T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUASİ METRİK UZAYLARDA TAMLIK KAVRAMI VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

LEYLA YOZGATLI
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

KIRIKKALE 2022

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUASİ METRİK UZAYLARDA TAMLIK KAVRAMI VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

LEYLA YOZGATLI
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

KIRIKKALE 2022

LEYLA YOZGATLI tarafından hazırlanan “QUASİ METRİK UZAYLARDA TAMLIK KAVRAMI VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ” adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

imza……………..

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. İshak ALTUN

İmza……………..

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Murat OLGUN

İmza……………..

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 02.02.2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BİLDİRİMİ

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Leyla YOZGATLI

02.02.2022

ÖZET

QUASİ METRİK UZAYLARDA TAMLIK KAVRAMI VE BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

LEYLA YOZGATLI
Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. HAKAN ŞİMŞEK
Şubat 2022, 52 Sayfa

Bu çalışmada bazı sabit nokta teoremleri dört bölümde incelenmiştir. Birinci bölümde metrik uzay kavramı ve sabit nokta teorisi ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılacak temel tanımlara, teoremlere ve çalışmanın içeriğiyle ilgili genel bilgilendirmeye yer verilmiştir. Üçüncü bölümde smyth tam veya bi-tam quasi metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri, sabit noktanın varlığı ve tekliğini içeren teoremler incelenmiştir. Dördüncü bölümde çalışma sonucunda elde edilen genel bilgi ve sonuçlardan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Quasi metrik uzay, sabit nokta, smyth tam, bi-tam quasi metrik uzay

ABSTRACT

THE CONCEPT OF COMPLETENESS IN QUASI METRIC SPACES AND SOME FIXED POINT THEOREMS

YOZGATLI, Leyla
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M.Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. HAKAN SIMSEK
February 2022, Page 52

In this study, some fixed point theorems are examined in four sections. In the first chapter, basic information about the concept of metric space and fixed point theory is given. In the second part, basic definitions and theorems to be used in the thesis are given and general information about the content of the study are given. In the third chapter, the existence and uniqueness of fixed point examined in Smyth complete (bicomplete) quasi metric spaces. In the fourth chapter, general information and results obtained as a result of the study are mentioned.

Keywords: Quasimetric space, fixed point, Smyth complete, bicomplete quasi metric spaces

TEŞEKKÜR

Çalışma konumun seçiminden incelenmesine ve sonlanmasına kadar emeğini esirgemeyen, her konuda yardımcı olan ve zaman ayıran değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK' e, hayatım boyunca yanımda olan, her konuda destekleyen, başarılarımı paylaşan ve her zaman benimle gurur duyan anneme, babama ve kardeşlerime sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
B (x_0, r)	x_0 Merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$d(x, y)$	Metrik , x ile y arasındaki uzaklık
$\in$	Elemanıdır
$\exists$	En az bir
$f: \mathbb{N} \to X$	f, $\mathbb{N}$ den X e bir dönüşüm
$\forall$	Her
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
(x_n)	Dizi
(X, d)	Metrik uzay
$\subseteq$	Alt küme

1. GİRİŞ

Metrik uzay kavramı, topoloji alanındaki önemli kavramlardan biridir. Bu kavramı ilk kez Fonksiyonel Analiz, Olasılık ve Calculus alanlarında da çalışan Fransız matematikçi Maurice Fréchet (1906) doktora tezinde ele almıştır. Üzerinde çalışılan uzayda herhangi iki eleman arasındaki "mesafe" kavramının tanımlanabilmesi gerekmektedir. Bu manada Metrik uzay kavramı; cebir, diferansiyel geometri, istatistik, fizik ve mühendislik gibi pek çok alandaki çeşitli çalışmalar için temel olmuştur. Analiz ve Fonksiyonel Analizde $S(x) = 0$ ve $T(x) = x$ denklemlerle sıkça karşılaşırız. Bu denklemleri çözmek için farklı yöntemlerden faydalanırız. Sabit nokta teoride bu yöntemlerden biridir. Sabit nokta teoremi, diferansiyel denklemlerin, kısmi diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerin ve birçok ilgili alanın varlık teorisinde çok kullanılmaktadır. X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ e bir fonksiyon olsun. Eğer $T(x_0) = x_0$ oluyorsa x_0 noktasına T nin bir sabit noktası denir. Metrik uzaylar üzerinde tanımlı fonksiyonlarla ilgili en dikkat çeken çalışmalardan biri, Banach tarafından yapılmıştır. 20. yüzyılın önemli matematikçilerinden kabul edilen Polonyalı Matematikçi Stefan Banach (1922), doktora tezinde ilk kez "Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremi´ni ortaya atmıştır. Uzayın metrik yapısını değiştirerek Banach teoreminin genelleştirmeleri yapılmaktadır. Metrik fonksiyonlar yerine, onların özelliklerinin bir ya da birkaçına sahip olmayan fonksiyonlarla da çalışmak mümkün olmaktadır. Bu fonksiyonlara, pseudo metrik, kısmi metrik, quasi metrik, G-metrik, B-metrik gibi örnekler verilebilir. Bu çalışmada da quasi metrik uzaylarda tamlık kavramı ve bu uzaylarda verilmiş bazı sabit nokta teoremleri incelenecektir. Çalışmanın birinci bölümü giriş kısmından oluşmaktadır ve burada metrik uzay ve sabit nokta teoremiyle ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda metrik uzay, yuvar, süreklilik, dizi, yakınsaklık, quasi metrik uzay, tam metrik uzay, azalmayanlık, sağ süreklilik gibi tanımlar ve bu kavramları kolaylaştırıcı temel örnekler verilmiştir. İkinci kısımda ise sabit nokta teoreminde sıkça kullandığımız Banach, Kannan, Subrahmanyam, Ciric, Caristi, Matkowski sabit nokta teoremleri verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde Metrik uzaylarda verilen Banach, Kannan [3], [14], Subrahmanyam gibi bazı sabit nokta teoremlerinin, Quasi metrik uzaylarda smyth tam veya bi-tam quasi metrik uzay kavramı üzerindeki versiyonlarını inceleyeceğiz. Bu inceleme “Alegre, C., Dağ, H., Romaguera, S., Tirado, P. "On the fixed point theory in bicomplete quasi-metric spaces", Journal of Nonlinear Science and Applications 9 (2016), 5245-5251” ve “Alegre, C., Dağ, H., Romaguera, S., Tirado, P.,"Characterizations of quasi-metric completeness in terms of Kannan-type fixed point theorems". Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 46 / 1 (2017), 67-76 “adlı makalelerinin bakış açısıyla yapılacaktır. Dördüncü bölümde çalışma kısaca özetlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanımlar

Bu kısımda tez konumuzda kullanacağımız, metrik uzay, Cauchy dizisi, sabit nokta, tam metrik, quasi metrik gibi tanımlara yer verilmiştir. Temel tanım ve örnekler için Mahmut Koçak'ın Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar kitabından ve Stefan Cobzaş'ın Functional Analysis in Asymetrik Normed Spaces[17] adlı kitabından, [15] , [16] numaralı tezlerden faydalanılmıştır.

Tanım 2.1.1

X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için;

- $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşullarını sağlıyor ise d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir.

Örnek 2.1.1

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metrik veya Öklid metriği denir.

Örnek 2.1.2

d boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir metrik olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(x, y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

şeklinde tanımlanan p fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.3

X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in X$ için

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriği Ayrık metrik olarak da adlandırırız.

Tanım 2.1.2

(X, d) bir metrik uzay $a \in X$ ve $\varepsilon > 0$ bir reel sayı olsun.

$$\mathrm{B}_{(\mathrm{X,d})}(a, \varepsilon) = \{\mathrm{x} \in X | d(x, a) < \varepsilon\}$$

kümesine a merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir ve $\mathrm{B}_{(X,d)}(a, \varepsilon)$ ile gösterilir,

$$\mathrm{D}_{(X,d)}(a, \varepsilon) = \{\, \mathrm{x} \in X | d(x, a) \leq \varepsilon\}$$

kümesine a merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir ve $\mathrm{D}_{(X,d)}(a, \varepsilon)$ ile gösterilir,

$$\mathrm{S}_{(X,d)}(a, \varepsilon) = \{\, \mathrm{x} \in X | d(x, a) = \varepsilon\}$$

kümesine a merkezli ε yarıçaplı yuvar yüzeyi denir ve $\mathrm{S}_{(X,d)}(a, \varepsilon)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3

(X, d) bir metrik uzay ve U da X in bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x \in U$ için $B(x, r) \subseteq U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine açıktır denir. Eğer $X \backslash U$ kümesi açık ise U kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.4

(X, d) bir metrik uzay $x \in X$ ve $V \subseteq X$ alt kümesi için $x \in G \subseteq V$ koşulunu sağlayan bir $G \subseteq X$ açık kümesi varsa V ye x in bu uzayda bir komşuluğu denir.

