T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN OPERATÖRLERİ

KENAN BOZKURT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ali ARAL

KIRIKKALE-2022

Kenan BOZKURT tarafından hazırlanan “ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN OPERATÖRLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. ALİ ARAL
Matematik, Kırıkkale Üniversitesi İmza………
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan : Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI
Matematik, Ankara Üniversitesi İmza………
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Prof. Dr. Ali OLGUN
Matematik, Kırıkkale Üniversitesi İmza………
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. .

Üye : Prof. Dr. Murat OLGUN
Matematik, Ankara Üniversitesi İmza………
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Doç. Dr. Başar YILMAZ
Matematik, Kırıkkale Üniversitesi İmza………
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi : 29/12/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Sevgili Eşim'e ve Ailem'e…

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kenan BOZKURT

29/12/2022

ÖZET

ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN OPERATÖRLERİ

BOZKURT, Kenan
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL
Aralık 2022, 64 sayfa

Bu tez çalışmasında köşe koordinatları (0,0), (1,0) ve (0,1) olan sabit üçgensel bölge üzerinde tanımlı ve polinom tipli fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein operatörü, üstel tipli fonksiyonları koruyacak şekilde yeniden inşa edilmiştir. Böylece iki değişkenli Bernstein operatörü, hem üstel fonksiyonları koruyacak şekilde modifiye edilmiş hem de operatörün tanım kümesi bir kenarı hareketli üçgensel bölge olacak şekilde genişletilmiştir. Daha sonra yeniden oluşturulan modifiye operatörün Korovkin teoremi yardımıyla düzgün yakınsaklığı gösterilmiş, iki değişkenli ileri fark operatörü kullanılarak şekil koruma özellikleri verilmiştir. Operatörün lokal yaklaşım özelliklerini belirleyebilmek için Öklid uzayında tanımlı tam süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı elde edilmiştir. Üstelik operatörün noktasal yakınsaklığıyla ilgili olarak Voronovskaja tipli teorem ispat edilmiştir. Ardından iki değişkenli Bernstein operatörü ile üstel tipli yeni modifiye operatör karşılaştırılmıştır. Son olarak modifiye operatörün kendisini oluşturan fonksiyona yaklaşımı grafiklerle gösterilmiş olup ardından çeşitli sayısal değerler için hata tahmin tablosu verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki değişkenli Bernstein operatörü, üstel fonksiyon, Korovkin teoremi, şekil koruma özellikleri, tam süreklilik modülü, Voronovskaja tipli teorem,

ABSTRACT

TWO VARIABLE BERNSTEIN OPERATORS PRESERVING EXPONENTIAL FUNCTIONS

BOZKURT, Kenan
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph.D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
December 2022, 64 pages

In this thesis, the bivariate Bernstein operator preserving the polynomial type functions defined on the unit simplex with vertex coordinates (0,0), (1,0) and (0,1) is reconstructed in a way that preserves the exponential type functions. Thus, bivariate Bernstein operator has been modified to preserve both the exponential functions and the domain of the operator has been extended so that has one moved curved side. Then, uniform convergence of the new modified operator is shown with the help of Korovkin's theorem and shape preserving properties are given using the forward difference operator of two variables. In order to determine the local approximation properties of the operator, the rate of convergence is obtained with the help of the complete modulus of continuity defined in Euclidean space. Moreover, the pointwise convergence of the operator is proved by the Voronovskaja type theorem. Then, the bivariate Bernstein operator and the new modified operator are compared. Finally, the approach of the modified operator to the function that forms it is shown with graphics, and then the error estimation table for various numerical values is given.

Key Words: Bivariate Bernstein operators, exponential function, Korovkin theorem, shape preserving properties, complete modulus of continuity, Voronovskaja type theorem

TEŞEKKÜR

Yıllar boyunca hayalini kurup çeşitli zorluklar sebebiyle yarım bıraktığım ama asla vazgeçmediğim ciddi bir emek ve özveriyle hazırladığım doktora tezimi tamamlamanın heyecanı ve gururunu yaşamaktayım.

Çalışmam boyunca desteğini, bilgisini ve tecrübesini hiçbir zaman esirgemeyen, kendisinin öğrencisi olmaktan onur duyduğum değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ali ARAL'a teşekkür eder, minnettarlığımı sunarım.

Tez savunmamda yer alan ve fikirleriyle yol gösteren değerli hocalarım Prof. Dr. Ali OLGUN'a, Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI'ya, Prof. Dr. Murat OLGUN ve Doç. Dr. Başar YILMAZ'a teşekkür ederim.

Ayrıca desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen sevgili eşime ve aileme şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

S	Köşe koordinatları $(0,0),(1,0),(0,1)$ olan üçgensel bölge
$S_{\alpha,\beta}^{n}$	Bir kenarı hareketli üçgensel bölge
$C[a,b]$	Kapalı ve sınırlı $[a,b]$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^{k}[a,b]$	k -mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlar uzayı
$C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)$	$S_{\alpha,\beta}^{n}$ bölgesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
T_n	Lineer pozitif operatör olan herhangi bir dizi
B_n	Klasik iki değişkenli Bernstein Operatörü
$B_n^{\alpha,\beta}$	Üstel fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein Operatörü
$p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)$	Bernstein bazı
$\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t,s)$	$e^{i\alpha t+j\beta s},\ i\neq j\quad i,j=0,1,2$ olacak şekildeki test fonksiyonları
$\lVert\ \rVert_C$	Sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı maksimum normu
$\Delta_h^{(i,j)}f$	(i,j) -inci mertebeden iki değişkenli ileri fark operatörü
$\omega(f,\delta_1,\delta_2)$	$\mathbb{R}^2$ nin kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı tam süreklilik modülü
$\log_\alpha^\beta(\cdot)$	$e^{\alpha t}$ fonksiyonunun $t=\dfrac{1}{\alpha}\log_e(\cdot)$ olacak şekildeki ters fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1. Yaklaşım Teorisinin Tarihsel Gelişimi Üzerine

“*…All exact science is dominated by the idea of approximation.*”

Britanyalı ünlü filozof Bertrand Russell (1872-1970)’ın bu sözü tarih boyunca matematik veya fizik gibi temel bilimlerde yaklaşık değer bulma fikrinin egemen olduğunu göstermektedir (Russell, 1949). Russell’a göre hiçbir ölçüm, ölçüm yapılan aletten daha kesin değildir. Bu kapsamda tarih boyunca bilim insanları kesin sonuç elde edemeseler de gerçeğe çok yakın sonuçlar elde edebilmek için çaba göstermişlerdir. Nitekim ölçülmesi imkânsız olan niceliklerin gözlem yoluyla veya sezgisel anlamda hesaplanması kesin bir sonuç bulunamayacağını gösterir. Örneğin, iki yıldız arasındaki mesafenin, bu iki yıldız arasında belirli bir hız ve zamana göre yolculuk yapılamadığı sürece hesaplanması imkânsız olabilir. Ama günümüzde teknolojik gelişmeler ele alındığında herhangi iki nokta arasındaki mesafenin, bu noktaların konumunun bilinmesi durumunda GPS gibi küresel konumlama sistemleri sayesinde yaklaşık bir değerle hesaplanabilmesi mümkündür.

Diğer yandan irrasyonelliğin keşfiyle birlikte yaklaşık değer bulmanın gerekli hâle gelmesi, matematiğin en önemli zorluklarından birisi olmuştur. Bunun en iyi örneği Babilliler’in köklü sayıları yaklaşık olarak hesaplamaya çalışmasıdır (Steffens, 2006). Bu süreç iki nicelik arasında ilişki kurma problemiyle devam etmiştir. Dolayısıyla yaklaşık değer bulma fikri, nicelikler arasındaki ilişkiyi tanımlayan yeni bir kavrama yani fonksiyon kavramının ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bunun en iyi örneği ise bu ilişkinin tanımlanmasına yardımcı olan fonksiyon kavramının ilk olarak Leonhard Euler (1707-1783) tarafından geliştirilmiş olmasıdır.

Ardından çözülmesi gereken problem, fonksiyon kavramının daha pratik ve yararlı olabilmesi için nasıl temsil edilmesi yönündeydi. Bununla ilgili temsiller $\log x$ ve e^x gibi transandantal fonksiyonların yaklaşık değerini hesaplamaya yardımcı olmak için Taylor (1685-1731) formülü ve Newton (1643-1727) interpolasyon metoduyla ortaya çıkmıştır. Bu formüller her ne kadar iyi bir yaklaşım sunsa da hata oranının kontrol edilememesi sebebiyle esas amaca ulaşılamamıştır. Çünkü fonksiyonların yaklaşımı düzgün değildi. Bu da bazı noktalarda hata oranının büyük çıkmasına sebep oldu. Bunun üzerine Carl Friedrich Gauss (1777-1855) tarafından henüz 18 yaşındayken en küçük kareler metodu geliştirilmiş olup buradaki amaç; birbirine bağlı olarak değişen iki nokta arasında olabildiğince gerçeğe yakın matematiksel bir bağıntı bulmaktı. Başka bir deyişle en küçük kareler metodu, ölçüm yapılarak elde edilen noktalara olabildiğince yakın geçen bir fonksiyonun bulunabilirliği üzerineydi. Böylece matematiksel istatistiğin temelleri atılmış olup bununla birlikte "Regresyon Analizi" de ortaya çıkmıştır.

Ancak Gauss'un bu yönteminde de hata oranının fazla olduğu noktalar olabilirdi. Dolayısıyla yeni bir fikre ihtiyaç vardı. Bu fikir, yaklaşımdaki hata oranının tüm aralık üzerinde en aza indirgenmesi için neler yapılabileceği üzerineydi. Steffens'a göre (2006) muhtemel ilk çalışma, Leonhard Euler tarafından Rus imparatorluğunun çok büyük olan sınırlarının enlemler yardımıyla çiziminin kesin olarak belirlenebilmesi problemiydi. Euler bu problemin çözümüyle, bir meridyenin üzerindeki tüm noktaları kullanarak enlem ve yükseklikler arasında en iyi muhtemel yaklaşımı vermiştir.

Daha sonra Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749-1827) tarafından "*dünya yüzeyine en yakın elipsoidin belirlenmesi*" problemi ele alınmıştır. Bu problemin çözümüne Euler ve Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) katkı sağlamıştır (Steffens, 2006).

Böylelikle 19. yüzyılın ortasına kadar transandantal sayıların yaklaşık değerini bulma ve noktalar arasında ilişki kurma fikri, verilen bir fonksiyonun o fonksiyona mümkün olduğunca daha yakın olan başka bir fonksiyonla ifade edilmesiyle devam etmiştir.

İşte tam bu noktada Rus matematikçi Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821-1894) yukarıdaki fikirleri kendi deyimiyle "*Theory of functions deviating the least possible from zero*" adlı teorisiyle birleştiren ilk kişiydi (Steffens, 2006). Böylece matematik alanında yaklaşım teorisinin temelleri atılmış oldu. Bu teori, kapalı aralıkta verilen sürekli bir fonksiyona en iyi yaklaşımı veren ve derecesi n'den büyük olmayan bir $P_n(x)$ polinomunu belirleyebilmekti. Bu teoremi açıkça şu şekilde ifade edebiliriz:

" f , $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon ve $P_n(x)$ derecesi n'den büyük olmayan bir polinom olsun. Bu durumda

$$\max_{a \le x \le b} \left| f(x) - P_n(x) \right|$$

ifadesini minimum yapan $P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + ... + p_n$ *olacak şekilde bir* $P_n(x)$ *polinomu bulunabilir mi?"* (Chebyshev,1854).

Chebyshev, bu teorisinde yukarıdaki gibi bir $P_n(x)$ polinomunun varlığından söz etmiş ancak bunu gösteren herhangi bir ispat yapmamıştır. Bunun nedenine V. L. Goncharov, "The Theory of the Best Approximation of Functions" adlı çalışmasında değinmiştir.

Böylece Chebyshev'in bu düşüncesiyle, "fonksiyonlarda en iyi yaklaşımı bulma problemi" 19. yüzyıl ortası ve sonrasına denk gelen matematikçiler için yeni bir uğraş alanı olmuştur.

Bunlardan birisi Alman matematikçi Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)'dır. Weierstrass 1885 yılında kompakt $[a,b]$ aralığında verilen sürekli her fonksiyona düzgün yakınsayan bir (p_n) polinomlar dizisinin varlığını ispat etmiştir. Açıkça ifade edecek olursak,

"f, $[a,b]$ *kapalı aralığında tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere* $\forall \varepsilon > 0$ *için öyle bir* p_n *polinomu bulunabilir öyle ki* $\forall x \in [a,b]$ *için*

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| < \varepsilon$$

ya da buna denk olarak

$$\| f - p \|_C < \varepsilon$$

yazılabilir." (Weierstrass, 1885). Burada C normu, $[a,b]$ aralığı üzerinde

$$\| f \|_C = \max_{a \le x \le b} \left| f(x) \right|$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu teoremin ispatı uzun ve karmaşık olduğu için dönemin diğer ünlü matematikçileri bu teoreme daha basit ve anlaşılır bir ispat yöntemi bulmak için çalışmıştır.

Bu konu üzerinde çalışanlar arasında en önemlisi kuşkusuz Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968)'dır. Bernstein'ın ortaya koyduğu ispat yöntemi ilerde lineer pozitif operatörlerin yakınsaklığının incelenmesinde de önemli bir rol oynamıştır. Bernstein, $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlara yakınsayan bir polinomun varlığını,

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(x)^k (1-x)^{n-k}, \ \forall x \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}$$

şeklinde bir polinomlar dizisi tanımlayarak $f \in C[0,1]$ olmak üzere keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall x \in [0,1]$ ve her $n > n_0$ için

$$|B_n f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olduğunu kanıtlamıştır (Bernstein, 1912). Burada

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}(x)^k (1-x)^{n-k}$$

ifadesine "Bernstein Bazı" denmektedir. İlerde kendi ismiyle anılacak olan "Bernstein Polinomları" istatistik veya mühendislik gibi birçok alanda kullanılacaktır. Aynı zamanda birçok matematikçi için de yeni bir çalışma konusu olacaktır. Bernstein polinomlarının önemi 20. yüzyılın ortalarında ancak anlaşılabilmiştir.

1932 yılında Elizaveta Vladimirovna Voronovskaja tarafından Bernstein operatörlerinin asimptotik bir yaklaşımı verilmiştir. Bu durum aynı zamanda noktasal yakınsaklık için iyi bir örnektir. Bu teoremi kısaca şu şekilde ifade edebiliriz.

" f *fonksiyonu* $x \in [0,1]$ *noktasında sınırlı ve* $f''(x)$ *türevine sahipse bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[B_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x) + h_n(x)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$$

dır. Eğer $f \in C^2[0,1]$ *ise yakınsama düzgündür"* (Voronovskaya, E.V., 1932).

Bu tezde de Voronovskaya tipli teoreme yer verilmiş, üstel fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein operatörleri için bir sonuç elde edilmiştir.

