararlanılarak α, θ ve λ parametrelerinin ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahminleri ise

$$Q = \min_{\alpha, \lambda, \theta} \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left(\frac{\alpha e^{1-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\lambda^2}} - 1}{\alpha - 1} - \frac{i}{n+1} \right)^2 \quad (6.4.2)$$

denklemini minimum yapacak şekilde sayısal olarak bulunur.

6.5. APTR Dağılımının Parametrelerinin En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme $APTR(\alpha, \theta, \lambda)$ dağılımından alınmış rastgele bir örneklem olsun. X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme için log-olabilirlik fonksiyonu, eşitlik (4.3.2)'nin göz önüne alınmasıyla,

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha, \lambda) = & n \ln(\ln \alpha) - n \ln(\alpha - 1) + \ln \prod_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 - 2n \ln \lambda \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \theta)^2}{2\lambda^2} + \ln \alpha \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\lambda^2}} \right) \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

şeklinde yazılır. Log-olabilirlik fonksiyonunun α, θ ve λ parametrelerine göre birinci türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial l(\alpha, \theta, \lambda)}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha \ln \alpha} - \frac{n}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(1 - e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\lambda^2}} \right) = 0 \quad (6.5.2)$$

$$\frac{\partial l(\alpha, \theta, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{2n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 - \ln \alpha \frac{1}{\lambda^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(e^{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\lambda^2}} \right) = 0 \quad (6.5.3)$$

$$\frac{\partial L(\alpha, \theta, \lambda)}{\partial \theta} = -\ln(\alpha) \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \theta) e^{-\frac{(x_j - \theta)^2}{2\lambda^2}}}{\lambda^2} - \frac{\theta n - \sum_{j=1}^n x_j}{\lambda^2} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(x_j - \theta)} = 0 \quad (6.5.4)$$

olabilirlik denklemlerine ulaşılır. Böylece α , θ ve λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicileri, (6.5.2)-(6.5.4) eşitlikleri ile verilen denklem sisteminin çözümünden elde edilir. Ancak söz konusu denklem sistemi analitik olarak çözülememektedir. Bununla birlikte α, θ ve λ parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin değerlerine (6.5.2), (6.5.3) ve (6.5.4) ile verilen olabilirlik denklemlerinin Newton-Raphson metodu ile çözümünden ulaşılır.

6.6. APTR Dağılımının Parametrelerinin Momentler Tahmin Edicisi

Varsayalım ki; X_1, X_2, \dots, X_n rasgele örnekleme $APTR(\alpha, \theta, \lambda)$ dağılımından alınmış rasgele bir örneklem olsun.

$APTR(\alpha, \theta, \lambda)$ dağılımının ilk üç momenti eşitlik (4.4.7) de yerine $r = 1, r = 2$ ve $r = 3$ alınmasıyla

$$E(X) = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 1, 0) \right)^k \theta^{1-k} \quad (6.6.1)$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 2, 0) \right)^k \theta^{2-k} \quad (6.6.2)$$

ve

$$E(X^3) = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 3, 0) \right)^k \theta^{3-k} \quad (6.6.3)$$

olarak elde edilir. İlk üç örneklem momenti de sırasıyla $M_1 = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$, $M_2 = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n}$ ve $M_3 = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^3}{n}$ biçiminde gösterilirse α, λ ve θ parametrelerinin momentler tahminleri, (6.6.1) – (6.6.3) eşitlikleri ile verilen ilk üç kitle momentinin karşılık gelen örneklem momentlerine eşitlenmesiyle

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 1, 0) \right)^k \theta^{1-k} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \quad (6.6.4)$$

$$\sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 2, 0) \right)^k \theta^{2-k} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} \quad (6.6.5)$$

$$\sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \left(\frac{\ln(\alpha)}{\lambda^2(\alpha-1)} \xi(\alpha, \lambda, 3, 0) \right)^k \theta^{3-k} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{n} \quad (6.6.6)$$

biçiminde elde edilen lineer olmayan denklem sisteminin çözümünden elde edilirler.

7. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Tez çalışmasının bu bölümünde, bir önceki bölümde hem APR hem de APTR dağılımlarının bilinmeyen parametrelerini tahmin edebilmek için elde edilen en çok olabilirlik (ML), en küçük kareler (LS) ve ağırlıklandırılmış en küçük kareler (WLS) tahmin edicilerinin tahmin performanslarını değerlendirmek için Monte-Carlo simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmektedir.

İlk olarak APR dağılımının parametreleri için elde edilen tahmin edicilerin performanslarını ortaya koyabilmek için gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında APR dağılımının bilinmeyen parametrelerinin değerleri, $\alpha < 1$ ve $\alpha > 1$ durumlarını göz önünde bulundurarak, $\alpha = \{0.25, 1.5\}$ ve $\lambda = \{0.25, 1, 2\}$ olarak ayarlanmıştır. $n = 30, 50, 100$ örnek genişliklerinde parametre değerlerinin her bir kombinasyonu için 1000 tekrara dayalı olarak gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında, her bir tahmin edici için yan (Bias) ve hata kareler ortalaması (HKO) değerleri elde edilmiştir. Gerçekleştirilen simülasyon çalışması ile elde edilen sonuçlar Çizelge 7.1. – 7.2. ile çizelgelenmiştir.