Tanım 2.1.5

(X, d) ve (Y, e) metrik uzaylar, $f: (X, d) \to (Y, e)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa ya da $\forall\, \varepsilon > 0$ için $d(x_0, x) < \delta$ olduğunda $e(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.6

X boş olmayan bir küme olsun. Her $f: \mathbb{N} \to X$ fonksiyonuna X de bir dizi veya terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi denir. $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ ise bu dizi genellikle (x_n) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.7

(X, d) bir metrik uzay, $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $\{x_{n_k}\}$

dizisine $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 2.1.8

(X, d) bir metrik uzay ve (x_n) terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x_m) \leq r$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlıdır denir. Yani $\{x_n |\, n \in \mathbb{N}\}$ kümesi (X, d) metrik uzayında sınırlı ise (x_n) ye sınırlı dizi denir.

Tanım 2.1.9

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $\mathrm{n} \geq n_0$ özelliğindeki her $x \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa (x_n) dizisine $x \in X$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda x noktasına (x_n) dizisinin limiti denir ve bu durum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 2.1.1

Herhangi bir (X, d) metrik uzayında yakınsak bir dizi tek bir noktaya yakınsar.

Uyarı 2.1.2

(X, d) bir metrik uzay olsun.$\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.

Tanım 2.1.10

(X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda tanımlı bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $\mathrm{n}, \mathrm{m} \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Uyarı 2.1.3

(X, d) bir metrik uzay (x_n) terimleri X in elemanlarından oluşan bir dizi olsun. (X, d) metrik uzayında (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{R}$ standart uzayında $n, m \to \infty$ için $d(x_n, x_m) \to 0$ olmasıdır.

Örnek 2.1.4

Herhangi bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsasın ve $\varepsilon > 0$ verilsin. (x_n) dizisi $x \in X$ noktasına yakınsadığından bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n > n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $d(x_n, n) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde vardır. O halde $n, m \geq n_0$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Yani (x_n) bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.11

(X, d) metrik uzayında tanımlı $T: X \to X$ fonksiyonu,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

eşitsizliğini tanım kümesindeki tüm x, y 'ler için sağlıyorsa, T fonksiyonuna büzülebilir dönüşüm denir.

Tanım 2.1.12

(X, d) bir metrik uzay olsun. $f: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ özelliğine sahip bir k reel sayısı varsa f fonksiyonuna bir büzülme dönüşümü denir.

Tanım 2.1.13

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq q\max\{d(x, y), \mathrm{d}(x, Tx), \mathrm{d}(y, Ty), \mathrm{d}(x, T\mathrm{y}) + \mathrm{d}(\mathrm{y}, Tx)\}$$

olacak şekilde bir $0 \leq q < 1$ sayısı varsa, T'ye quasi-büzülme fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.14

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall\, x \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \; ad(x, y)$$

olacak şekilde $a \geq 0$ sayısı varsa T ye Lipschitz dönüşümü denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük a sayısına T nin Lipschitz sabiti denir.

Burada Tezin ilerleyen kısımlarında yer alan bazı teoremlerde kullanacağımız birkaç fonksiyonu verelim. Burada yer alan ve yanlarında yer alan şartlar ile bu fonksiyonlar, sabit nokta teoremleri içerisinde çeşitli yazarlar tarafından kullanılmıştır. Bu fonksiyonları ileride teoremler içerisinde tekrar tekrar yazmamak için ve daha kolay referans verebilmek adına burada yazacağız.

Tanım 2.1.15

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi, \eta, \psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını göz önüne alalım;

1. φ azalmayan ve her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$, ve $\forall x, y \in X$ için

$d(Tx, Ty) \leq \varphi\,(d(x, y))$ şartını sağlar,

2. φ ,azalmayan, sağdan sürekli ve $\forall x, y \in X$ ve $\varphi(t) < t$, $t > 0$ için;

$d(Tx, Ty) \leq \ \varphi\ (d(x, y))$ şartını sağlar,

3. η süreklidir , her $t > 0$ için $0 < \ \eta$ (t) $< \mathrm{t}$ ve ; $\forall x, y \in X$ için

$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \eta(d(x, y))$ şartı sağlanır,

4. ψ azalmayan, sürekli, $\psi^{-1}(0) = \{0\}$, $\forall x, y \in X$ve bazı $\alpha \ \in [0, 1)$ için

$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \alpha\psi\ (d(x, y))$ şartı sağlanır,

5. η ve ψ azalmayan, sürekli, $\psi^{-1}(0) = \eta^{-1}(0) = \{0\}$ ve $\forall x, y \in X$ için

$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(d(x, y)) - \eta(d(x, y))$ şartı sağlanır.

Tanım 2.1.16

X bir küme ve $f: X \to X$ bir fonksiyon olsun. $f(x_0)$=x_0 özelliğini sağlayan $x_0 \in \ x$ noktasına f fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

Örnek 2.1.5

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ fonksiyonunun sabit noktası x=1 ve x=0 noktasıdır. Fakat X =$[0, \infty)$, $f(x) = x + 2$ dönüşümünün bir sabit noktası yoktur.

Örnek 2.1.6

$X = \{0\} \cup [1,2]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 1 & , \quad x = 0 \\ 0 & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\forall\ x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \tfrac{1}{2}\{(\ d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlanır fakat T nin sabit noktası yoktur.

Tanım 2.1.17

(X, d) bir tam metrik uzayında tanımlı T fonksiyonu için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(y, Ty)$$

olacak şekilde bir $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ varsa T fonksiyonuna bir Kannan fonksiyonu denir.[13]

Tanım 2.1.18

(X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her cauchy dizisi X in bir noktasına yakınsıyor ise X uzayına tam metrik uzay denir.

Örnek 2.1.7

$\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ de tam olmadığını görelim.

$x_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$ olmak üzere (x_n) dizisi yani

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}, x_4 = \frac{577}{408}, \ldots$$

dizisi verilsin. Bu durumda

$$d(x_n, x_m) = |x_m - x_n| \to 0$$

olduğundan bu dizi $\mathbb{Q}$ da bir cauchy dizisidir. (x_n) dizisinin $x \in \mathbb{Q}$ noktasına yakınsadığını varsayalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > 1$ olduğundan $x \geq 1$ dir. Diğer yandan $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_n} + \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{2}$$

olur. Buradan

$$x = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

olur. Bu durumda $x^2 = 2$ ve böylece $x_n \geq 0$ olduğundan $x = \sqrt{2}$ olur. Bu ise $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğundan bir çelişkidir. Bu durumda (x_n) dizisi $\mathbb{Q}$ nun hiçbir noktasına yakınsamaz. O halde $\mathbb{Q}$ tam değildir.

Örnek 2.1.8

Her (X, d) ayrık metrik uzayının tam olduğunu gösterelim.

(x_n) bir cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq n_0$ özelliğindeki her $n, m \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d\left(x_n, x_{n_0}\right) < \frac{1}{2}$$

olur. Diğer yandan $d\left(x_n, x_{n_0}\right) = 0$ veya $d\left(x_n, x_{n_0}\right) = 1$ olacağından $n \geq n_0$

özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $d\left(x_n, x_{n_0}\right) = 0$ olur. Bu durumda $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n_0}$ olur. Diğer bir deyişle, belirli bir terimden sonra dizi sabittir. Bu durumda bu dizi yakınsak ve limiti x_{n_0}dır. O halde (X, d) ayrık metrik uzayı tamdır.

Tanım 2.1.19

X kümesi ve $d: X \to X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

- $d(x, x) = 0$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
- $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Rightarrow x = y$

koşulunu sağlıyorsa d ye quasi metrik denir. Eğer,

- $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

özelliğini sağlıyorsa d ye T_1- quasi metrik denir. Bu durumda (X, d) ikilisine quasi metrik veya T_1- quasi metrik uzay denir.

Örnek 2.1.9

$X = [0,1]$ ve $d(x,y) = \begin{cases} y - x, & x \leq y \\ 1, & x > y \end{cases}$ fonksiyonu tanımlansın.

- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
- $d(x,y) = 0$ ise $y - x = 0$ olmalıdır, $x = y$ elde edilir. Ancak
- $d(x,y) = d(y,x)$ eşitliği $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ için sağlanmaz. Bu durumda (X,d) uzayı T_1-quasi metriktir ancak metrik değildir.

Tanım 2.1.20

(X,d) quasi metrik uzayında $\mathrm{B}_d(x_0, \varepsilon) = \{x \in X: d(x_0,x) < \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümeye x_0 merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 2.1.21

(X,d) quasi metrik uzayında $\forall x,y \in X$ için;

d^{-1} fonksiyonu $d^{-1}(x,y) = d(y,x)$ şeklinde tanımlanır ve X de bir quasi metrik belirtir.

d^s fonksiyonu ise $d^s(x,y) = \max\{d(x,y), d^{-1}(x,y)\}$ şeklinde tanımlanır ve X de bir metrik belirtir.