1950'lerden itibaren, $\{L_n\}_{n\geq 1}$ lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere $L_n f$ 'in sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını garantilemek için yeterli koşulların neler olduğu sorusunun cevabı araştırılmış ve üç farklı matematikçi tarafından art arda yıllarda sorunun cevabı ispatlanmıştır. Bunlardan ilki Romanyalı matematikçi Tiberiu Popoviciu (1906-1975), diğeri İsveçli istatistikçi Harald Bohman (1920-1996) sonuncusu ise Rus matematikçi Pavel Petrovich Korovkin (1913-1985)'dir.

T. Popoviciu, 1951 yılında diğerlerinden bağımsız olarak teoremin ispatını yapmış olsa da makaleyi kendi dilinde yazdığı için uzun bir süre keşfedilememiştir (akt. Agratini, 2006).

1951 yılında H. Bohman aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

" $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$ 'e dönüşüm yapan lineer pozitif operatör olsun. $f \in C[0,1]$ ve $0 \le \alpha_{n,i} \le 1$ olmak üzere

$$L_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_{n,i}) p_{n,i}(x), \; p_{n,i}(x) \ge 0$$

şeklinde tanımlı $\{L_n\}_{n\ge1}$ lineer pozitif operatörler dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1, \quad L_n(t;x) \rightrightarrows x, \quad L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

olmasıdır" (H. Bohman, 1951).

P. P. Korovkin 1953 yılında bu teoremi genişletmiş ve aşağıdaki şekilde ifade etmiştir.

"$\{L_n\}_{n\ge1}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. α_n, β_n ve γ_n, $[a,b]$ kapalı aralığında sıfıra düzgün yakınsayan birer dizi olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1 + \alpha_n(x), \qquad L_n(t;x) \rightrightarrows x + \beta_n(x), \qquad L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 + \gamma_n(x)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $\{L_n\}_{n\ge1}$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır" (P.P. Korovkin, 1953).

Korovkin'in ispatıyla lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemine ilgi artmış ve "Korovkin Tipli Yaklaşım Teorisi" adlı yeni bir araştırma alanı ortaya çıkmıştır. Bunun en önemli sebebi Korovkin teoreminin koşullarının basit ve lineer pozitif operatörler için kolay ispat tekniğidir (Altomare ve Campiti, 1994). Ayrıca Korovkin teoremiyle birlikte hem lineer hem de pozitif operatör olması sebebiyle Bernstein operatörlerine de ilgi artmıştır. Dolayısıyla Bernstein operatörleri birçok alanda sayısız çalışmanın odak noktası olmuştur. Bu alanlara görüntü işleme, sinyalizasyon, tıp, medikal, inşaat mühendisliği, istatistik, uygulamalı matematik, bilgisayar destekli tasarım ve veri analizi gibi birçok örnek verilebilir. Özellikle otomotiv sektöründe Paul de Casteljau (1930-2022) Citroën firmasında ve Pierre Étienne Bézier (1910-1999) Renault firmasında otomobil gövdelerinin tasarımı için Bernstein polinomlarını araç olarak kullanmışlardır. Bu sayede günümüzde grafik tasarımları için hâlen kullanılmakta olan Casteljau algoritması ve Bézier eğrileri açığa çıkmıştır. Böylelikle lineer pozitif operatörler için yapılmış olan çalışmalar 20. yüzyılın ortalarından günümüze kadar uzanan ve hâlen devam etmekte olan bir dönemi kapsar. Bu çalışmalara örnek olarak Korovkin teoreminin sağlanması, şekil koruma özelliklerinin incelenmesi, tanım kümesini genişletme, yaklaşım hızının bulunması, asimptotik yaklaşım ve diğer operatörlerle karşılaştırılması gibi detaylar verilebilir.

Yaklaşım teorisinde önemli olan bir diğer problem yaklaşım hızının bulunması problemidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken (α_n) ve (β_n) sıfıra yakınsayan reel değerli diziler olmak üzere $\alpha_n \leq \beta_n$ olması (α_n) dizisinin (β_n) dizisinden daha hızlı sıfıra yakınsadığını gösterir. Bu durum lineer pozitif operatörler için düşünüldüğünde kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı olan bir $T_n(f)$ lineer pozitif operatör dizisinin

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n f - f\| = 0$$

olacak şekilde Korovkin teoremini sağlaması ,

$$\|T_n f - f\| = c_n$$

şeklinde bir (c_n) sıfır dizisinin varlığı ile mümkündür. O halde (c_n) dizisinin sıfıra yakınsama hızı, verilen operatörün kendisini oluşturan fonksiyona yakınsama hızını vermektedir. Bir lineer pozitif operatörün yaklaşım hızı asimptotik yaklaşımla bulunabileceği gibi ayrıca süreklilik modülü yardımıyla da bulunabilir.

Lineer pozitif operatörler inşa edilirken ilk önce bakılması gereken problem, operatöre Korovkin test fonksiyonları uygulandığında açığa çıkan fonksiyonun test fonksiyonlarıyla aynı karaktere sahip olup olmadığıdır. Korovkin test fonksiyonlarını kısaca ifade edecek olursak, $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ şeklinde olup operatöre uygulandığında beklenen sonuç $L_n(e_i) = e_i$ şeklinde olması yönündedir. Ancak lineer pozitif operatörler genelde test fonksiyonlarından ilk ikisini direkt korur. Bu durum elbette değişebilir. Bilindiği üzere Bernstein operatörü $e_0(x)=1$ ve $e_1(x)=x$ test fonksiyonlarını direkt korur.

J. P. King 2003 yılında $T_n(e_0)(x)=e_0(x)$ ve $T_n(e_2)(x)=e_2(x)$ ile belirtilen test fonksiyonlarını koruyacak şekilde Bernstein operatörünün bir genelleştirmesini çalışmıştır. King, makalesinde her $m\in\mathbb{N}$ her $x\in[0,1]$ ve $0\le r_m(x)\le 1$ için $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(x)=x$ olacak şekilde bir

$$r_m(x)=\begin{cases} x^2, & m=1 \\ -\dfrac{1}{2(m-1)}+\sqrt{\dfrac{m}{m-1}x^2+\dfrac{1}{4(m-1)^2}}, & m=2,3,\ldots \end{cases}$$

dizisi tanımlayarak Bernstein operatörünün

$$K_m(f;x)=\sum_{i=0}^{m} f\left(\frac{i}{m}\right)\binom{m}{i}\left(r_m(x)\right)^i\left(1-r_m(x)\right)^{m-i} \tag{1.1}$$

şeklinde bir genelleştirmesini elde etmiştir. Bu operatör $r_m(x)=x$ alındığında klasik Bernstein operatörüne dönüşür ve $0\le x<\dfrac{1}{3}$ aralığında klasik Bernstein operatöründen daha iyi bir yaklaşım derecesine sahiptir (King, 2003).

2006 yılında Cárdenas-Morales, Garrancho ve Muñoz-Delgado (1.1) operatörünün $[0,1]$ aralığında her $n>1$, $\alpha\in[0,\infty)$ ve

$$r_{n,\alpha}(x):=-\frac{n\alpha+1}{2(n-1)}+\sqrt{\frac{n(\alpha x+x^2)}{n-1}+\frac{(n\alpha+1)^2}{4(n-1)^2}},\ \ n>1$$

olmak üzere Korovkin test fonksiyonlarının bir lineer birleşimini koruyan yani $B_{n,\alpha}(e_2+\alpha e_1)=e_2+\alpha e_1$ olacak şekilde bir genelleştirmesini vermiş; $B_{n,\alpha}f$ operatörünün şekil koruma özellikleri, yaklaşımının derecesi, konveksliği ve yaklaşım hızını incelemiştir (Cárdenas-Morales vd., 2006). Ayrıca $B_{n,\alpha}f$ operatörünün klasik Bernstein operatörü ve King tipli versiyonu ile karşılaştırılması yapılmış, hangi koşullar altında daha iyi bir yaklaşım verdiği incelenerek, sonuçlar örnek ve grafiklerle desteklenmiştir.

Yukarıda anlatılan King (2003) ve Cárdenas-Morales vd. (2006)'nin yaptığı çalışmalar, bu tez için ilk motivasyon konusudur.

1.2. Üçgensel Bölgede İki Değişkenli Fonksiyonlar ile Yaklaşım

1953 yılında Paul Leo Butzer, karesel $\square = \{(x,y): 0 \le x, y \le 1\}$ bölgesi üzerinde iki değişkenli Bernstein operatörünü; $f(x,y)$ fonksiyonu $\square$ bölgesinde sürekli ve sınırlı olmak üzere

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{m}\right) p_{n,k}(x)\, p_{m.l}(y)$$

şeklinde ele almış, operatörün $f(x,y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını göstermiştir (Butzer, 1953). Burada

$$p_{n,i}(x) := \binom{n}{i} (x)^i (1-x)^{n-i}$$

şeklindedir.

1963 yılında Dimitrie D. Stancu $\Delta := \{(x,y): 0 \le x+y \le 1,\ 0 \le x, y \le 1\}$ üçgensel bölgesi üzerinde Bernstein polinomlarının

$$B_n(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) p_{n.k,l}(x,y) \tag{1.2}$$

şeklinde bir genelleştirmesini elde etmiştir (Stancu,1963). Burada

$$p_{n,k,l}(x,y) := \binom{n}{k}\binom{n-k}{l} x^k y^l (1-x-y)^{n-k-l}$$

dir. Stancu'nun bu çalışması, bu tez için ikinci motivasyon konusudur.

1.3. Üstel Fonksiyonları Koruyan Lineer Pozitif Operatörler

Üstel fonksiyonları koruyan lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri son beş yılın popüler konusu olmuştur. Geçmişte her ne kadar "exponential" adı altında sayısız çalışma bulunsa da bu tezin konusu olan üstel fonksiyonlarla yaklaşım fikri geçmişte bahsedilen anlamda değildir. Çünkü günümüze kadar yapılan çalışmalarda özellikle tam fonksiyonlar için kompleks bölgede üstel fonksiyonların(trigonometrik) sağladığı çeşitli özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca üstel ağırlıklı uzaylar da yine günümüze kadar gelen üstel fonksiyonlarla ilgili çalışmalar içerir.

Bu tezde farklı olan üstel yaklaşım fikri, Korovkin test fonksiyonları $\left\{1, e^x, e^{2x}\right\}$ şeklinde düşünüldüğünde lineer pozitif operatörlerin bu kümenin elemanlarının hangisi veya hangilerini direkt olarak koruduğu yönündedir. Dolayısıyla daha önce iyi bilinen bazı lineer pozitif operatörlerin özelliklerinin üstel tipli test fonksiyonları sayesinde modifiye edilmesiyle; bu operatörlerin momentleri, şekil koruma özellikleri, asimptotik yaklaşım, yaklaşım hızının bulunması ve polinom tipli özellikleriyle karşılaştırılması son beş yılın popüler konusu olmuştur.

Bernstein operatörünün üstel tipli bir modifiyesi aşağıdaki şekilde incelenmiştir.

$$U_n(f;t) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) e^{-\lambda \frac{i}{n}} e^{\lambda t} p_{n,i}\left(\alpha_{n,\lambda}(t)\right)$$

Burada

$$\alpha_{n,\lambda}(z) = \frac{e^{\lambda z/n} - 1}{e^{\lambda/n} - 1}$$

olup $U_n f$ operatörü ile Bernstein operatörü arasında

$$U_n(f;t) = e^{\lambda t} B_n\left(\frac{f}{exp_\lambda}; \alpha_{n,\lambda}(t)\right)$$

şeklinde bir ilişki elde edilmiştir (Aral vd., 2018). Bu çalışma bu tez için üçüncü motivasyon konusudur.

Stancu (1963), King (2003), Cárdenas-Morales vd. (2006) ve Aral vd., (2018) tarafından belirtilen yıllara göre yapılan çalışmalar birlikte düşünüldüğünde bu tezin konusu "Üstel Fonksiyonları Koruyan İki Değişkenli Bernstein Operatörleri" olarak açığa çıkmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, yaklaşım teorisinin tarihsel gelişimi anlatılarak bu tez konusunun ortaya çıkışına ve belirlenmesine katkıda bulunan güncel teorilere yer verilmiştir. Ayrıca yaklaşım teorisinin mihenk taşı olarak bilinen Chebyshev, Weierstrass, Bernstein ve Korovkin teoremleri hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, bu tez boyunca gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm bu tezin orijinal bölümüdür. Bu bölümde bir kenarı hareketli üçgensel bölge üzerinde üstel tipli fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein operatörü detaylı bir şekilde ele alınmış, çeşitli lemma ve teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Bölüm sonunda ana konuya ilişkin örnekler verilmiş ve grafiklerle desteklenmiştir. Son olarak sayısal verilerin değerlendirildiği hata tahmin tablosuna yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır. Bu bölümde yer alan açıklamalar bu tezden sonra yapılacak olan yeni çalışmalar için bir örnek teşkil etmektedir.

1.4. Kaynak Özetleri

Bu tezin orijinal bölümünün hazırlanmasında D.D. Stancu'nun "*A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables*" adlı makalesinden, J.P. King'in "*Positive linear operators which preserve* x^2" adlı makalesinden, Cárdenas-Morales, Garrancho ve Muñoz-Delgado'nun "*Shape preserving approximation by Bernstein-type operators which fix polynomials*" adlı makalesinden, son olarak Aral, Cárdenas-Morales ve Garrancho'nun "*Bernstein-type operators that reproduce exponential functions*" adlı makalesinden yararlanılmıştır. Diğer bölümlerde yer alan bilgiler ve temel kavramlar referanslarıyla birlikte verilmiş olup kaynakçada yer almaktadır.

1.5. Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı, köşe koordinatları (0,0), (1,0) ve (0,1) olan üçgensel bölge üzerinde tanımlı reel değerli, sürekli ve iki değişkenli üstel fonksiyonların Korovkin tipli test fonksiyonları olarak ele alındığında iki değişkenli Bernstein operatörünün sağladığı yakınsaklık koşullarını incelemektir. Bu düşünceyle iki değişkenli Bernstein operatörünün tanım kümesinin genişletilmesi ve üstel tipli fonksiyonları koruyacak şekilde yeniden inşa edilmesi, düzgün yakınsaklığının araştırılması, iki değişkenli ileri fark operatörü yardımıyla konveksliğinin incelenmesi, tam süreklilik modülü kullanılarak üstel tipli bir yaklaşım hızının bulunması, ayrıca noktasal yaklaşım için Voronovskaja tipli teoremin ele alınması bu çalışmanın esas amaçlarını oluşturmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fonksiyonlarla İlgili Bazı Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. (Noktasal Yakınsaklık) Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n \geq n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. Burada n_0 sayısı hem ε, hem de x noktasına bağlıdır.

Tanım 2.1.2. (Düzgün Yakınsaklık) Her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_0 vardır öyleki her $n \geq n_0$ ve her $x \in \mathrm{A}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir ve kısaca $f_n \rightrightarrows f$ şeklinde gösterilir. Burada n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olup x noktalarından bağımsızdır.