Çizelge 7.1. Farklı λ ve $\alpha = 0.25$ parametre değerlerinde APR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri

λ	n	Yöntem	$\hat{\alpha}$			$\hat{\lambda}$		
			Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO
0.25	30	ML	0.3344	0.0844	0.0420	0.2465	-0.0035	0.0006
		LS	0.3221	0.0721	0.0713	0.2572	0.0072	0.0014
		WLS	0.3238	0.0738	0.0592	0.2526	0.0026	0.0009
	50	ML	0.3022	0.0522	0.0265	0.2492	-0.0008	0.0005
		LS	0.3143	0.0643	0.0546	0.2533	0.0033	0.0009
		WLS	0.3083	0.0583	0.0394	0.2510	0.0010	0.0007
	100	ML	0.2723	0.0223	0.0085	0.2499	-0.0001	0.0002
		LS	0.2710	0.0210	0.0190	0.2540	0.0040	0.0006
		WLS	0.2694	0.0194	0.0117	0.2515	0.0015	0.0003
1	30	ML	0.2955	0.0455	0.0301	1.0121	0.0121	0.0220
		LS	0.3019	0.0519	0.0597	1.0354	0.0354	0.0239
		WLS	0.3040	0.0540	0.0492	1.0197	0.0197	0.0176
	50	ML	0.2939	0.0439	0.0190	0.9924	-0.0076	0.0056
		LS	0.3167	0.0667	0.0503	1.0095	0.0095	0.0174
		WLS	0.3034	0.0534	0.0342	1.0032	0.0032	0.0124
	100	ML	0.2609	0.0109	0.0089	1.0053	0.0053	0.0035
		LS	0.2511	0.0011	0.0211	1.0320	0.0320	0.0116
		WLS	0.2532	0.0032	0.0123	1.0164	0.0164	0.0056
2	30	ML	0.3351	0.0851	0.0451	1.9660	-0.0340	0.0401
		LS	0.3280	0.0780	0.0796	2.0554	0.0554	0.1081
		WLS	0.3344	0.0844	0.0679	2.0113	0.0113	0.0671
	50	ML	0.2856	0.0356	0.0195	2.0090	0.0090	0.0360
		LS	0.2992	0.0492	0.0413	2.0401	0.0401	0.0739
		WLS	0.2920	0.0420	0.0310	2.0315	0.0315	0.0634
	100	ML	0.2630	0.0130	0.0075	2.0011	0.0011	0.0123
		LS	0.2363	-0.0137	0.0165	2.0825	0.0825	0.0566
		WLS	0.2486	-0.0014	0.0112	2.0356	0.0356	0.0229

Çizelge 7.2. Farklı λ parametre değerlerinde ve $\alpha = 1.5$ APR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri

λ	N	Yöntem	$\hat{\alpha}$			$\hat{\lambda}$		
			Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO
0.25	30	ML	1.6315	0.1315	0.3339	0.2489	-0.0011	0.0001
		LS	1.5916	0.0916	0.3597	0.2503	0.0003	0.0002
		WLS	1.6082	0.1082	0.3461	0.2497	-0.0003	0.0001
	50	ML	1.5912	0.0912	0.2519	0.2499	-0.0001	0.0001
		LS	1.6080	0.1080	0.3212	0.2498	-0.0002	0.0001
		WLS	1.5977	0.0977	0.2672	0.2498	-0.0002	0.0001
	100	ML	1.5547	0.0547	0.1489	0.2503	0.0003	0.0001
		LS	1.5516	0.0516	0.1916	0.2506	0.0006	0.0001
		WLS	1.5624	0.0624	0.1719	0.2502	0.0002	0.0001
1	30	ML	1.6738	0.1738	0.4000	0.9948	-0.0052	0.0018
		LS	1.7207	0.2207	0.7855	0.9966	-0.0034	0.0027
		WLS	1.7027	0.2027	0.6008	0.9953	-0.0047	0.0022
	50	ML	1.5379	0.0379	0.1625	1.0048	0.0048	0.0013
		LS	1.5316	0.0316	0.2036	1.0069	0.0069	0.0018
		WLS	1.5315	0.0315	0.1803	1.0060	0.0060	0.0014
	100	ML	1.5326	0.0326	0.0908	0.9981	-0.0019	0.0008
		LS	1.5649	0.0649	0.1751	0.9972	-0.0028	0.0014
		WLS	1.5570	0.0570	0.1429	0.9973	-0.0027	0.0011
2	30	ML	1.6440	0.1440	0.3305	1.9968	-0.0032	0.0072
		LS	1.6251	0.1251	0.4440	2.0057	0.0057	0.0107
		WLS	1.6411	0.1411	0.3700	1.9997	-0.0003	0.0087
	50	ML	1.6115	0.1115	0.2014	1.9913	-0.0087	0.0056
		LS	1.6000	0.1000	0.2452	1.9963	-0.0037	0.0072
		WLS	1.6033	0.1033	0.2133	1.9936	-0.0064	0.0058
	100	ML	1.5710	0.0710	0.1128	1.9962	-0.0038	0.0033
		LS	1.6060	0.1060	0.1709	1.9922	-0.0078	0.0053
		WLS	1.5898	0.0898	0.1464	1.9942	-0.0058	0.0042

İkinci olarak APTR dağılımının bilinmeyen parametreleri α , λ ve θ ' nın tahmin edicilerin performanslarını ortaya koyabilmek için gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında APR dağılımının bilinmeyen parametrelerinin değerleri, $\alpha = \{0.25, 1.5\}$ $\lambda = \{0.25, 1, 2\}$ ve $\theta = \{5, 15\}$ olarak ayarlanmıştır. İlk simülasyon çalışmasına

benzer olarak $n = 30,50,100$ örnek genişliklerinde parametre değerlerinin her bir kombinasyonu için 1000 tekrara dayalı olarak gerçekleştirilen simülasyon çalışmasında, her bir tahmin edici için Bias ve HKO değerleri elde edilerek Çizelge 7.3. – 7.6. ile çizelgelenmiştir.



