T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# DEĞİŞTİRİLMİŞ BASKAKOV GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

SEDA ERDOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. ALİ OLGUN

KIRIKKALE-2022

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# DEĞİŞTİRİLMİŞ BASKAKOV GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Seda ERDOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ali OLGUN

KIRIKKALE-2022

Seda ERDOĞAN tarafından hazırlanan "DEĞİŞTİRİLMİŞ BASKAKOV GAMMA OPERATÖRÜNÜN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN

İmza……………

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

İmza……………

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

İmza……………

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

İmza……………

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Ali ARAL

İmza……………

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 05/10/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Seda ERDOĞAN

05/10/2022

**ÖZET**

DEĞİŞTİRİLMİŞ BASKAKOV GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ERDOĞAN, Seda
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN
Ağustos 2022, 67 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır ve konu ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde tezde yararlanılacak bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Baskakov ve Gamma operatörüne giriş yapılmıştır. Üçüncü bölümde ise değiştirilmiş Baskakov Gamma operatörü çalışılmıştır. İlk olarak bu operatörün bazı özelliklerine yer verilmiştir. Değiştirilmiş Baskakov Gamma operatörünün yakınsaklığı Korovkin teoremi yardımıyla gösterilmiştir ve yakınsama hızları hesaplanmıştır. İkinci olarak operatör dizisi için monotonluğu incelenmiştir. Peetre *K*-fonksiyoneli, düzgünlük modülü ve ağırlıklı uzaylarda lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklığı kullanılarak yakınsama hızları hesaplanmıştır. Son olarak da Voronovskaya teoremi kullanılarak inceleme yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Baskakov operatörü, Gamma operatörü, Süreklilik modülü, Korovkin teoremi, Monotonluk, Peetre *K*-fonksiyoneli, Ağırlıklı yaklaşım, Voronovskaya tip teorem.

## ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF MODIFIED BASKAKOV GAMMA OPERATORS

ERDOGAN, Seda
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali OLGUN
August 2022, 67 pages

This thesis consists of three chapters. The first chapter is reserved for introduction and general information on the subject is given. In the second chapter, some fundamental definitions and theorems to be used in the thesis are given and entry is made to Baskakov and Gamma operator. In the third chapter, modified Baskakov Gamma operators is studied. Firstly, some properties of the operator is implied. Continuity of modified Baskakov Gamma operators is showed by Korovkin's theorem and their rate of convergence are calculated. Secondly the monotony of the sequence of the operators is examined. Rate of convergence are calculated using the Peetre's *K*-functional, modulus of smoothness and convergence of a sequence of linear positive operators in weighted space is studied. Lastly an examination is conducted utilizing the Voronovskaya theorem.

**Keywords:** Baskakov operator, Gamma operator, Modulus of continuity, Korovkin theorem, Modulus of smoothness, Peetre's *K*-functional, Weighted approximation, Voronovskaya type theorem.

# TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübesiyle doktora öğrenimimde ve tezimin hazırlanması esnasında hiçbir desteğini ve ilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ali OLGUN'a, tez çalışmam boyunca, öneri, bilgi ve tecrübeleri ile doktora tezimin gelişmesine yardımcı olan değerli tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA ve Sayın Prof. Dr. Ali ARAL hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım. Doktora çalışmam boyunca her türlü desteği veren eşim Tuğrul ERDOĞAN'a ve eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen anneme, babama ve aileme teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $C(0,\infty)$ | $(0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $C_B(0,\infty)$ | $(0,\infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı |
| $C^2(0,\infty)$ | $f, f', f'' \in C(0,\infty)$ olan fonksiyon uzayı |
| $C_B^2(0,\infty)$ | $f, f', f'' \in C_B(0,\infty)$ olan fonksiyon uzayı |
| $B_n(f,x)$ | Baskakov operatörü |
| $G_n(f,x)$ | Gamma operatörü |
| $S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)$ | Baskakov Gamma operatörü |
| $\Vert . \Vert$ | Norm fonksiyonu |
| $\Vert f \Vert_{C[a,b]}$ | $C[a,b]$ uzayında tanımlanan norm |
| $Lip_M \gamma$ | $\gamma$ mertebeli $M$ katsayılı Lipschitz sınıfı |
| $\omega(f;\delta)$ | $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü |
| $\omega_2(f;\delta)$ | $f$ fonksiyonunun ikinci mertebeden süreklilik modülü |
| $L_n(f,x)$ | Lineer pozitif operatör |
| $\Gamma(x)$ | Gamma foksiyonu |
| $(a)_r$ | Pochhammer sembolü |
| $\rho(x)$ | Ağırlık fonksiyonu |
| $K(f;\delta)$ | $f$ fonksiyonunun Peetre *K*-fonksiyoneli |
| $B_\rho(R)$ | Her $x \in R$ için $\lvert f(x) \rvert \le M_f \rho(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı |
| $C_\rho(R)$ | $B_\rho(R)$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $C_\rho^k(R)$ | $C_\rho(R)$ uzayının $\left\{ f : f \in C_\rho(R), \lim_{x\to\infty} \frac{\lvert f(x) \rvert}{\rho(x)} = k_f \right\}$ koşulunu sağlayan alt uzayı |

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım konusu matematiğin en eski çalışma konularından birisidir. Örneğin bir dairenin çevresinin çapına bölünmesiyle elde edilen $\pi = 3,14159...$ (Pi) sayısının yaklaşık değeri üzerine yapılan çalışmalar halen devam etmektedir. Bu sayıyı ilk olarak bulan Arşimet bu sayıyı yaşadığı günün şartlarında 3 tam 1/7 ile 3 tam 10/71 arasında bir sayı olarak hesaplamıştır. $\pi$ (Pi) sayısının değerini Mısırlılar 3,1605, Babilliler 3,1/8 olarak kullanırken son olarak Fabrice Bellard, 2010 yılında Chudnovsky algoritmasını kullanarak bu sayının ilk 2.699.999.990.000 basamağını elde etmiştir. Bu tip sayılardan diğeri de $e$ sayısıdır. Bu sayı da ekonomik büyümeler, nüfus ve faiz hesaplamalarında oldukça büyük öneme sahip olup, ilk olarak 1600'lü yılların başlarında İskoç matematikçi John Napier'in üstel büyümeyi içeren ifadelerin hesaplanmasında ve logaritma tablosunun oluşturulmasında kullandığı 2,718… sayısının çok kullanışlı olduğunu görmesiyle başlamış, daha sonra Jakob Bernoulli bileşik faiz hesaplarında bu sayıyı kullanmıştır. 1727 yılında Leonhard Euler tarafından düşünülerek ortaya atılan $e = 2,718281...$ sayısı için bir yaklaşımı Euler 18 ondalık basamağa kadar hesaplamıştır. Bu sebepten dolayı bu sayı Euler sabiti olarak da bilinir [1,2].

Fonksiyon uzayları için yaklaşım kavramı; en basit şekli ile incelemesi zor olan karmaşık fonksiyonların daha basit fonksiyonlara en iyi şekilde yaklaştırılabileceği ve bu sayede uygulamada ortaya çıkan hataları nicel olarak karakterize etme ile ilgilenmektedir. Bu teori esas olarak 1854 yılında Chebyshev'in aşağıdaki iddiayı ortaya koyması ile başlar.

$P_n$ ile en fazla $n.$ dereceden polinomların uzayı gösterilsin ve $f \in C[a,b]$ verilsin. O zaman bir $P_n^* \in P_n$ polinomu vardır. Öyle ki $\forall p \in P_n$ için $\|f - P_n^*\| \leq \|f - p\|$ dir.

Burada $\|.\|$, $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün norm olup $g \in C[a,b]$ için $\|g\| = \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$ dir. Ayrıca $E_n(f;[a,b]) = E_n(f) = \|f - P_n^*\|$ olarak tanımlanırsa $E_n(f)$'e polinomlarla en iyi yaklaşımın derecesi adı verilir.

Chebyshev'in bu iddiasını 1885 yılında Weierstrass; "Bir sonlu aralık üzerindeki sürekli fonksiyonlara polinomlarla önceden belirlenmiş herhangi bir hatayla düzgün olarak yaklaşılabilir." şeklindeki teoremi ile ispat etmiştir. Teoremin ifadesi aşağıdaki gibidir.

$[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli $f(x)$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\forall x \in [a,b]$ için $\| f(x) - p(x) \| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $p(x)$ polinomu vardır.

Weierstrass'ın bu teoreminin ispatı C. Z. Runge, E. Picard, V. Volterra, E Borel gibi iyi bilinen birçok matematikçi tarafından farklı metodlarla verilmiştir. Ancak bunlar içinde en bilinen ve en basit olanı S. N. Bernstein tarafından verilmiştir. Bernstein, Borel'in ispat mantığından yola çıkarak;

$f \in C[0,1]$ için

$$B_n(f,x) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right); \; x \in [0,1], \; n \in N$$

şeklindeki polinom dizisini tanımlayarak, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $x \in [0,1]$, $n > n_0 \in N$ olmak üzere

$$|B_n(f,x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstererek Weierstrass'ın teoreminin en basit ispatını vermiştir.

Weierstrass'ın teoreminin Bernstein tarafından verilen basit ispatı yaklaşımlar teorisinde yeni bir çığır açmış ve daha sonra Bernstein operatörleri baz alınarak yeni lineer pozitif operatör dizileri tanımlanmış ve tanımlanan operatörlerin yakınsaklık özellikleri ve yakınsaklık hızları üzerine birçok makale yapılmıştır ve halen de yapılmaya devam edilmektedir. Çünkü teknolojik ilerlemeler göstermiştir ki lineer pozitif operatörler kullanılarak çeşitli sinyalizasyon problemleri, tıbbi görüntüleme sistemleri gibi birçok alanda daha iyi sonuçlar alınmaktadır.

Literatüre Baskakov operatör dizileri olarak geçen bu operatörlerden birisi 1957 yılında $f \in C[0,\infty)$ olmak üzere V.A. Baskakov tarafından

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \qquad x\geq 0,\ n\in N$$

şeklinde tanımlanmıştır [3]. Baskakov operatörü baz alınarak bu operatörlerin genelleştirilmeleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır [4-12].

Yine tanımlanan bu operatör dizilerinden önemli olan birisi de 1950 yılında O. Szász tarafından tanımlanan operatör olup bu operatör;

$n\in N$, $x\geq 0$ ve $f\in C[0,\infty)$ olmak üzere

$$S_n(f;x):=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [13]. Bu operatör ve çeşitli modifikasyonları üzerine birçok çalışma vardır ve birçok genelleştirilmesi yapılmıştır.

1998'de V. Miheşan;

$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ eşitliğini ve $(1+x)^n=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^k$ Binom teoremini kullanarak

$$e^{\frac{ax}{1+x}}(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(n-1+i)!}{(n-1)!k!}a^{k-i}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

eşitliğini ya da buna eşit olan

$$e^{\frac{ax}{1+x}}(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(n)_i}{k!}a^{k-i}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

ifadesini kullanmıştır. Bu ifade de $P_k(n,a)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(n)_i\,a^{k-i}$ gösterimini kullanarak

$$(1+x)^n=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

eşitliğini oluşturmuştur. Bu eşitliği kullanarak da

$$B_n^a(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad x\geq 0,\ n\in N \qquad (1.1)$$

genelleştirilmiş Baskakov operatörünü tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir [14].

Daha sonra Wafi ve Khatoon (1.1) operatörünün integral tipli modifikasyonunu

$$V_n^a\left(f;x\right)=n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f\left(t\right)dt \qquad x\geq 0,\ n\in N \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir [15].

A. Erençin ve G. Başcanbaz Tunca 2010'da (1.2) operatörünün daha genel bir şeklini tanımlayıp, yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [16].

A. Erençin 2011'de genelleştirilmiş Baskakov operatörünün Durrmeyer tipi modifikasyonu olan operatörü

$$L_n^{\alpha}\left(f;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{1}{B\left(k+1,n\right)}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{\left(1+t\right)^{n+k+1}}f\left(t\right)dt \quad x\geq 0 \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlayıp, bazı yaklaşım özelliklerini incelemiştir [17].