Teorem 2.1.1. (Düzgün Yakınsaklık Teoremi) f_n ve f fonksiyonları $I = [a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olsunlar. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$c_n = \operatorname*{maks}_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$$

eşitliği ile tanımlanan (c_n) dizisinin bir sıfır dizisi olmasıdır. Gösterim olarak

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname*{maks}_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 2.1.3. (İki Değişkenli Fonksiyon) $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ boş kümeden farklı birer küme olsun. Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için

$$\begin{aligned} f: \quad A \times B &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\to z = f(x,y) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f fonksiyonuna reel değerli iki değişkenli fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.1.4. (İki Değişkenli Fonksiyonların Limiti) (x_0, y_0) noktası $D \subset \mathbb{R}^2$ kümesinin bir yığılma noktası ve f fonksiyonu D üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyleki $|x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta$ iken yani $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ şartını sağlayan her bir $(x, y) \in D$ için $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ dur.

Tanım 2.1.5. (İki Değişkenli Fonksiyonların Sürekliliği) $D \subset \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) noktası D kümesinin bir yığılma noktası olsun. f fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında tanımlı ve bu noktadaki limiti $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$ ise f fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu D kümesinin her noktasında sürekli ise D üzerinde süreklidir denir.

2.2. Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.2.1. (Sürekli Fonksiyonlar Uzayı) Kompakt bir $I = [a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, a noktasında sağdan b noktasında soldan sürekli olmak üzere tüm noktalarda sürekli olan fonksiyonların kümesine sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve $C[a,b]$ veya $C(I)$ şeklinde gösterilir. $C[a,b]$ uzayı kısaca

$$C[a,b] := \left\{ f \;\middle|\; f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall x \in [a,b] \text{ için sürekli} \right\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.2. (Sürekli Türevlenebilir Fonksiyonlar Uzayı) Kompakt bir $[a,b]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonunun her bir $k = 1, 2, ...$ için k 'ıncı mertebeden türevleri var ve bu türevler sürekli ise bu taktirde $C^k[a,b]$ uzayına k 'ıncı mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonlar uzayı denir.

Tanım 2.2.3. $D \subset \mathbb{R}^2$ düzlemde sınırlı ve kapalı bir bölge olmak üzere D bölgesi üzerindeki iki değişkenli sürekli fonksiyonlar uzayı kısaca

$$C(D) := \left\{ f \;\middle|\; f : D \to \mathbb{R} \text{ tanımlı ve } \forall (x,y) \in D \text{ için sürekli} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

2.3. Lineer ve Normlu Uzay

Tanım 2.3.1. (Vektör Uzayı) $V \neq \varnothing$ bir küme ve $(K,+,\cdot)$ reel veya kompleks sayılar cismi olsun. V de bir iç işlem $\oplus : V \times V \to V$ ve bir dış işlem $\odot : K \times V \to V$ şeklinde tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\oplus$ ve $\odot$ işlemleriyle birlikte V ye K cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay veya vektör uzayı denir ve $(V,\oplus,(K,+,\cdot),\odot)$ ile gösterilir.

1) Her $x,y,z \in V$ için $(V,\oplus)$ iç işlemine göre değişmeli gruptur.

v_1) Kapalılık özelliği, $x \oplus y \in V$

v_2) Birleşme özelliği, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

v_3) Birim eleman, $x \oplus \theta = \theta \oplus x = x$ olacak şekilde $\theta \in V$ dir.

v_4) Ters eleman, $x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = \theta$ olacak şekilde $x^{-1} = -x \in V$ dir.

v_5) Değişme özelliği, $x \oplus y = y \oplus x$

2) Her $\alpha,\beta \in K$ ve her $x,y \in V$ için skalerle çarpma yani V deki $\odot$ dış işlemine göre aşağıdaki şartlar sağlanır.

v_6) Kapalılık özelliği, $\alpha \odot x \in V$

v_7) Skalerlerin çarpımı, $(\alpha \cdot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$

v_8) Soldan dağılma özelliği, $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

v_9) Sağdan dağılma özelliği, $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$

v_{10}) Birim eleman, $1_K \odot x = x$ olacak şekilde $1_K \in K$ dır.

Tanım 2.3.2. (Normlu Uzay) $(X,+,\cdot)$ bir K cismi (reel veya kompleks) üzerinde tanımlı lineer uzay ve

$$\begin{aligned} \|.\| : X &\to K \\ x &\to \|x\| \end{aligned}$$

bir fonksiyon olsun.

θ_X , X vektör uzayının etkisiz elemanı olmak üzere

$i)$ Her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ (Pozitif tanımlılık)

$ii)$ Her $x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta_X$ (Uzayın birim elemanı)

$iii)$ Her $\alpha \in K$ ve $x \in X$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (Skalerle çarpma)

$iv)$ Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir. Şu halde $(X, \|.\|, +, (K, +, \cdot), \cdot)$ uzayı lineer normlu uzaydır.

Uyarı 2.3.1. $C[a,b]$ uzayı, kompakt bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli ve reel değerli fonksiyonlar uzayı olsun. $(C[a,b], +, \cdot)$ uzayı her $x \in [a,b]$ için

$$
\begin{aligned}
+ : \mathrm{C}[a,b] \times \mathrm{C}[a,b] &\rightarrow \mathrm{C}[a,b] \\
(f, g) &\rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x) \\
\cdot : \mathbb{R} \times \mathrm{C}[a,b] &\rightarrow \mathrm{C}[a,b] \\
(\lambda, f) &\rightarrow (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)
\end{aligned}
$$

işlemleriyle birlikte bir lineer uzaydır. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\| := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

şeklinde tanımlı olup $\|.\| : C[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu norm aksiyomlarını sağlar. Dolayısıyla $(C[a,b], \|.\|)$ bir lineer normlu uzaydır (Lorentz, 1966). $C[a,b]$ üzerindeki norm kısaca $\|\cdot\|_C$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 2.3.2. $C(D)$ uzayı üzerindeki norm

$$\|f\|_{C(D)} \coloneqq \sup_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$$

şeklinde tanımlı olup $(C(D), \|.\|)$ bir lineer normlu uzaydır.

Uyarı 2.3.3. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [a,b]$ için bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsak olması, kısaca $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_C = 0$ şeklinde gösterilir (Lorentz, 1966).

2.4. Taylor Polinomu ve Seri Açılımı

Taylor polinomları yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahiptir. Eğer bir aralıkta verilen bir nokta komşuluğunda f fonksiyonu ile bir p polinomunun aldığı değerlerin farkı istenildiği kadar küçük yapılabiliyorsa bu durumda f fonksiyonunu incelemek yerine p polinomunu incelemek yeterli olacaktır. Taylor polinomları, verilen bir noktadaki değeri ile türevleri f fonksiyonu ile aynı olan polinomlar arasındaki ilişkiyi incelerken kullanılır. Bu durum lineer pozitif operatörlerin yaklaşım teorisinde noktasal yakınsaklık probleminin çözümü için kullanılan Voronovskaja tipli teoremin ispatında karşımıza çıkar. Bu tezde Taylor polinomlarıyla ilgili bilinmesi gereken en önemli husus iki değişkenli Taylor seri açılımıdır. Bu sebeple aşağıdaki tanım ve teoremlerin iyi bilinmesi gerekir.

Teorem 2.4.1. f, $x=a$ noktasında n-inci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$$p(a)=f(a),\ p'(a)=f'(a),...,\ p^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$$

eşitliklerini sağlayan ve derecesi n den büyük olmayan bir tek p polinomu vardır ve bu polinom

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu p polinomuna f fonksiyonu tarafından $x=a$ noktasında üretilen n-inci dereceden Taylor Polinomu denir.

Teorem 2.4.2. $n\geq 1$ olmak üzere f ile g, $x=0$ noktasında n-inci mertebeden türevlenebilen birer fonksiyon ve p_n de n-inci dereceden bir polinom olsun. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ olmak üzere $f(x)=p_n(x)+x^n g(x)$ yazılabiliyorsa p_n polinomu f fonksiyonu tarafından $x=0$ noktasında üretilen Taylor Polinomudur.

Tanım 2.4.1. Teorem 2.4.1. ve Teorem 2.4.2. den $x=a$ noktasında $f(x)$ ve $p(x)$ değerlerini göz önüne alınırsa, $f(x)-p(x)$ farkının birbirine çok yakın olduğu görülür. Eğer $f(x)-p(x)=K_n(x)$ denirse, $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denir.

Bu taktirde $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$ yazılabilir ki bu ifadeye kalan terimli Taylor Formülü denir.

Tanım 2.4.2. f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ serisine $x=a$ noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor Serisi adı verilir.

Tanım 2.4.3. Bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunun $z_0=(a,b)$ noktasında her mertebeden kısmî türevleri mevcut olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]^{(k)}$$

$$=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left[f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right]+\ldots$$

serisine f fonksiyonunun (a,b) noktasındaki Taylor serisi denir. Bu serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $0<\theta<1$ için

$$K_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left\{\left[f_x\left(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)\right)\right]^{(n+1)}(x-a)^{(n+1)}\right.$$

$$\left.+\left[f_y\left(a+\theta(x-a),b+\theta(y-b)\right)(y-b)\right]^{(n+1)}(y-b)^{(n+1)}\right\}$$

kalan teriminin sıfır olmasıdır.

2.5. Operatörlerle İlgili Bazı Kavramlar

Tanım 2.5.1. (Operatör) Fonksiyonları fonksiyonlara dönüştüren cebirsel yapılara operatör denir. Matematiksel açıdan ifade etmek gerekirse U ve V iki fonksiyon uzayı olmak üzere U uzayından alınan her fonksiyona V uzayında bir fonksiyon karşılık getiren dönüşüme operatör denir.

Bu operatörü T ile gösterecek olursak T operatörü her $f\in U$ ve $g\in V$ için

$$T: U \to V$$
$$f \to T(f) = g$$

şeklinde tanımlıdır. Gösterim olarak $T(f) = g$ yerine $T(f(s);x) = g(x)$ veya $T(f;x) = g(x)$ kullanılır. Bazı kaynak ve makalelerde $T(f)(x) = g(x)$ şeklinde de gösterilir. Burada U uzayı operatörün tanım kümesi, V uzayı ise operatörün değer kümesi olup sırasıyla $D(T)$ ve $R(T)$ ile gösterilir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu,1995).

Tanım 2.5.2. (Lineer Operatör) U ve V aynı K cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı ve $T: U \to V$ ye dönüşüm yapan bir operatör olsun. Eğer her $f, g \in U$ ve her $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ için

$$T(\lambda_1 f + \lambda_2 g; x) = \lambda_1 T(f;x) + \lambda_2 T(g;x)$$

sağlanıyorsa, T ye bir lineer operatör denir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu,1995).

Tanım 2.5.3. (Lineer Pozitif Operatör) U ve V iki vektör uzayı olsun. $U^+ \subset U$ ve $V^+ \subset V$ olmak üzere $U^+ = \{f \in U; f \geq 0\}$ ve $V^+ = \{g \in V; g \geq 0\}$ şeklinde tanımlansın. $T: U \to V$'ye dönüşüm yapan bir lineer operatör olsun. Eğer her $f \in U^+$ için $T(f) = g \in V^+$ oluyorsa T ye U^+ dan V^+ ye dönüşüm yapan bir lineer pozitif operatör denir (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

Lemma 2.5.1. (Monotonluk) Lineer pozitif operatörler monoton azalmayandır. Yani T bir lineer pozitif operatör olmak üzere her t için $f(t) \leq g(t)$ iken $T(f;x) \leq T(g;x)$ sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

Lemma 2.5.2. T bir lineer pozitif operatör olmak üzere $|T(f;x)| \leq T(|f|;x)$ eşitsizliği sağlanır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

Tanım 2.5.4. (Sınırlı Operatör) $(X, \|\ \|_X)$ ve $(Y, \|\ \|_Y)$ iki lineer normlu uzay, $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. $D(T)$, T lineer operatörünün tanım kümesi olmak üzere her $f \in D(T)$ için $\|Tf\|_Y \leq M \|f\|_X$ olacak şekilde $M > 0$ reel sayısı varsa, T operatörüne $D(T) \subset X$ üzerinde sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.5.5. (Operatörün Normu) $(X, \|\ \|_X)$ ve $(Y, \|\ \|_Y)$ iki lineer normlu uzay, $T: X \to Y$ bir lineer operatör olsun.

$$\|T\| = \inf\left\{M : \|Tf\|_Y \leq M\|f\|_X\right\} = \sup_{\|f\|_X \neq \theta_X,\, f \in X} \frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X}$$

sayısına T operatörünün normu denir. Burada θ_X, X uzayının sıfırıdır (Hacıyev ve Hacısalihoğlu, 1995).

Tanım 2.5.6. (Operatörün Sürekliliği) $(X, \|\ \|_X)$ ve $(Y, \|\ \|_Y)$ iki normlu uzay, $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en azından öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir öyleki için $\|x - x_0\|_X < \delta$ iken $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ oluyorsa T operatörüne $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir.

Lineer operatörlerin sınırlılığı ile sürekliliği arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

Teorem 2.5.1. $(X, \|\ \|_X)$ ve $(Y, \|\ \|_Y)$ iki normlu uzay, $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun.

$i)$ T operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart T nin sınırlı olmasıdır.

$ii)$ T operatörü bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise X in tamamında süreklidir.

2.6. Şekil Koruma Özelliği ile İlgili Bazı Kavramlar

Verilen bir fonksiyonun sahip olduğu artanlık, azalanlık, sınırlı salınımlılık, konvekslik, konkavlık, ileri fark operatörü ile arasındaki ilişki, türevleri gibi özellikler fonksiyonun operatör altındaki görüntüsüyle karşılaştırıldığında korunuyorsa bu duruma operatörlerin şekil koruma özelliği denilebilir. Şimdi bir operatörün şekil koruma özelliğini inceleyebilmemiz için gerekli olan bazı bilgileri verelim.

Tanım 2.6.1. (Bölünmüş Fark) $n \geq 1$ olmak üzere bir f fonksiyonunun tanım kümesinden seçilen $x_0, x_1, ..., x_n$ şeklindeki $n+1$ tane nokta için

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\vdots \qquad = \qquad \vdots$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe f fonksiyonunun n-inci mertebeden bölünmüş farkları denir (DeVore ve Lorentz, 1993).

Bir f fonksiyonunun bölünmüş farkı aynı fonksiyonun k-ıncı mertebeden türevinin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Şimdi bunu ifade eden teoremi verelim.

Teorem 2.6.1. $i = 0,1,...,n$ ve $x_i \in [a,b]$ olsun. Eğer $f \in C^k[a,b]$ ise Rolle teoreminden

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi_x)}{k!}$$

olacak şekilde en az bir $\xi_x \in [a,b]$ vardır (DeVore ve Lorentz, 1993).