Tanım 2.1.22

(X,d) bir quasi metrik uzay, $\{x_n\}$ bir dizi ve $a \in X$ olsun. Eğer $n \to \infty$, $d(a,x_n) \to 0$ ise $\{x_n\}$ dizisinin τ_d ye göre yakınsak denir. Buna d-yakınsama denir ve

$$x_n \xrightarrow{d} a \Leftrightarrow d(a,x_n) \to 0$$

şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde $n \to \infty$, $d(a, x_n) \to 0$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi $\tau_{d^{-1}}$ ye göre yakınsaktır ve buna d^{-1}yakınsama denir ve

$$x_n \xrightarrow{d^{-1}} a \Leftrightarrow d(x_n, a) \to 0$$

şeklinde gösterilir.

$n \to \infty$, $d^s(a, x_n) \to 0$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi τ_{d^s} ye göre yakınsaktır ve buna d^syakınsama denir ve

$$x_n \xrightarrow{d^s} a \Leftrightarrow d^s(x_n, a) \to 0$$

şeklinde gösterilir.

Uyarı 2.1.4

Her quasi metrik yapısı ile bunun tanımlı olduğu küme üzerinde bir τ_d topolojisi oluşturulabilir. Eğer (X, d) bir quasi metrik uzaysa τ_d topolojisi T_0 dır ancak T_1-quasi metrik uzaysa τ_d topolojisi T_1 dir.

Uyarı 2.1.5

(X, d) quasi metrik uzayında tanımlı bir dizinin d^s-yakınsak olması için, aynı anda hem d-yakınsak hem de d^{-1}-yakınsak olması gerekir.

Örnek 2.1.10

$X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$ uzayı ve bu küme üzerinde

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n\ tek, m\ çift\ ve\ n < m \\ 0, & n = m \\ 1, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

quasi metriği verilsin. Bu uzayda $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ dizisi d-yakınsak ya da d^{-1}- yakınsak değildir.

Tanım 2.1.23

(X, d) bir quasi metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzaydaki bir dizi olsun.

● $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x \in X, \ \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq k \ , d(x, x_m) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine sol d -Cauchy,

● $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x \in X, \ \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq k \ , d(x_m, x) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine sağ d-Cauchy,

● $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall r, s \geq k \ , \ d(x_r, x_s) < \varepsilon$ oluyorsa, $\{x_n\}$ dizisine d-Cauchy,

● $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall r, s; \ r \geq s \geq k \ , d(x_r, x_s) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sağ K-Cauchy,

● $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall r, s; r \geq s \geq k \ , \ d(x_s, x_r) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine sol K-Cauchy dizisi denir. [11]

Örnek 2.1.11

$X = (0,1)$ ve $d(x,y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 1, & x < y \end{cases}$ ile tanımlanan d fonksiyonu X

üzerinde bir quasi metrik belirtir. Bu uzayda, $\{x_n\}$ dizisi,

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. $\forall r < s$ için $d(x_r, x_s) \to 0$ sağlandığından $\{x_n\}$ dizisi sol K-Cauchy ve dolayısıyla sol d-Cauchy'dir. Fakat her $x \in X$ için belli bir noktadan sonra $d(x_r, x) = 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi sağ d-Cauchy değildir.

Tanım 2.1.24

(X, d) bir quasi metrik uzay olsun. (X, d) üzerinde

$$d(Tx, Ty) \leq c(d(x, Tx) + (d(y, Ty))$$

$\forall x, y \in X$ şartı sağlanacak şekilde bir $c \in [0,1/2)$ sabiti varsa X den X olan bir T dönüşümüne d-Kannan dönüşümü denir.

Tanım 2.1.25

(X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) üzerinde tanımlı

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

şartını sağlayan alttan yarı sürekli bir $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu varsa (her $x \in X$) T' ye Caristi dönüşümü denir.

2.2. Temel Teoremler

Teorem 2.2.1 (Banach, 1922)

(X, d) boş olmayan bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun, bu durumda T 'nin X'in içinde bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir. Üstelik $x_1 \in X$ olmak üzere

$$x_1, x_2 = T(x_1), \dots, x_n = T(x_{n-1})$$

ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar.

İspat

$x_0 \in X$ olsun.

$$x_{1=}Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$$

şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq Ld(x_{n-1}, x_n)$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için;

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + L^{m-1} d(x_0, x_1)$$

$$=[L^n + L^{n+1} + \dots + L^{m-1}] d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

Buradan $\{x_n\}$ dizisinin bir cauchy dizisi olduğu görülür. X tam olduğundan

$\lim x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır. Ayrıca T sürekli olduğundan

$$z = \lim x_{n+1} = \lim Tx_n = T\lim x_n = Tz$$

elde edilir ve buradan T nin tek bir sabit noktasının olduğu görülür. $w \in X$ noktası T nin başka bir sabit noktası ise

$$0 < d(z, v) = d(Tz, Tw) \leq Ld(z, v) < d(z, v)$$

olur ki bu $L<1$ olduğundan çelişir. Yani T nin sabit noktası tektir.

Teorem 2.2.2 (Kannan, 1968)

(X, d) bir tam metrik uzayında tanımlı T fonksiyonu verilsin. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(y, Ty)$$

olacak şekilde bir $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ sabit sayısı varsa T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.2.3 (Ciric,1974)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir quasi-büzülme olsun. Bu durumda T'nin tek bir sabit noktası vardır.

Teorem 2.2.4 (Subrahmanyam, 1975)

Bir metrik uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul, o uzaydaki her Kannan fonksiyonunun bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

Teorem 2.2.5 (Caristi, 1976)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T bir Caristi fonksiyonu ise T'nin X'de bir sabit noktası vardır.

Teorem 2.2.6 (Matkowski, 1994)

(X,d) bir tam metrik uzay, T bu uzayda tanımlı bir dönüşüm, $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ monoton azalmayan ve her $t\in[0,\infty)$ için $\lim_{n\to\infty}\psi^n(t)=0$ eşitliğini sağlayan bir fonksiyon olsun.

$$d(Tx,Ty)\leq\psi(d(x,y))$$

eşitsizliği her $x,y\in X$ için sağlanıyorsa, T ‘nin X ‘de tek bir sabit noktası vardır.

Teorem 2.2.7 (Edelstein,1963)

(X,d) bir kompakt metrik uzay ve $T:X\to X$ büzülebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda, T dönüşümü X ‘de bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.2.8 (Cobzaş, 2011)

(X,d) bir dizisel tam T_1 quasi metrik uzay ve T bu uzayda tanımlı bir dönüşüm olsun. $\tau_{d^{-1}}$ topolojisine göre alttan yarı sürekli bir $\psi:X\to[0,\infty)$ fonksiyonu için

$$d(x,Tx)\leq\psi(x)-\psi(Tx)$$

eşitsizliği her $x\in X$ için sağlansın. Bu takdirde T ’nin bir sabit noktası vardır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu başlıkta [12],[13] numaralı makaleler de verilen kavramları incelemek amaçlanmaktadır. Quasi metrik uzaylarda çeşitli tamlık kavramları vardır. Bu çalışmada bu tamlık yapılarının tanımı verilecek ve bu kavramlardan yukarda sözü edilen makalelerde kullanılan anlamda tamlık kavramları yoluyla elde edilmiş teoremlere yer vereceğiz. Bunlar arasında farklılıklar olduğundan bu başlıkta çalışmamızı temelde iki alt başlığa ayıracağız.

3.1. Bu Başlıkta Quasi Metrik Uzaylarda Sol K-tam Kavramı ve Kannan ve Caristi Dönüşümü İle İlgili Teoremler Vereceğiz

Teorem 3.1.1

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Kannan dönüşümü olsun. O zaman T bir tek $v \in X$ sabit noktasına sahiptir ve üstelik $\forall x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu v noktasına yakınsar.[16]

İspat

$x_0 \in X$ olsun. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$ ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n)$$

$$\leq Kd\{(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + d(x_n, Tx_n)$$

$$= Kd\{(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\}$$

buradan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{K}{1-K} d(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir. Böylece $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{K}{1-K} d(x_{n-1}, x_n)$$

$$\leq (\frac{K}{1-K})^2 \, d(x_{n-2}, x_{n-1})$$

$$\vdots$$

$$\leq (\frac{K}{1-K})^n \, d(x_0, x_1)$$

bulunur. Şimdi $\frac{K}{1-K} = L$ dersek $K < \frac{1}{2}$ olduğundan $L<1$ dir. O zaman $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + L^{m-1} d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{L^n(1 - L^{m-n})}{1-L} \, d(x_n, x_m)$$

$$\leq \frac{L^n}{1-L} \, d(x_0, x_1)$$

bulunur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.(X, d) tam olduğundan $\lim x_n = v$ olacak şekilde bir $v \in X$ vardır. Böylece

$$d(v, Tv) \leq d(v, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tv)$$

$$= d(v, x_{n+1}) + d(Tx_n, Tv)$$

$$\leq d(v, x_{n+1}) + Kd\{(x_n, Tx_n) + d(v, Tv)\}$$

$$= d(v, x_{n+1}) + Kd\{(x_n, x_{n+1}) + d(v, Tv)\}$$

olduğundan

$$d(v, Tv) \leq \frac{1}{1-K} d(v, x_{n+1}) + \frac{K}{1-K} d(x_n, x_{n+1})$$

bulunur ki $n \to \infty$ için limit alınırsa $d(v, Tv) = 0$ elde edilir. Yani v noktası T nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tek olduğu

$$d(Tx, Ty) \leq K\{d(x, Tx) + d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği yardımıyla görülür. Ayrıca $\forall x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu v noktasına yakınsar.