Çizelge 7.3. Farklı λ ve $\alpha = 0.25$, $\theta = 5$ parametre değerlerinde APTR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri

		$\hat{\alpha}$			$\hat{\lambda}$			$\hat{\theta}$			
λ	n	Yöntem	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO
0.25	30	ML	0.2230	-0.0270	0.0342	0.2937	0.0437	0.0116	5.0012	0.0012	0.0000
		LS	0.3310	0.0810	0.1221	0.2636	0.0136	0.0018	4.9959	-0.0041	0.0001
		WLS	0.2715	0.0215	0.0576	0.2642	0.0142	0.0012	4.9972	-0.0028	0.0002
	50	ML	0.2077	-0.0423	0.0270	0.3077	0.0577	0.0159	5.0008	0.0008	0.0000
		LS	0.3025	0.0525	0.0559	0.2616	0.0116	0.0016	4.9978	-0.0022	0.0001
		WLS	0.5476	0.2976	0.3209	0.4109	0.1609	0.0322	4.9163	-0.0837	0.0165
	100	ML	0.1738	-0.0762	0.0213	0.3171	0.0671	0.0175	5.0006	0.0006	0.0000
		LS	0.2799	0.0299	0.0280	0.2559	0.0059	0.0006	4.9984	-0.0016	0.0000
		WLS	0.1108	-0.1392	0.1078	0.4380	0.1880	0.0400	4.9818	-0.0182	0.0034
1	30	ML	0.2891	0.0391	0.0354	0.9947	-0.0053	0.0082	5.0102	0.0102	0.0006
		LS	0.3344	0.0844	0.1161	1.0572	0.0572	0.0403	4.9955	-0.0045	0.0020
		WLS	0.4002	0.1502	0.1191	1.0266	0.0266	0.0167	4.9573	-0.0427	0.0164
	50	ML	0.2742	0.0242	0.0157	1.0002	0.0002	0.0065	5.0034	0.0034	0.0003
		LS	0.2933	0.0433	0.0592	1.0502	0.0502	0.0267	4.9896	-0.0104	0.0011
		WLS	0.3289	0.0789	0.0601	1.0154	0.0154	0.0135	4.9796	-0.0204	0.0070
	100	ML	0.2511	0.0011	0.0073	1.0059	0.0059	0.0026	5.0034	0.0034	0.0002
		LS	0.2755	0.0255	0.0241	1.0241	0.0241	0.0110	4.9938	-0.0062	0.0007
		WLS	0.3011	0.0511	0.0418	1.0071	0.0071	0.0075	4.9944	-0.0056	0.0005
2	30	ML	0.3195	0.0695	0.0471	1.9880	-0.0120	0.0360	5.0015	0.0015	0.0025
		LS	0.3351	0.0851	0.1111	2.1332	0.1332	0.1548	4.9665	-0.0335	0.0094
		WLS	0.3142	0.0642	0.0562	2.0509	0.0509	0.0641	4.9800	-0.0200	0.0044
	50	ML	0.2758	0.0258	0.0247	2.0147	0.0147	0.0270	5.0091	0.0091	0.0016
		LS	0.2659	0.0159	0.0321	2.0931	0.0931	0.0844	4.9935	-0.0065	0.0058
		WLS	0.2734	0.0234	0.0247	2.0457	0.0457	0.0453	4.9968	-0.0032	0.0028
	100	ML	0.2800	0.0300	0.0178	1.9918	-0.0082	0.0117	5.0006	0.0006	0.0012
		LS	0.2573	0.0073	0.0238	2.0619	0.0619	0.0462	4.9994	-0.0006	0.0023
		WLS	0.3640	0.1140	0.0890	1.9749	-0.0251	0.0299	4.9838	-0.0162	0.0042

Çizelge 7.4. Farklı λ ve $\alpha = 0.25, \theta = 15$ parametre değerlerinde APTR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri

		$\hat{\alpha}$			$\hat{\lambda}$			$\hat{\theta}$			
λ	n	Yöntem	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO
0.25	30	ML	0.1633	-0.0867	0.0494	0.4491	0.1991	0.0752	15.0005	0.0005	0.0000
		LS	0.3445	0.0945	0.0713	0.2567	0.0067	0.0014	14.9964	-0.0036	0.0001
		WLS	0.3041	0.0541	0.0507	0.2577	0.0077	0.0013	14.9986	-0.0014	0.0001
	50	ML	0.1829	-0.0671	0.0403	0.4756	0.2256	0.1853	14.9918	-0.0082	0.0080
		LS	0.2928	0.0428	0.0427	0.2565	0.0065	0.0009	14.9978	-0.0022	0.0001
		WLS	0.0902	-0.1598	0.0443	0.3670	0.1170	0.0248	14.9998	-0.0002	0.0001
	100	ML	0.1755	-0.0745	0.0485	0.4809	0.2309	0.0775	14.9984	-0.0016	0.0000
		LS	0.3101	0.0601	0.0270	0.2513	0.0013	0.0006	14.9969	-0.0031	0.0000
		WLS	0.0161	-0.2339	0.0566	0.4603	0.2103	0.0541	14.9970	-0.0030	0.0000
1	30	ML	0.2927	0.0427	0.0439	1.0100	0.0100	0.0209	15.0058	0.0058	0.0006
		LS	0.3561	0.1061	0.0811	1.0161	0.0161	0.0250	14.9858	-0.0142	0.0019
		WLS	0.3155	0.0655	0.0537	1.0208	0.0208	0.0222	14.9936	-0.0064	0.0012
	50	ML	0.2439	-0.0061	0.0150	1.0127	0.0127	0.0051	15.0071	0.0071	0.0004
		LS	0.3074	0.0574	0.0528	1.0268	0.0268	0.0195	14.9887	-0.0113	0.0011
		WLS	0.2678	0.0178	0.0340	1.0307	0.0307	0.0155	14.9971	-0.0029	0.0006
	100	ML	0.2413	-0.0087	0.0095	1.0533	0.0533	0.0670	15.0032	0.0032	0.0002
		LS	0.2916	0.0416	0.0210	1.0000	0.0000	0.0066	14.9942	-0.0058	0.0006
		WLS	0.2715	0.0215	0.0183	1.0057	0.0057	0.0045	14.9974	-0.0026	0.0008
2	30	ML	0.2888	0.0388	0.0347	2.0254	0.0254	0.0651	15.0059	0.0059	0.0023
		LS	0.3213	0.0713	0.0677	2.0772	0.0772	0.0892	14.9628	-0.0372	0.0090
		WLS	0.2904	0.0404	0.0570	2.1034	0.1034	0.1075	14.9801	-0.0199	0.0050
	50	ML	0.2564	0.0064	0.0182	2.0527	0.0527	0.1072	15.0111	0.0111	0.0011
		LS	0.3049	0.0549	0.0482	2.0361	0.0361	0.0551	14.9853	-0.0147	0.0033
		WLS	0.2700	0.0200	0.0283	2.0482	0.0482	0.0639	14.9976	-0.0024	0.0018
	100	ML	0.2719	0.0219	0.0120	1.9999	-0.0001	0.0180	15.0026	0.0026	0.0005
		LS	0.3144	0.0644	0.0249	1.9843	-0.0157	0.0273	14.9819	-0.0181	0.0022
		WLS	0.3517	0.1017	0.0649	1.9728	-0.0272	0.0259	14.9780	-0.0220	0.0050