Erençin ve Büyükdurakoğlu 2014'de (1.2) operatörünü daha iyi sonuçlar elde etmek için dizileri kullanarak

$$K_n\left(f;x\right)=e^{-\frac{a_nx}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{b_n}{d_n-c_n}\int_{\frac{k+c_n}{b_n}}^{\frac{k+d_n}{b_n}}f\left(t\right)dt \qquad x\geq 0,\ n\in N$$

şeklinde genelleştirmişler ve bu operatörün ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [4].

N. Rao ve A. Wafi 2017'de

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \tag{1.4}$$

operatörünü tanımlayarak (1.2) operatörünün Stancu varyantının yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [18].

1967'de A. Lupaş ve M. Müller Gamma operatörünü

$$G_n\left(f;x\right)=\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-xy}y^n f\left(\frac{n}{y}\right)dy \qquad x\in\left(0,\infty\right),\ n\in N \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlamışlar ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [19].

L. Rempulska ve M. Skorupka 2011'de Gamma operatörünün modifiye versiyonunu

$$G_{n,p}\left(f;x\right)=\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}e^{-xy}y^nF_p\left(x,\frac{n}{y}\right)dy \qquad\qquad F_p\in C\left(0,\infty\right)$$

şeklinde tanımlayarak, ağırlıklı uzaylarda türevlenebilir fonksiyonlar için yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [20]. Bu operatörün farklı modifikasyonları çeşitli araştırmacılar tarafından geniş olarak incelenmiştir [21-24]. 2014'de R. Malejki ve E. Wachnicki (1.1) eşitliğinde verilen $B_n^a$ operatörünün integral tipli modifikasyonunu

$$M_n^{\alpha,a}\left(f;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+k+1\right)}\int_0^{\infty}e^{-ns}\left(ns\right)^{\alpha+k}f\left(s\right)ds$$

şeklinde tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir [25].

E. Pandey ve S.P. Mishra bu operatörün farklı tipinin yaklaşım özelliklerini incelemiştir [26].

2016'da I. Krech ve R. Malejki $M_n^{\alpha,a}$ operatörünün çok değişkenli versiyonunu tanımlayarak yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [27].

Biz de bu tezde yukarıda verilen (1.1) operatörü ile (1.5) operatörünün (1.4)'de verilen Stancu tipli genelleştirmesini tanımlayarak bir lineer kombinasyonunu oluşturup yeni bir genelleme olarak Baskakov Gamma operatörünü tanımlayıp yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz.

## 1.1. Kaynak Özetleri

Biz bu tezde ilk olarak V. Miheşan'ın 1998 yılında yapmış olduğu; V. Miheşan, Uniform approximation with positive linear operators generated by generalized Baskakov method, Automat Comput. Appl. Math. 7 (1998) 34-37. isimli çalışmasını ve 1967'de A. Lupaş ve M. Müller'in yapmış olduğu A. Lupaş, and M. Müller, Approximations eigenschaften der Gamma operatoren, Math. Zeitschr. 98(1967), 208-226. isimli çalışmasını temel baz olarak alıp bu çalışmalarda tanımlanan operatörleri kullanarak operatörlerin bir genelleştirmesini oluşturup, Wafi, N. Rao nun; Wafi, N. Rao, Stancu-Variant of Generalized Baskakov Operators, Filomat 31(2015) (9), 2625-2632. isimli çalışmaları ile A. Erençin'in; A. Erençin, Durrmeyer type modification of generalized Baskakov operators, Appl. Math. Comput. 218

(2011) 4384-4390. isimli çalışmalarında vermiş oldukları teoremlerde elde ettikleri sonuçların benzerlerini tanımladığımız yeni operatör elde ettik. Bu işlemleri yaparken kaynaklar kısmında verilen çeşitli çalışmalar ve tezlerden de ayrıca yararlandık.

## 1.2. Çalışmanın Amacı

Biz bu çalışmada Kaynak özetlerinde belirttiğimiz çalışmalarda verilen operatörleri kullanarak yeni bir operatör tanımladık. Amacımız tanımladığımız bu bileşke operatörün yakınsaklık özelliklerini inceleyerek yaklaşım özellikleri hakkında daha iyi sonuçlara ulaşmaktır.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

## 2.1. Lineer Pozitif Operatörler ile İlgili Kavramlar

Yaklaşım teorisine temel teşkil eden operatörlerin yaklaşım özelliklerini ve yaklaşım hızlarının belirlenmesinde faydalanılan lineer pozitif operatörlerle ilgili bazı tanım ve teoremler aşağıdaki gibidir.

**Tanım 2.1.1. (Operatör)** $X$ ve $Y$ iki vektör (lineer) uzay olsun. $X$ deki $f$ fonksiyonunu $Y$ deki bir $g$ fonksiyonuna eşleyen ve $L: X \to Y$ $f \to L(f) = g$ şeklinde gösterilen dönüşüme operatör denir. Bu durum $L(f) = g$, $L(f(t);x) = g(x)$, $L(f;x) = g(x)$ şeklinde de ifade edilir.

$X$ uzayı $L$ operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $g(x) = L(f;x)$, $Y$ uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki $g$ fonksiyonları kümesine $L$ operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir [28].

**Tanım 2.1.2. (Lineer Operatör)** $X$ ve $Y$ lineer normlu fonksiyon uzayları olsun. $L: X \to Y$ operatörü her $f_1, f_2 \in X$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ olmak üzere $L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2; x) = \alpha_1 L(f_1; x) + \alpha_2 L(f_2; x)$ eşitliği sağlanıyor ise $L$ ye lineer operatör denir [28,29].

**Tanım 2.1.3. (Lineer Pozitif Operatör)** $L: X \to Y$ lineer operatör ve

$$X^+ = \{ f \in X : f(t) \geq 0 \},\ Y^+ = \{ g \in X : g(t) \geq 0 \}$$

olmak üzere, $L$ lineer operatörü $X^+$ kümesindeki her bir $f$ fonksiyonunu $Y^+$ kümesinde bir fonksiyona dönüştürüyorsa $L$ operatörüne lineer pozitif operatör denir. $L$ lineer pozitif operatör ise $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur [28].

**Uyarı:** $f \leq 0$ iken $L(f;x) \leq 0$ eşitsizliği de sağlanır. Gerçekten de bunu görmek için kabul edelim ki $f \leq 0$ olsun. Bu durumda $-f \geq 0$ olacaktır. $L$ operatörü pozitif olduğundan dolayı $L(-f;x) \geq 0$ olur. $L$ operatörünün lineerlik özelliği de göz önüne alındığında $-L(f;x) \geq 0 \Rightarrow L(f;x) \leq 0$ elde edilir. Dolayısıyla $f \leq 0$ iken $L(f;x) \leq 0$ dır.

**Tanım 2.1.4.** $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. $f \in C[a,b]$ olmak üzere $C[a,b]$ üzerinde tanımlı norm;

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.5. (Norm ve Normlu Uzay)** $X$ bir lineer uzay olsun. $\|.\| : X \to R$ fonksiyonunun $x \in X$ deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

**i)** $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**ii)** Eğer $x \neq 0$ ise $\|x\| > 0$

**iii)** $\forall x \in X$ ve $\lambda \in R$ ise $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

**iv)** $\forall x, y \in X$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna $X$ üzerinde norm denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [28].

**Not:** Yukarıdaki tanımda (i) koşulu yerine $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ koşulu alınırsa, $\|.\|$ fonksiyonuna $X$ üzerinde yarı norm denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine de yarı normlu uzay denir.

**Tanım 2.1.6. (Sınırlı Operatör)** $L : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. $D(L) \subset X$, $L$ nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in D(L)$ için

$$\|L(f,.)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $C \in R^+$ varsa $L$ ye $D(L)$ de sınırlı operatör denir. $L$ operatörünün normu

$$\|L\|_{X \to Y} = \inf\left\{C : \|L(f,.)\|_Y \leq C\|f\|_X\right\}$$

şeklinde tanımlanır [28].

**Lemma 2.1.1.** $L : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü için

$$\|L\|_{X \to Y} = \sup_{\substack{\|f\|_X \neq 0 \\ f \in X}} \frac{\|L(f,.)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır.

**Tanım 2.1.7. (Operatörün Sürekliliği)** $X$ ve $Y$ normlu uzaylar $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta(\varepsilon, f_0) > 0$ sayısı, $\|f - f_0\|_X < \delta$ olduğunda $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bulunabilirse $L$ operatörü $f_0 \in X$ için süreklidir denir [28].

**Teorem 2.1.1.** $X$, $Y$ normlu uzaylar, $L : X \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda $L$ operatörü için sınırlılık ve süreklilik birbirine denktir.

**Lemma 2.1.2.** $L : X \to Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda, $f, g \in X$ olmak üzere

a) $f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu özelliğe $L$ lineer pozitif operatörü monotonluk özelliği denir.

b) $|f| \in X$ iken $|L(f)| \leq L(|f|)$

eşitsizliği gerçeklenir [30].

**Tanım 2.1.8.** $n \in N$ olmak üzere $\left(L_n\left(f;x\right)\right)$ dizisine operatör dizisi denir.

**Teorem 2.1.2. (Süreklilik ve Sınırlılık)** $X$ ve $Y$ normlu uzaylar, $D(L) \subset X$ olmak üzere $L$, $D(L)$ den $Y$ uzayına lineer bir operatör olsun. Bu durumda,

(i) $L$ operatörünün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $L$ operatörünün sınırlı olmasıdır.

(ii) $L$ operatörü bir tek noktada sürekli ise her noktada süreklidir.

**Tanım 2.1.9. (Süreklilik)** $A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $f$ fonksiyonu $a$ noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x-a| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$ olur [29].

**Örnek:** $f(x) = x^2$ fonksiyonunun her $a \in R$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. $|x-a| < 1$ bağıntısını sağlayanlar $x$ ler için

$$\begin{aligned} \left|f(x) - f(a)\right| &= \left|x^2 - a^2\right| = |x-a||x+a| < |x+a| < |x-a+2a| \\ &\leq |x-a| + 2a < 1 + 2a \end{aligned}$$

olur. $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{1+2a}\right)$ seçilirse $|x-a| < \delta$ bağıntısını sağlayanlar tüm $x$ ler için $\left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$ kalır. Bu da $f$ nin $a$ noktasında sürekli olduğunu gösterir [31].

**Tanım 2.1.10. (Düzgün Süreklilik)** $A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonu $A$ üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x-t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $\left|f(x) - f(t)\right| < \varepsilon$ dır [29].

**Tanım 2.1.11. (Noktasal Yakınsaklık)** $(f_n)$ dizisi $A$ üzerinde $f$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in A$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ dur.

**Tanım 2.1.12. (Düzgün Yakınsaklık)** $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna $A$ üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall x \in A$ için $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ dur.

## 2.2. Hölder ve Cauchy-Schwarz Eşitsizlikleri

**Tanım 2.2.1. (Hölder Eşitsizliği)** $p,q > 0$ , $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $(a_i) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ve $(b_i) = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ şeklinde diziler olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir [29].

**Tanım 2.2.2. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)** $(a_i) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ve $(b_i) = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$ şeklinde diziler olsun. Hölder eşitsizliği tanımı gereğince, $p = 2$, $q = 2$ alınırsa

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

**Tanım 2.2.3. (İntegral için Hölder Eşitsizliği)** $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olmak üzere $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b \left| f(x) g(x) \right| dx \leq \left( \int_a^b \left| f(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b \left| g(x) \right|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliğine integral için Hölder eşitsizliği denir.

**Tanım 2.2.4. (İntegral için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)** $f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

eşitsizliğine integral için Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

## 2.3. Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Böyle bir gösterim, fonksiyon hakkında bilgi elde etmenin daha basit bir yolunu verir. $[a,b]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini Weierstrass 1885 yılında ifade etmiştir [30].

**Teorem 2.3.1. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)** $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde *n*. dereceden bir $\{P_n(x)\}$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifade ile $[a,b]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonu için $f(x)$ e, $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinomlar dizisi vardır.

Bu teoremin birçok ispatı bulunmaktadır. Bu ispatlardan birini de 1912 yılında S.N.Bernstein yaparak, lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde önemli rol oynayan Bernstein polinomlarını tanımlamıştır.