Tanım 2.6.2. (İleri Fark Operatörü) $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ olmak üzere keyfi bir f fonksiyonu için ardışık iki noktanın fonksiyon altındaki görüntüleri arasındaki farkı $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) = \Delta_h f(x_i)$ ile gösterelim.

$$\Delta_h^0 f(x_0) = f(x_0)$$

$$\Delta_h^1 f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$

$$\vdots$$

$$\Delta_h^{k+1} f(x_i) = \Delta\left(\Delta_h^k f(x_i)\right) = \Delta_h^k f(x_{i+1}) - \Delta_h^k f(x_i)$$

ile tanımlanan Δ operatörüne ileri fark operatörü denir. İleri fark operatörünü kısaca

$$\Delta^n f(x_i) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x_{i+n-k})$$

şeklinde de yazabiliriz.

Yukarıdaki tanımlardan ileri fark operatörü ile bölünmüş farklar arasında aşağıdaki ilişki elde edilir. .

Teorem 2.6.2. Her $i,k \geq 0$ için $x_i = i$ olmak üzere

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{1}{k!} \Delta^k f(x_i)$$

dir.

Tanım 2.6.3. (Konveks Fonksiyon) $f:[a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in [a,b]$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde konvekstir denir. Bu durumda $-f$ fonksiyonu konkav olur.

Konvekslik tanımı $k+1$ tane farklı nokta için de verilebilir.

Tanım 2.6.4. (Jensen Eşitsizliği) $x_0, x_1, ..., x_k \in [a,b]$ ve $\mu_i \in \mathbb{R}$ için $\sum_{i=0}^{k} \mu_i = 1$ olmak üzere

$$f\left(\sum_{i=0}^{k} \mu_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^{k} \mu_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Jensen, 1906).

Teorem 2.6.3. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde ikinci mertebeden türevi var olsun. Eğer $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) \geq 0$ oluyorsa f fonksiyonu $[a,b]$ de konvekstir.

Teorem 2.6.4. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde konvekstir ancak ve ancak f nin ikinci mertebeden bölünmüş farkları negatif olmayandır.

İki değişkenli fonksiyonlar için ileri fark operatörü üçgensel bölge üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.6.5. (İki Değişkenli İleri Fark Operatörü) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1\}$ bir üçgensel küme $h \in \mathbb{R}^+$, $(x,y) \in S$ ve $f \in C(S)$ olmak üzere

$$\Delta_h^{(1,0)} f(x,y) = f(x+h,\ y) - f(x,y)$$

$$\Delta_h^{(0,1)} f(x,y) = f(x\ ,y+h) - f(x,y)$$

$$\Delta_h^{(1,1)} f(x,y) = f(x+h\ ,y+h) + f(x,y) - f(x+h,\ y) - f(x\ ,y+h)$$

$$\Delta_h^{(2,0)} f(x,y) = f(x+2h\ ,y) - 2f(x+h,y) + f(x,y)$$

$$\Delta_h^{(0,2)} f(x,y) = f(x\ ,y+2h) - 2f(x,y+h) + f(x,y)$$

şeklinde tanımlanan $\Delta_h^{(i,j)}$ operatörüne iki değişkenli ileri fark operatörü denir (akt. Cárdenas-Morales ve Delgado, 2008). Burada $\Delta_h^{(1,0)}$ ve $\Delta_h^{(0,1)}$ ile sırasıyla birinci ve ikinci değişkene göre birinci mertebeden ileri fark operatörü, $\Delta_h^{(2,0)}$ ve $\Delta_h^{(0,2)}$ ile sırasıyla birinci ve ikinci değişkene göre ikinci mertebeden ileri fark operatörü, son olarak $\Delta_h^{(1,1)}$ ile hem birinci hem de ikinci değişkene göre birinci mertebeden ileri fark operatörü kastedilmektedir.

Tanım 2.6.5. den fark edildiği üzere iki değişkenli ileri fark operatörü verilen fonksiyonun birinci ve ikinci değişkenine göre kısmî artışlarla tanımlanmıştır. O halde iki değişkenli fonksiyonlar için konvekslik tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.6.6. $i, j \in \mathbb{N}$ ve $0 < i + j \leq 2$ olmak üzere eğer $h \in \mathbb{R}^+$ için $\Delta_h^{(i,j)} f \geq 0$ ise bu durumda $f(x,y)$ fonksiyonuna (i,j)-inci mertebeden konvekstir denir (akt. Cárdenas-Morales ve Delgado, 2008).

Böylece iki değişkenli fonksiyonlar için konvekslik tanımının iki değişkenli ileri fark operatörü ile verilebilmesi, kısmî türevler yardımıyla da ifade edilebileceği anlamına gelir.

Önerme 2.6.1. $i, j \in \mathbb{N}$, $0 < i + j \leq 2$ ve $f \in C^{i+j}(S)$ olmak üzere her $(x,y) \in S$ için eğer $\dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x,y) \geq 0$ ise bu durumda $f(x,y)$ fonksiyonuna (i,j)-inci mertebeden konvekstir denir (akt. Cárdenas-Morales ve Delgado, 2008).

Yaklaşım teorisinde operatörlerin yakınsaklık koşulları incelediğinde bir lineer pozitif operatörün kendisini oluşturan fonksiyona yakınsama hızının birden fazla yöntemle verilebildiğini görmekteyiz. Yakınsaklık hızını bulmanın metotlarından biri süreklilik modülü yardımıyla hesap yapmaktır. Süreklilik modülü kullanıldığında yakınsaklık hızı düzgün süreklilik yardımıyla fonksiyonun tanım kümesindeki noktalardan bağımsız olabilir. Başka bir yöntem ise bir operatörün noktasal (asimptotik yaklaşım) yakınsaklık koşulları incelendiğinde yaklaşım hızı hem fonksiyonun türevli olduğu noktalara hem de sıfıra yaklaşan bir diziye bağlı olduğu görülür. Şimdi bu durumu gösteren ifadelerin tanımlarını verelim.

2.7. Asimptotik Yaklaşım

Operatörler için noktasal yakınsaklık durumu verilen bir f fonksiyonunun Taylor açılımının bir sonucu olarak

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_n)\left|T_n(f)-f\right|=\varphi(f,x)$$

şeklinde incelenir. Böylece $n\to\infty$ için $\frac{1}{\lambda_n}\to 0$ dizisine operatörün kendisini oluşturan fonksiyona asimptotik (noktasal yakınsaklık) hızı, $\varphi(f,x)$ ifadesine ise operatörün asimptotik değeri denir. Literatürde bu duruma en iyi örnek 1932 yılında Bernstein operatörleri için ispatlanmış olan Voronovskaja teoremidir.

2.8. Süreklilik Modülü

Bu kesimde, reel eksende kapalı ve sınırlı aralıkta ayrıca düzlem üzerinde kompakt bir bölgede sürekli fonksiyonlar sınıfından alınan her fonksiyon için tek ve iki değişkenli süreklilik modülü kavramları verilecektir. Bu konuyla ilgili olarak ilk kaynaklara ulaşmak zor olsa da 1911 yılında D. Jackson'ın doktora tezi, 1963'te Stancu, 1966'da Lorentz, 1971'de Censor, 1989'da Martinez, 1993'te DeVore ve Lorentz konuya açıklık getirebilecek kaynaklardır. Bu tez de ise yukarıdaki kaynaklardan derlenmiş ve açıkça ifade edilmiş olan 2000 yılında Anastassiou ve Gal tarafından kaleme alınmış kitaptan faydalanılmıştır.

Tanım 2.8.1. $f\in C[a,b]$ reel değerli bir fonksiyon ve $t,x\in[a,b]$ olsun. $|t-x|\le\delta$ şartını sağlayan keyfi bir $\delta>0$ için

$$\omega(\delta)=\omega(f;\delta)=\sup_{|t-x|\le\delta}\left|f(t)-f(x)\right|$$

şeklinde tanımlanan ω fonksiyonuna f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir (Devore ve Lorentz, 1993). Eğer her $x\in[a,b]$ için x'e bir h artırımı verilirse süreklilik modülü

$$\omega(f;\delta)=\sup_{|h|\le\delta}\left|f(x+h)-f(x)\right|$$

şeklinde de ifade edilir. Süreklilik modülü δ nın bir fonksiyonudur. Burada $0\le\delta\le b-a$ dır.

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar (Devore ve Lorentz, 1993).

i) ω fonksiyonu negatif olmayandır. Yani her $\delta\ge 0$ için $\omega(\delta)\ge 0$ dır.

ii) $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta)=0$ dır.

iii) ω , monoton artandır (azalmayandır). Eğer $0\le\delta_1\le\delta_2$ ise $\omega(\delta_1)\le\omega(\delta_2)$ dir.

iv) Alt toplamsallık: $\omega(f;\delta_1+\delta_2)\le\omega(f;\delta_1)+\omega(f;\delta_2)$ dir.

v) $m\in\mathbb{N}$ için $\omega(m\delta)\le m\omega(\delta)$ dır.

vi) $\lambda>0$ için $\omega(\lambda\delta)\le(1+\lambda)\omega(\delta)$ eşitsizliği sağlanır.

vii) $\delta=|t-x|$ olduğunda $|f(t)-f(x)|\le\omega(f;|t-x|)$ sağlanır.

viii) $|f(t)-f(x)|\le\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$ yazılabilir.

Tanım 2.8.2. (Tam Süreklilik Modülü) $D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ sınırlı bir bölge ve $C(D):=\left\{f \mid f:D\to\mathbb{R},\ \forall(x,y)\in D \text{ için } f \text{ sürekli}\right\}$ olmak üzere her $f\in C(D)$ ve $\delta>0$ için

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}\le\delta}\left\{\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;\ t,x\in[a,b],\ s,y\in[c,d]\right\}$$

veya

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2)=\sup_{\substack{|t-x|\le\delta_1\\ |s-y|\le\delta_2}}\left\{\left|f(t,s)-f(x,y)\right|;\ t,x\in[a,b],\ s,y\in[c,d]\right\}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun D bölgesi üzerindeki tam süreklilik modülü denir. Burada $\delta\in\left(0,\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}\right]$ dir (akt. Anastassiou ve Gal, 2000).

2.9. İki Değişkenli Binom Formülü ve Bernstein Bazı

Biliyoruz ki binom formülü

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}$$

şeklindedir. Binom formülünde $y=1-x$ alınırsa

$$\begin{aligned}(x+1-x)^n&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}\\&=1^n\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece binom formülü yardımıyla Bernstein bazı olarak bilinen

$$p_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

elde edilir. Benzer şekilde binom formülü iki değişkenli olarak elde edilebilir. Binom formülünden yola çıkarak

$$(x+1-x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki parantez içine y eklenip çıkarılırsa

$$1^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i(y+1-x-y)^{n-i}$$

olur. Sağ taraftaki parantezin $(n-i)$. dereceden binom açılımı yapılırsa

$$1=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j}y^j(1-x-y)^{n-i-j}$$

elde edilir. Buradan iki değişkenli binom formülü

$$b_{i,j}^{n}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}x^i y^j(1-x-y)^{n-i-j}$$

olarak elde edilir.

3. ÜSTEL FONKSİYONLARI KORUYAN İKİ DEĞİŞKENLİ BERNSTEIN OPERATÖRLERİ

Bu bölümde 1963 yılında Stancu tarafından çalışılmış üçgensel bölge üzerinde tanımlı iki değişkenli Bernstein operatörünün, bir kenarı hareketli üçgensel bölge üzerinde tanımlı üstel tipli fonksiyonları koruyan yeni bir modifiyesi ve genelleştirmesi elde edilecektir. Bunun için öncelikle operatörün tanım kümesi oluşturulacak ardından operatörün inşası yapılacaktır. Böylece operatörün yakınsaklık koşullarını inceleyebilmek için gerekli olan Korovkin tipli test fonksiyonlarını koruyan lemma verilecektir. Yeni modifiye operatörün şekil koruma özellikleri incelenecek, iki değişkenli ileri fark operatörü yardımıyla operatörün sağladığı konvekslik özellikleri verilecektir. Daha sonra Korovkin tipli teorem yardımıyla operatörün düzgün yakınsaklığı verilecektir. Ayrıca yaklaşım hızı iki değişkenli tam süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacak olup, noktasal yakınsaklık hızı için Voronovskaja tipli teorem ifade ve ispat edilecektir. En önemli olan sonuç ise yeni modifiye operatörün Bernstein operatörü ile karşılaştırılması olacaktır. Tüm bu sonuçlar nümerik açıdan grafikler ve tablo yardımıyla desteklenecektir.

3.1. $B_n^{\alpha,\beta} f$ Operatörünün Tanım Bölgesi ve İnşası

İki değişkenli Bernstein operatörü $S := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x,y \geq 0,\ x+y \leq 1 \right\}$ üçgensel bölgesi üzerinde her $f \in C(S)$ için

$$B_n(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} x^k y^l (1-x-y)^{n-k-l} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Stancu, 1963).

(3.1) operatörünü üstel fonksiyonları koruyacak şekilde yeniden inşa edelim. Bunun için her $t \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ birer sabit sayı olmak üzere S üzerinde sürekli bir f fonksiyonunu $f(\alpha t, \beta s) = e^{i\alpha t + j\beta s},\ 0 \leq i, j \leq 2,\ i \neq j$ şeklinde seçelim. Amacımız

(3.1) operatöründe x ve y yerine sırasıyla $r_n(\alpha,x)$ ve $r_n(\beta,y)$ alarak operatörün $e^{\alpha t}$ fonksiyonunu direkt koruyacak şekilde $r_n(\alpha,x)$ ve $r_n(\beta,y)$ fonksiyonlarını belirlemek olacaktır. Bu durumda $i=1$ ve $j=0$ alınırsa $f(\alpha t,\beta s)=e^{\alpha t}$ olmak üzere (3.1) operatörü için

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(e^{\alpha\frac{k}{n}}\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}r_n(\alpha,x)^k r_n(\beta,y)^l\left(1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k-l}=e^{\alpha x}$$

olduğunu düşünelim. İki değişkenli binom formülünden

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\left(e^{\frac{\alpha}{n}}\right)r_n(\alpha,x)\right]^k\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}r_n(\beta,y)^l\left(1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k-l}=e^{\alpha x}$$

ve $\left(r_n(\beta,y)+1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k}=\left(1-r_n(\alpha,x)\right)^{n-k}$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\left(e^{\frac{\alpha}{n}}\right)r_n(\alpha,x)\right]^k\left(1-r_n(\alpha,x)\right)^{n-k}=e^{\alpha x}$$

elde edilir. Burada tek değişkenli binom formülü yardımıyla

$$\left(e^{\frac{\alpha}{n}}r_n(\alpha,x)+1-r_n(\alpha,x)\right)^n=e^{\alpha x}$$

yazılabilir. Basit cebirsel işlemler yardımıyla

$$r_n(\alpha,x)=\frac{e^{\alpha x/n}-1}{e^{\alpha/n}-1}$$

şeklinde edilir. Benzer işlemler $i=0$ ve $j=1$ olmak üzere $r_n(\beta,y)$ için de geçerlidir. Bu durumda $r_n(\alpha,x)$ ve $r_n(\beta,y)$ fonksiyonları n ye bağlı birer dizidir. Şimdi bununla ilgili bazı özellikleri verelim.