Çizelge 7.5. Farklı λ ve $\alpha = 1.5, \theta = 5$ parametre değerlerinde APTR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri

		$\hat{\alpha}$			$\hat{\lambda}$			$\hat{\theta}$			
λ	n	Yöntem	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO
0.25	30	ML	1.4483	-0.0517	0.0346	0.3418	0.0918	0.0355	5.0015	0.0015	0.0000
		LS	1.6216	0.1216	0.0857	0.2544	0.0044	0.0015	4.9963	-0.0037	0.0001
		WLS	1.5478	0.0478	0.0578	0.2625	0.0125	0.0016	4.9987	-0.0013	0.0001
	50	ML	1.4627	-0.0373	0.0270	0.3222	0.0722	0.0310	4.9998	-0.0002	0.0001
		LS	1.5854	0.0854	0.0454	0.2517	0.0017	0.0009	4.9963	-0.0037	0.0001
		WLS	1.4921	-0.0079	0.0935	0.3277	0.0777	0.0131	4.9901	-0.0099	0.0012
	100	ML	1.4289	-0.0711	0.0231	0.3487	0.0987	0.0540	4.9976	-0.0024	0.0005
		LS	1.5461	0.0461	0.0267	0.2520	0.0020	0.0006	4.9982	-0.0018	0.0000
		WLS	1.2923	-0.2077	0.0652	0.4289	0.1789	0.0387	4.9945	-0.0055	0.0009
1	30	ML	1.5403	0.0403	0.0318	1.0031	0.0031	0.0097	5.0046	0.0046	0.0007
		LS	1.5963	0.0963	0.0907	1.0328	0.0328	0.0215	4.9805	-0.0195	0.0023
		WLS	1.5669	0.0669	0.0581	1.0293	0.0293	0.0199	4.9886	-0.0114	0.0013
	50	ML	1.5315	0.0315	0.0245	1.0068	0.0068	0.0081	5.0038	0.0038	0.0004
		LS	1.6224	0.1224	0.0815	1.0144	0.0144	0.0242	4.9839	-0.0161	0.0014
		WLS	1.5612	0.0612	0.0415	1.0210	0.0210	0.0187	4.9934	-0.0066	0.0007
	100	ML	1.5203	0.0203	0.0074	0.9931	-0.0069	0.0023	5.0028	0.0028	0.0002
		LS	1.5567	0.0567	0.0338	1.0036	0.0036	0.0095	4.9942	-0.0058	0.0006
		WLS	1.5403	0.0403	0.0203	0.9963	-0.0037	0.0045	4.9978	-0.0022	0.0004
2	30	ML	1.5490	0.0490	0.0365	2.0155	0.0155	0.0590	5.0166	0.0166	0.0035
		LS	1.6315	0.1315	0.0803	2.0034	0.0034	0.0866	4.9729	-0.0271	0.0078
		WLS	1.5844	0.0844	0.0631	2.0587	0.0587	0.1217	4.9879	-0.0121	0.0051
	50	ML	1.5224	0.0224	0.0207	2.0166	0.0166	0.0394	5.0099	0.0099	0.0017
		LS	1.5582	0.0582	0.0463	2.0559	0.0559	0.0881	4.9734	-0.0266	0.0045
		WLS	1.5240	0.0240	0.0307	2.0719	0.0719	0.0882	4.9911	-0.0089	0.0026
	100	ML	1.5255	0.0255	0.0100	1.9954	-0.0046	0.0144	5.0017	0.0017	0.0007
		LS	1.5851	0.0851	0.0374	1.9947	-0.0053	0.0351	4.9696	-0.0304	0.0034
		WLS	1.5685	0.0685	0.0384	1.9932	-0.0068	0.0226	4.9818	-0.0182	0.0025

Çizelge 7.6. Farklı λ ve $\alpha = 1.5$, $\theta = 15$ parametre değerlerinde APTR dağılımı için tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri

		$\hat{\alpha}$			$\hat{\lambda}$			$\hat{\theta}$			
λ	n	Yöntem	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO	Tahmin	Bias	HKO
0.25	30	ML	1.3419	-0.1581	0.0474	0.4539	0.2039	0.0735	15.0010	0.0010	0.0000
		LS	1.5990	0.0990	0.0917	0.2605	0.0105	0.0019	14.9965	-0.0035	0.0001
		WLS	1.5450	0.0450	0.0634	0.2623	0.0123	0.0015	14.9990	-0.0010	0.0001
	50	ML	1.3484	-0.1516	0.0415	0.4325	0.1825	0.0628	15.0001	0.0001	0.0000
		LS	1.5672	0.0672	0.0441	0.2546	0.0046	0.0011	14.9974	-0.0026	0.0001
		WLS	1.3242	-0.1758	0.0526	0.3911	0.1411	0.0312	14.9990	-0.0010	0.0000
	100	ML	1.3217	-0.1783	0.0476	0.5030	0.2530	0.1646	14.9914	-0.0086	0.0058
		LS	1.5561	0.0561	0.0299	0.2520	0.0020	0.0007	14.9973	-0.0027	0.0000
		WLS	1.2740	-0.2260	0.0561	0.4364	0.1864	0.0425	14.9979	-0.0021	0.0000
1	30	ML	1.5123	0.0123	0.0368	1.0331	0.0331	0.0135	15.0080	0.0080	0.0007
		LS	1.5721	0.0721	0.0870	1.0552	0.0552	0.0300	14.9879	-0.0121	0.0019
		WLS	1.5347	0.0347	0.0608	1.0661	0.0661	0.0325	14.9949	-0.0051	0.0012
	50	ML	1.5090	0.0090	0.0273	1.0679	0.0679	0.0947	15.0066	0.0066	0.0004
		LS	1.5629	0.0629	0.0537	1.0248	0.0248	0.0209	14.9931	-0.0069	0.0011
		WLS	1.5305	0.0305	0.0362	1.0313	0.0313	0.0210	14.9991	-0.0009	0.0006
	100	ML	1.4955	-0.0045	0.0151	1.1022	0.1022	0.1415	15.0022	0.0022	0.0002
		LS	1.5572	0.0572	0.0311	1.0001	0.0001	0.0086	14.9937	-0.0063	0.0005
		WLS	1.5367	0.0367	0.0238	1.0073	0.0073	0.0094	14.9979	-0.0021	0.0003
2	30	ML	1.5407	0.0407	0.0366	2.0524	0.0524	0.1113	15.0117	0.0117	0.0024
		LS	1.6002	0.1002	0.0721	2.0259	0.0259	0.0739	14.9789	-0.0211	0.0067
		WLS	1.5821	0.0821	0.0581	2.0203	0.0203	0.0605	14.9882	-0.0118	0.0046
	50	ML	1.5171	0.0171	0.0151	2.0111	0.0111	0.0293	15.0097	0.0097	0.0015
		LS	1.6096	0.1096	0.0630	1.9869	-0.0131	0.0532	14.9727	-0.0273	0.0044
		WLS	1.5516	0.0516	0.0359	2.0390	0.0390	0.0840	14.9908	-0.0092	0.0026
	100	ML	1.5243	0.0243	0.0109	1.9949	-0.0051	0.0134	14.9998	-0.0002	0.0006
		LS	1.5863	0.0863	0.0343	1.9687	-0.0313	0.0266	14.9785	-0.0215	0.0025
		WLS	1.5717	0.0717	0.0375	1.9796	-0.0204	0.0230	14.9851	-0.0149	0.0027

Verilen Monte-Carlo simülasyon çalışması sonuçlarına göre APR ve APTR parametrelerine ait tahmin edicilerin Bias ve HKO değerleri karşılaştırıldığında, küçük örneklem hacimlerinde ML tahmin edicilerinin performansının diğer tahmin edicilerin performanslarına nazaran daha düşük Bias ve HKO değerleri ile daha tatminkâr olduğu söylenebilir. Örnek sayısını arttıkça tüm tahmin edicilerin Bias ve HKO değerlerinin azalış gösterdiği görülmektedir. Dolayısıyla elde edilen tahmin

edicilerin asimptotik olarak yansız ve tutarlı oldukları söylenebilir. İlimli ve büyük örneklem hacimlerinde ise yine ML tahmin edicilerinin tahmin performansı kullanılan karşılaştırma ölçütlerine göre diğerlerinden daha iyi olduğu sonucuna varılabilir.

APR dağılımı için gerçekleştirilen simülasyon sonuçlarından ML tahmin edicilerinin hem α hem de λ parametresinin tahminindeki performansının tüm örneklem büyüklüklerinde göreceli olarak diğer tahmin edicilere göre daha iyi olduğu görülmektedir. Genelleme yapmadan simülasyon sonuçlarından $\lambda = 0.25$ değerinde hem Bias hem de HKO değerlerinin daha küçük olduğu görülmüştür.

APTR dağılımı için gerçekleştirilen simülasyon sonuçlarından ML tahmin edicilerinin daha küçük Bias ve HKO değerleri ile α , λ ve θ parametrelerinin tahmininde diğer tahmin edicilere göre daha iyi tahmin performans sergilediği söylenebilir. Genelleme yapmadan yine $\lambda = 0,25$ değerinde tüm tahmin ediciler daha küçük Bias ve HKO değerlerine sahip olmuştur. Ek olarak, λ parametre değeri büyüdükçe tahminlerindeki sapmalarda da kısmi bir artış gözlemlenmiştir.

8. UYGULAMA

Bu bölümde, tez çalışmasında ele alınan APR dağılımı ve APTR dağılımının güncel veriler üzerinde kullanımını açıklamak ve alternatif model olarak Weibull dağılım modeline karşı değerlendirmek için Çanakkale bölgesinin santral sahasının ortalama rüzgâr hız değerleri (Gençel ve Tarhan, 2019) verileri kullanılarak bir modelleme uygulamasına yer verilmektedir.