Teorem 3.1.2 (Subrahmanyam)

(X, d) metrik uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\lambda > 0$ için;

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{\mathrm{d}(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

ve sayılabilir bir küme özelliğini sağlayan $T(X)$ ve her $T: X \to X$ dönüşümü bir sabit noktaya sahip ise (X, d) metrik uzayı tamdır. [16]

İspat

(X, d) metrik uzayının tam olmadığını kabul edelim. X de yakınsak olmayan bir $\{x_n\}$ Cauchy dizisi vardır. Bu dizinin terimlerinin farklı olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi

$A = \{ x_n : n \in \mathbb{N}\}$ diyelim. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olmadığından $\forall\, x \notin A$ için

$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\} > 0$ dır. $\{x_n\}$ bir cauchy dizisi olduğundan her bir $x \notin A$ noktasına karşılık $m, n \geq N(x)$ olduğundan

$$d(x_n, x_m) < \lambda d(x, A)$$

olacak şekilde bir $N(x)$ pozitif tam sayısı vardır. Bu durumda $m, n \geq N(x)$ ve

$l = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$d(x_n, x_m) < \lambda d(x, A) \leq \lambda d(x, x_l)$$

olur. Özel olarak $m \geq N(x)$ ve $l = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$d\left(x_{N(x)}, x_m\right) < \lambda d(x, A) \leq \lambda d(x, x_l)$$

yazılabilir. Benzer şekilde her $x = x_n \in A$ için $m \geq n'$ olduğunda

$$d(x_m, x_{n'}) < \lambda d(x_n, x_{n'})$$

olacak şekilde bir $n' > n$ pozitif tam sayısı vardır. Şimdi $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} x_{N(x)} & , \quad x \notin A \\ x_{n'} & , \ x = x_n \in A \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. T nin sabit noktaya sahip olmadığı üstelik (Tx) de sayılabilir bir küme olduğu açıktır. Şimdi $x, y \in X$ olsun. O zaman $Tx = x_n$ ve $Ty = x_m$ biçiminde olacağından

$$d(Tx, Ty) = d(x_n, x_m) < \begin{cases} \lambda d(y, A \setminus \{y\}), & n \geq m \\ \lambda d(x, A \setminus \{x\}), & n < m \end{cases}$$

olur. Yani $\forall\, x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{\mathrm{d}(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak T dönüşümü Teorem 3.1.2 özelliklerini sağlayan bir dönüşüm olup sabit noktaya sahip olmadığından çelişki elde edilir. Dolayısıyla (X, d) metrik uzayı tamdır.

Bir metrik uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul, bu uzaydaki her Cauchy dizisinin yakınsak olmasıdır. Ancak bir quasi metrikte bu şekilde tek bir tanım yoktur. Altun vd. (2017) yaptıkları çalışmada bu tanımları şu şekilde vermiştir [18].

Tanım 3.1.1

(X, d) bir quasi metrik uzayında tanımlı her

- Sol (sağ) d-Cauchy dizisi d-yakınsak ise (X, d)'ye sol (sağ) ς-tam,
- d-Cauchy dizisi d-yakınsak ise (X, d)'ye ς-tam,
- Sol (sağ) d-Cauchy dizisi d^{-1}-yakınsak ise (X, d)'ye sol (sağ) η-tam,
- d-Cauchy dizisi d^{-1}-yakınsak ise (X, d)'ye η-tam,
- Sol (sağ) d-Cauchy dizisi d^{s}-yakınsak ise (X, d)'ye sol (sağ) θ-tam,
- d-Cauchy dizisi d^{s}-yakınsak ise (X, d)'ye θ-tam,
- Sol (sağ) K-Cauchy dizisi d-yakınsak ise(X, d)'ye sol (sağ) K-tam,
- Sol (sağ) K-Cauchy dizisi d^{-1}-yakınsak ise (X, d)'ye sol (sağ) M-tam,
- Sol (sağ) K-Cauchy dizisi d^{s}-yakınsak ise (X, d)'ye sol (sağ) Smyth tam

denir.

Örnek 3.1.1

$$X = \mathbb{N} \text{ ve } d(m,n) = \begin{cases} 0, & m = n \text{ ise} \\ \frac{1}{n}, & m > n \text{ ve m çift n tek ise} \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

fonksiyonu verilsin. (X,d) quasi metrik uzayı göz önünde bulundurulduğunda $\{x_n\} = \{2n\}$ dizisi bir sağ d-Cauchy dizisidir ve $(2n+1) \in \mathbb{N}$ tek sayılarına d^{-1}-yakınsaktır, ancak d–yakınsak değildir. Bu durumda sağ ς -tam değildir.

Örnek 3.1.2

$$X = (0,1) \text{ ve } d(x,y) = \begin{cases} x-y, & x \geq y \; için \\ 1, & x < y \; için \end{cases} \quad \text{olsun.}$$

(X,d) quasi metrik uzayında,

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi sol d-Cauchy ve sol K-Cauchy olduğu halde d, d^{-1} veya d^s-yakınsak olmadığından, (X,d) uzayı sol ς/η /θ-tam veya sol K/M/Smyth-tam değildir.

Bu uzayda $\{x_n\}$ sağ d-Cauchy olan bir dizi ise her $\varepsilon > 0$ için,

$$d(x_n,x) = \begin{cases} x_n - x, & x_n \geq x \\ 1, & x_n < x \end{cases} \quad < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanabilmesi için

$$x_n + \varepsilon < x \leq x_n$$

şeklinde olmalıdır. Bu durumun bir $k \in \mathbb{N}$ değerinden büyük tüm n'ler için sağlanması gerektiğinden, dizi bir noktadan sonra sabit dizi olmalıdır. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi d, d^{-1} ve d^s-yakınsaktır, (X,d) uzayı sağ ς -tam, sağ η-tam ve sağ θ-tamdır.

Buna benzer tanımların bir diğeri aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1.2

(X, d) bir quasi metrik uzayında tanımlı (x_n) dizisine, eğer her $\varepsilon > 0$ için $\mathrm{d}(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (öyleki burada $n_\varepsilon \leq n \leq m$ dir) varsa sol K-cauchy dizisi denir. Eğer, (X, d) bir quasi metrik uzayında tanımlı her sol-K cauchy dizisi bu uzayda tanımlanan τ_d yapısına göre $((X, d^s)$ metrik uzayında her cauhy dizisi) bu uzayda bir noktaya yakınsar ise bu uzaya sol K-dizisel tam(d -dizisel tam) uzay denir. Eğer (X, d) uzayında her sol K- cauchy dizisi $\tau_\mathrm{d}{}^s$ uzayında yakınsak ise bu takdirde Smyth tam uzay olarak adlandırılır. Bundan sonraki başlıkları bu tanımlamalarla inceleyeceğiz.

(X, d) bir quasi metrik uzayında aşağıdaki durum geçerlidir. Bu durumun tersi genelde doğru değildir.

$$\text{Smyth tam} \rightarrow \text{sol K} - \text{dizisel tam} \rightarrow d - \text{dizisel tam}$$

Bu durumu iki bilinen örnekle gösterebiliriz.

Örnek 3.1.3

$X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve d de X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan bir T_1 quasi metrik olsun.

$$d(x, y) = \begin{cases} d(x, x) = 0 & her\ x\ \in X \\ d(0, x) = \dfrac{1}{x} & her\ n \in N \\ d(x, y) = 1 & diğer\ haller \end{cases}$$

Bu taktirde(X, d) uzayı sol K- dizisel tam olur. (Dikkat edelim ki X üzerinde τ_d uzayı kompakt topoloji oluşturur) Ancak bu uzay Smyth tam uzay olmaz. Çünkü bu uzayda (n),$n \in \mathbb{N}$ dizisi bir sol K-cauchy dizisi olur ancak bu dizi $\tau_d{}^s$ uzayında bir yakınsak değildir.