Her $\gamma\in(0,\infty)$ ve her $z\in[0,1]$ için $r_n(\gamma,0)=0$ ve $r_n(\gamma,1)=1$ dir. Böylece $0\le r_n(\gamma,z)\le 1$ sağlanır. Dolayısıyla $r_n(\gamma,z)$ fonksiyonu

$$r_n:(0,\infty)\times[0,1]\to[0,1]$$
$$(\gamma,z)\to r_n(\gamma,z)$$

şeklinde z değişkenine göre artan ve konveks fonksiyondur.

Ayrıca gösterelim ki $n>1$ olmak üzere yeterince büyük n ler için $0 \le r_n(\alpha,x) \le x$ ve $0 \le r_n(\beta,y) \le y$ dir. Bunu göstermek için $1-x<e^{-x}$ eşitsizliğini kullanırsak

$$r_n(\alpha,x)=\frac{e^{\alpha x/n}-1}{e^{\alpha/n}-1} \le \frac{\alpha x}{n}\left(\frac{e^{\alpha x/n}}{e^{\alpha/n}-1}\right)$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte $1+x<e^{x}$ eşitsizliği kullanılırsa buradan $\frac{\alpha}{n}\left(\frac{1}{e^{\alpha/n}-1}\right) \le 1$ elde edilir ki böylece her $n>1$ için

$$r_n(\alpha,x)=\frac{e^{\alpha x/n}-1}{e^{\alpha/n}-1} \le \frac{\alpha x}{n}\left(\frac{e^{\alpha x/n}}{e^{\alpha/n}-1}\right) \le xe^{\frac{\alpha x}{n}} \le x$$

bulunur. Dolayısıyla yeterince büyük n ler için $r_n(\alpha,x) \le x$ dir. Aynı durum $r_n(\beta,y) \le y$ için de geçerlidir. Şimdi gösterelim ki $\lim_{n\to\infty} r_n(\alpha,x)=x$ dir.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} r_n(\alpha,x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\alpha x/n}-1}{e^{\alpha/n}-1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{\alpha}{n^2}xe^{\alpha x/n}}{-\frac{\alpha}{n^2}e^{\alpha/n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{xe^{\alpha x/n}}{e^{\alpha/n}} \\ &= x\end{aligned}$$

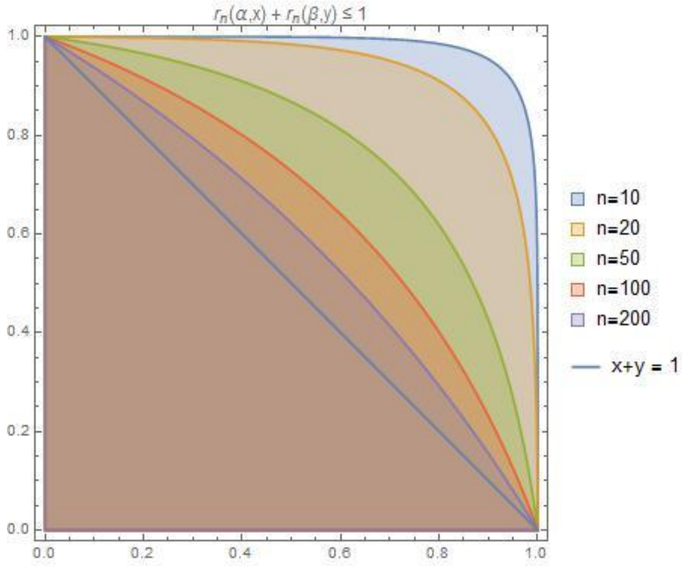
bulunur. Yani $\lim_{n\to\infty} r_n(\alpha,x)=x$ ve $\lim_{n\to\infty} r_n(\beta,y)=y$ dir. O halde $n>1$ olmak üzere $n\to\infty$ iken $r_n(\alpha,x)+r_n(\beta,y)=1$ eğrisi her $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ için $x+y=1$ doğrusuna yaklaşır.

Sonuç olarak üstel fonksiyonları koruyan genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein operatörünün tanım bölgesi bir kenarı hareketli üçgensel bölge olacaktır.

Sonuç 3.1.1. $\forall n>1$, $\forall \alpha,\beta\in(0,\infty)$ ve $\forall (x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ için

$$S_{\alpha,\beta}^{n} := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\ge 0,\ r_n(\alpha,x)+r_n(\beta,y)\le 1\right\}$$

bir kenarı hareketli üçgensel bölgedir. Açıktır ki $S_{\alpha,\beta}^{n}\subset[0,1]\times[0,1]$ dir. Bu bölgenin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1. $\alpha=\beta=100$ ve farklı n değerleri için $S_{\alpha,\beta}^{n}$ ile verilen bir kenarı hareketli üçgensel bölgenin grafiği

Böylece üstel fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein operatörünü tanımlayabiliriz.

Tanım 3.1.1. Her $n>1$, $\forall\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $\forall(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ ve $\forall f\in C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)$ için

$$B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} f\left(\alpha\frac{k}{n},\beta\frac{l}{n}\right)p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y) \tag{3.2}$$

operatörü üstel fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein operatörüdür. Burada

$$p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)=\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}r_n(\alpha,x)^k r_n(\beta,y)^l\left(1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k-l}$$

dir. $B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ operatörü $C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)\to C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)$'ye dönüşüm yapan lineer ve pozitif operatördür. Eğer r_n fonksiyonu $r_n(\alpha,x)=x$ ve $r_n(\beta,y)=y$ olarak alındığında $S_{\alpha,\beta}^{n}=S$ üçgensel bölgesi üzerinde $B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ operatörü (3.1) ile verilen $B_n(f;x,y)$ operatörüne dönüşecektir. $B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ operatörü tanımlı olduğu üçgensel bölgede $f(x,y)$ fonksiyonunu köşe koordinatlarında interpole eder. Böylece operatörün tanım bölgesi korunmuş olur. Yani $B_n^{\alpha,\beta}(f;0,0)=f(0,0)$, $B_n^{\alpha,\beta}(f;1,0)=f(1,0)$ ve $B_n^{\alpha,\beta}(f;0,1)=f(0,1)$ sağlanır.

Gösterim 3.1.1. Tez boyunca $\alpha,\beta>0$ reel sabitler olmak üzere $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}$ ile $i,j=0,1,2$, $i\neq j$ için $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t,s)=e^{i\alpha t+j\beta s}$ şeklinde tanımlı üstel fonksiyon, bu fonksiyonun birinci değişkene göre ters fonksiyonu $\log_{\alpha}^{\beta}(\cdot)$ ve ikinci değişkene göre ters fonksiyonu $\log_{\beta}^{\alpha}(\cdot)$ ile gösterilecektir.

Lemma 3.1.1. Her $f\in C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)$ ve $\alpha,\beta\in(0,\infty)$ için (3.2) ile verilen $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörü

$$
\begin{aligned}
&i) && B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=1,\\
&ii) && B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=e^{\alpha x},\\
&iii) && B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta};x,y\right)=e^{\beta y},\\
&iv) && B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{2,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\left(e^{\frac{\alpha}{n}(x+1)}+e^{\frac{\alpha}{n}x}-e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^n,\\
&v) && B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,2}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\left(e^{\frac{\beta}{n}(y+1)}+e^{\frac{\beta}{n}y}-e^{\frac{\beta}{n}}\right)^n
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

eşitliklerini sağlar.

İspat: $i)\, B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=B_n^{\alpha,\beta}(1;x,y)$ olduğundan

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\left(r_n(\alpha,x)\right)^k\left(r_n(\beta,y)\right)^l\left(1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k-l}$$

iki değişkenli binom formülünden

$$
\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r_n(\alpha,x)\right)^k\left(\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}\left(r_n(\beta,y)\right)^l\left(1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k-l}\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r_n(\alpha,x)\right)^k\left(1-r_n(\alpha,x)\right)^{n-k}\\
&=\left(r_n(\alpha,x)+1-r_n(\alpha,x)\right)^n\\
&=1
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$ii)\, B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=B_n^{\alpha,\beta}\left(e^{\alpha t};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(e^{\alpha\frac{k}{n}}\right)p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}\left(x,y\right)$ olduğundan ikinci değişkene göre binom açılımı 1 dir. Dolayısıyla

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\frac{\alpha}{n}}r_n\left(\alpha,x\right)\right)^{k}\left(1-r_n\left(\alpha,x\right)\right)^{n-k}$$

$$=\left(e^{\frac{\alpha}{n}}r_n\left(\alpha,x\right)+1-r_n\left(\alpha,x\right)\right)^{n}=\left(\left(r_n\left(\alpha,x\right)\right)\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)+1\right)^{n}=\left(e^{\frac{\alpha x}{n}}\right)^{n}$$

$$=e^{\alpha x}$$

elde edilir.

$iii)\, B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta};x,y\right)=B_n^{\alpha,\beta}\left(e^{\beta s};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(e^{\beta\frac{l}{n}}\right)p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}\left(x,y\right)$ olduğundan ikinci değişkene göre $\left(n-k\right)$. dereceden binom formülü yazılırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r_n\left(\alpha,x\right)\right)^{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}\left(e^{\frac{\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)\right)^{l}$$

$$\times\left(1-r_n\left(\alpha,x\right)-r_n\left(\beta,y\right)\right)^{n-k-l}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r_n\left(\alpha,x\right)\right)^{k}\left(e^{\frac{\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)+1-r_n\left(\alpha,x\right)-r_n\left(\beta,y\right)\right)^{n-k}$$

$$=\left(r_n\left(\alpha,x\right)+1-r_n\left(\alpha,x\right)+e^{\frac{\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)-r_n\left(\beta,y\right)\right)^{n}$$

$$=\left(1+e^{\frac{\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)-r_n\left(\beta,y\right)\right)^{n}=\left(r_n\left(\beta,y\right)\left(e^{\frac{\beta}{n}}-1\right)+1\right)^{n}$$

olup $r_n\left(\beta,y\right)$ yerine yazılırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\left(\left(\frac{e^{\frac{\beta y}{n}}-1}{e^{\frac{\beta}{n}}-1}\right)\left(e^{\frac{\beta}{n}}-1\right)+1\right)^{n}=\left(e^{\frac{\beta y}{n}}\right)^{n}=e^{\beta y}$$

elde edilir.

$iv)\, B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{2,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=B_n^{\alpha,\beta}\left(e^{2\alpha t};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(e^{2\alpha\frac{k}{n}}\right)p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}\left(x,y\right)$ olduğundan ikinci değişkene göre binom açılımı 1 dir. Böylece

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{2,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\frac{2\alpha}{n}}r_n\left(\alpha,x\right)\right)^k\left(1-r_n\left(\alpha,x\right)\right)^{n-k}$$

yazılabilir. Binom formülünden

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{2,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)&=\left(e^{\frac{2\alpha}{n}}r_n\left(\alpha,x\right)+1-r_n\left(\alpha,x\right)\right)^n=\left(\left(r_n\left(\alpha,x\right)\right)\left(e^{\frac{2\alpha}{n}}-1\right)+1\right)^n\\
&=\left(\left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{n}}-1}{e^{\frac{\alpha}{n}}-1}\right)\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)\left(e^{\frac{\alpha}{n}}+1\right)+1\right)^n\\
&=\left(\left(e^{\frac{\alpha x}{n}}-1\right)\left(e^{\frac{\alpha}{n}}+1\right)+1\right)^n\\
&=\left(e^{\frac{\alpha}{n}(x+1)}+e^{\frac{\alpha}{n}x}-e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada dikkat edelim ki $\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\alpha}{n}(x+1)}+e^{\frac{\alpha}{n}x}-e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^n=e^{2\alpha x}$ dir.

$v)\, B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,2}^{\alpha,\beta};x,y\right)=B_n^{\alpha,\beta}\left(e^{2\beta s};x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\left(e^{2\beta\frac{l}{n}}\right)p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}\left(x,y\right)$ olduğundan ikinci değişkene göre $(n-k)$. dereceden binom formülü yazılırsa

$$\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,2}^{\alpha,\beta};x,y\right)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r_n\left(\alpha,x\right)\right)^k\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}\left(e^{\frac{2\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)\right)^l\\
&\quad\times\left(1-r_n\left(\alpha,x\right)-r_n\left(\beta,y\right)\right)^{n-k-l}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r_n\left(\alpha,x\right)\right)^k\left(e^{\frac{2\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)+1-r_n\left(\alpha,x\right)-r_n\left(\beta,y\right)\right)^{n-k}\\
&=\left(r_n\left(\alpha,x\right)+e^{\frac{2\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)+1-r_n\left(\alpha,x\right)-r_n\left(\beta,y\right)\right)^n
\end{aligned}$$

yazılabilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,2}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\left(e^{\frac{2\beta}{n}}r_n\left(\beta,y\right)-r_n\left(\beta,y\right)+1\right)^n$$

$$=\left(\left(r_n\left(\beta,y\right)\right)\left(e^{\frac{2\beta}{n}}-1\right)+1\right)^n$$

$$=\left(\left(\frac{e^{\frac{\beta y}{n}}-1}{e^{\frac{\beta}{n}}-1}\right)\left(e^{\frac{\beta}{n}}-1\right)\left(e^{\frac{\beta}{n}}+1\right)+1\right)^n$$

$$=\left(\left(e^{\frac{\beta y}{n}}-1\right)\left(e^{\frac{\beta}{n}}+1\right)+1\right)^n$$

$$=\left(e^{\frac{\beta}{n}(y+1)}+e^{\frac{\beta}{n}y}-e^{\frac{\beta}{n}}\right)^n$$

elde edilir. Burada $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{\beta}{n}(y+1)}+e^{\frac{\beta}{n}y}-e^{\frac{\beta}{n}}\right)^n=e^{2\beta y}$ dir.

3.2. $B_n^{\alpha,\beta}f$ Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri

Bu kesimde $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörünün kendisini oluşturan fonksiyonla arasındaki şekil özellikleri incelenecektir. Açıkça belirtecek olursak her $f\in C\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)$ için f fonksiyonunun artan (veya azalan), konveks (veya konkav) olması durumunda, $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörünün davranışına bakılacaktır. Bunun için bilmemiz gereken bazı temel kavramlar Tanım 2.6.5., Tanım 2.6.6. ve Önerme 2.6.1. ile verilmiştir. Kısaca bahsedecek olursak, iki değişkenli ileri fark operatörünün kısmî türevlerle arasındaki ilişki $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörünün davranışını incelememiz için yeterli olacaktır. Dolayısıyla operatörün birinci ve ikinci değişkene göre kısmî türevlerine bakacağız.

Her $\alpha,\beta\in\left(0,\infty\right)$, $f\in C\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)$ ve $\left(x,y\right)\in S_{\alpha,\beta}^n$ için $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörünün kısmî türevleri aşağıdaki gibidir. Hatırlatalım ki

$$p_{n,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)=\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}r_n(\alpha,x)^k r_n(\beta,y)^l\left(1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k-l}$$

şeklindeydi. Şimdi işlemleri kısaltmak için bu eşitliği kullanacağız.