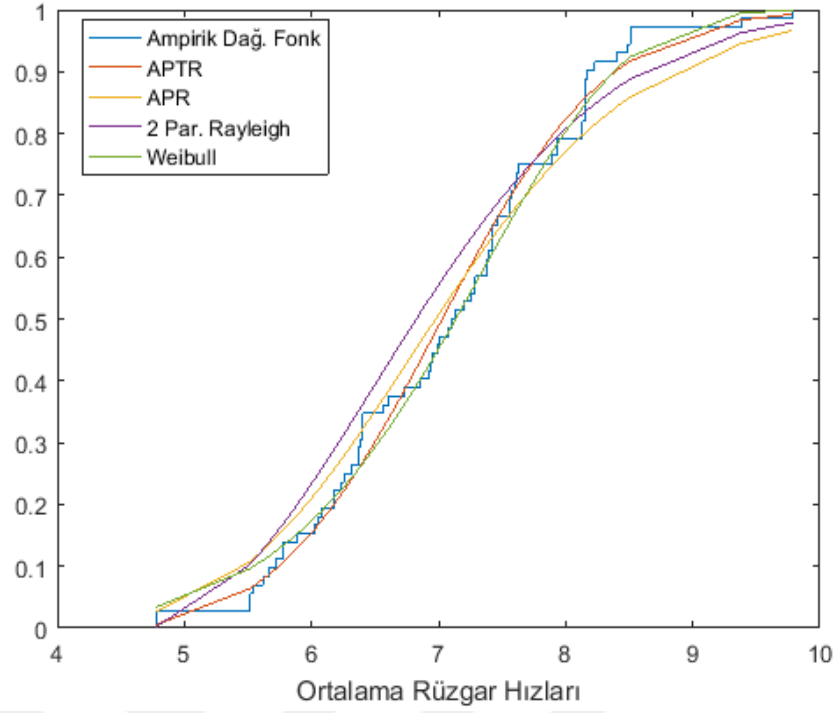
Çanakkale bölgesinin santral sahasının ortalama rüzgâr hız değerleri veri seti 2012-2017 yılları arasında ilgili bölgede aylık olarak gözlemlenen 72 tane ortalama rüzgâr hızını (m/s) içermektedir. Veriler aşağıdaki gibidir (bknz: Gençel ve Tarhan 2019)

6.92	7.63	6.4	8.16	7.29	4.78	8.13	7.38	8.15	5.78	8.51	7.42
9.38	7.08	7.72	6.81	6.41	5.67	7.76	8.96	6.27	5.86	6.90	6.24
7.1	6.99	6.95	6.05	7.01	5.67	6.18	5.51	6.26	7.13	6.61	5.54
8.17	9.79	6.94	6.56	6.37	6.38	6.4	7.39	6.73	6.23	7.42	6.15
8.49	7.94	7.62	5.52	5.89	5.72	7.6	8.23	8.15	6.08	7.47	7.56
7.89	8.4	6.37	6.32	5.62	6.18	6.02	7.2	7.58	6.85	7.93	7.25

Ortalama rüzgâr hızları veri seti için model olarak Rayleigh, iki-parametrelili Rayleigh, APR, APTR ve Weibull olasılık dağılım modelleri dikkate alınarak modellenmiştir. Hesaplanan Kolmogorov-Smirnov (K-S) test değerleri, K-S istatistiklerine karşılık gelen p değerleri, modellere ait Akaike Bilgi Kriteri (AIC) değerlerini ve parametre tahmin değerleri Çizelge 8.1. ile verilmiştir.

Çizelge 8. 1. Ortalama rüzgâr hızları veri seti için Rayleigh, iki-parametrelili Rayleigh, APR, APTR ve Weibull modellerine ait K-S, AIC ve parametre tahmin değerleri

	Dağılım Modeli				
	Rayleigh	İki Par. Rayleigh	APR	APTR	Weibull
K-S	0.4260	0.1274	0.1129	0.0799	0.0823
P -değeri	0.0000	0.1773	0.2954	0.7173	0.6828
AIC	331.9952	218.0297	219.2125	212.3566	214.8794
Parametre Tahminleri	$\hat{\lambda} = 5.0102$	$\hat{\lambda} = 1.8939$ $\hat{\theta} = 4.6598$	$\hat{\alpha} = 6.3438 \times 10^6$ $\hat{\lambda} = 0.2531$	$\hat{\alpha} = 11.8342$ $\hat{\lambda} = 0.4568$ $\hat{\theta} = 4.4429$	$\hat{\lambda} = 7.4940$ $\hat{\theta} = 7.4677$



Şekil 8.1. Ortalama rüzgâr hızları verisi için ampirik dağılım fonksiyonu ve model dağılım fonksiyonları

Şekil 8.1. ile ortalama rüzgâr hızları veri seti için ampirik dağılım fonksiyonunun ve Çizelge 8.1. ile veri setine uygun bulunan modellere ait dağılım fonksiyonlarının grafikleri üst üste çizdirilmiştir. Şekil 8.1.' den APTR dağılımının grafiği, ampirik dağılıma ait grafiği yakından takip ettiği açık olarak görülmektedir.

Çizelge 8.1. ile verilen K-S istatistiği değerleri ve karşılık gelen p -değerleri dikkate alındığında Rayleigh dağılımın bu veri seti için uygun bir model olmadığı söylenebilir. Bununla birlikte iki-parametrelili Rayleigh, APR, APTR ve Weibull modellerinin bu veri setini modellemede birer olasılık modeli olarak kullanılabilirliği söylenebilir. Ayrıca Çizelge 8.1. de verilen AIC değerleri incelendiğinde 212.3566 değeri ile APTR dağılımının bu veri seti için en uygun model olduğu söylenebilir.