1952 yılında H. Bohmann, toplam şeklinde lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli $f$ fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohmann göstermiştir ki $x \in [0,1]$, $0 \leq a_{n,k} \leq 1$ ve $k < r$ için $a_{n,k} < a_{n,r}$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{n,k}) P_{n,k}(x) \quad , \qquad P_{n,k}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul üç tanedir. Bunlar

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(t;x) - x \right\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(t^2;x) - x^2 \right\|_{C[0,1]} = 0$$

şeklindedir.

Bohmann'ın araştırdığı operatörlerin değeri, $f$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır. 1953 yılında P.P. Korovkin, H. Bohmann'ın teoremini daha genel bir halde vermiştir [30].

**Teorem 2.3.2. (Korovkin Teoremi)** $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$, $n \in N$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için

$$L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x) \quad (2.1)$$

$$L_n(t;x) = x + \beta_n(x) \quad (2.2)$$

$$L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x) \quad (2.3)$$

koşulları sağlayan $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün yakınsar. Burada $f$, $[a,b]$ de sürekli bir fonksiyondur [28,30].

## 2.4. Süreklilik Modülü ve *K*-Fonksiyoneli

Lineer pozitif operatörlerde yaklaşım teorisinde, yakınsama hızını belirlemek ve bu yaklaşımın hatası için bir üst sınır bulmak operatörün yakınsaklığı kadar önemlidir. Bunu yaparken süreklilik modülü ve *K*-fonksiyonelini kullanmak en yaygın metodlardan birisidir [32,33].

Operatörün yakınsama hızını veren bir fonksiyon olan süreklilik modülü aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

**Tanım 2.4.1. (Süreklilik Modülü)** Kabul edelim ki $f$, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $x,y\in[a,b]$ olmak üzere $|x-y|\le\delta$ şartını sağlayan $\delta>0$ sayısı için $|f(x)-f(y)|$ ifadesinin en küçük üst sınırına $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

$$\omega(f;\delta)=\sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\le\delta}}|f(x)-f(y)|$$

veya

$$\omega(f;\delta)=\sup_{|h|\le\delta}|f(x+h)-f(x)|$$

sembolleri ile gösterilir. $\omega$, $\delta$ nın bir fonksiyonu durumundadır ve $\delta>0$ için $\omega(f;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur [29].

Süreklilik modülü yakınsama hızının belirlenmesinde önemli rol oynayan bazı özelliklere sahiptir. Bu özelliklerin ispatı birçok çalışmada var olduğundan burada ispatlar verilmeyecektir [29].

**Lemma 2.4.1.**

i) $\omega$ fonksiyonu monoton artandır. Yani $0<\delta_1\le\delta_2$ için

$$\delta_1\le\delta_2\Rightarrow\omega(f;\delta_1)\le\omega(f;\delta_2)$$

sağlanır.

ii) Her $m\in N$ için

$$\omega(f;m\delta)\le m\omega(f;\delta)$$

sağlanır.

iii) $\lambda>0$ reel sayısı için

$$\omega(f;\lambda\delta)\le(1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

sağlanır.

iv) $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f;\delta) = 0$$

sağlanır.

v) $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f;|t-x|)$$

sağlanır.

vi) $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ise her $x,t \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f;\delta)$$

sağlanır.

**Tanım 2.4.2. (Peetre *K*-Fonksiyoneli)** $[0,\infty)$ aralığı üzerinde reel değerli, sürekli ve sınırlı $f$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzayı $C_B[0,\infty)$ ile gösterelim. Bu uzaydaki bir $f$ fonksiyonunun normu

$$\|f\| = \sup_{0 \leq x < \infty} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

$f \in C_B[0,\infty)$ ve her $\delta \geq 0$ olmak üzere

$$K(f;\delta) = \inf_{g \in C_B^2[0,\infty)} \left\{ \|f - g\|_{C_B[0,\infty)} + \delta \|g\|_{C_B^2[0,\infty)} \right\}$$

ifadesine Peetre *K*-fonksiyoneli denir.

Burada $C_B^2[0,\infty) = \{ g \in C_B[0,\infty) : g', g'' \in C_B[0,\infty) \}$ ile tanımlanır ve $C_B^2[0,\infty)$ üzerindeki norm

$$\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} = \|g\|_{C_B[0,\infty)} + \|g'\|_{C_B[0,\infty)} + \|g''\|_{C_B[0,\infty)}$$

ile verilir [32,34].

**Tanım 2.4.3. (İkinci Mertebeden Süreklilik Modülü)** $f \in C_B[0,\infty)$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega_2(f;\delta) = \sup_{\substack{0<h\leq\delta \\ 0\leq x<\infty}} \left| f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \right|$$

ile tanımlanan $\omega_2$ fonksiyonuna $f$ fonksiyonunun ikinci mertebeden süreklilik modülü denir. Aynı zamanda $f \in C_B[0,\infty)$ üzerinde alışılmış süreklilik modülü

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{0<h\leq\delta \\ 0\leq x<\infty}} \left| f(x+h) - f(x) \right|$$

olarak tanımlanır.

**Lemma 2.4.2.** $K(f;\delta)$ ve $\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right)$ için

$$K(f;\delta) \leq C\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C > 0$ vardır [35,36].

## 2.5. Lipschitz Sınıfından Fonksiyonlar ve Özellikleri

**Tanım 2.5.1. (Lipschitz Şartı)** $a,b \in R$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında tanımlı bir $f$ fonksiyonu verilsin. Her $x,t \in [a,b]$, $M > 0$ ve $0 < \gamma \leq 1$ için

$$\left| f(t) - f(x) \right| \leq M\left| t - x \right|^{\gamma}$$

eşitsizliğini sağlayan $f$ fonksiyonlarının sınıfına Lipschitz sınıfı denir ve $Lip_M\gamma$ ile gösterilir. $M$ ve $\gamma$ sayılarına sırasıyla Lipschitz sabiti ve derecesi denir [30,32,34].

**Lemma 2.5.1.** $f$, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon, $0 < \gamma \leq 1$ ve $M > 0$ olsun.

**i)** $f \in Lip_M \gamma$ ise $f$ süreklidir.

**ii)** $f$ türevlenebilir ve $\left|f'(x)\right| \leq M$ ise $f \in Lip_M 1$ dir.

**iii)** $f \in Lip_M \gamma \Leftrightarrow \omega(f,\delta) \leq M\delta^{\gamma}$ şeklindedir.

**iv)** $\alpha < \beta$ ise $Lip\beta \subset Lip\alpha$ olup bu ifadeler $M$ sayısından bağımsızdır.

**v)** $\gamma > 1$ için $f \in Lip_M \gamma$ ise $f$ sabit fonksiyondur.

## 2.6. Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Korovkin teoremi reel eksenin sınırlı ve kapalı alt aralıklarında verilmiştir. Sınırsız aralıklar ve bölgelerde Korovkin teoremi yeterli olmamaktadır. Bu sebeple 1976 yılında Gadjiev, Korovkin teoreminin tüm $R$ de geçerli olacağı şekildeki uzayları ağırlıklı uzaylar olarak aşağıdaki şekilde tanımlamıştır [4,33].

**Tanım 2.6.1.** $R$ reel sayılar kümesi üzerinde sürekli artan reel değerli, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \rho(x) = \infty$ ve her $x \in R$ için $\rho(x) \geq 1$ özelliklerini sağlayan $\rho$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu adı verilir.

$\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ olsun. Ayrıca $M_f$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\left|f(x)\right| \leq M_f \rho(x)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesini $B_\rho(R)$ ile gösterelim. $B_\rho(R)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesini de $C_\rho(R)$ ile gösterelim. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup\left\{\frac{\left|f(x)\right|}{\rho(x)}, x \in R\right\}$$

normu ile birer normlu uzaydır. Burada $\rho$ ya ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(R)$ ve $C_\rho(R)$ uzaylarına ise ağırlıklı uzaylar denir.

Ayrıca

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesini $C_\rho^k(R)$ ile gösterelim. $C_\rho^k(R)$ uzayı $C_\rho(R)$ uzayının bir alt uzayı olur [4,33,37].

Gadjiev'in bu tanımından sonra aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 2.6.1.** $\varphi(x)$ reel eksende sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x) = 1 + \varphi^2(x)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda

(i) $C_\rho(R)$ uzayından $B_\rho(R)$ uzayına giden $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A_n(\varphi^v;.) - \varphi^v \right\|_\rho = 0 \quad ; \quad v = 0,1,2 \tag{2.4}$$

şartları sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_\rho(R)$ fonksiyonu bulunabilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A_n(f^*;.) - f^* \right\|_\rho \geq 1$$

olur.

(ii) $C_\rho(R)$ uzayından $B_\rho(R)$ uzayına giden $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi (2.4) koşullarını sağlıyor ise her $f \in C_\rho^k(R)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A_n(f;.) - f \right\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır.

$\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi $C_\rho(R)$ uzayından $B_\rho(R)$ uzayına tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $\left\| A_n(\rho;.) \right\|_\rho \leq M_\rho$ olmasıdır. Burada $M_\rho$ pozitif bir sabittir. Bu durum $A_n(\rho;x) \leq M_\rho g(x)$ gerek ve yeter koşulunun basit bir sonucudur [4,37,38].

## 2.7. Taylor Serileri

**Tanım 2.7.1. (Taylor Formülü)** $f$ fonksiyonu $a$ noktasını ihtiva eden bir aralıkta $n+1$. mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralıkta her $x$ için $f(x)$ in Taylor formülü,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

şeklindedir ve $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denirse

$$K_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

olmak üzere

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+K_n(x)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor formülü adı verilir [29,39].

**Tanım 2.7.2. (Taylor Serisi)** $f$ fonksiyonu $a$ noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...$$

serisine $a$ noktasında $f$ fonksiyonu tarafından üretilen Taylor Serisi adı verilir [39].

## 2.8. Baskakov Operatörü

**Tanım 2.8.1. (Baskakov Operatörü)** $f\in C[0,\infty)$ ve $n\in N$ olmak üzere

$$\begin{aligned}B_n(f;x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k}{n}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P_{n,k}(x)\,f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan operatöre Baskakov operatörü denir. Bu operatör 1957 yılında V.A. Baskakov tarafından oluşturulmuştur [28].

## 2.9. Gamma Fonksiyonu

**Tanım 2.9.1. (Gamma Fonksiyonu)** $\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad ; \quad x>0 \tag{2.5}$$

genelleştirilmiş integral yardımıyla tanımlanır [29,40].

**Tanım 2.9.2. (Pochhammer Sembolü)** $\alpha$ reel ya da kompleks bir sayı, $r$ sıfır ya da pozitif tamsayı olmak üzere

$$(\alpha)_r=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+r-1) \tag{2.6}$$

olarak tanımlanan $(\alpha)_r$ ifadesine Pochhammer sembolü denir. Pochhammer sembolü

$$(\alpha)_r=\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.7}$$

$$(\alpha)_{r+1}=\alpha(\alpha+1)_r \tag{2.8}$$

özelliklerine sahiptir. Özel olarak (2.7) eşitliğinde $r=0$ alınırsa $(\alpha)_0=1$ olur [12]. Ayrıca $(n)_0=1$, $(n)_i=n(n+1)(n+2)...(n+i-1)$; $i\geq 1$ olarak tanımlanan Pochhammer sembolü

$$\begin{aligned}(n)_i&=\frac{(n-1)!n(n+1)(n+2)...(n+i-1)}{(n-1)!}\\&=\frac{(n+i-1)!}{(n-1)!}\end{aligned}$$

olarak yazılır.

## 2.10. Voronovskaya Teoremi

Voronovskaya formülü yaklaşım teorileri için önemlidir. Lineer pozitif operatörler dizisinin $f$ fonksiyonuna yakınsama hızı bu formül kullanılarak da belirlenir.

$f$ fonksiyonunun $n$-inci $(n \in N)$ Bernstein polinomu $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanır [34].

Voronovskaya 1932 yılında, Bernstein polinomları ve $[0,1]$ aralığında sınırlı, $x \in [0,1]$ noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip $f$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} n\left[B_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

sağlandığını göstermiştir.