Örnek 3.1.4

$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi ve bu cümle üzerinde d ise aşağıdaki gibi tanımlanan bir T_1 quasi metrik olsun.

$$d(x,y) = \begin{cases} y - x & x \leq y \\ 1 & x > y \end{cases}$$

Bu taktirde $(\mathbb{R}, d)$ uzayı bu uzayda her cauchy dizisi $(\mathbb{R}, d^s)$ uzayında sabit dizi olacağından d-dizisel tam olur. Bununla beraber bu uzay sol K-dizisel tam uzay olmaz. Çünkü bu uzayda $(-\frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ dizisi bir sol K-cauchy dizisi olur ancak bu dizi $\tau_d{}^s$ uzayında bir yakınsak değildir. Bu uzayın $\mathbb{R}$ üzerinde alt limit topolojisi oluşturduğuna dikkat edelim.

Bu çalışmada yukarda verilen anlamda Smyth tamlık kavramını kullanacağız.

Smyth tam quasi metrik uzaylarda Caristi teoreminin bir versiyonunu [19] makalesinde S. Romeguera ve P. Tirado 2015 de aşağıdaki şekilde vermişlerdir.

Tanım 3.1.3

(X, d) quasi metrik uzayında bir T self dönüşümüne, eğer aşağıdaki $d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$ fonksiyonu her $x \in X$ için

şartı sağlayan bir alttan yarı sürekli, $\varphi: X \to [0, \infty)$ varsa bu fonksiyona d^s-Caristi dönüşümü denir.

Teorem 3.1.3

(X, d) tam quasi metrik uzayında her d-Caristi dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir[19].

İspat

(X, d) tam quasi metrik uzay olsun ve $T: X \to X$ dönüşümü bir d-Caristi dönüşümü olsun. Bu takdirde $\tau_{d^{-1}}$ topolojisine göre alttan yarı sürekli bir

$\varphi : X \to [0,\infty)$ dönüşümü mevcuttur ve $d(x,Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$, her $x \in X$ için sağlanır. Klasik metrik uzaylarda olduğu gibi X üzerinde bir $\leq$ sıralama bağıntısı

$x \leq y \Leftrightarrow d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$, her $x, y \in X$ için tanımlayalım. Açık olarak $\leq$ bağıntısı X üzerinde bir kısmi sıralamadır. $\forall\, x \in X$ için $x \leq Tx$ olduğuna dikkat edelim. $(X, \leq)$ kısmi sıralı cümlesinin boştan farklı tam sıralı her alt cümlesinin bir üst sınıra sahip olduğunu ispatlamalıyız. Gerçekten A, X in tam sıralı alt cümlesi olduğunu varsayalım. (X,d) uzayında $(X_x)_{x\in A}$ ağının sol K-cauchy ağı olduğunu gösterelim. Burada her $x \in X$ için, $X_x := x$ olarak tanımlansın. Bunu sonlandırmak için

$r = \inf_{x \in A} \varphi(\mathrm{x})$ seçelim. Verilen her keyfi $\varepsilon > 0$ için $\varphi(x) < r + \varepsilon$ olacak şekilde $x \in A$ seçelim. Şu halde herhangi $y, z \in A$ için $x \leq y \leq z$ olduğundan

$d(y,z) \leq \varphi(y) - \varphi(z) \leq \varphi(x) - \varphi(z) < r + \varepsilon - r = \varepsilon$ elde ederiz.

Sonuç olarak $(X_x)_{x\in A}$ ağı, (X,d) uzayında sol K-cauchy dizisidir ve $\tau_{d^{-1}}$ topolojisine göre $p \in X$ gibi bir noktaya yakınsar. $x \in A$ seçelim ve $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. Bu takdirde $z \in A$ ve $y \leq z$ olduğunda $d(z,p) < \varepsilon$ ve $\varphi(p) - \varphi(z) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in A$ vardır. $x \leq z_0$ ve $y \leq z_0$ olacak şekilde bir $z_0 \in A$ seçelim. Böylece

$$d(x,p) \leq d(x,z_0) + d(z_0,p) < \varphi(x) - \varphi(z_0) + \varepsilon < \varphi(x) - \varphi(p) + 2\varepsilon$$

elde ederiz. ε keyfi olduğundan $d(x,p) \leq \varphi(x) - \varphi(p)$ yani $x \leq p$ olduğu için p, A için bir üst sınır oluşturur. Zorn Lemması gereği $(X, \leq)$ bir maksimal elemana sahiptir. Bu elemana a dersek $a \leq Ta$ olduğundan $a = Ta$ elde edilir. Böylece a, T nin bir sabit noktasıdır.

Aşağıda verilen önermeler Romaquera, S.ve Tirado,P. [19,Proposition 1,Proosition 2)] ya ait olup daha sonraki teoremlerin ispatında kullanılacağı için burada verilmiştir.

Önerme 3.1.1 Bir (X,d) quasi metrik uzayında Smyth tam olması için gerek ve yeter şart bu uzayda her sol K-cauchy dizisinin $\tau_d{}^s$ uzayında yakınsak olmasıdır. [19]

Önerme 3.1.2 Bir (X,d) quasi metrik uzayında (x_n) dizisi bir sol K-cauchy dizisi olsun. Eğer (x_n) dizisi $\tau_d{}^s$ uzayında bir $\mathrm{x} \in X$ noktasına yakınsayan bir alt diziye sahip ise bu takdirde (x_n) dizisi $\tau_d{}^s$uzayında bir $\mathrm{x} \in X$ noktasına yakınsar. [19]

Teorem 3.1.4

(X, d) quasi metrik uzayının smyth tam olması için gerek ve yeter koşul bu uzayda her d^s-caristi dönüşümünün X'de bir sabit noktaya sahip olmasıdır. [19]

İspat

(X, d) smyth tam quasi metrik uzay ve bu uzayda tanımlı T dönüşümü d^s-caristi dönüşümü olsun. Bu takdirde τ_{d^s} de alttan yarı sürekli olan ve

$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$, $\forall x \in X$ şartını sağlayan $\varphi : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır. Tam olarak Teorem 3.1.3'ün ispatında olduğu gibi (X, d) uzayında sol K-cauchy dizisi inşa edebiliriz.

(X, d) smyth tam olduğundan yukarıda inşa edilen ağ (ya da dizi) $p \in X$ noktasına τ_{d^s} topolojik uzayında yakınsar. Bu p noktasının, T'nin sabit noktası olduğu sonucuna yine Teorem 3.1.3'ün ispatında olduğu gibi φ fonksiyonunun τ_{d^s} uzayında alttan yarı sürekli olmasından dolayı ulaşırız.

Diğer yönü göstermek için Önerme 3.1.1 gereği (X, d) uzayında her sol K-cauchy dizisinin τ_{d^s} uzayında yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. Aksini kabul edelim. Bu takdirde (X, d) uzayında bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sol K-cauchy dizisinin τ_{d^s} uzayında yakınsamadığını varsayalım. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\forall n \geq n_k$ olduğunda

$d(\mathrm{x}_{n_k}, \mathrm{x}_\mathrm{n}) < 2^{-(\mathrm{k}+1)}$ olacak şekilde bir $n_k \geq k$ vardır.

Buradan $d(\mathrm{x}_{n_k}, \mathrm{x}_{n_{k+1}}) < 2^{-(\mathrm{k}+1)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ olacaktır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $y_k := \mathrm{x}_{n_k}$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde Önerme 3.1.2 den genelliği bozmaksızın $k \neq j$ olduğundan $yk \neq yj$ ve $\{y_k := k \in \mathbb{N}\}$ dizisi τ_{d^s} uzayında hiç bir yakınsak alt dizi içermez.

$\forall k \in \mathbb{N}$ için Ty_k=y_{k+1} ve her $x \notin \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ için Tx=y_1 olarak tanımlanan

$T: X \to X$ bir d^s-caristi dönüşümü olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için

$\varphi: X \to [0, \infty)$ dönüşümü $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\varphi(y_k)$=2^{-k} ve $\varphi(x)$=$d^s(x, y_1) + \frac{1}{2}$,

$x \notin \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlansın.

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\varphi(y_k) < \varphi(x)$, $x \notin \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ olduğundan $x \to d^s(x, y_1)$ fonksiyonu τ_{d^s} de yakınsak olduğundan φ' nin alttan yarı sürekli fonksiyon olduğunu elde ederiz. Üstelik

$d(y_k, Ty_k) = d(y_k, y_{k+1}) < 2^{-(k+1)} = \varphi(y_k) - \varphi(Ty_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ve

$d(x, Tx) = d(x, y_1) \leq d^s(x, y_1) = \varphi(x) - \varphi(Tx)$ $\forall x \notin \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ elde ederiz.

Böylece (X, d) uzayında T bir d^s-caristi dönüşümü olur. Ancak T bir sabit noktaya sahip olamaz. Bu durum ise bir çelişkidir. Yani yukarıdaki önermenin karşıtı doğrudur.