9. SONUÇ

Bu çalışmada, APR ve APTR dağılımları yeni birer olasılık modeli olarak, sırasıyla Rayleigh ve iki-parametrelili Rayleigh dağılımlarından alfa kuvvet dönüşüm yöntemi kullanılarak türetildi. Ayrıca türetilen APR ve APTR dağılımlarının istatistiksel özellikleri incelendi. Her iki dağılımında bilinmeyen α , λ ve θ parametreleri için elde edilen en çok olabilirlik, en küçük kareler ve ağırlıklandırılmış en küçük kareler tahmin edicilerinin tahmin performanslarını ortaya koymak için kapsamlı bir simülasyon çalışması gerçekleştirildi. Simülasyon çalışması sonuçlarından elde edilen bilgiler ışığında APR ve APTR dağılımlarının tahmin edicilerin sonuçları Bias ve HKO kriterlerine göre karşılaştırıldı. Küçük örneklem hacimlerinde ML tahmin edicilerinin tahmin performansının daha düşük Bias ve HKO değerleri ile diğer tahmin edicilerin performanslarına nazaran daha tatminkâr olduğu söylenebilir. Örnek sayısı arttıkça tüm tahmin edicilerin Bias ve HKO değerlerinin azalış gösterdiği görülmektedir. Simülasyon sonuçlarına dayalı olarak incelenen tahmin edicilerin asimptotik olarak yansız ve tutarlı oldukları söylenebilir. İlimli ve büyük örneklem hacimlerinde de ML tahmin edicilerinin tahmin performansının kullanılan karşılaştırma ölçütlerine göre diğerlerinden daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır.

Çalışmada ayrıca Çanakkale bölgesinde bulunan bir rüzgâr enerji santralinden 2012-2017 yıllarında elde edilen aylık ortalama rüzgâr hızı (m/s) verileri kullanılarak bir uygulama çalışmasına yer verilmiştir. Yapılan uygulama ile temel dağılımı iki-parametrelili Rayleigh olan APTR dağılımının iki-parametrelili Rayleigh dağılımından daha iyi bir başarımlı sergilediği görülmüştür. Bu da, APTR dağılımının iki-parametrelili Rayleigh dağılımına göre daha çok veri setine model olabileceğini göstermektedir. Dahası, APTR dağılımı daha küçük AIC değeri ile geniş bir yelpazede uygulama alanına sahip olan Weibull dağılımını geride bırakmıştır.

Sonuç olarak her ne kadar Rayleigh dağılımı Weibull dağılımının, iki-parametrelili Rayleigh dağılımı üç parametrelili Weibull dağılımının özel bir halleri olsalar da, Weibull dağılımı, üç Parametrelili Weibull dağılımı ve alfa kuvvet dönüştürülmüş Weibull dağılımının bazı temel özellikleri analitik olarak ortaya konamadığı için AP dağılımı ve APTR dağılımı ile bu dağılımların istatistiksel sonuç çıkarımları oldukça

önem kazanmaktadır. Çalışma ile elde edilen veriler ışığında APR ve APTR dağılımlarının pozitif değerli ve çarpık verilerin modellenmesi konusunda güçlü birer alternatif dağılım oldukları söylenebilir.



KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., I. A. Stegun., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. 55(1), US Government printing Office. New York ,1965.
- Afify, W. M., Classical Estimation of Mixxed Rayleigh Distribution in type I Progressive censored. Journal of Statistical Theory and Applications. 10(4), 619–632, 2011.
- Akdi, Y., Matematiksel İstatistiğe Giriş. Gazi kitabevi, Ankara, 2010.
- Aktaş, S., Quantile Function for Rayleigh Distribution Kapasitans-Voltaj (C-V). AKÜ Journal of Sciences, 11, 9-12, 2011.
- Al-Omari, A. I., Zamanzade, E. Different goodness of fit tests for rayleigh distribution in ranked set sampling. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research. 12(1), 25–39, 2016.
- Ashour, S., Darwish, D., Saad, A., Log-Gamma - Rayleigh Distribution: Properties and Applications. Gazi University Journal of Science. 31(3), 967–983, 2018.
- Bacanlı, S., Köse, U., Rayleigh Dağılımının Ardışık Olasılık Oran Testi. Eng&Arch.Fac. Eskişehir Osmangazi University. 20(1), 101-112, 2007.
- Badr, M. M., Goodness-of-fit tests for the Compound Rayleigh distribution with application to real data. Heliyon, 5(8), e02225, 2019.
- Balpetek, N., Akpınar, E. K., Weibull ve Rayleigh dağılımlarına göre Elazığ ilinin rüzgâr enerjisi potansiyelinin istatistiksel analizi. Gazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, 2017.
- Bergsma, W., On a new correlation coefficient, its orthogonal decomposition and associated tests of independence. Available at SSRN 905093. 2005.
- Best, D. J., Rayner, J. C. W., Thas, O., Easily applied tests of fit for the Rayleigh

- distribution. *Sankhya B*, 72(2), 254–263, 2010.
- Biçer, H. D., Properties and Inference for a New Class of Generalized Rayleigh Distributions with an Application. *Open Mathematics*, 17(1), 700–715, 2019.
- Biçer, H. D., Biçer, C., İki Parametrelili Rayleigh Dağılımlarının Sonlu Karmalarında Parametre Tahmini. *Uluslararası İktisadi ve İdari İncelemeler Dergisi*. (18. EYİ Özel Sayısı):383-398, 2018.
- Çağlar, A., Investigation of Wind Characteristics for Antalya Region by Using Weibull Distribution. *Cumhuriyet Science Journal*, 38(4), 156–164, 2017.
- Çelik, A. N., A Statistical Analysis Of Wind Power Density Based On The Weibull and Rayleigh Models At The Southern Region Of Turkey. *Renewable Energy*, 29(4), 593–604, 2004.
- Dey, S., Dey, T., Kundu, D., Two-parameter Rayleigh distribution: Different methods of estimation. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 33(1), 55–74, 2014.
- Dey, S., Ghosh, I., Kumar, D., Alpha-Power Transformed Lindley Distribution: Properties and Associated Inference with Application to Earthquake Data. *Annals of Data Science*, 6(4), 623–650, 2019.
- Dey, S., Nassar, M., Kumar, D., Alpha power transformed inverse Lindley distribution: A distribution with an upside-down bathtub-shaped hazard function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 348, 130–145, 2019.
- Dokur, E., Ceyhan, S., Kurban, M., Comparative analysis of wind speed models using different Weibull distributions. *Electrica*, 19(1), 22–28, 2019.
- Dyer, D. D., Whisenand, C. W., Best Linear Unbiased Estimator of the Parameter of the Rayleigh Distribution-Part II: Optimum Theory for Selected Order Statistics. *IEEE Transactions on Reliability*, R-22(4), 229–231, 1973.
- Efe-eyefia, E., Eghwerido, J. T., Zelibe, S. C., Theoretical Analysis of the Weibull