# 3. DEĞİŞTİRİLMİŞ BASKAKOV GAMMA OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

V.A. Baskakov 1957 yılında

$$B_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \quad x\geq 0,\, n\in N$$

Baskakov operatörünü tanımlamıştır [3]. Baskakov operatörü lineer pozitif operatörler teorisinde en önemli operatörlerden birisidir. Baskakov operatörünün modifiye formları üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Daha sonra birçok yazar bu operatörün çeşitli yaklaşım özelliklerini incelemiştir ve bu operatörlerin genelleştirilmeleri üzerine birçok çalışma yapılmıştır [4-12]. Pozitif yarı eksen üzerinde tanımlı önemli lineer pozitif operatörlerden birisi de Szász operatörüdür. Bu operatör

$n\in N$, $x\geq 0$ ve $f\in C\left[0,\infty\right)$ olmak üzere

$$S_n\left(f;x\right):=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır [13]. Yine birçok araştırmacı Szász operatörünün çeşitli genellemeleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Szász tipi genelleştirmesinin yaklaşım özelliklerini ele almıştır. Burada önce bazı kavramları kullanılarak tanımlanacak operatör için bir alt yapı oluşturulacaktır.

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \text{ ve } (1+x)^n=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^k$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$e^{\frac{ax}{1+x}}(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\left(n-1+i\right)!}{\left(n-1\right)!k!}a^{k-i}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

eşitliği Pochammer sembolü de kullanılarak

$$e^{\frac{ax}{1+x}}(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\left(n\right)_i}{k!}a^{k-i}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$P_k\left(n,a\right)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(n\right)_i a^{k-i}$$

denirse

$$e^{\frac{ax}{1+x}}(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

olur. Dolayısıyla

$$(1+x)^n=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^k}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade kullanılarak bazı yazarlar bilinen bazı operatörlerin modifiye şekillerini tanımlayarak değişik sonuçlar elde etmişlerdir. Örneğin

V. Miheşan 1998'de

$$B_n^a\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{ax}{1+x}}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k}{n}\right)\qquad x\geq 0,\ n\in N \tag{3.1}$$

genelleştirilmiş Baskakov operatörünü tanımlamıştır ve yaklaşım özellikleri incelemiştir [14].

Wafi ve Khatoon (3.1) operatörünün integral tipli modifikasyonunu

$$V_n^a\left(f;x\right)=n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f\left(t\right)dt\ x\geq 0,\ n\in N \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir [15]. Erençin ve Başcanbaz Tunca 2010'da bu operatörün daha genel versiyonunu tanımlamıştır ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir [16]. Erençin 2011'de genelleştirilmiş Baskakov operatörünün Durrmeyer tipi modifikasyonunu

$$L_n^\alpha\left(f;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{1}{B\left(k+1,n\right)}\int_0^{\infty}\frac{t^k}{\left(1+t\right)^{n+k+1}}f\left(t\right)dt;\ x\geq 0 \tag{3.3}$$

operatörü şeklinde tanımlamıştır ve bazı yaklaşım özelliklerini incelemiştir [17].

N. Rao ve A. Wafi 2017'de

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

operatörünü tanımlamıştır. (3.2) operatörünün Stancu varyantının yaklaşım özelliklerini incelemiştir [18].

Gamma operatörü 1967'de A. Lupaş ve M. Müller tarafından

$$G_n\left(f;x\right)=\int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!}e^{-xy}y^n f\left(\frac{n}{y}\right)dy \qquad x\in\left(0,\infty\right),\ n\in N \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır [19].

L. Rempulska ve M. Skorupka 2011'de Gamma operatörünün modifiye versiyonunu

$$G_{n,p}\left(f;x\right)=\int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!}e^{-xy}y^n F_p\left(x,\frac{n}{y}\right)dy \qquad F_p\in C\left(0,\infty\right)$$

şeklinde tanımlamıştır. Ağırlıklı uzaylarda türevlenebilir fonksiyonlar için bu operatörün yaklaşım özelliklerini incelemiştir [20]. Bu operatörün farklı modifikasyonları çeşitli araştırmacılar tarafından tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir [21-24].

2014'de R. Malejki ve E. Wachnicki (3.1) eşitliğinde verilen $B_n^a\left(f;x\right)$ operatörünün integral tipli modifikasyonunu

$$M_n^{\alpha,a}\left(f;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha+k+1\right)}\int_0^\infty e^{-ns}\left(ns\right)^{\alpha+k} f\left(s\right)ds$$

şeklinde tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir [25].

Tezin bu kısmında (3.1) ve (3.4) lineer pozitif operatörlerinin modifiye şekillerinin lineer kombinasyonundan oluşan ve yeni bir genellemesi olan Baskakov Gamma operatörü tanımlanacak ve süreklilik modülüne bağlı klasik yaklaşım özellikleri incelenecektir. Ayrıca $f$ fonksiyonunun Lipschitz sınıfından bir fonksiyon olması halinde operatörün yakınsaklık özelliği incelenecektir.

Kabul edelim ki $x\in\left(0,\infty\right)$, $n\in N$, $0<\alpha<\beta$ keyfi parametreler ve $f\in C_B\left(0,\infty\right)$ olsun. Bu durumda lineer ve pozitif olduğu aşikar olan aşağıdaki operatör tanımlanabilir.

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy} f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)dy \quad (3.5)$$

Burada $P_k\left(n,a\right)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(n\right)_i a^{k-i}$, $a>0$ bir sabittir.

Tanımlanan bu $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörü için ileride verilecek teoremlerin ispatlarında kolaylık sağlaması bakımından sağladığı bazı önemli sonuçlar aşağıda verilecektir.

## 3.1. Yardımcı Sonuçlar

$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörü için aşağıdaki sonuçlar sağlanır.

**Lemma 3.1.1.** (3.5) $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörü için

i) $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(1;x\right)=1$

ii) $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t,x\right)=\dfrac{nx+\alpha}{n+\beta}+\dfrac{ax}{(1+x)(n+\beta)}$

iii)
$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right)=\frac{n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^2}x^2+\frac{2an^2(1+x)+a^2n}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$
$$+\frac{\left[n^2+2\alpha n(n-1)\right](1+x)+\left[an+2\alpha a(n-1)\right]}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat:**

i) $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(1;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}dy$

$xy=t$ denirse $y=\dfrac{t}{x}\Rightarrow dy=\dfrac{dt}{x}$, $y=0\Rightarrow t=0$ ve $y\to\infty\Rightarrow t\to\infty$

olacaklarından

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(1;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{dt}{x}$$

$$=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}t^n e^{-t}dt$$

$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$ olduğundan

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(1;x)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$=(1+x)^n\frac{1}{(1+x)^n}=1$$

olarak elde edilir.

ii) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t;x)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^\infty\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)dy$$

$$=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\frac{1}{n+\beta}\int_0^\infty y^n e^{-xy}\left(\frac{kn}{xy}+\alpha\right)dy$$

$$=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\frac{1}{n+\beta}\left[n\int_0^\infty y^n e^{-xy}\frac{k}{xy}dy+\alpha\int_0^\infty y^n e^{-xy}dy\right]$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t,x)=\frac{1}{n+\beta}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}nk\int_0^\infty\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t}\frac{dt}{x}+\frac{\alpha}{n+\beta}S(1;x)$$

$$=\frac{1}{n+\beta}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{nk}{n!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt+\frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$=\frac{1}{n+\beta}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{kn(n-1)!}{n!}+\frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$=\frac{1}{n+\beta}e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-1)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+1 \text{ için}}+\frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$=\frac{1}{n+\beta}\frac{x}{1+x}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+1}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}+\frac{\alpha}{n+\beta}$$

olur.

Eğer

$$\left(1-t\right)^{-n} e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k\left(n,a\right)}{k!} t^k \tag{3.6}$$

eşitliğinin her iki tarafının $t$ ye göre türevi alınırsa

$$n\left(1-t\right)^{-n-1} e^{at} + a\left(1-t\right)^{-n} e^{at} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k\left(n,a\right)}{k!} kt^{k-1}$$

olur. $k \to k+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left(1-t\right)^{-n} e^{at}\left[n\left(1-t\right)^{-1} + a\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+1}\left(n,a\right)}{k!} t^k$$

$$\frac{n}{1-t} + a = e^{-at} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+1}\left(n,a\right)}{k!} t^k \left(1-t\right)^n$$

elde edilir. Bu son ifade de $t = \dfrac{x}{1+x}$ alınırsa

$$n\left(1+x\right) + a = e^{-\frac{ax}{1+x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+1}\left(n,a\right)}{k!} \frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}} \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t,x\right) = \frac{1}{n+\beta} \frac{x}{1+x}\left[n\left(1+x\right)+a\right] + \frac{\alpha}{n+\beta}$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t,x\right) = \frac{nx+\alpha}{n+\beta} + \frac{ax}{\left(1+x\right)\left(n+\beta\right)}$$

olur ki bu istenilendir.

iii) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^2;x\right) = e^{-\frac{ax}{1+x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k\left(n,a\right)}{k!} \frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}} \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} y^n e^{-xy} \left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)^2 dy$$

$$= \frac{1}{\left(n+\beta\right)^2} e^{-\frac{ax}{1+x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^{\infty} y^n e^{-xy} \left(\frac{kn}{xy}+\alpha\right)^2 dy$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\times\left[k^2n^2\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\frac{1}{x^2y^2}dy+2kn\alpha\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\frac{1}{xy}dy+\alpha^2\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}dy\right]$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right)=\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}k^2n^2\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t^2}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\left[2kn\alpha\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t}\frac{dt}{x}++\alpha^2\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{dt}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{k^2n^2(n-2)!}{n!}$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}k+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{n^2(n-2)!}{n!}k^2$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

olur. Son ifade de $k^2=k(k-1)+k$ yerine yazılır ve düzenlenirse

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right)=\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{n}{n-1}\left[k(k-1)+k\right]$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\frac{n}{(n-1)(n+\beta)^2}\left[\underbrace{e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-2)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+2\ i\c{c}in}+\underbrace{e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-1)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+1\ i\c{c}in}\right]$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\frac{n}{(n-1)(n+\beta)^2}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+2}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+1}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right]$$

$$+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

olarak elde edilir.

Ayrıca (3.6) eşitliğinin her iki tarafının $t$ ye göre iki kere türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+2}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.8}$$

elde edilir. O halde (3.7) ve (3.8) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right)=\frac{n}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]$$

$$+\frac{n}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]+\frac{2\alpha}{(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^2}x^2+\frac{2an^2(1+x)+a^2n}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{\left[n^2+2\alpha n(n-1)\right](1+x)+\left[an+2\alpha a(n-1)\right]}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

olur.

Operatörün noktasal yakınsaklığında kullanmak için ihtiyaç olunan merkezi momentleri bulmak için aşağıdaki Lemmayı verelim.