Şimdi de Kannan dönüşümü yardımıyla elde edilen ve tamlığı ifade eden bazı teoremleri verelim.[13]

Lemma 3.1.1

(X, d) quasi metrik uzayında T dönüşümü $c \in [0,1\backslash 2)$ sabitiyle bir d-Kannan dönüşümü olsun. Bu takdirde;

(a) $\forall x, y \in X$, $d^s(Tx, Ty) \leq c(d(x, Tx) + d(y, Ty))$

(b) T dönüşümü (X, d^s) metrik uzayında bir Kannan dönüşümüdür.

(c) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi (X, d^s) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

İspat

(a) $x, y \in X$ için;

$d(Tx, Ty) \leq c(d(x, Tx) + d(y, Ty))$ ve $d(Ty, Tx) \leq c(d(y, Ty) + d(x, Tx))$

$d^s(Tx, Ty) \leq c(d(x, Tx) + d(y, Ty)) \leq c(d(x, Tx) + d(y, Ty))$ elde edilir.

(b) $\forall x, y \in X$, c sabiti için;

$d(x, Tx) \leq d^s(x, Tx)$ ve $d(y, Ty) \leq d^s(y, Ty)$

olduğundan (a) gereği c sabitiyle beraber T dönüşümü (X, d^s) üzerinde bir Kannan dönüşümüdür.

(c) (b) gereği T dönüşümü (X, d^s) uzayında tanımlı olduğundan, $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi herhangi bir $x_0 \in X$ için klasik Kannan sabit nokta teoremi ispatınca (X, d^s) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

Lemma 3.1.1 ile ilgili olarak (X, d) quasi metrik uzayında bir self dönüşüm örneği vereceğiz. Bu dönüşüm (X, d^s) uzayında Kannan dönüşümü olurken d-Kannan dönüşümü olamaz.

Örnek 3.1.5

$X = [0, \infty)$ ve X üzerinde her $x, y \in X$ için $d(x, y) = max\{y - x, 0\}$ ile tanımlı quasi metrik olsun. Bu durumda (X, d) uzayının smyth tam olduğunu biliyoruz.

$T: X \to X,$ $\quad T(x)=\begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ \frac{x}{4}, & x \in (1,\infty) \end{cases}$ olarak tanımlansın.

Eğer $x > y > 1$ ise $d(Tx, Ty) = \frac{x-y}{4}$ olur ancak $d(x, Tx) = d(y, Ty)$=0 olduğundan T dönüşümü (X, d) uzayında d-Kannan değildir. Bununla beraber $c = \frac{1}{3}$ için (X, d^s) uzayında T dönüşümü Kannan dönüşümü değildir. (d^snin X uzayında Euclidean metrik olmadığına dikkat ediniz)

Teorem 3.1.5

(X, d) uzayı d-dizisel tam quasi metrik uzay olsun. Bu takdirde (X, d) uzayında her d-Kannan dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

T, (X, d) üzerinde d-Kannan dönüşümü olsun. Bu takdirde $\forall\, x \in X$ için büzülme şartı sağlanacak şekilde bir c ∈[0,1\2) vardır. $x_0 \in X$ seçelim. Lemma 3.1.1 (c) den $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (X, d^s) uzayında bir cauchy dizisidir. (X, d) uzayı d-dizisel tam olduğundan, τ_d uzayında $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsar.

Yani $n \to \infty$ olduğunda $d(z, T^n x_0) \to 0$ olur.

Şimdide Tz nin T dönüşümünün tek bir sabit noktası olduğunu göstereceğiz. Bunun için ilk olarak $d(z, Tz) = 0$ olduğunu gösterelim. Gerçekten $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(z, Tz) \leq d(z, T^{n}x_0) + d(T^{n}x_0, Tz\,)$$

$$< \; d(z, T^{n}x_0) + c(d(\,T^{n-1}x_0, T^{n}x_0) + d(z, Tz))$$

$d(z, T^{n}x_0) \to 0$ ve $(T^{n}x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi (X, d^{s}) metrik uzayında bir cauchy dizisi olduğundan $d(z, Tz) \leq c\; d(z, Tz\,)$ sonucuna ulaşırız.

Sonuç olarak $d(z, Tz) = 0$ olur. Lemma 3.1.1 (a) dan

$$d^{s}(Tz, T^2z) \leq c\big(d(z, Tz) + d\;(Tz, T^2)\big)$$

yazarız. Buradan

$d^{s}(Tz, T^2z) \leq c(d(Tz, T^2z)$ ve böylece $d^{s}(Tz, T^2z) = 0$ olur. Yani Tz, T nin sabit noktasıdır.

Son olarak eğer $Tu = u'$ ise Lemma 3.1.1 (a) dan

$d^{s}(u, Tz) = d^{s}(Tu, T^2z) \leq c(d(u, Tu) + d(Tz, T^2z))$ ve

$d(u, Tu) = d(Tz, T^2z) = 0$ elde ederiz. Buradan $d^{s}(u, Tz) = 0$ sonucunu çıkarırız. Yani $u = Tz$ olur. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.5'i sağlayan bir örnek verelim.

Örnek 3.1.6

$X = [0, \infty)$ ve X üzerindeki quasi metrik her $x, y \in X$ için $d(x, y) = max\{y - x, 0\}$ ile tanımlansın. X üzerinde d^{s} metriği öklidyen metriktir. (X, d) uzayı d-dizisel tam olduğundan (geçekten X de her dizi τ_d ye göre 0 noktasına yakınsadığı için sol-K dizisel kompakt olur) $T: X \to X$ dönüşümü Örnek 3.1.5 teki dönüşüm olarak tanımlansın. $x, y \in X$ olsun ve genelliği bozmaksızın $x \leq\, y$ olduğunu varsayalım. Eğer $x, y \in [0, 1]$ ise bu takdirde $d^{s}(\,Tx, Ty) = 0$ olur.

Eğer $x \in [0,1]$ ve $y \in [1,\infty)$ ise

$d^s(Tx,Ty\,) = \frac{y}{4} \leq \frac{1}{3}(x + \frac{3y}{4}) = \frac{1}{3}(d(x,Tx) + d(y,Ty))$ elde ederiz.

Sonuç olarak eğer $x, y \in (1,\infty)$ ise

$d^s(\,Tx,Ty) = \frac{y-x}{4} \leq \frac{1}{3}(\frac{3x}{4} + \frac{3y}{4}) = \frac{1}{3}(d(x,Tx) + d(y,Ty))$ elde ederiz. Böylece $c = \frac{1}{3}$ ile beraber T, (X,d) üzerinde d-Kannan dönüşümü olur. Teorem 3.1.5'in tüm kriterleri sağlanır ve $z = 0\ T\,'$ nin tek sabit noktasıdır.

Örnek 3.1.7

$X \in [0,1] \cup \{2\}$ ve d, X üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanan bir quasi metrik olsun.

$d(2,x) = 0\ \forall x \in X$ için ve $d(x,y) = |x-y|$ diğer durumlarda açık olarak (X,d) uzayı d-dizisel tam uzay olur. $T: X \to X$ dönüşümü $T2 = 0$ ve $x \in [0,1]$ için $Tx = \frac{x}{4}$ ile tanımlansın. $c = \frac{1}{3}$ için T 'nin (X,d) üzerinde d-Kannan dönüşümü olduğunu görebiliriz. Şu halde teorem 3.1.5'in tüm şartları sağlanır. İlginç bir şekilde görebiliriz ki herhangi bir $x_0 \in X$ için $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi τ_d uzayında 2 noktasına yakınsar ancak bu nokta sabit nokta değildir. Bu durumda Teorem 3.1.5'in ispatında gösterilen $T2$ noktasının tek sabit nokta olması durumunu ifade eder.${\tau_d}^s$ uzayında $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $T2$ ye yakınsar.

Teorem 3.1.6

(X,d) quasi metrik uzayının d-dizisel tam olması için gerek ve yeter şart (X,d) uzayında her d-Kannan dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olmasıdır.

İspat

(X,d) uzayının d-dizisel tam olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (X,d^s) uzayında τ_d ye göre yakınsamayan bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cauchy dizisi vardır. Buradan her $x \in X$ için $\forall\, n \geq n_x$ olduğundan $d(x,x_n) > 0$ olacak şekilde bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır. (gerçekten aksi durumda her bir $n \in \mathbb{N}$ için bir $m_n \geq n$ bulabiliriz. Öyleki (X,d^s) uzayında

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$bir cauchy dizisi olduğundan $d\left(x, x_{m_n}\right) = 0$ olacaktır. Buradan τ_d uzayında $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X noktasına yakınsar ve bu çelişkidir)

Şimdi her bir $x \in X$ için $C_x = \{x_n : n \geq n_x\}$ seçelim.

Açık olarak $d(x, C_x) > 0$ olur. (Gerçekten eğer bazı $x \in X$ ler için $d(x, C_x) = 0$ olsaydı yukarıda sözü edildiği gibi τ_d uzayında $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin x noktasına yakınsadığı anlaşılır ve bu durum çelişki olur)

(X, d^s) uzayında $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bir cauchy dizisi olduğundan her bir $x \in X$ için $n(x) > n_x$ olduğundan $d^s(x_n, x_m\ ) < \frac{1}{4}d(x, C_x)$ olacak şekilde bir $m, n \geq n_x$ vardır.