- Alpha Power Inverted Exponential Distribution: Properties and Applications. Gazi University Journal of Science, 33(1), 265–277, 2020.
- Emeksiz, C., Dogan, Z., Tokat Bölgesi Rüzgar Karakteristiğinin İstatistiksel Yöntemler ile İncelenmesi. Politeknik Dergisi, 19(4), 481–489, 2016.
- Gençel, H., Tarhan, İ., Rüzgar Enerjisinin Önemli Geçiş Yerlerinden Olan Çanakkale Bölgesindeki Bazı Rüzgar Enerji Santralleri için Kapasite Faktörü İncelemesi. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 5(1), 120–139, 2019.
- Gomes, A. E., Da-Silva, C. Q., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M., A new lifetime model: The Kumaraswamy generalized Rayleigh distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 84(2), 290–309, 2014.
- Gülersoy, T., Çetin, N. S., Menemen Bölgesinde Rüzgar Türbinleri için Rayleigh ve Weibull Dağılımlarının Kullanılması. Politeknik Dergisi, 13(3), 209–213, 2010.
- Kaplan, Y. A., Rayleigh ve Weibull Dağılımları Kullanılarak Osmaniye Bölgesinde Rüzgar Enerjisinin Değerlendirilmesi. SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(1), 62-71, 2016.
- Korukçu, M. Ö., Türkiye’de Dört Yerleşim Yeri İçin Rüzgar Enerjisi Potansiyelinin Belirlenmesi. Uludağ Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi, 16 (1), 117–126, 2011.
- Köprülü, İ., Genelleştirilmiş Rayleigh Dağılımında İstatistiksel Sonuç Çıkarım. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale, 2019.
- Köse, B., Güneşer, M. T., Yazıcı, M., Yılmaz, S. H., Eskipazar Rüzgar Enerjisi Potansiyelinin Rayleigh , Lognormal ve Weibull Dağılım Modeli Kullanarak Tahminlenmesi. 3rd International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science, Haziran 2015, Valencia-Spain, s.2251-2260, 2015
- Kundu, D., Raqab, M. Z., Generalized Rayleigh distribution: Different methods of estimations. Computational Statistics and Data Analysis, 49,187-200, 2005.

- Kurban, M., Kantar, Y. M., Hocaoglu, F. O., Weibull Dağılımı Kullanılarak Rüzgar Hız ve Güç Yoğunluklarının İstatistiksel Analizi. AKÜ Fen Bilimleri Dergisi, 7(2), 205–218, 2007.
- Mahdavi, A., Kundu, D., A new method for generating distributions with an application to exponential distribution. Communications in Statistics - Theory and Methods, 46(13), 6543–6557, 2017.
- Mahmoud, M. A. W., Ghazal, M. G. M., Estimations from the exponentiated rayleigh distribution based on generalized Type-II hybrid censored data. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 25 , 71–78, 2017.
- Mert, İ., Karakus, C., Peker, F., Antakya bölgesi rüzgar karakteristiğinin incelenmesi. Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi, 5(1), 13-22, 2014.
- Nassar, M., Kumar, D., Dey, S., Cordeiro, G. M., Afify, A. Z., The Marshall–Olkin alpha power family of distributions with applications. Journal of Computational and Applied Mathematics, 351, 41–53, 2019.
- Öztürk, F., Tahmin Edici Elde Etme Yöntemleri Momentler Yöntemi. <http://80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/ist202/Ders6/Ders6.pdf> (Erişim tarihi: 25.03.2020)
- Paraschiv, L. S., Paraschiv, S., Ion, I. V., Investigation of wind power density distribution using Rayleigh probability density function. Energy Procedia, 157, 1546-1552, 2019.
- Rosaiah, K., Kantam, R. R. L., Acceptance Sampling Based on the Inverse Rayleigh Distribution. Economic Quality Control, 20(2), 277-286, 2005.
- Salo, J., Vainikainen, P., El-Sallabi, H. M., The Distribution of the Product of Independent Rayleigh Random Variables. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 54(2), 639–643, 2006.
- Sarhan, M, A., Zaindin, M., Modified Weibull distribution. Applied Sciences, 11, 123–136, 2009.

- Surles, J. G., Padgett, W. J., Inference for Reliability and Stress-Strength for a Scaled Burr Type X Distribution. *Lifetime Data Analysis*, 7(2), 187–200, 2001.
- Swain, J. J., Ventataraman, S., Wilson, J. R., Least Squares Estimation Of Distribution Functions In Johnson's Translation System. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29(4), 271–297, 1988.
- Szynal, D., Wolynski, W., Goodness- Of- Fit Tests for Exponentiality and Rayleigh Distribution. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 78(5), 751–772, 2012.
- Ul Haq, M. A., Kumaraswamy Exponentiated Inverse Rayleigh Distribution. *Mathematical Theory and Modeling*, 6 (3), 93–104, 2016.
- Ünal, C., Cakmakyapan, S., Özel, G., Alpha Power Inverted Exponential Distribution: Properties and Application. *Gazi University Journal of Science*, 31(3), 954–965, 2018.