**Lemma 3.1.2.** (3.5) $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ opeatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

i) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^3,x\right)=\frac{n^3(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}x^3+\frac{3an^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^3}{1+x}$$

$$+\frac{3a^2n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^3}{(1+x)^2}+\frac{n^2a^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^3}{(1+x)^3}$$

$$+\frac{3n^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}x^2+\frac{6an^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{1+x}$$

$$+\frac{3a^2n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}x$$

$$+\frac{an^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x}{1+x}+\frac{3\alpha n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^3}x^2$$

$$+\frac{6\alpha an^2}{(n-1)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{1+x}+\frac{3\alpha a^2n}{(n-1)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{3\alpha n^2}{(n-1)(n+\beta)^3}x$$

$$+\frac{3\alpha an}{(n-1)(n+\beta)^3}\frac{x}{1+x}+\frac{3\alpha^2n}{(n+\beta)^3}x+\frac{3\alpha^2a}{(n+\beta)^3}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

ii) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4,x\right)=\frac{n^4(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x^4$$

$$+\frac{4an^4(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^4}{1+x}+\frac{6a^2n^4(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^4}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{4a^3n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^4}{(1+x)^3}+\frac{a^4}{(1+x)^4}x^4+\frac{6n^4(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x^3$$

$$+\frac{18an^4(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{1+x}+\frac{18a^2n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{18an^4(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{1+x}+\frac{18a^2n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{6a^3n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^3}+\frac{7n^4(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\frac{14an^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{1+x}+\frac{7a^2n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{11n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x+\frac{11an^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}$$

$$+\frac{4\alpha n^3(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}x^3+\frac{12\alpha an^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{1+x}$$

$$+\frac{12\alpha a^2n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^2}+\frac{4\alpha a^3n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^3}$$

$$+\frac{12\alpha n^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}x^2+\frac{24\alpha an^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{1+x}$$

$$+\frac{12\alpha a^2n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{4\alpha n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}x+\frac{4\alpha an^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}$$

$$+\frac{6\alpha^2n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^4}x^2+\frac{12\alpha^2an^2}{(n-1)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{1+x}+\frac{6\alpha^2a^2n}{(n-1)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{6\alpha^2n^2}{(n-1)(n+\beta)^4}x+\frac{6\alpha^2an}{(n-1)(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}+\frac{4\alpha^3n}{(n+\beta)^4}x+\frac{4a\alpha^3}{(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

**İspat:** Lemma 3.1.1 in ispatında yapılanlara benzer işlemler tekrarlanırsa

i) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^3;x)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}y^ne^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)^3dy$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\left(\frac{kn}{xy}+\alpha\right)^3 dy$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\times\left[k^3n^3\int_0^{\infty}\frac{y^n e^{-xy}}{x^3y^3}dy+3k^2n^2\alpha\int_0^{\infty}\frac{y^n e^{-xy}}{x^2y^2}dy+3kn\alpha^2\int_0^{\infty}\frac{y^n e^{-xy}}{xy}dy+\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}dy\right]$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^3,x\right)=\frac{1}{(n+\beta)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}k^3n^3\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t^3}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}3k^2n^2\alpha\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t^2}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}3kn\alpha^2\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\alpha^3\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{dt}{x}$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{n^3(n-3)!}{n!}k^3$$

$$+\frac{3\alpha n}{(n-1)(n+\beta)^3}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]+\frac{3\alpha^2}{(n+\beta)^3}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

elde edilir. Burada $k^3=k(k-1)(k-2)+3k^2-2k$ yerine yazılırsa

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^3,x\right)=\frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}$$

$$\times e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left[k(k-1)(k-2)+3k^2-2k\right]$$

$$+\frac{3\alpha n}{(n-1)(n+\beta)^3}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]+\frac{3\alpha^2}{(n+\beta)^3}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$=\frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}$$

$$\times\left[e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=3}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-3)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+3\text{ için}}+3e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-2)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+2\text{ için}}+e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-1)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+1\text{ için}}\right]$$

$$+\frac{3\alpha n}{(n-1)(n+\beta)^3}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]+\frac{3\alpha^2}{(n+\beta)^3}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$=\frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}$$

$$\times\left[\frac{x^3}{(1+x)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+3}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}+3\frac{x^2}{(1+x)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+2}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+1}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right]$$

$$+\frac{3\alpha n}{(n-1)(n+\beta)^3}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]+\frac{3\alpha^2}{(n+\beta)^3}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

olur.

Eğer (3.6) eşitliğinin her iki tarafının $t$ ye göre üç kere türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3$$

$$=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+3}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.9}$$

elde edilir. O halde (3.7), (3.8) ve (3.9) eşitlikleri yerlerine yazılırlarsa

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^3,x)=\frac{n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}$$

$$\times\left[\frac{x^3}{(1+x)^3}\left[n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3\right]\right.$$

$$\left.+3\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{3\alpha n}{(n-1)(n+\beta)^3}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]\right.$$

$$\left.+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]+\frac{3\alpha^2}{(n+\beta)^3}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^3,x)=\frac{n^3(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}x^3+\frac{3an^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^3}{1+x}$$

$$+\frac{3a^2n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^3}{(1+x)^2}+\frac{n^2a^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^3}{(1+x)^3}$$

$$+\frac{3n^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}x^2+\frac{6an^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{1+x}$$

$$+\frac{3a^2n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}x$$

$$+\frac{an^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\frac{x}{1+x}+\frac{3\alpha n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^3}x^2+\frac{6\alpha an^2}{(n-1)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{1+x}$$

$$+\frac{3\alpha a^2 n}{(n-1)(n+\beta)^3}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{3\alpha n^2}{(n-1)(n+\beta)^3}x+\frac{3\alpha a n}{(n-1)(n+\beta)^3}\frac{x}{1+x}$$

$$+\frac{3\alpha^2 n}{(n+\beta)^3}x+\frac{3\alpha^2 a}{(n+\beta)^3}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^3}{(n+\beta)^3}$$

elde edilir.

ii) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4;x\right)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)^4 dy$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^\infty y^n e^{-xy}\left(\frac{kn}{xy}+\alpha\right)^4 dy$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\times\left[k^4n^4\int_0^\infty\frac{y^ne^{-xy}}{x^4y^4}dy+4k^3n^3\alpha\int_0^\infty\frac{y^ne^{-xy}}{x^3y^3}dy\right.$$

$$\left.+6k^2n^2\alpha^2\int_0^\infty\frac{y^ne^{-xy}}{x^2y^2}dy+4kn\alpha^3\int_0^\infty\frac{y^ne^{-xy}}{xy}dy+\alpha^4\int_0^\infty y^ne^{-xy}dy\right]$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4,x\right)=\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}k^4n^4\int_0^\infty\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t^4}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}4k^3n^3\alpha\int_0^\infty\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t^3}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}6k^2n^2\alpha^2\int_0^\infty\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t^2}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}4kn\alpha^3\int_0^\infty\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\alpha^4\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{dt}{x}$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{k^4n^4(n-4)!}{n!}$$

$$+\frac{4\alpha n^2}{(n+\beta)^4(n-1)(n-2)}$$

$$\times\left[\frac{x^3}{(1+x)^3}\left[n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3\right]\right.$$

$$\left.+3\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{6\alpha^2 n}{(n+\beta)^4(n-1)}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+3\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\Big]$$

$$+\frac{6\alpha^2 n}{(n+\beta)^4(n-1)}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{4\alpha^3}{(n+\beta)^4}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

Bu eşitlikte $k^4=k(k-1)(k-2)(k-3)+6k^3-11k^2+6k$ yerine yazılır ve düzenlenirse

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4,x\right)=\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}$$

$$\times e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left[k(k-1)(k-2)(k-3)+6k^3-11k^2+6k\right]$$

$$+\frac{4\alpha n^2}{(n+\beta)^4(n-1)(n-2)}$$

$$\times\left[\frac{x^3}{(1+x)^3}\left[n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3\right]\right.$$

$$\left.+3\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{6\alpha^2 n}{(n+\beta)^4(n-1)}$$

$$\times\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{4\alpha^3}{(n+\beta)^4}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4,x\right)=\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}$$

$$\times\left[e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=4}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-4)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+4\text{ için}}+6e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=3}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-3)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+3\text{ için}}\right.$$

$$\left.+7e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-2)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+2\text{ için}}+11e^{-\frac{ax}{1+x}}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{(k-1)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}}_{k\to k+1\text{ için}}\right]$$

$$+\frac{4\alpha n^2}{(n+\beta)^4(n-1)(n-2)}$$

$$\times\left[\frac{x^3}{(1+x)^3}\left[n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3\right]\right.$$

$$\left.+3\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{6\alpha^2 n}{(n+\beta)^4(n-1)}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{4\alpha^3}{(n+\beta)^4}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4,x\right)=\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}$$

$$\times\left[\frac{x^4}{(1+x)^4}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+4}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}+6\frac{x^3}{(1+x)^3}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+3}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right.$$

$$\left.+7\frac{x^2}{(1+x)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+2}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}+11\frac{x}{1+x}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+1}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right]$$

$$+\frac{4\alpha n^2}{(n+\beta)^4(n-1)(n-2)}$$

$$\times\left[\frac{x^3}{(1+x)^3}\left[n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3\right]\right.$$

$$\left.+3\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{6\alpha^2 n}{(n+\beta)^4(n-1)}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{4\alpha^3}{(n+\beta)^4}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

olarak bulunur. (3.6) eşitliğinin her iki tarafının $t$ ye göre dört kere türevi alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(1+x)^4+4an(n+1)(n+2)(1+x)^3$$

$$+6a^2n(n+1)(1+x)^2+4a^3n(1+x)+a^4=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_{k+4}(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \qquad (3.10)$$

elde edilir.

O halde (3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4,x\right)=\frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}$$

$$\times\left[\frac{x^4}{(1+x)^4}\left[n(n+1)(n+2)(n+3)(1+x)^4+4an(n+1)(n+2)(1+x)^3\right.\right.$$

$$\left.+6a^2n(n+1)(1+x)^2+4a^3n(1+x)+a^4\right]$$

$$+6\frac{x^3}{(1+x)^3}\left[n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3\right]$$

$$\left.+7\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+11\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{4\alpha n^2}{(n+\beta)^4(n-1)(n-2)}$$

$$\times\left[\frac{x^3}{(1+x)^3}\left[n(n+1)(n+2)(1+x)^3+3an(n+1)(1+x)^2+3a^2n(1+x)+a^3\right]\right.$$

$$\left.+3\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{6\alpha^2n}{(n+\beta)^4(n-1)}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$+\frac{4\alpha^3}{(n+\beta)^4}\frac{1}{1+x}\left[n(1+x)+\alpha\right]+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^4,x\right)=\frac{n^4(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x^4+\frac{4an^4(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^4}{1+x}$$

$$+\frac{6a^2n^4(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^4}{(1+x)^2}+\frac{4a^3n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^4}{(1+x)^3}$$

$$+\frac{a^4}{(1+x)^4}x^4+\frac{6n^4(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x^3+\frac{18an^4(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{1+x}$$

$$+\frac{18a^2n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^2}+\frac{6a^3n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^3}$$

$$+\frac{7n^4(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x^2+\frac{14an^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{1+x}$$

$$+\frac{7a^2n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{11n^4}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}x$$

$$+\frac{11an^3}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}+\frac{4\alpha n^3(n+1)(n+2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}x^3$$

$$+\frac{12\alpha an^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{1+x}+\frac{12\alpha a^2n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{4\alpha a^3n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^3}+\frac{12\alpha n^3(n+1)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\frac{24\alpha an^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{1+x}+\frac{12\alpha a^2n^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{4\alpha n^3}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}x+\frac{4\alpha an^2}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}+\frac{6\alpha^2n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^4}x^2$$

$$+\frac{12\alpha^2an^2}{(n-1)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{1+x}+\frac{6\alpha^2a^2n}{(n-1)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{6\alpha^2n^2}{(n-1)(n+\beta)^4}x$$

$$+\frac{6\alpha^2an}{(n-1)(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}+\frac{4\alpha^3n}{(n+\beta)^4}x+\frac{4a\alpha^3}{(n+\beta)^4}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

olarak bulunur.

Lemma 3.1.1. ve Teorem 2.3.2. göz önüne alındığında aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.1.1.** $f \in C_B(0,\infty)$, $x \in (0,\infty)$, $n \in N$, $0 < \alpha < \beta$ olmak üzere $(0,\infty)$ aralığının her $K$ kompakt alt aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f) - f \right\|_{C(K)} = 0$$

gerçeklenir.

Şimdi (3.5) operatörü için ikinci merkezi moment ile ilgili olarak aşağıdaki lemma verilebilir.

**Lemma 3.1.3.** (3.5) operatörü

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right) \leq M^* \frac{x^2+x+1}{(n+\beta)^2}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $M_i(a,\beta,\alpha) = M_i$, $M^* = \max(M_i)$, $i = 1,2,...$ parametrelere bağlı bir sabittir.