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_n^{\alpha,\beta}f(x,y)}{\partial x}&=\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\binom{n}{k}\binom{n-k}{l}\right.\\&\qquad\left.\times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r_n(\alpha,x)\right)^k\left(r_n(\beta,y)\right)^l\left(1-r_n(\alpha,x)-r_n(\beta,y)\right)^{n-k-l}\right]\right\}\\&=\left\{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\left[(k)\frac{\partial}{\partial x}\left(r_n(\alpha,x)\right)p_{n,k-1,l}^{\alpha,\beta}(x,y)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.-(n-k-l)\frac{\partial}{\partial x}\left(r_n(\alpha,x)\right)p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)\right]\right\}\end{aligned}$$

Burada indislerde ve işlemlerde düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_n^{\alpha,\beta}f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(r_n(\alpha,x)\right)}{\partial x}&\left\{n\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)p_{n-1,k-1,l}^{\alpha,\beta}(x,y)\right.\\&\left.-n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)\right\}\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağındaki ilk toplamda k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_n^{\alpha,\beta}f(x,y)}{\partial x}&=n\frac{\partial\left(r_n(\alpha,x)\right)}{\partial x}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right)p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)\right.\\&\qquad\left.-\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)\right\}\\&=n\frac{\partial\left(r_n(\alpha,x)\right)}{\partial x}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}\left\{f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\}p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer türevler de benzer şekilde hesaplandığında

$$\frac{\partial B_n^{\alpha,\beta}f(x,y)}{\partial y}=n\frac{\partial\left(r_n(\beta,y)\right)}{\partial y}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{l+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\}p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)$$

dir.

Şimdi ikinci mertebeden kısmî türevleri hesaplayalım.

$$\frac{\partial^2 B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)}{\partial x^2} = n\frac{\partial^2\left(r_n(\alpha,x)\right)}{\partial x^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}\left\{f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\}p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)$$

$$+n(n-1)\left(\frac{\partial\left(r_n(\alpha,x)\right)}{\partial x}\right)^2\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2-k}p_{n-2,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)$$

$$\times\left\{f\left(\frac{k+2}{n},\frac{l}{n}\right)-2f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)}{\partial y^2} = n\frac{\partial^2\left(r_n(\beta,y)\right)}{\partial y^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{l+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\}p_{n-1,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)$$

$$+n(n-1)\left(\frac{\partial\left(r_n(\beta,y)\right)}{\partial y}\right)^2\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2-k}p_{n-2,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)$$

$$\times\left\{f\left(\frac{k}{n},\frac{l+2}{n}\right)-2f\left(\frac{k}{n},\frac{l+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial^2 B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)}{\partial x\partial y} = n(n-1)\frac{\partial\left(r_n(\alpha,x)\right)}{\partial x}\frac{\partial\left(r_n(\beta,y)\right)}{\partial y}\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{l=0}^{n-2-k}p_{n-2,k,l}^{\alpha,\beta}(x,y)$$

$$\times\left\{f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l+1}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n},\frac{l+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\}$$

Bu türevler yardımıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Önerme 3.2.1. Her $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $f\in C\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)$ ve $(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^n$ için

$i)$ Eğer $f(x,y)$ birinci değişkene göre $(1,0)$-ıncı mertebeden (sırasıyla ikinci değişkene göre $(0,1)$-inci mertebeden) konveks ise bu durumda $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörü de aynı mertebeden konvekstir.

$ii)$ $f(x,y)$ birinci değişkene göre $(2,0)$-ıncı mertebeden (sırasıyla ikinci değişkene göre $(0,2)$-nci mertebeden) konveks olsun. Bu durumda $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörü $(2,0)$-ıncı mertebeden (sırasıyla $(0,2)$-nci mertebeden) konveksliği sağlamaz.

$iii)$ Eğer $f(x,y)$ hem pozitif hem azalan hem de birinci değişkene göre $(2,0)$-ıncı mertebeden (sırasıyla ikinci değişkene göre $(0,2)$-nci mertebeden) konveks ise bu durumda $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün konveksliği $(2,0)$-ıncı (sırasıyla $(0,2)$-nci) mertebedendir.

$iv)$ Eğer $f(x,y)$ birinci değişkene göre hem $(1,0)$ hem de $(2,0)$-ıncı mertebeden (sırasıyla ikinci değişkene göre hem $(0,1)$ hem de $(0,2)$-nci mertebeden) konveks ise bu durumda $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü $(2,0)$-ıncı (sırasıyla $(0,2)$-nci) mertebeden konvekstir.

$v)$ Eğer $f(x,y)$ birinci ve ikinci değişkene göre $(1,1)$-inci mertebeden konveks ise bu durumda $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü de konvekstir.

İspat: Tanım 2.6.5., Tanım 2.6.6. ve Önerme 2.6.1. göz önüne alındığında $\Delta_h^{(i,j)} f \geq 0$ ise f konvekstir. O halde iki değişkenli ileri fark operatöründe birinci ve ikinci mertebeden bölünmüş farkları pozitif olmalıdır. Ayrıca $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün kısmî türevleri pozitifse bu durumda konvekslik şartları sağlanacaktır. Biliyoruz ki $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü pozitiftir. Kısmî türevlerin pozitif olması, hem $r_n(\gamma,z)$ nin türevlerine hem de $\Delta_h^{(i,j)} f$ operatörüne bağlıdır. O halde $r_n(\gamma,z)$ nin birinci ve ikinci mertebeden türevlerine bakacak olursak, $r_n(\gamma,z) = \left(\dfrac{e^{\gamma z/n}-1}{e^{\gamma/n}-1}\right)$ olmak üzere

$$r_n^{'}(\gamma,z) = \frac{\gamma}{n}\left(\frac{e^{\gamma z/n}}{e^{\gamma/n}-1}\right) \text{ ve } r_n^{''}(\gamma,z) = \frac{\gamma^2}{n^2}\left(\frac{e^{\gamma z/n}}{e^{\gamma/n}-1}\right) = \frac{\gamma}{n} r_n^{'}(\gamma,z)$$

olduğundan her $\gamma \in (0,\infty)$ ve $1 < n \in \mathbb{N}$ için $r_n^{'}(\gamma,z) > 0$ ve $r_n^{''}(\gamma,z) > 0$ dır. Buradan yola çıkarak,

$i)$ $f(x,y)$ nin birinci değişkene göre $(1,0)$-ıncı mertebeden (sırasıyla ikinci değişkene göre $(0,1)$-inci mertebeden) konveks olması $\Delta_1^{(1,0)} f \geq 0$ (sırasıyla $\Delta_1^{(0,1)} f \geq 0$) olmasını gerektirir. Ayrıca $r_n(\gamma,z)$ nin türevleri pozitif ve $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü pozitif olduğundan $\dfrac{\partial B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)}{\partial x} \geq 0$ dır. O halde $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü konvekstir.

$ii)$ $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün birinci değişkene göre (sırasıyla ikinci değişkene göre) ikinci mertebeden kısmî türevlerine bakılırsa $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün konveksliği sadece ikinci mertebeden ileri fark operatörüne bağlı değildir. Tanım 2.6.5 göz önüne alındığında $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün konveks olması için $f(x,y)$ fonksiyonunun $(2,0)$-ıncı (sırasıyla $(0,2)$-nci) mertebeden konveks olması yeterli bir şart değildir.

$iii)$ $f(x,y)$ pozitif ve birinci değişkene göre azalan olduğundan $\left\{ f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \right\} \leq 0$ dır. $f(x,y)$, $(2,0)$-ıncı mertebeden konveks ve $\left\{ f\left(\frac{k+2}{n},\frac{l}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \right\} \geq 0$ olduğundan $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün konveksliği $(2,0)$-ıncı (sırasıyla $(0,2)$-nci) mertebedendir.

$iv)$ $f(x,y)$ birinci değişkene göre hem $(1,0)$ hem de $(2,0)$-ıncı mertebeden konveks ise sırasıyla $f(x,y)$ nin birinci ve ikinci mertebeden ileri fark operatörü pozitif olacağından $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün birinci değişkene göre ikinci mertebeden kısmî türevi de pozitif olacaktır. O halde $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü $(2,0)$-ıncı mertebeden konvekstir. Aynı durum ikinci değişken için de geçerlidir.

$v)$ $f(x,y)$ birinci ve ikinci değişkene göre $(1,1)$-inci mertebeden konveks ise

$$\left\{ f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l+1}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n},\frac{l+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right) \right\} \geq 0$$

dir. Sırasıyla $\frac{\partial\left(r_n(\alpha,x)\right)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial\left(r_n(\beta,y)\right)}{\partial y}$ pozitif olduğundan $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü için $\frac{\partial^2 B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)}{\partial x \partial y} \geq 0$ dır. O halde $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü $(1,1)$-inci mertebeden konvekstir.

3.3. $B_n^{\alpha,\beta} f$ Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri

Bu kesimde operatörün düzgün yakınsaklık problemi incelenecektir. Yani Korovkin tipli teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.3.1. Her $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $f\in C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)$ ve $(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^{n}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{\alpha,\beta}f(x,y)-f(x,y)\right\|_{C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)}=0$$

dir.

İspat: Operatörün düzgün yakınsaklığını göstermek için Korovkin teoreminin şartlarının sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. Bunun için $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t,s)=e^{i\alpha t+j\beta s}$ ve $(i,j)\in\{(0,0),(1,0),(0,1),(0,2),(2,0)\}$ indis çiftleri olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t,s);x,y\right)=\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,y)$$

olduğunu göstereceğiz. Biliyoruz ki Lemma 3.1.1. $i)$, $ii)$ ve $iii)$ den $0\le i,j\le 1$ için merkezî momentler sırasıyla $B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=1$, $B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)=e^{\alpha x}$ ve $B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta};x,y\right)=e^{\beta y}$ şeklinde olduğundan her $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, her $(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^{n}$ ve $0\le i,j\le 1$ için

$$\sup_{(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^{n}}\left|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)-1\right|=0$$

$$\sup_{(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^{n}}\left|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)-e^{\alpha x}\right|=0$$

$$\sup_{(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^{n}}\left|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta};x,y\right)-e^{\beta y}\right|=0$$

doğrudan sağlanır. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)-1\right\|_{C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)-e^{\alpha x}\right\|_{C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta};x,y\right)-e^{\beta y}\right\|_{C\left(S_{\alpha,\beta}^{n}\right)}=0$$

elde edilir. $(i,j)=(2,0)$ ve $(i,j)=(0,2)$ için Lemma 3.1.1. $iv)$ ve $v)$ den

$$\lim_{n\to\infty}B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{2,0}^{\alpha,\beta}+\exp_{0,2}^{\alpha,\beta};x,y\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(e^{\frac{\alpha}{n}(x+1)}+e^{\frac{\alpha}{n}x}-e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^{n}+\left(e^{\frac{\beta}{n}(y+1)}+e^{\frac{\beta}{n}y}-e^{\frac{\beta}{n}}\right)^{n}\right\}$$

$$=e^{2\alpha x}+e^{2\beta y}$$

olduğu görülür. Korovkin teoreminin şartlarını tamamlamak için supremuma bakacak olursak; $(i,j)=(2,0)$ için

$$\sup_{x\in S^n_{\alpha,\beta}}\left|B^{\alpha,\beta}_n\left(\exp^{\alpha,\beta}_{2,0};x,y\right)-e^{2\alpha x}\right|=\sup_{0\le x\le 1} e^{2\alpha x}\sup_{0\le x\le 1}\left|\left(e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}+e^{-\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha x}{n}}\right)^n-1\right| \quad (3.4)$$

yazılabilir. Burada operatörün tanım kümesi bir kenarı hareketli üçgensel bölge olsa bile amacımız bir üst sınır bulmak olduğu için yukarıdaki ilk supremumda $x=1$ üzerinden supremum alabiliriz. Yani

$$\sup_{0\le x\le 1} e^{2\alpha x}\sup_{0\le x\le 1}\left|\left(e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}+e^{-\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha x}{n}}\right)^n-1\right|\le e^{2\alpha}\sup_{0\le x\le 1}\left|\left(e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}+e^{-\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha x}{n}}\right)^n-1\right|$$

olur. Şimdi $g(x)=\left(e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}+e^{-\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha x}{n}}\right)^n$ alalım ve $g(x)$'in kritik noktasına bakalım. $g'(x)=0$ olacağından $g(x)$'in kritik noktası

$$n\left(e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}+e^{-\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha x}{n}}\right)^{n-1}\left\{\left(-\frac{\alpha}{n}\right)e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}+\left(-\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha x}{n}}-\left(-\frac{2\alpha}{n}\right)e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha x}{n}}\right\}=0$$

$$\left(-\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha x}{n}}\left(e^{\frac{\alpha}{n}}+1-2e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}\right)=0$$

$$e^{\frac{\alpha x}{n}}=\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}$$

$$x_0=\frac{n}{\alpha}\ln\left(\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}\right)$$

olarak bulunur. Bu değer $g(x)$ de yerine yazılırsa

$$g(x_0)=\left(e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha}{n}\left(\frac{n}{\alpha}\ln\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}\right)}+e^{-\frac{\alpha}{n}\left(\frac{n}{\alpha}\ln\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}\right)}-e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha}{n}\left(\frac{n}{\alpha}\ln\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}\right)}\right)^n$$

$$g(x_0)=\left(e^{\frac{\alpha}{n}}e^{\left(\ln\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}\right)^{-1}}+e^{\left(\ln\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}\right)^{-1}}-e^{\frac{\alpha}{n}}e^{\left(\ln\frac{2e^{\frac{\alpha}{n}}}{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}\right)^{-2}}\right)^n$$

$$=\left(e^{\frac{\alpha}{n}}\frac{\left(e^{\frac{\alpha}{n}}+1\right)}{2e^{\frac{\alpha}{n}}}+\frac{\left(e^{\frac{\alpha}{n}}+1\right)}{2e^{\frac{\alpha}{n}}}-\frac{\left(e^{\frac{\alpha}{n}}+1\right)^2}{4e^{\frac{2\alpha}{n}}}\right)^n$$

$$=e^{-\alpha}\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}{2}\right)^{2n}$$

bulunur. Böylece (3.4) eşitsizliğinden

$$\sup_{x\in S_{\alpha,\beta}^n}\left|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{2,0}^{\alpha,\beta};x,y\right)-e^{2\alpha x}\right|\le e^{2\alpha}\sup_{0\le x\le 1}\left|\left(e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{\alpha x}{n}}+e^{-\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}-\frac{2\alpha x}{n}}\right)^n-1\right|$$

$$\le e^{2\alpha}\left\{e^{-\alpha}\left(\frac{e^{\frac{\alpha}{n}}+1}{2}\right)^{2n}-1\right\}\to 0,\ n\to\infty$$

elde edilir. Aynı durum $(i,j)=(0,2)$ için

$$\sup_{y\in S_{\alpha,\beta}^n}\left|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,2}^{\alpha,\beta};x,y\right)-e^{2\beta y}\right|\le e^{2\beta}\left\{e^{-\beta}\left(\frac{e^{\frac{\beta}{n}}+1}{2}\right)^{2n}-1\right\}\to 0,\ n\to\infty$$

için de geçerlidir. Böylece supremum normunun sıfıra yakınsadığı bir üst sınır bulmuş olduk. Ayrıca $B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{i,j}^{\alpha,\beta};x,y\right)$ operatörünün tanım kümesi $S_{\alpha,\beta}^n\subset[0,1]\times[0,1]$ olduğundan

$$B_n^*f(x,y)=\begin{cases}B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y), & (x,y)\in S_{\alpha,\beta}^n\\ f(x,y) & ,(x,y)\in[0,1]\times[0,1]\backslash S_{\alpha,\beta}^n\end{cases}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\left\|B_n^*f(x,y)-f(x,y)\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=\left\|B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)-f(x,y)\right\|_{C\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)} \tag{3.5}$$

olacağından her $0\le i,j\le 2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{i,j}^{\alpha,\beta};x,y\right)-\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,y)\right\|_{C\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)}=0$$

sağlanır. $B_n^* f(x,y)$ operatör dizisine Korovkin teoremi uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^* f(x,y)-f(x,y)\right\|_{C([0,1]\times[0,1])}=0$$

olur ki böylece (3.5) eşitliğinden istenilen elde edilmiş olur.