$T: X \to X$ ve her $x \in X$ için $Tx = x_{n(x)}$ ile tanımlansın. $n(x) \geq n_x$ olduğundan $d(x, x_{n(x)}) > 0$ elde ederiz. Böylece T sabit noktaya sahip değildir.

Buna rağmen T'nin (X, d) uzayında $c = \frac{1}{4}$ için d-kannan dönüşümü olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten $x, y \in X$ ve genelliği bozmaksızın $n(x) < n(y)$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$d^s(Tx, Ty) = d^s\left(x_{n(x)}, x_{n(y)}\ \right) < \frac{1}{4}d(x, C_x)$$

$$\leq \frac{1}{4}d\left(x, x_{n(x)}\right) = \frac{1}{4}d(x, Tx)$$

elde edilir.

$d(Tx, Ty\ ) \leq d^s(Tx, Ty\ )$ ve $d(\ Ty, Tx) \leq d^s(Tx, Ty\ )$ olduğundan $c = \frac{1}{4}$ için T'nin d-kannan dönüşümü olduğu sonucuna varırız. Bu çelişki ispatı tamamlar.

3.2. Bu Başlıkta Quasi Metrik Uzaylarda Bi-tam Kavramı ve Bu Kavramla Birlikte [12] Numaralı Makaledeki Teoremler İncelenmiştir

Metrik uzaylarda Tanım 2.1.15 de verilen (1)-(5)şartlarına sahip olan fonksiyonlar yardımıyla birçok yazar tarafından sabit nokta teoremleri verilmiştir.(X, d) tam metrik uzalarda Krasnoselskii ve Stetsenko [21], [22]. T dönüşümünün (3) şartı sağlaması durumunda bir sabit noktaya sahip olduğunu, benzer olarak sırasıyla Khan[28], Dutta ve Chaudhuny [20] de T'nin (4) ve (5) i sağlaması durumunda sabit noktaya sahip olduğunu gösterdiler.

Yine Matkowski[24] ve Browder[23] de sırasıyla (1) ve (2) şartlarının sağlanması durumunda T'nin sabit noktaya sahip olduğunu gösterdiler.

Teorem 3.2.1 (Matkowski)

(X,d) tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ye dönüşümü, Tanım 2.1.15 in (1) numaralı şartına sahip bir fonksiyon olsun. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.2.2 (Browder)

(X,d) tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ye dönüşümü, Tanım 2.1.15 in (2) numaralı şartına sahip bir fonksiyon olsun. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Bu kısımda amacımız bu iki teoremin bi-tam quasi metrik uzaylarda genellemesini araştırmaktır.

Bilindiği üzere eğer (X,d^s) metrik uzayı tam ise (X,d), quasi metrik uzayına bicomplate (bi-tam) uzay denir. Genel olarak bi-tam quasi metrik uzay yapısı smyth tam quasi metrik olarak da adlandırılabilir.

Teorem 3.2.3

(X,d) bi-tam quasi metrik uzay $T: X \to X$ ve $t > 0$ için:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n\,(t) = 0$$

şartını sağlayacak şekilde bir $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan bir dönüşüm olsun. $\forall\, x,y \in X$ için

$$d(\,Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))$$

oluyorsa T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

(X, d) bi-tam olduğundan (Smyth tam) (X, d^s) tam metrik uzaydır. $x, y \in X$ olsun. Genelliği bozmaksızın $d^s(\,Tx, Ty) = d(Tx, Ty)$olduğunu kabul edelim.

$d(x, y) < d^s(x, y)$ olduğundan ve φ azalmayan olduğu için

$$d^s(\,Tx, Ty) = d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) \leq \varphi(d^s(x, y))$$

sonucuna ulaşırız.

Sonuç olarak Matkowski sabit nokta teoeminden (Teorem 3.2.1) T tek bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 3.2.4

(X, d) bi-tam quasi metrik uzay $T: X \to X,\ \varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan sağdan sürekli ve $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olacak şekilde bir fonksiyon ve $\forall\ x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$$

olsun. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

Eğer φ-azalmayan, sağdan sürekli ve $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ şartını sağlayan bir fonksiyon ise bu takdirde

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n\,(t) = 0$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece Teorem 3.2.3 den T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Uyarı 3.2.1

Browder'e ait Teorem 3.2.2 ifadesinden Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4 'ün ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Aşağıda vereceğimiz teorem [20], [28], [22] de verilen teoremlerin bir genellemesidir. Ancak bu teoremi vermeden önce ihtiyaç duyacağımız [25] Jachymski ye ait lemmayı verelim.

Lemma 3.2.1

$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ nin boş olmayan alt cümlesi D olsun. Aşağıda verilen durumlar denktir.

$i)$ $\forall\, t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olacak şekilde $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyonu vardır ve $D \subseteq E_\varphi$ olur. Burada

$$E_\varphi = \{(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : v \leq \varphi(u)\}$$

$ii)$ $\phi^{-1}(0) = \{0\}$ ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$sürekli ve $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ olacak şekilde bir azalmayan fonksiyonu ile $D \subseteq E_{\phi,\eta}$ olacak şekilde $\eta^{-1}(0) = \{0\}$ ve alttan yarı sürekli $\eta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$fonksiyonu mevcuttur. Burada $E_{\phi,\eta}$,

$$E_{\phi,\eta} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \phi(v) - \eta(u)\}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 3.2.5

(X, d) bi-tam quasi metrik uzay olsun. $T: X \to X$ ve $\eta, \psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları ise ψ −azalmayan sürekli ve $\eta^{-1}(0) = \varphi^{-1}(0) = \{0\}$ şartını sağlayan ve alttan yarı sürekli fonksiyonlar olsun. Ayrıca $\forall x, y \in X$ için

$$\psi\big(d(Tx, Ty)\big) \leq \psi\big(d(x, y)\big) - \eta(d(x, y))$$

şartı sağlansın. Bu takdirde T tek bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

İlk olarak $\forall x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ olduğunu gözlemleyelim.

$\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\phi(t) = (t) + \psi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ olarak tanımlansın. ϕ azalmayan ve sürekli fonksiyondur. Ayrıca $\phi^{-1}(0) = \{0\}$, $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$ şartını sağlar. $D = \{(d(x,y), d(Tx,Ty)): x, y \in X\}$ ile

$$E_{\phi,\eta} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+: \phi(v) \leq \phi(u) - \eta(u)\}$$

olarak tanımlayalım.

$D \subseteq E_{\phi,\eta}$ olduğunu göstermeliyiz. $x, y \in X$ verilsin.

$$\phi(d(Tx,Ty)) = d(Tx,Ty) + \psi(d(Tx,Ty)) \leq d(x,y) + \psi(d(x,y) - \eta(d(x,y))$$

$$= \phi(d(x,y) - \eta(d(x,y))$$

Şu halde $D \subseteq E_{\phi,\eta}$ olur. Lemma 3.2.1 gereği $\varphi(t) < (t), \forall t > 0$ için $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ şartını sağlayan azalmayan sürekli fonksiyonu vardır ve $D \subseteq E_\varphi$ olur. Burada

$E_\varphi = \{(u,v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+: v \leq \varphi(u)\}$ dir. Böylece $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y))$$

olur. Teorem 3.2.4 gereği T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.1

(X,d) bi-tam quasi metrik uzay olsun. $T: X \to X$ ve $\eta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ alt yarı sürekli fonksiyon ve $\eta^{-1}(0) = \{0\}$ olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \eta(d(x,y))$$

olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.2

(X,d) bi-tam quasi metrik uzay olsun. $T: X \to X$ ve $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ azalmayan ve sürekli bir fonksiyon ve $\psi^{-1}(0) = \{0\}$ olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$\psi(d(Tx,Ty)) \leq \propto \psi(d(x,y))$$

sağlanacak şekilde bir $\propto \in [0, 1)$ skaler olsun.

Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.2.5'in ispatında $\eta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+; \forall t \in \mathbb{R}^+$ için $\eta(t) = (1 - c)t$ alınırsa görülebilir.

Sonuç 3.2.3

(X, d) bi-tam quasi metrik uzay olsun.$T: X \to X$ bir fonksiyon ve

$\propto \in [0, 1)$ bir sabit sayı olmak üzere $\forall x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \propto d(x, y)$ olsun. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Uyarı 3.2.2

Jleli ve Samet [10] de yayınlanan makalelerinde (X, d) bi-tam T_1 quasi metrik uzay olduğunda Sonuç 3.2.1'in ispatını $\eta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\eta^{-1}(0) = \{0\}$ sürekli fonksiyonu için yapmışlardır.

Sonuç 3.2.3 ifadesi Banach sabit nokta teoreminin bi-tam quasi metrik uzaylardaki versiyonudur. Açık olarak ispatı Teorem 3.2.3 ve Teorem 3.2.4'ten görülebilir.