**İspat:** Her $x > 0$, $l \leq s$ $(l,s = 1,2)$ için $\frac{x^s}{(1+x)^l} \leq x^s$ eşitsizliği sağlanacağından Lemma 3.1.1. ve (3.5) operatörünün lineerliği gereğince

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2,x\right) = S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t^2,x\right) - 2xS_{n,a}^{\alpha,\beta}(t,x) + x^2 S_{n,a}^{\alpha,\beta}(1,x)$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^2}x^2 + \frac{2an^2(1+x)+a^2n}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{\left[n^2+2\alpha n(n-1)\right](1+x)+\left[an+2\alpha a(n-1)\right]}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$-2x\left[\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(n+\beta)(1+x)}\right]+x^2$$

$$=\left(\frac{n^2(1+n)}{(n+\beta)^2(n-1)}-\frac{2n}{n+\beta}+1\right)x^2+\left(\frac{2an^2}{(n+\beta)^2(n-1)}-\frac{2a}{n+\beta}\right)\frac{x^2}{1+x}$$

$$+\frac{\alpha^2 n}{(n+\beta)^2(n-1)}\frac{x^2}{(1+x)^2}+\left(\frac{n^2+2\alpha n(n-1)}{(n+\beta)^2(n-1)}-\frac{2\alpha}{n+\beta}\right)x$$

$$+\frac{an+2\alpha a(n-1)}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

$$=\frac{2n^2+n\beta^2-\beta^2}{(n+\beta)^2(n-1)}x^2+\frac{2a(n+\beta-n\beta)}{(n+\beta)^2(n-1)}\frac{x^2}{1+x}+\frac{a^2 n}{(n+\beta)^2(n-1)}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{n^2-2\alpha\beta n+2\alpha\beta}{(n+\beta)^2(n-1)}x+\frac{an+2\alpha a(n-1)}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

elde edilir. Bu ifade de düzenlenirse

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2,x\right)\leq\frac{1}{(n+\beta)^2}\left[\frac{2n^2+n\beta^2-\beta^2+2a(n+\beta-n\beta)+a^2 n}{n-1}\right]x^2$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^2}\left[\frac{n^2-2\alpha\beta n+2\alpha\beta+an+2\alpha a(n-1)}{n-1}\right]x+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $M_i(a,\beta,\alpha)=M_i,\;\; i=1,2,...$ gösterimi kullanılırsa yukarıdaki ifade

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2,x\right)\leq\frac{x^2}{(n+\beta)^2}M_1+\frac{x}{(n+\beta)^2}M_2+\frac{1}{(n+\beta)^2}M_3$$

şeklinde yazılabilir. $M^*=\max(M_i)$ olarak alınıp

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2,x\right)\leq M^*\frac{x^2+x+1}{(n+\beta)^2}$$

şeklinde istenilen elde edilir.

Şimdi operatörün yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 3.1.2.** $x \in (0,\infty)$, $n \in N$, $0 < \alpha < \beta$ ve $f \in C_B(0,\infty)$ olmak üzere

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right| \le M^{**}\omega\left(f;\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(n+\beta)^2}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $M^{**} = 1 + \sqrt{M^*}$ şeklindedir.

**İspat:** Operatörün lineerliği gereğince

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x) = S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)S_{n,a}^{\alpha,\beta}(1;x)$$

$$= S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x) - S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(x);x)$$

$$= S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f(t) - f(x);x)$$

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x) = e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty} y^n e^{-xy}\left[f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x)\right]dy$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır, gerekli düzenlemeler yapılır ve süreklilik modülünün tanımı kullanılırsa;

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x) - f(x)\right|$$

$$= \left|e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty} y^n e^{-xy}\left[f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x)\right]dy\right|$$

$$\le e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty} y^n e^{-xy}\left|f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right) - f(x)\right|dy$$

$$\le e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty} y^n e^{-xy}\omega\left(f;\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta} - x\right|\right)dy$$

$$\leq e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\left(1+\frac{\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)\,dy$$

$$=\omega(f;\delta)+e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\left[\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right|dy\right]$$

ifadesi elde edilir. Burada arka arkaya önce integral daha sonra toplam için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|$$

$$\leq \omega(f;\delta)+\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)$$

$$\times\left\{e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2 dy\right)^{1/2}\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}dy\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq \omega(f;\delta)+\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)$$

$$\times\left\{\left(e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2 dy\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left(e^{-\frac{\alpha x}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}dy\right)^{1/2}\right\}$$

$$\leq \omega(f;\delta)+\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\sqrt{M^*}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(n+\beta)^2}}$$

olur. Eğer $\delta=\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(n+\beta)^2}}$ alınırsa;

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq M^{**}\omega\left(f;\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(n+\beta)^2}}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Yaklaşım teorisinde son yıllarda oldukça fazla operatör ve bu operatörlerin modifiye şekilleri tanımlanmıştır. Bu sebeple farklı operatörlerin yakınsaklık özellikleri ve yakınsaklık hızlarının belirlenmesi oldukça önemlidir. Eğer herhangi iki operatörün yakınsaklık hızları biliniyorsa bunlar arasında yaklaşım hızı konusunda karşılaştırmalar yapılabilir. Böyle olmakla birlikte eğer operatörlerden birinin yakınsaklık özellikleri biliniyorsa diğerinin yakınsaklık özellikleri hakkında bilgi sahibi olmak için operatörlerin farklarını hesaplayıp gerekli bilgiler elde edilebilir. Bunun için bu kısımda yukarıda tanımlanan (3.5) operatörü ve onun Gamma kısmını içermeyen şeklini göz önüne alarak, yani aşağıdaki iki operatörün farkını hesaplayarak bir sonuç elde etmeye çalışalım.

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)dy$$

$$L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

operatörlerinin yakınsaklık hızlarının oranını belirlemek için operatörlerin farklarını inceleyelim. Bunun için süreklilik modülünü kullanalım.

**Teorem 3.1.3.** $x\in(0,\infty)$, $n\in N$ ve $f\in C_B(0,\infty)$ bir fonksiyon olmak üzere

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)\right|\leq\omega(f;\delta)\varphi(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada

$$\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{n(n+1)+2an+a^2}{(n-1)(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+a}{(n-1)(n+\beta)^2}x}\right)$$

ve

$$\delta=\sqrt{\frac{n(n+1)+2an+a^2}{(n-1)(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+a}{(n-1)(n+\beta)^2}x}$$

şeklindedir.

**İspat:**

$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)\right|$

$$=\left|e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^ne^{-xy}f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)dy\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\right|$$

olup burada $\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^ne^{-xy}dy=\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}t^ne^{-t}dt=1$ eşitliği gereğince

$$=\left|e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^ne^{-xy}f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)dy\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^ne^{-xy}dy\right|$$

yazılabilir.

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)\right|$$

$$\leq e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left|f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}\right)-f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\right|dy$$

$$\leq e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\omega\left(f;\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right|\right)dy$$

$$\leq \omega(f;\delta)+e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)$$

$$\times\left[\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right|dy\right]$$

Burada arka arkaya önce integral daha sonra toplam için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)\right|$$

$$\leq \omega(f;\delta)+\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\left\{e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2dy\right)^{1/2}\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}dy\right)^{1/2}\right\}$$

$$=\omega(f;\delta)+\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\left\{\left(e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2dy\right)^{1/2}\right.$$

$$\times\left(e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}dy\right)^{1/2}\Bigg\}$$

$$=\omega(f;\delta)+\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\sqrt{S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2;x\right)}$$

olur. Şimdi $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2;x\right)$ hesaplayalım.

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2;x\right)=S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\frac{k^2\left(\frac{n}{xy}-1\right)^2}{(n+\beta)^2};x\right)$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\times\left[k^2n^2\int_0^{\infty}\frac{y^ne^{-xy}}{x^2y^2}dy-2k^2n\int_0^{\infty}\frac{y^ne^{-xy}}{xy}dy+k^2\int_0^{\infty}y^ne^{-xy}dy\right]$$

$$=\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}k^2n^2\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t^2}\frac{dt}{x}$$

$$-\frac{2}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}k^2n\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{1}{t}\frac{dt}{x}$$

$$+\frac{1}{(n+\beta)^2}e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}k^2\int_0^{\infty}\frac{t^n}{x^n}e^{-t}\frac{dt}{x}$$

$$=\frac{1}{(n-1)(n+\beta)^2}$$

$$\times\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}\left[n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2\right]+\frac{x}{1+x}\left[n(1+x)+a\right]\right]$$

$$=\frac{1}{(n-1)(n+\beta)^2}\left[n(n+1)x^2+2an\frac{x^2}{1+x}+\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}+nx+\frac{ax}{1+x}\right]$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^2}+\frac{2an}{(n-1)(n+\beta)^2(1+x)}+\frac{a^2}{(n-1)(n+\beta)^2(1+x)^2}\right)x^2$$

$$+\left(\frac{n}{(n-1)(n+\beta)^2}+\frac{a}{(n-1)(n+\beta)^2(1+x)}\right)x$$

$$\leq\frac{n(n+1)+2an+a^2}{(n-1)(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+a}{(n-1)(n+\beta)^2}x$$

olarak elde edilir. Ayrıca görülmektedir ki

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2;x\right)=0$$

dir. Böylece

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-L_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)\right|$$

$$\leq\omega(f;\delta)+\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\sqrt{\frac{n(n+1)+2an+a^2}{(n-1)(n+\beta)^2}x^2+\frac{n+a}{(n-1)(n+\beta)^2}x}$$

$$\leq\omega(f;\delta)\varphi(x)$$

elde edilir.

## 3.2. Doğrudan Sonuçlar

Şimdi $S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünün yakınsaklık özellikleri ile ilgili bazı lemmalar ve teoremler verelim. Bu lemmalarda kullanılmak amacı ile yardımcı bir operatör olarak $\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)$ operatörünü

$$\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)=S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}\right)+f(x)$$

şeklinde tanımlayalım.

**Lemma 3.2.1.** $g\in C_B^2(0,\infty)$ olsun.

$$\left|\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(g;x)-g(x)\right|\le\delta_n(x)\|g''\|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\delta_n(x)=S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)+\left[\left(\frac{n}{n+\beta}-1\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right]^2$$

şeklindedir.

**İspat:** $\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}$ lineer operatörü için

$$\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(t-x;x)=S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t-x;x)-\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}-x\right)+(x-x)$$

$$=S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t;x)-xS_{n,a}^{\alpha,\beta}(1;x)-S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t;x)+xS_{n,a}^{\alpha,\beta}(1;x)$$

$$=0$$

olur. Şimdi $g\in C_B^2(0,\infty)$ ve $x\in(0,\infty)$ olsun. Taylor formülü gereğince

$$g(t)-g(x)=(t-x)g'(x)+\int_x^t(t-u)g''(u)du \quad ; \; t\in[0,\infty)$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafına $\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}$ operatörü uygulanırsa;

$$\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(g(t)-g(x);x\right)=\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)g'(x);x\right)+\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du;x\right)$$

$$\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(g;x)-g(x)=g'(x)\underbrace{\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x);x\right)}_{=0}+\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du;x\right)$$

$$=\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du;x\right)$$

$$=S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du;x\right)-\int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}}\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}-u\right)g''(u)\,du$$

$$+\int_x^x (x-u)\,du$$

elde edilir.

$$\left|\int_x^t (t-u)g''(u)\,du\right|\leq\int_x^t |t-u|\,\|g''\|\,du$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\left|\int_x^t (t-u)g''(u)\,du\right|\leq\frac{(t-x)^2}{2}\|g''\|\leq(t-x)^2\,\|g''\|$$

olur. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\left(\int_x^{\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}}\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}-u\right)g''(u)\,du\right)$$

$$\leq\left[\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}-x\right]^2\|g''\|$$

$$=\left(\left(\frac{n}{n+\beta}-1\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)^2\|g''\|$$

elde edilir.

Buradan da

$$\left|\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(g;x)-g(x)\right| \le \left\{ S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)+\left(\left(\frac{n}{n+\beta}-1\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)^2 \right\}\|g''\|$$
$$=\delta_n(x)\|g''\|$$

yazılır ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.2.1.** $f \in C_B(0,\infty)$ olsun. $B>0$ bir sabit olmak üzere her $x \in (0,\infty)$ için

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right| \le B\omega_2\left(f;\sqrt{\delta_n(x)}\right)+\omega\left(f;\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\delta_n(x)=S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)+\left(\left(\frac{n}{n+\beta}-1\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)^2$$

şeklindedir.