Sonuç 3.3.1. Korovkin teoreminin şartları sağlanmış olup operatör kendisini oluşturan fonksiyona düzgün yakınsaktır.

3.4. $B_n^{\alpha,\beta} f$ Operatörünün Yaklaşım Hızı

Bu kısımda $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün kendisini oluşturan fonksiyona yaklaşım hızını bulacağız. Bunun için $i,j=1,2$ için

$$\omega(f,\delta)=\sup\left\{\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|:(x_i,y_i)\in S_{\alpha,\beta}^n,\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\le\delta\right\}$$

şeklinde tanımlı Öklid normuna göre tam süreklilik modülünü kullanacağız (Censor, 1971).

Teorem 3.4.1. $f\in C\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)$ olsun. Bu durumda

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)-f(x,y)\right|\le\left(1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\omega\left(f;\mu_n^{\alpha,\beta}(x,y)\right)$$

dir. Burada

$$\mu_n^{\alpha,\beta}(x,y)=\sqrt{\left(e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}}+e^{\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^n-e^{2\alpha x}+\left(e^{\frac{\beta(y+1)}{n}}+e^{\frac{\beta y}{n}}-e^{\frac{\beta}{n}}\right)^n-e^{2\beta y}}$$

şeklindedir.

İspat: Her $(t,s),(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^n\subset[0,1]\times[0,1]$ için tam süreklilik modülü

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}\le\delta}\left|f(t,s)-f(x,y)\right|$$

şeklindedir. Buradan

$$\left| f(t,s) - f(x,y) \right| \le \omega\left(f; \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2} \right)$$

$$\le \left(1 + \frac{(t-x)^2 + (s-y)^2}{\delta^2} \right) \omega(f;\delta)$$

yazılabilir. $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü monoton ve lineer olduğundan

$$\left| B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y) - f(x,y) \right| \le B_n^{\alpha,\beta}\left(\left| f(t,s) - f(x,y) \right| ; x,y \right)$$

$$\le B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(1 + \frac{(t-x)^2 + (s-y)^2}{\delta^2} \right); x,y \right) \omega(f;\delta)$$

$$\le \left(1 + \frac{B_n^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2 + (s-y)^2 ; x,y \right)}{\delta^2} \right) \omega(f;\delta)$$

elde edilir (Censor, 1971). Burada test fonksiyonları $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t,s) = e^{i\alpha t + j\beta s}$ şeklinde olduğundan ve ortalama değer teoremini kullanarak;

$$\left| B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y) - f(x,y) \right| \le \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \right.$$

$$\left. \times \frac{B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta} - e^{\alpha x} \right)^2 + \left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta} - e^{\beta y} \right)^2 ; x,y \right)}{\delta^2} \right\} \omega(f,\delta)$$

elde edilir. Burada $\delta^2 = B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(exp_{1,0}^{\alpha,\beta} - e^{\alpha x} \right)^2 + \left(exp_{0,1}^{\alpha,\beta} - e^{\beta y} \right)^2 ; x,y \right)$ olarak seçilirse, böylece

$$\delta^2 = B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(\exp_{1,0}^{\alpha,\beta} - e^{\alpha x} \right)^2 + \left(\exp_{0,1}^{\alpha,\beta} - e^{\beta y} \right)^2 ; x,y \right)$$

$$= B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{2,0}^{\alpha,\beta}; x,y \right) - e^{2\alpha x} + B_n^{\alpha,\beta}\left(\exp_{0,2}^{\alpha,\beta}; x,y \right) - e^{2\beta y}$$

$$= \left(e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}} + e^{\frac{\alpha x}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}} \right)^n - e^{2\alpha x} + \left(e^{\frac{\beta(y+1)}{n}} + e^{\frac{\beta y}{n}} - e^{\frac{\beta}{n}} \right)^n - e^{2\beta y}$$

olup

$$\delta = \mu_n^{\alpha,\beta}(x,y) = \sqrt{\left(e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}} + e^{\frac{\alpha x}{n}} - e^{\frac{\alpha}{n}} \right)^n - e^{2\alpha x} + \left(e^{\frac{\beta(y+1)}{n}} + e^{\frac{\beta y}{n}} - e^{\frac{\beta}{n}} \right)^n - e^{2\beta y}}$$

denirse bu durumda

$$\left|B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq\left(1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)\omega\left(f;\mu_n^{\alpha,\beta}(x,y)\right)$$

elde edilir. Böylelikle $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörünün f fonksiyonuna yakınsama hızını $\mu_n^{\alpha,\beta}(x,y)$ olacak şekilde üstel tipten elde etmiş olduk.

3.5. $B_n^{\alpha,\beta}f$ Operatörü için Voronovskaja Tipli Teorem

Bu kesimde $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörünün asimptotik yaklaşımı incelenecektir. Yani $B_n^{\alpha,\beta}f$ operatörünün kendisini oluşturan f fonksiyonuna noktasal yakınsaklık hızı elde edilecektir. Dolayısıyla Voronovskaja tipli teorem ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.5.1. $f\in C^2(S)$ olmak üzere her $(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^n$ için

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}2n\left(B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)-f(x,y)\right)=&\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)x(1-x)\\&-2xy\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}\\&+\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}-\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)y(1-y)\end{aligned}$$

yakınsaması $S_{\alpha,\beta}^n$ üzerinde düzgündür.

İspat: Öncelikle bazı gösterimlerden bahsedelim. Konumuzun başında $\exp_{i,j}^{\alpha,\beta}(t,s)=e^{i\alpha t+j\beta s}$ fonksiyonunun sırasıyla birinci ve ikinci değişkene göre ters fonksiyonları $\log_\alpha^\beta(t,.)$ ve $\log_\beta^\alpha(.,s)$ ile gösterileceğini söylemiştik. Kısaca ifade edecek olursak $\exp_{1,0}^{\alpha,\beta}(t,s)=e^{\alpha t}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $\frac{1}{\alpha}\log_e(\cdot)$ şeklinde ve $\exp_{0,1}^{\alpha,\beta}(t,s)=e^{\beta s}$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $\frac{1}{\beta}\log_e(\cdot)$ şeklindedir. O halde gösterim kolaylığı açısından aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\left(\log_{\alpha}^{\beta},\log_{\beta}^{\alpha}\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\log_{e}(\cdot),\frac{1}{\beta}\log_{e}(\cdot)\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\log_{e}e^{\alpha x},\frac{1}{\beta}\log_{e}e^{\beta y}\right)$$

$$=(x,y)$$

$(x,y)\in S^{n}_{\alpha,\beta}$ olmak üzere Taylor açılımı yardımıyla

$$f(t,s)=f(x,y)+\frac{\partial f\left(\log_{\alpha}^{\beta},.\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial x}\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)+\frac{\partial f\left(.,\log_{\beta}^{\alpha}\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y}\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^{2} f\left(\log_{\alpha}^{\beta},.\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial x^{2}}\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^{2}+2\frac{\partial^{2} f\left(\log_{\alpha}^{\beta},\log_{\beta}^{\alpha}\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y\partial x}\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{2} f\left(.,\log_{\beta}^{\alpha}\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y^{2}}\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^{2}\right\}+\Phi(t,s;x,y)\left\{\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^{2}+\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^{2}\right\} \qquad (3.6)$$

elde edilir. Burada $(t,s)\to(x,y)$ iken $\Phi(t,s;x,y)\to 0$ dır. (3.6) eşitliğinin her iki tarafına $B_{n}^{\alpha,\beta}f$ operatörü uygulanırsa,

$$B_{n}^{\alpha,\beta}(f;x,y)=f(x,y)+\frac{\partial f\left(\log_{\alpha}^{\beta},.\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial x}B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right);x,y\right)$$

$$+\frac{\partial f\left(.,\log_{\beta}^{\alpha}\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y}B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right);x,y\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^{2} f\left(\log_{\alpha}^{\beta},.\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial x^{2}}B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^{2};x,y\right)\right.$$

$$+2\frac{\partial^{2} f\left(\log_{\alpha}^{\beta},\log_{\beta}^{\alpha}\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y\partial x}B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right);x,y\right)$$

$$\left.+\frac{\partial^{2} f\left(.,\log_{\beta}^{\alpha}\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y^{2}}B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^{2};x,y\right)\right\}$$

$$+B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\Phi(t,s;x,y)\left\{\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^{2}+\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^{2}\right\};x,y\right)$$

elde edilir. Lemma 3.1.1. den $B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right);x,y\right)=0$ ve $B_{n}^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right);x,y\right)=0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y) = f(x,y) + \frac{1}{2}\Bigg\{ & \frac{\partial^2 f\left(\log_\alpha^\beta,.\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial x^2} B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^2;x,y\right) \\
& +2\frac{\partial^2 f\left(\log_\alpha^\beta,\log_\beta^\alpha\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y\partial x} B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right);x,y\right) \\
& +\frac{\partial^2 f\left(.,\log_\beta^\alpha\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y^2} B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^2;x,y\right)\Bigg\} \\
& +B_n^{\alpha,\beta}\left(\Phi(t,s;x,y)\left\{\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^2+\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^2\right\};x,y\right)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

elde edilir. Bu son eşitlikte ihtiyacımız olan bazı türevler aşağıdaki gibi hesaplanır.

Bu durumda

$$
\frac{\partial f\left(\log_\alpha^\beta,.\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial x} = \alpha^{-1}e^{-\alpha x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}
$$

$$
\frac{\partial^2 f\left(\log_\alpha^\beta,.\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial x^2} = e^{-2\alpha x}\left(\alpha^{-2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}-\alpha^{-1}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)
$$

$$
\frac{\partial^2 f\left(\log_\alpha^\beta,\log_\beta^\alpha\right)\left(e^{\alpha x},e^{\beta y}\right)}{\partial y\partial x} = \alpha^{-1}\beta^{-1}e^{-(\alpha x+\beta y)}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}
$$

elde edilir. Aşağıdaki limitler hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nB_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^2;x,y\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(e^{\frac{\alpha(x+1)}{n}}+e^{\frac{\alpha x}{n}}-e^{\frac{\alpha}{n}}\right)^n-e^{2\alpha x}\right) \\
&= -x(x-1)\alpha^2 e^{2\alpha x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nB_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right);x,y\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(e^{\frac{\alpha x}{n}}+e^{\frac{\beta y}{n}}-1\right)^n-e^{\alpha x+\beta y}\right) \\
&= xy\alpha\beta e^{\alpha x+\beta y}
\end{aligned}
$$

olduğundan bu eşitlikler (3.7) eşitliğinde limit alınarak yerine yazılırsa

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(B_n^{\alpha,\beta}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right)=\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)x(1-x)$$

$$-2xy\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}-\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)y(1-y)$$

$$+\lim_{n\to\infty} 2nB_n^{\alpha,\beta}\left(\Phi\left(t,s;x,y\right)\right.$$

$$\left.\times\left\{\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^2+\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^2\right\};x,y\right)$$

elde edilir. Şimdi (3.7) eşitliğinin son terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\Phi\left(t,s;x,y\right)\left\{\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^2+\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^2\right\};x,y\right)$$

$$\leq\left\{B_n^{\alpha,\beta}\left(\Phi\left(t,s;x,y\right);x,y\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^4;x,y\right)}+\sqrt{B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^4;x,y\right)}\right\}$$

elde edilir. $\left(t,s\right)\to\left(x,y\right)$ iken $\Phi\left(t,s;x,y\right)\to 0$ olacağından

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{\alpha,\beta}\left(\Phi\left(t,s;x,y\right);x,y\right)=0$$

bulunur. Basit hesaplamalarla

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^4;x,y\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$B_n^{\alpha,\beta}\left(\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^4;x,y\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

yazılabilir ki böylece

$$\lim_{n\to\infty} 2nB_n^{\alpha,\beta}\left(\Phi\left(t,s;x,y\right)\left\{\left(e^{\alpha t}-e^{\alpha x}\right)^2+\left(e^{\beta s}-e^{\beta y}\right)^2\right\};x,y\right)=0$$

dır. Sonuç olarak (3.7) eşitliği

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)-f(x,y)\right)=\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)x(1-x)$$
$$-2xy\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}-\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)y(1-y)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

3.6. $B_n^{\alpha,\beta} f$ Operatörünün $B_n f$ Operatörü ile Karşılaştırılması

Bu kesimde bir kenarı hareketli üçgensel bölge üzerinde tanımlı $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü ile sabit üçgensel bölge üzerinde tanımlı iki değişkenli $B_n f$ operatörünü karşılaştıracağız. Böylelikle $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün en az $B_n f$ operatörü kadar iyi bir yaklaşım derecesine sahip olduğunu göreceğiz.

Tanım 3.6.1. $f\in C^2(S)$ ve $(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^n$ olsun. Eğer

i) $\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}-\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)\geq 0$ ise $f(x,y)$ (1,0)-ıncı mertebeden $\alpha-$konvekstir.

ii) $\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}-\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\geq 0$ ise $f(x,y)$, (0,1)-inci mertebeden $\beta-$konvekstir.

Teorem 3.6.1. $f\in C^1\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)$ olsun. Kabul edelim ki $f(x,y)$, (1,0)-ıncı mertebeden $\alpha-$konveks, (0,1)-inci mertebeden $\beta-$konveks ve (1,1)-inci mertebeden konkav olsun. Bu durumda öyle bir $n_0\in\mathbb{N}$ vardır öyleki her $n\geq n_0$ ve $(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^n$ için

$$f(x,y)\leq B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)$$

dir.