Yukarıda verilen teoremlerde sözü geçen fonksiyonların varlığını aşağıdaki örneklerle destekleyelim.

Örnek 3.2.1

$X = [0, \frac{1}{3}]$, (X, d) üzerinde bir quasi metrik olsun.

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & x \leq y \\ x, & diğer\ haller \end{cases}$$

Şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (X, d) uzayı bi-tam T_1 quasi metrik uzaydır. Çünkü (X, d^s) uzayında (x_n) dizisi belirli bir yerden sonra sabit olup da bu sayıya yakınsayan bir cauchy dizisi olduğunda alışılmış topolojiye göre $x_n \to 0$ olur ve bu durumda $d^s(x_n, 0) \to 0$, $(n \to \infty)$ olacaktır.

$T: X \to X, \forall x \in X$ için $T(x) = x^2$olarak tanımlayalım. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \psi(t) = \sqrt{t}$,

$t \in \mathbb{R}^+$ ve $\propto = \sqrt{2/3}$ olsun. Eğer $x \leq y$ ise

$$\psi\big(d(Tx, Ty)\big) = \psi(y^2 - x^2) = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{y + x}\sqrt{y - x}$$

$$\leq \sqrt{2/3}\sqrt{y - x} = \propto \psi(d(x, y))$$

Elde ederiz. Eğer $x > y$ ise

$$\psi\big(d(Tx, Ty)\big) = \psi(x^2) = x \leq \sqrt{1}/3\,\sqrt{x} < \propto \psi(x) = \propto \psi(d(x, y))$$

Bu durum sonuç 3.2.2'nin tüm şartlarını sağladığını gösterir. Buradan T bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu nokta 0 noktasıdır.

3. 2 Başlığında ünlü Boyd-Wong sabit nokta teoreminin bi-tam (Smyth-tam) quasi metrik uzayına genişlemesinin var olup olmaması problemini inceledik. Bu teorem Browder sabit nokta teoreminin bir genişlemesidir ve Matkowski sabit nokta teoreminden bağımsız olarak φ −büzülme kavramıyla ($\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sağdan yarı sürekli fonksiyon) çalışmaktadır.

Boyd-Wong teoremine karşıt olarak bi-tam quasi metrik uzayda φ −sağdan yarı sürekli fonksiyon olmak üzere T bir φ −büzülme olmasına rağmen T bir sabit noktaya sahip değildir.

Örnek 3.2.2

$X = \{0, 1\}$ cümlesi üzerinde $d(0,0) = d(1,1) = d(0,1) = 0$ ve $d(1,0) = 1$ olarak, d quasi metriği tanımlansın. (X, d) bi-tam quasi metriktir.

$T: X \to X$, $T0 = 1$, $T1 = 0$ olarak tanımlansın. T'nin φ −büzülme olduğunu gösterelim. Burada φ fonksiyonu: $\forall t > 0$ için $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ ile tanımlansın.

φ sağdan yarı sürekli fonksiyondur. $\forall t > 0$ için $\varphi(t) < t$'dir.

$$d(T1, T0) = d(0,1) = 0$$

$$d(T0, T1) = d(1,0) = 1 = \varphi(0) = \varphi(d(0,1))$$

Bu örnek, Boyd-Wong[26] sabit nokta teoreminin bi-tam quasi metrik uzaylara genişlemesini elde etmek için bazı ek şartlara gerek duyduğunu gösterir.

4. SONUÇ

Son yıllarda birçok matematikçi tarafından metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremlerinin birçoğu quasi metrik uzaylara aktarılmaya çalışılmaktadır. Bu çalışmaların bir kısmı da metrik uzayların tamlığı kavramını içermektedir. Bilindiği üzere tamlık kavramı ve sabit noktanın varlığı arasında önemli bir bağlantı vardır. Metrik uzaylarda tamlık kavramı Kannan[3] dönüşümü adı verilen dönüşümle veya Caristi dönüşümüyle elde edilmektedir. Kirk, A.W. [27], Kannan, R. [3], Subrahmanyam, P. V. [5], Caristi, J. [6], quasi metrik uzaylarda bu tezin girişinde de sözü edildiği gibi birçok tanım ortaya konduğu için, tamlık kavramı çok daha karmaşık ifadelerle verilebilmektedir. Bu tez çalışmasında birçok tamlık kavramı içerisinden Smyth tam ya da bi-tam quasi metrik uzay kavramı içeren iki makaleyi 3. 1 ve 3. 2 başlıkların da incelemeye çalıştık. Bu kavramların daha farklı tanımlarla, farklı tamlık kavramlarıyla ilişkileri de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Koçak, M., Genel topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Kampüs Yayıncılık, 3.Baskı, (2011).

[2] Banach, S., Sur Les Operations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Application Aux Equations İntegrales, Fund, Math. 3, (1922), 133-181.

[3] Kannan, R., Some results on fixed points. Bull. Calcutta Math. Soc. 60, (1968), 71- 76.

[4] Ciric, L., B., A Generalization Of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (2), (1974), 267-273.

[5] Subrahmanyam, P.V., Completeness and fixed points. Monatsh. Math. 80, (1975), 325-330.

[6] Caristi, J., Fixed Point Theorems For Mappings Satisfying İnwardness Conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215, (1976), 241-251.

[7] Matkowski, J., Nonlinear Contractions İn Metrically Convex Spaces. Publ. Math. Debrecen 45, (1994),103–114.

[8] Edelstein, M., A Theorem On Fixed Points Under İsometries, Am. Math. Mon. 70, (1963),298-300.

[9] Cobzaş, S., Completeness In Quasi-Metric Spaces And Ekeland Variational Principle, Topology Appl., 158, (2011), 1073– 1084.

[10] Jleli, M., Samet, B., Remarks On G-Metric Spaces And Fixed Point Theorems, Fixed Point Theory And Applications (2012), 210.

[11] Reilly, I., L., Subrahmanyam, P., V., Vamanamurthy, M., K., Cauchy Sequences in Quasi-Pseudo Metric Spaces, Monatsh. Math., 93, (1982), 127–140.

[12] Alegre, C., Dağ, H., Romaguera, S., Tirado, P., On the fixed point theory in bicomplete quasi-metric spaces, Journal of Nonlinear Science and Applications 9 (2016), 5245-5251.

[13] Alegre, C., Dağ, H., Romaguera, S., Tirado, P., Characterizations of quasi-metric completeness in terms of Kannan-type fixed point theorems. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 46 / 1 (2017), 67-76.

[14] Górnicki, J. Fixed point theorems for Kannan type mappings. J. Fixed Point Theory Appl. 19, (2017), 2145-2152.

[15] Yalçın, T. (2018). Quasi Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri. Doktora Tezi. *Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Kırıkkale.

[16] Başkal, T. (2019). Kannan Sabit Nokta Teoreminin Çeşitli Genelleştirilmeleri. Yüksek Lisans Tezi. *Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Kırıkkale.

[17] Cobzaş, S., Functional Analysis in Asymetric Normed Spaces, Birkhauser, Springer (2013).

[18] Altun, I., Mınak, G., Olgun, M., Classification of completeness of quasi metric space and some new fixed point results. Nonlinear Functional Analysis and Applications. 22, (2016),

[19] Romaguera S. and Tirado, P., A characterization of Smyth complete quasi-metric spaces via Caristi's fixed point theorem, Fixed Point Theory Appl. (2015), 2015:183.

[20] Dutta, P. N., Choudhury, B. S., A generalisation of contraction principle in metric spaces, Fixed Point Theory Appl., (2008), 8 pages.

[21] M. A. Krasnoselski, V. Y. Stetsenko, About the theory of equations with concave operators, (Russian) Sib. Mat.Zh., 10, (1969),

[22] Krasnoselski, M.A, Nikko, G.M. Va., Zabreko, P.P., Rutitski, Y. B., Stetsenko, V. Y., Approximate solution of operator equations, Translated from the Russian by D. Louvish, Wolters-Noordho Publishing, Groningen, (1972).

[23] Browder, F. E., On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations, Nederl. Akad.Wetensch. Proc. Ser. A Math., 30 (1968), 27-35.

[24] Matkowski, J., Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 127 (1975),68 pages.

[25] Jachymski, J., Equivalent conditions for generalized contractions on (ordered) metric spaces, Nonlinear Anal., 74, (2011), 768-774.

[26] Boyd, D. W., Wong, J. S., On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458-464. 1, 2.

[27] Kirk, A.W.,Caristi's Fixed point theorem and metric convexity, Colloq. Math. 36 (1976),81-86.

[28] Khan, M.S., Swaleh, M., Sessa, S., Fixed point theorems by altering distances between the points, Bull. Austral. Math. Soc., 30 (1984), 1-9.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı

Doğum Tarihi

Yabancı Dil

Eğitim Durumu

Lisans

Yüksek Lisans

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar

Yayınları (SCI)

Araştırma Alanları