**İspat:**

$$f(t)-f(x)=f(t)-f(x)-g(t)+g(t)-g(x)+g(x)$$

eşitliği yazılabileceğinden

$\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}$ ve $S_{n,a}^{\alpha,\beta}$ operatörlerin tanımları göz önüne alınıp, $\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}$ operatörü bu eşitliğin her iki tarafına uygulanırsa;

$$\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)=\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}[f-g;x]+(f-g)(x)+\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}[g-g(x);x] \qquad (3.11)$$

yazılabilir. Şimdi

$$\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)=S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}\right)+f(x)$$

şeklinde tanımlanan operatör (3.11) de yerine yazılırsa

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}\right)+f(x)-f(x)$$
$$=\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(f-g;x)+(f-g)(x)+\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(g;x)-g(x)$$

olur. Buradan da

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq\left|\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(f-g;x)\right|+\left|(f-g)(x)\right|+\left|\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(g;x)-g(x)\right|$$
$$+\left|f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}\right)-f(x)\right| \tag{3.12}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan da

$$\left|\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)\right|=\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}\right)+f(x)\right|$$
$$\leq\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)\right|+2\|f\|$$
$$\leq\|f\|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(1;x)+2\|f\|$$
$$=3\|f\|$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (3.12) de yazılırsa

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|$$
$$\leq 3\|f-g\|+\|f-g\|+\left|\hat{S}_{n,a}^{\alpha,\beta}(g;x)-g(x)\right|+\left|f\left(\frac{nx+\alpha}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}\right)-f(x)\right|$$

elde edilir. Lemma 3.2.1. den

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq 4\|f-g\|+\delta_n(x)\|g''\|+\omega\left(f;\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)$$
$$\leq 4\left\{\|f-g\|+\delta_n(x)\|g''\|\right\}+\omega\left(f;\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafında her $g\in C_B^2(0,\infty)$ üzerinden infimum alınır ve Lemma 2.4.2. dikkate alınırsa

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le 4K\left(f;\delta_n(x)\right)+\omega\left(f;\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)$$

$$\le 4C\omega_2\left(f;\sqrt{\delta_n(x)}\right)+\omega\left(f;\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)$$

$$=B\omega_2\left(f;\sqrt{\delta_n(x)}\right)+\omega\left(f;\left(1-\frac{n}{n+\beta}\right)x+\frac{(a+\alpha)x+\alpha}{(1+x)(n+\beta)}\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.2.2.** $0<\gamma\le 1$ ve $f\in C_B(0,\infty)$ olsun. Eğer $f\in Lip_M(\gamma)$ ise

$$\left|f(t)-f(x)\right|\le M\left|t-x\right|^{\gamma} \qquad x,t\in(0,\infty)$$

ve $x\in(0,\infty)$ için

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le M\delta_n^{\gamma/2}(x)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $\delta_n(x)=S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)$ ve $M>0$ olmak üzere sabittir.

**İspat:** $f\in C_B(0,\infty)\cap Lip_M(\gamma)$ olsun. $S_{n,a}^{\alpha,\beta}$ operatörünün lineerliği ve monotonluğundan

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\le S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)$$

$$\le MS_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left|t-x\right|^{\gamma};x\right)$$

$$=Me^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^ne^{-xy}\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{\gamma}dy$$

eşitliği yazılabilir. $p=\frac{2}{\gamma}$ ve $q=\frac{2}{2-\gamma}$ alınarak arka arkaya önce toplam daha sonra integral için Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|=Me^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{\gamma}1dy$$

$$\leq M\left[e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{2}dy\right]^{\gamma/2}$$

$$\times\left[e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}dy\right]^{2-\gamma/2}$$

$$=M\left[\underbrace{e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\left|\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right|^{2}dy}_{=A\ alalım.}\right]^{\gamma/2}$$

elde edilir. Şimdi $A$ olarak alınan

$$A=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^{\infty}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{2}dy$$

operatörüne integral için Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$A=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k\left(n,a\right)}{k!}\frac{x^k}{\left(1+x\right)^{n+k}}$$

$$\times\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right)^{4/\gamma}dy\right)^{\gamma/2}\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}dy\right)^{2-\gamma/2}$$

olur. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right|\leq M\left(e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy}\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2 dy\right)^{\gamma/2}$$

$$\leq MS_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)^{\gamma/2}$$

$$=M\delta_n^{\gamma/2}(x)$$

olarak elde edilir ve ispat tamamlanır.

## 3.3. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım Özellikleri

Sınırsız aralıkta lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklık özelliklerini incelemek için Korovkin teoreminin yetersiz kaldığı bilinmektedir. Bu sebeple 1974 yılında A.D. Gadjiev tarafından sınırsız aralıklar üzerinde tanımlı lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklık özelliklerini incelemek için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Bundan sonraki işlemlerimizde ağırlıklı uzaylar için tanımlar kısmında verdiğimiz ifadeler göz önüne alınacaktır.

Şimdi $\left\{S_{n,a}^{\alpha,\beta}\right\}$ operatör dizisi için aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.3.1.** $f\in C_\rho^k(0,\infty)$ olsun. Bu durumda $\left\{S_{n,a}^{\alpha,\beta}\right\}$ lineer pozitif operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;.)-f\right\|_\rho=0$$

gerçeklenir.

**İspat:** $\left\{S_{n,a}^{\alpha,\beta}\right\}$ operatör dizisi için

$$\sup_{0\leq x<\infty}\frac{\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(\rho,x)\right|}{1+x^2}=\sup_{0\leq x<\infty}\frac{\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(1+t^2,x\right)\right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{0\le x<\infty} \frac{\left| S_{n,a}^{\alpha,\beta}(1,x) + S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^2,x) \right|}{1+x^2}$$

$$= \sup_{0\le x<\infty} \frac{\left| 1 + \frac{n^2(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^2} x^2 + \frac{2an^2(1+x)+a^2 n}{(n-1)(n+\beta)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} \right.}{1+x^2}$$

$$+ \frac{\left. \frac{\left[n^2+2\alpha n(n-1)\right](1+x)+\left[an+2\alpha a(n-1)\right]}{(n-1)(n+\beta)^2} \frac{x}{1+x} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} \right|}{1+x^2}$$

$$\le 1 + \frac{n\left(a+2n+\alpha^2+2an+n^2\right)+\alpha(n-1)(2a+2n+\alpha)}{(n+\beta)^2(n-1)}$$

yazılabilir. Her $n$ ve $\alpha, a, \beta < \infty$ için yakınsak her dizi sınırlı olduğundan

$$\frac{n\left(a+2n+\alpha^2+2an+n^2\right)+\alpha(n-1)(2a+2n+\alpha)}{(n+\beta)^2(n-1)} < D$$

olacak şekilde $D>0$ sabiti mevcuttur. Dolayısıyla

$$\sup_{0\le x<\infty} \frac{\left| S_{n,a}^{\alpha,\beta}(\rho,x) \right|}{1+x^2} = \left\| S_{n,a}^{\alpha,\beta}(\rho;.) \right\|_{\rho} \le 1+D$$

ifadesi yazılabilir. O halde $\left\{S_{n,a}^{\alpha,\beta}\right\}$, $C_\rho(0,\infty)$ uzayından $B_\rho(0,\infty)$ uzayına tanımlı lineer pozitif operatörler dizisidir. İspatı tamamlamak için Teorem 2.6.1. in şartlarını gösteren

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^v;.) - x^v \right\|_{\rho} = 0 \quad ; \quad v = 0,1,2$$

ifadesini ispatlamak gerekmektedir.

$v=0$ için açıktır ki

$$\lim_{n\to\infty} \left\| S_{n,a}^{\alpha,\beta}(1;x) - 1 \right\|_{\rho} = 0$$

olur.

$v=1$ için

$$\left\|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t;x)-x\right\|_{\rho}=\sup_{0\le x<\infty}\frac{\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t;x)-x\right|}{1+x^{2}}$$

$$=\sup_{0\le x<\infty}\left|\frac{(1+x)(nx+\alpha)+ax}{(1+x)(n+\beta)}\frac{1}{1+x^{2}}-\frac{x}{1+x^{2}}\right|$$

$$\le\left|\frac{A}{n+\beta}\right|$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t;x)-x\right\|_{\rho}=0$$

olur.

Benzer şekilde $v=2$ için

$$\left\|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^{2};x)-x^{2}\right\|_{\rho}=\sup_{0\le x<\infty}\frac{\left|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^{2};x)-x^{2}\right|}{1+x^{2}}$$

$$=\sup_{0\le x<\infty}\frac{\left|\frac{n^{2}(n+1)}{(n-1)(n+\beta)^{2}}x^{2}+\frac{2an^{2}(1+x)+a^{2}n}{(n-1)(n+\beta)^{2}}\frac{x^{2}}{(1+x)^{2}}\right.}{1+x^{2}}$$

$$+\frac{\left.\frac{\left[n^{2}+2\alpha n(n-1)\right](1+x)+\left[an+2\alpha a(n-1)\right]}{(n-1)(n+\beta)^{2}}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^{2}}{(n+\beta)^{2}}-x^{2}\right|}{1+x^{2}}$$

$$\le\left|\frac{n\left(a+2n+\alpha^{2}+2an+n^{2}\right)+\alpha(n-1)(2a+2n+\alpha)}{(n+\beta)^{2}(n-1)}-1\right|$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^{2};x)-x^{2}\right\|_{\rho}=0$$

olur. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t^{v};.)-x^{v}\right\|_{\rho}=0\quad;\quad v=0,1,2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

## 3.4. Değiştirilmiş Baskakov Gamma Operatörü için Voronovskaya Tipli Teorem

Bu kısımda değiştirilmiş Baskakov Gamma operatörü için Voronovskaya tipli teoremi ispatlayacağız. Öncelikle ispatta kullanılmak üzere operatörün merkez momentleri ile ilgili olan aşağıdaki Lemmayı verelim. Burada Lemmayı ispatsız olarak vereceğiz çünkü operatörün lineerliği ve yukarıda yapılan işlemlerin benzeri işlemler yapılarak ispatlar kolayca yapılabilir.

**Lemma 3.4.1.** (3.5) eşitliğinde tanımlı $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(f;x\right)$ operatörü için

i) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(t-x;x\right)=\frac{\alpha-\beta x}{n+\beta}+\frac{ax}{(1+x)(n+\beta)}$$

ii) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left(t-x\right)^2,x\right)=\frac{2n^2+n\beta^2-\beta^2}{\left(n+\beta\right)^2\left(n-1\right)}x^2+\frac{2a\left(n+\beta-n\beta\right)}{\left(n+\beta\right)^2\left(n-1\right)}\frac{x^2}{1+x}$$

$$+\frac{a^2n}{\left(n+\beta\right)^2\left(n-1\right)}\frac{x^2}{\left(1+x\right)^2}+\frac{n^2-2\alpha\beta n+2\alpha\beta}{\left(n+\beta\right)^2\left(n-1\right)}x+\frac{an+2\alpha a\left(n-1\right)}{\left(n-1\right)\left(n+\beta\right)^2}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^2}{\left(n+\beta\right)^2}$$

iii) $$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\left(t-x\right)^4;x\right)$$

$$=\left[\frac{n^4\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n+\beta\right)^4}-\frac{4n^3\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n+\beta\right)^3}+\frac{6n^2\left(n+1\right)}{\left(n-1\right)\left(n+\beta\right)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{4n}{n+\beta}+1\right]x^4+\left[\frac{4an^4\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n+\beta\right)^4}-\frac{12an^3\left(n+1\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n+\beta\right)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{12an^2}{\left(n-1\right)\left(n+\beta\right)^2}-\frac{4a}{n+\beta}\right]\frac{x^4}{1+x}+\left[\frac{6a^2n^4\left(n+1\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n+\beta\right)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{12a^2n^3}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n+\beta\right)^3}+\frac{6a^2n}{\left(n-1\right)\left(n+\beta\right)^2}\right]\frac{x^4}{(1+x)^2}$$

$$+\frac{4a^3n^4-4n^2a^3\left(n-3\right)\left(n+\beta\right)}{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n+\beta\right)^4}\frac{x^4}{(1+x)^3}+a^4\frac{x^4}{(1+x)^4}$$

$$+\left[\frac{6n^4(n+1)(n+2)+4\alpha n^3(n+1)(n+2)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{12n^3(n+1)+12\alpha n^2(n+1)(n-2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}-\frac{4\alpha}{n+\beta}+\frac{6n^2+12\alpha n(n-1)}{(n-1)(n+\beta)^2}\right]x^3$$

$$+\left[\frac{18an^4(n+1)+12\alpha an^3(n+1)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}-\frac{24an^3+24\alpha an^2(n-2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{6an+12\alpha a(n-1)}{(n-1)(n+\beta)^2}\right]\frac{x^3}{1+x}+\left[\frac{18a^2n^4+12\alpha a^2n^3(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{12a^2n^2+12\alpha a^2n(n-2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\right]\frac{x^3}{(1+x)^2}+\frac{6a^3n^3+4\alpha a^3n^2(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^3}{(1+x)^3}$$

$$+\left[\frac{7n^4(n+1)+12\alpha n^3(n+1)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}-\frac{4n^3+12\alpha n^2(n-2)+12\alpha^2n(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{6\alpha^2}{(n+\beta)^2}\right]x^2+\left[\frac{14an^4+24\alpha an^3(n-3)+12\alpha^2an^2(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{4an^2+12\alpha an(n-2)}{(n-1)(n-2)(n+\beta)^3}\right]\frac{x^2}{1+x}+\frac{7a^2n^3+12\alpha a^2n^2(n-3)+6\alpha^2a^2n}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$+\left[\frac{11n^4+4\alpha n^3(n-3)+6\alpha^2n^2(n-2)(n-3)+4\alpha^3n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{4\alpha^3}{(n+\beta)^3}\right]x+\left[\frac{11an^3+4\alpha an^2(n-3)+6\alpha^2an(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{4a\alpha^3(n-1)(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)(n+\beta)^4}-\frac{12\alpha^2a}{(n+\beta)^3}\right]\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^4}{(n+\beta)^4}$$

eşitlikleri sağlanır.