Teorem 3.6.2. $f\in C^2\left(S_{\alpha,\beta}^n\right)$ olsun. Kabul edelim ki $n_0\in\mathbb{N}$ olmak üzere her $n\geq n_0$ ve $(x,y)\in S_{\alpha,\beta}^n$ için

$$f(x,y)\leq B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)\leq B_n(f;x,y)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \geq \alpha \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \geq 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \geq \beta \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \geq 0 \tag{3.9}$$

ve

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \leq 0 \tag{3.10}$$

dir. Tersine (3.8), (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri bir $(x,y) \in S^n_{\alpha,\beta}$ noktasında sağlansın. Bu durumda öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$f(x,y) \leq B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y) \leq B_n(f;x,y)$$

sağlanır.

Uyarı 3.6.1: Eğer f fonksiyonu (1,0) ve (0,1)-inci mertebeden konveks ise o zaman $B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y)$ operatörü α ve β ya göre azalandır. Gerçekten

$$\frac{\partial r_n(\alpha,x)}{\partial \alpha} = \frac{xe^{\frac{\alpha x}{n}}\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right) - e^{\frac{\alpha}{n}}\left(e^{\frac{\alpha x}{n}}-1\right)}{n\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)^2} \leq \frac{xe^{\frac{\alpha x}{n}}\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right) - e^{\frac{\alpha x}{n}}\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)}{n\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)^2}$$

$$\leq \frac{(x-1)e^{\frac{\alpha x}{n}}\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)}{n\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)^2} \leq \frac{(x-1)e^{\frac{\alpha x}{n}}}{n\left(e^{\frac{\alpha}{n}}-1\right)} \leq 0, \qquad x \in [0,1]$$

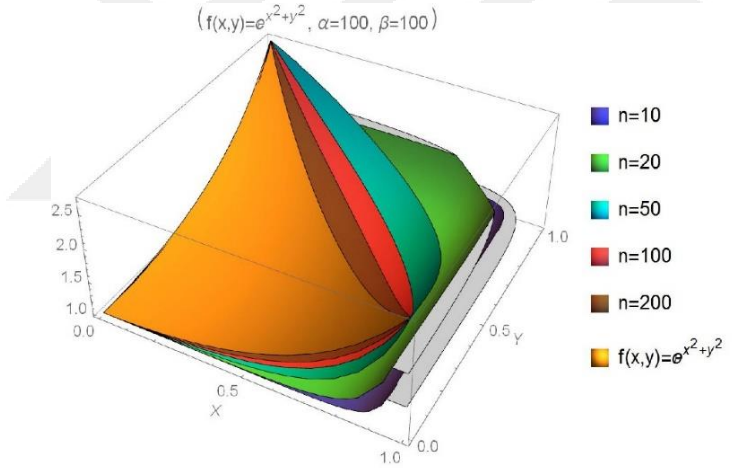
$$\frac{\partial B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)}{\partial \alpha} = n\frac{\partial r_n(\alpha,x)}{\partial \alpha} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1-k}\left\{ f\left(\frac{k+1}{n},\frac{l}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n},\frac{l}{n}\right)\right\} p^{\alpha,\beta}_{n-1,k,l}(x,y)$$

dir. $B_n^{\alpha,\beta} f$ lineer pozitif operatör ve $\frac{\partial r_n(\alpha,x)}{\partial \alpha} \leq 0$ olduğundan $\frac{\partial B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)}{\partial \alpha} \leq 0$ olur. $(x,y) \in S^n_{\alpha,\beta}$ için $S^n_{\alpha,\beta}$ üzerinde $(\alpha,\beta) \to (0,0)$ iken $B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y) \to B_n(f;x,y)$ yakınsaması düzgün ve yakınsaklık azalan olduğundan $B_n^{\alpha,\beta}(f;x,y) \leq B_n(f;x,y)$ yazılabilir. Yani α ve β azaldıkça $B_n^{\alpha,\beta} f(x,y)$ operatörü $B_n(f;x,y)$ Bernstein operatöründen daha iyi bir yaklaşım sağlar.

3.7. $B_n^{\alpha,\beta} f$ Operatörünün f Fonksiyonuna Yaklaşımının Grafiklerle ve Tablo Yardımıyla Gösterilmesi

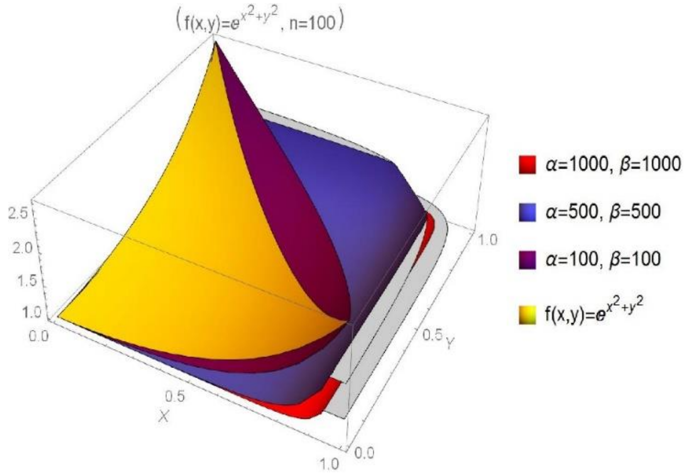
Bu kesimde farklı α , β ve n değerleri için $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımının grafiklerle gösterilmesini ve operatörle fonksiyon arasındaki hata payının değerlere göre değişiminin tablo yardımıyla analizini yapacağız. Grafiklerde gözlemleyeceğimiz hususlardan birisi; grafiklerin (x, y) düzlemine izdüşümü alınırsa operatörün, bir kenarı hareketli tanım kümesini elde edeceğimizdir. Ayrıca operatör düzgün yakınsak olması sebebiyle grafik çiziminde kullanacağımız fonksiyon teoremin şartlarına uygun olacak şekilde keyfi olarak seçilebilir.

Örnek 3.7.1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ olsun. Şekil 3.2. de α ve β sabitken, artan n değerleri için $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün f fonksiyonuna nasıl yakınsadığı gösterilmiştir.



Şekil 3.2. $\alpha = \beta = 100$ ve artan n değerleri için $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafik

Örnek 3.7.2. Fonksiyonumuz $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ olmak üzere Şekil 3.3. de n değerleri sabitken, değişen α ve β değerlerine göre $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün f fonksiyonuna nasıl yakınsadığı gösterilmiştir.



Şekil 3.3. $n=100$ olmak üzere azalan α ve β değerleri için $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımını gösteren grafik.

Aşağıda farklı α, β ve n değerleri için $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörünü ile f fonksiyonu arasındaki hata payını gösteren tablo verilmiştir.

Çizelge 3.1. $B_n^{\alpha,\beta} f$ operatörü ile f fonksiyonu arasındaki yaklaşımın hata payı sayısal değerleri tablosu.

$\left\|B_n^{\alpha,\beta} f - f\right\|_{C(S_{\alpha,\beta}^n)}$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$	$n=200$
$\alpha=1$	0.1869760	0.0929331	0.0370372	0.0184957	0.0092420
$\alpha=0.5$	0.0170407	0.0085077	0.0033999	0.0016994	0.0008495
$\alpha=0.1$	0.0003053	0.0001526	0.0000610	0.0000305	0.0000152
$\alpha=0.05$	0.0000690	0.0000345	0.0000138	0.0000069	0.0000034
$\alpha=0.01$	0.0000025	0.0000012	0.0000005	0.0000002	0.0000001

Burada dikkat edelim ki β değerleri için de aynı sonuç geçerlidir. Çünkü bu çizelge düzgün yakınsaklığın bir göstergesidir. Dolayısıyla β değerleri için ayrı bir tabloya gerek yoktur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yaklaşım teorisinin son iki yüz yıldır süregelen serüveninde yapılan çalışmalar günümüz bilimine ve teknolojisine sayısız katkıda bulunmuş olup bu süreç kesintisiz devam etmektedir. Bu serüvende açığa çıkan fikirler günümüzdeki bilimin aydınlatılmasında başrol oynamaktadır. Böylece geçmişte elde edilen ve günümüzde hâlen geçerliliğini korumakta olan sonuçların günümüz teknolojisi ilerledikçe yeni fikirlerle harmanlanıp ihtiyaçları karşılayacak şekilde tasarlanması doğal bir sonuçtur.

Bu tezde; 1963 yılında Stancu tarafından çalışılmış sabit üçgensel bölge üzerinde test fonksiyonlarını koruyan iki değişkenli Bernstein operatörü, bir kenarı hareketli üçgensel bölge üzerinde üstel tipli test fonksiyonlarını koruyacak şekilde yeniden tasarlanmıştır. Dolayısıyla iki değişkenli Bernstein operatörleri için 1963 yılından sonra üstel anlamda yapılan ilk çalışmadır.

Bu çalışma boyunca yeniden inşa edilmiş operatörün; merkezî momentleri elde edilmiş, kendisini oluşturan fonksiyonla arasındaki şekil koruma özellikleri incelenmiştir. Daha sonra operatörün bir kenarı hareketli üçgensel bölge üzerinde Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı gösterilmiştir. Yani operatörün düzgün yakınsaklığı incelenmiştir. Test fonksiyonlarının üstel tipten olması Korovkin teoreminin ispatı için karşılaşılan önemli zorluklardan biri olmuştur. Ardından operatörün yaklaşım hızı üstel tipten elde edilmiştir. Noktasal yakınsaklık probleminin çözümü için Voronovskaja tipli teorem ispat edilmiştir. En önemli husus ise genelleştirilmiş iki değişkenli Bernstein operatörünün, iki değişkenli Bernstein operatörü ile karşılaştırılmasıdır. Buradan açığa çıkan sonuç; üstel tipten fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein operatörü iki değişkenli Bernstein operatöründen daha iyi bir yaklaşım sunmaktadır. Tüm bu incelemelerden sonra operatörün kendisini oluşturan fonksiyonla arasındaki hata payını veren sayısal değerler bir tablo yardımıyla verilmiş, operatörün yakınsaklığıyla ilgili bazı grafikler gösterilmiştir.

Bu çalışmanın sonlanmasıyla bir kenarı hareketli üçgensel bölge üzerinde üstel tipli fonksiyonları koruyan iki değişkenli Bernstein operatörü için elde sonuçlar farklı yapısal özelliklere sahip operatörler için uyarlanabilir birer örnektir. Dolayısıyla bu çalışma temel bir kaynak niteliğindedir.

KAYNAKLAR

Agratini, O. (2006). On approximation of functions by positive linear operators. *Stud. Cercet. Ştiinţ.,* Ser. Mat., Univ. Bacău,16, suppl. 17-28.

Altomare, F. & Campiti, M. (1994). *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*. de Gruyter Studies in Mathematics, 17, Berlin-New York: Walter de Gruyter & Co.

Anastassiou, G. A., & Gal, S. G. (2000). *Approximation theory: moduli of continuity and global smoothness preservation*. Springer Science & Business Media.

Aral, A., Cárdenas-Morales, D., & Garrancho, P. (2018). Bernstein-type operators that reproduce exponential functions. *J. Math. Inequal*, 12(3), 861-872. https://doi.org/10.7153/jmi-2018-12-64

Bernstein, S.N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Сообщенія Харьковскаго математическаго общества серия 2*, 13(1), 1-2.

Bohman, H. (1951). On approximation of continuous and of analytic functions. *Ark. Mat.* 2, 43-56.

Butzer, P. L. (1953). On two-dimensional Bernstein polynomials. *Canadian Journal of Mathematics*, 5, 107-113.

Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P., & Muñoz-Delgado, F. J. (2006). Shape preserving approximation by Bernstein-type operators which fix polynomials. *Applied mathematics and computation*, 182(2), 1615-1622. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.046

Cárdenas-Morales, D., & Muñoz-Delgado, F. J. (2008). Improving certain Bernstein-type approximation processes. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77(2-3), 170-178. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2007.08.009

Censor, E. (1971). Quantitative results for positive linear approximation operators. *Journal of Approximation Theory*, 4(4), 442-450. https://doi.org/10.1016/0021-9045(71)90009-8

Chebyshev, P. L. (1854). Théorie des Mécanismes Connus Sous le Nom de Prallélogrammes, *Mémories Presentes Academie Imperiale des Science de St-Pétersburg VII*, (539-568)

Goncharov, V. L. (2000). The Theory of the Best Approximation of Functions. *Journal of Approximation Theory*. 106(1), 58-65

DeVore, R. A., & Lorentz, G. G. (1993). *Constructive approximation* (Vol. 303). Springer Science & Business Media.

Hacıyev, A., & Hacısalihoğlu, H.H. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No: 31, Ankara.

Jackson, D. (1911). Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Fun. (Phd. Thesis).

Jensen, J. L. W. V. (1906). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Mathematica.* 30 (1) 175–193. https://doi.org/10.1007/BF02418571

King, J.P. (2003). Positive linear operators which preserve x^2. *Acta Mathematica Hungarica*, 99(3), 203-208. https://doi.org/10.1023/A:1024571126455

Korovkin, P.P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Doklady. Akad. Nauk SSSR (N.S.).* 90, 961-964.

Lorentz, G. G. (1966). *Approximation of Functions*, Athena Series. Selected Topics in Mathematics.

Martinez, F. L. (1989). Some properties of two-dimensional Bernstein polynomials. *Journal of approximation theory*, 59(3), 300-306.

Popoviciu, T. (1951). Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare, *Lucrările Sesiunii Gen. Şt. Acad. Române, 2-12 iunie 1950, Editura Academiei Republicii Populare Române,* pp. 1664-1667. [Translated in English by Daniela Kacsó: On the proof of Weierstrass' theorem using interpolation polynomials, *East Journal on Approximations*, 4(1998), f.1, 107-110.]

Russell, B. (1949). *The Scientific Outlook* (2nd Ed.). London: George Allen & Unwin Ltd.

Stancu, D. D. (1963). A method for obtaining polynomials of Bernstein type of two variables. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 260-264.

Steffens, K. G., (2006). *The history of approximation theory: from Euler to Bernstein* (p. 1). Boston: Birkhäuser.

Voronovskaja, E.V. (1932). Détermination de la forme asymptotique de l' approximation des fonctions par les polynômes de M. Bernstein (Russian), *C.R. Acad. Sci.* URSS 79-85.

Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin*, Berlin, 633-639.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kenan BOZKURT

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl) :

Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2009

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2011

Yayınları :

Bozkurt, K., Özsaraç, F. and Aral, A. (2021). Bivariate Bernstein polynomials that reproduce exponential functions. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1. Math. Stat. 70(1), 541–554. doi: 10.31801/cfsuasmas.793968

(Tezden çıkan yayın)

Diğer Yayınları :

Bozkurt, K., Limmam, M. L. and Aral, A. (2021). Generalization of Szász operators: quantitative estimate and bounded variation. Carpathian Math. Publ. 13(3), 775–789. doi: 10.15330/cmp.13.3.775-789

Araştırma Alanları : Yaklaşım Teorisi