**Teorem 3.4.1.** $a>0$, $0\le\alpha\le\beta$ ve $n\in N$ olsun. $f\in C^2(0,\infty)$ sınırlı ve $K$, $(0,\infty)$ aralığının kompakt bir alt aralığı olmak üzere, $x\in K$ noktasında

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)\left[S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right]=\left(\alpha-\beta x+\frac{ax}{1+x}\right)f'(x)+\frac{2x^2+x}{2}f''(x)$$

gerçeklenir.

**İspat:** $x\in K$ ve $t\in(0,\infty)$, $f\in C^2(0,\infty)$ olsun. $f$ nin kalan terimli Taylor formülü

$$f(t)=f(x)+(t-x)f'(x)+\frac{(t-x)^2}{2!}f''(x)+(t-x)^2\phi(t;x) \tag{3.13}$$

şeklindedir. Burada $\phi(t;x)\in C(0,\infty)$ sınırlı olup $\lim_{t\to x}\phi(t;x)=0$ sağlanır.

(3.13) eşitliğinin her iki yanına $S_{n,a}^{\alpha,\beta}$ operatörü uygulanırsa,

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}f(t)=f(x)S_{n,a}^{\alpha,\beta}(1;x)+f'(x)S_{n,a}^{\alpha,\beta}(t-x;x)$$

$$+\frac{f''(x)}{2!}S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2;x\right)+S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2\phi(t;x);x\right) \tag{3.14}$$

elde edilir. Lemma 3.4.1.e göre (3.14) eşitliği

$$(n+\beta)\left[S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right]=(n+\beta)\left[\frac{\alpha-\beta x}{n+\beta}+\frac{ax}{(n+\beta)(1+x)}\right]f'(x)$$

$$+(n+\beta)\left[\frac{2n^2+n\beta^2-\beta^2}{(n+\beta)^2(n-1)}x^2+\frac{2a(n+\beta-n\beta)}{(n+\beta)^2(n-1)}\frac{x^2}{1+x}+\frac{a^2n}{(n+\beta)^2(n-1)}\frac{x^2}{(1+x)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n^2-2\alpha\beta n+2\alpha\beta}{(n+\beta)^2(n-1)}x+\frac{an+2\alpha a(n-1)}{(n-1)(n+\beta)^2}\frac{x}{1+x}+\frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2}\right]\frac{f''(x)}{2!}$$

$$+(n+\beta)S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2\phi(t;x);x\right)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada

$$S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2\phi(t;x);x\right)$$

$$=e^{-\frac{ax}{1+x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}y^n e^{-xy} f\left(\frac{\frac{kn}{xy}+\alpha}{n+\beta}-x\right)^2\phi(t;x)dy$$

şeklindedir. Burada arka arkaya önce integral daha sonra toplam için Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$(n+\beta)S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2\phi(t;x);x\right)\leq\sqrt{(n+\beta)^2 S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)}\sqrt{S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\phi^2(t;x);x\right)} \quad (3.15)$$

elde edilir. Lemma 3.4.1.den $S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)=O\left(n^{-2}\right)$ olduğu görülür. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)^2 S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^4;x\right)=12x^4+12x^3+3x^2 \quad (3.16)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\phi(t;x)\in C(0,\infty)$ ve $\lim_{t\to x}\phi(t;x)=0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left(\phi^2(t;x);x\right)=\phi^2(x;x) \quad (3.17)$$

yazılır. (3.15), (3.16) ve (3.17) den

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)S_{n,a}^{\alpha,\beta}\left((t-x)^2\phi(t;x);x\right)=0$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}(n+\beta)\left[S_{n,a}^{\alpha,\beta}(f;x)-f(x)\right]=\left(\alpha-\beta x+\frac{ax}{1+x}\right)f'(x)+\frac{2x^2+x}{2}f''(x)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

# 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde Modifiye Baskakov operatörü ile Gamma operatörünün bir kombinasyonundan oluşan ve değiştirilmiş Baskakov Gamma operatörü olarak tanımlanan yeni bir operatör tanımlandı ve operatörün yakınsaklık özellikleri incelendi. Operatörün içinde verilen bazı parametrelere bağlı olarak operatörün bilinen yakınsaklık özelliklerini sağladığı görüldü. Bu tezde tanımlanan ve özellikleri verilen operatör kullanılarak çalışma bir makale haline getirildi ve

S. Arpaguş, A. Olgun, Approximation Properties of Modified Baskakov Gamma Operators, Facta Universitatis Ser. Math. Inform. Vol. 36, No 1 (2021), 125-141. isimli indeksli dergide yayınlandı.

# KAYNAKLAR


[1] Vikipedi (2022). $\pi$ sayısı, İndirilme Tarihi: 26.07.2022.

[2] Vikipedi (2022). $e$ sayısı, İndirilme Tarihi: 26.07.2022.

[3] Baskakov, V.A. (1957) An example of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 113, 249-251.

[4] Erençin, A. ve Sevim, B. (2014). A modification of generalized Baskakov Kantorovich operators. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 59, 3, 351-364.

[5] Kajla, A. (2018). On the Bézier Variant of the Srivastava-Gupta Operators, Constr. Math. Anal., (2) 99-107.

[6] Cao, F.L. ve Ding, C.M. (1978). $L_p$ approximation by multivariate Baskakov-Kantorovich operators. J. Math. Anal. 27, pp. 127-142.

[7] Cao, F.L., Ding, C.M. ve Xu, Z.B. (2008). On multivariate Baskakov operator. J. Math. Anal. Appl. 348, 856-861.

[8] Goyal, M. ve Agrawal, P. N. (2015). Bivariate generalized Baskakov-Kantorovich operators. arXiv preprint arXiv: 1505.06071.

[9] Bodur, M., Gürel Yılmaz, Ö. ve Aral, A. (2018). Approximation by Baskakov-Szász-Stancu Operators Preserving Exponential Functions. Constr. Math. Anal., 1 (1), 88-98.

[10] Mursalen, M. ve Nasurizzaman, M. (2018). Approximation of Modied Jakimovski-Leviatan-Beta type operators. Constr. Math. Anal. 1 (2), 88-98.

[11] Walczak, Z. (2009). Baskakov type operators. Rocky Mountain J. Math., 39 (3), 981-993.

[12] Walczak, Z. ve Gupta, V. (2008). A note on the convergence of Baskakov type operators. Appl. Math. Comput. 202, no. 1, 370-375.

[13] Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's Polynomials to the infinite intervals. J. Research Nat. Bur. Standarts 45, 239-356.

[14] Miheşan, V. (1998). Uniform approximation with positive linear operators generated by generalized Baskakov method.Automat. Comput. Appl. Math. 7, 34-37.

[15] Wafi, A. ve Khatoon, S. (2005). The Voronovskaya theorem for generalized Baskakov-Kantorovich operators in polynomial weight spaces. Mat. Vesnik, 57, no. 3-4, 87-94.

[16] Erençin, A. ve Başcanbaz-Tunca, G. (2010). Approximation properties of a class of linear positive operators in weighted spaces. C.R. Acad. Bulgare Sci., 63, no. 10. 1397-1404.

[17] Erençin, A. (2011). Durrmeyer type modification of generalized Baskakov operators. Appl. Math. Comput. 218, 4384-4390.

[18] Wafi, A. ve Rao, N. (2015). Stancu-Variant of Generalized Baskakov Operators. Filomat 31, (9), 2625-2632.

[19] Lupaş, A. and Müller, M. (1967). Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren. Math. Zeitschr. 98, 208-226.

[20] Rempulska, L. ve Skorupka, M. (2007). Approximation properties of modified gamma operators, Integral Transforms and Special Functions. Vol.18, No. 9, 653-662.

[21] Deveci, S. N., Acar, T. ve Alagöz, O. (2020). Approximation by Gamma type Operators. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 43 (5), 2772-2782.

[22] Guo, S. ve Qiulan, Q. (2002). On pointwise estimate for gamma operators. Approximation Theory and its Applications, 18(3): 93-98.

[23] Acar, T., Gupta V. ve Aral, A. (2011). Rate of Convergence for Generalized Szász Operators. Bulletin of Mathematical Science, 1 (1), 99-113.

[24] Totik, V. (1985). The gamma operators in $L_p$ spaces. Publicationes Mathematicae (Debrecen), 32: 43-55.

[25] Malejki, R. ve Wachnicki, E. (2014). On the Baskakov-Durrmeyer type operators. Comment. Math. 54.1, 39-49.

[26] Pandey, E., Mishra, R.K. ve Pandey, S.P. (2015). Approximation Properties of Some Modified Summation-Integral Type Operator. (IJSCE) ISSN:, Vol.5 Issue-1, 2231-2307.

[27] Krech, I. ve Malejki, R. (2016). Approximation of functions of several variables by the Baskakov-Durrmeyer type operators. Technical Transactions Fundamental Sciences. DOI:2353737XCT.16.142.5753, 98-105.

[28] Ulusoy, G. (2012). Durrmeyer Tipli Operatörlerin Yakınsaklık Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale.

[29] Kurtoğlu, H. (2017). Modifiye Gamma Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale.

[30] Arpaguş, S. (2015). Çok Değişkenli Baskakov Operatörü. Yüksek Lisans Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale.

[31] Balcı, M. (2008). Matematik Analiz 1, 7. Basım. Ankara. Balcı Yayınları.

[32] Acar, T. (2015). Genelleştirilmiş Gadjiev Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri. Doktora Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale.

[33] Deniz, E. (2015). İbragimov Gadjiev Durrmeyer Operatörünün Yakınsaklık Özellikleri. Doktora Tezi. Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale.

[34] Gürel Yılmaz, Ö. (2019). King Tipli Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Ankara.

[35] DeVore and R.A., Lorentz, G.G. (1993). Constructive Approximation. Springer Verlag, Berlin.

[36] Ditzian Z. and Totik V. (1987). Moduli of Smoothness. Springer-Verlag, New-York.

[37] Gadjiev, A.D. (1976). Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. Math. Zametki, 20, no. 5-6, 781-786 (in Russian), Math. Notes, 20, no. 5-6, 995-998 (Engl. Trans.).

[38] Gadjiev, A.D. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P.P. Korovkin. Soviet Math. Dokl., 15, no. 5, 1433-1436.

[39] Balcı, M. (2009). Matematik Analiz 2, 6. Basım. Ankara. Balcı Yayınları.

[40] Altın, A. (2011). Uygulamalı Matematik, Ankara. Gazi Kitabevi, 131-133.

# ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Seda ERDOĞAN

**Doğum Tarihi** :

**Yabancı Dil** : İngilizce

**Eğitim Durumu**

**Lise** : Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesi (2006)

**Lisans** : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2012)

**Yüksek Lisans** : Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2015)

**Yayınları :**

**1)** S. Arpaguş, A. Olgun, Approximation Properties of Modified Baskakov Gamma Operators, Facta Universitatis Ser. Math. Inform. Vol. 36, No 1 (2021), 125-141.

**2)** Erdoğan S., Olgun A., Approximation Properties of Modified Jain-Gamma Operators, Carpathian Math. Publ. 2021, 13 (3), 651–665.