T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM OLMAYAN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE TAM OLMAYAN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

Mustafa TOPAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Recep ŞAHİN

ARALIK - 2022

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAM OLMAYAN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE TAM OLMAYAN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

Mustafa TOPAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Recep ŞAHİN

ARALIK - 2022

Mustafa TOPAK tarafından hazırlanan "TAM OLMAYAN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE TAM OLMAYAN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ ÜZERİNE" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Recep ŞAHİN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Ali OLGUN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Mehmet ÜNVER İmza
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi:20.12.2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mustafa TOPAK
20.12.2022

ÖZET

TAM OLMAYAN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE TAM OLMAYAN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

TOPAK, Mustafa
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman:Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Aralık 2022, 51 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde yapılan çalışmalar ve tezin genel amacı hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak temel tanımlar, teoremler ve ifadelere yer verilmiştir. Bunlar Gamma fonksiyonu, beta fonksiyonu, Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonlar, Appell hipergeometrik fonksiyonu ve Riemann-Liouville kesirli integral operatörüdür.

Üçüncü bölümde ise yeni tanımlanan tam olmayan gama, beta fonksiyonları ve tam olmayan Pochhammer sembolü kullanılarak tam olmayan Gauss ve Appell hipergeometrik fonksiyonları tanımlanmıştır. Ayrıca klasik Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün tam olmayan hali elde edilmiş ve çeşitli özellikleri incelenmiştir

Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, beta fonksiyonu, Pochhammer sembolü, Riemann-Liouville kesirli integrali, tam olmayan gama fonksiyonu, tam olmayan beta fonksiyonu, tam olmayan Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonları, tam olmayan Riemann-Liouville kesirli integral öperatörü, doğurucu fonksiyon.

ABSTRACT

SOME INCOMPLETE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND INCOMPLETE RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS

TOPAK, Mustafa
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Recep ŞAHİN
December 2022, 51 pages

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is reserved for the introduction. In this chapter, information is given about the studies and the general purpose of the thesis.

In the second part, the basic definitions, theorems and expressions that will be used throughout the thesis are given. These are Gamma function, beta function, Gaussian and Confluent hypergeometric functions, Appell hypergeometric function and Riemann-Liouville fractional integral operator.

In the third chapter, incomplete Gaussian and Appell hypergeometric functions are defined by using newly defined incomplete gamma, beta functions and incomplete Pochhammer symbol. In addition, the incomplete version of the classical Riemann-Liouville fractional integral operator was obtained and various properties were investigated.

In the fourth chapter , it is divided into discussion and conclusion part.

Key Words: Gamma function, Beta function, Pochhammer symbol, Riemann-Liouville fractional derivative operators, incomplete Gamma function, incomplete Beta function, incomplete Gauss and Confluent hypergeometric function, incomplete Riemann-Liouville fractional derivative operators, generating function.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesi ile bana ışık tutan kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Recep ŞAHİN e, bu süreçte ders aldığım destek olan Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma, tez aşamasında desteğini esirgemeyen kıymetli meslektaşım Sait Öztürk ve eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi hep yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$B(x,y)$	Beta Fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gama Fonksiyonu
$\gamma(s,x), \Gamma(s,x)$	Tam olmayan Gama Fonksiyonları
$(\lambda)_r$	Pochhammer sembolü
$(\lambda,x)_r$, $[\lambda,x]_r$	Tam Olmayan Pochammer Sembolleri
${}_2F_1[.]$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
F_1, F_2, F_3, F_4	Appell Hipergeometrik Fonksiyonları
${}_2\gamma_1(.), {}_2\Gamma_1(.)$	Tam olmayan Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_1[.], F_1\{.\}$	Tam olmayan birinci tip Appell Hipergeometrik Fonkiyonları
$F_2[.], F_2\{.\}$	Tam olmayan ikinci tip Appell Hipergeometrik Fonksiyonları
$D_z^{\mu}\{f(z)\}$	Tam olmayan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü

1 . GİRİŞ

Uygulamalı matematiğin önemli konularından birisi de özel fonksiyonlardır. Özel fonksiyonlar konusunda gama fonksiyonu, beta fonksiyonu, Pochhammer sembolü ve hipergeometrik fonksiyonlar geniş bir yer tutmaktadır.$[1-10]$

$\operatorname{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

ile gösterilen gama fonksiyonu matematikte faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genellemesi olan bir fonksiyondur.$[1-10]$ Son yıllarda bir çok matematikçi tarafından bu fonksiyon ve genişlemeleri oldukça sık bir biçimde incelenmiştir.$[2-18]$

İlk olarak Leonard Euler tarafından (1707-1783) yıllarında tanımlanan birinci çeşit Euler integrali olarak bilinen beta fonksiyonu ise

$\operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$ olmak üzere

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu fonksiyonun da son yıllarda bir çok özelliği incelenmiş ve genişlemeleri elde edilmiştir.[5-13]

Yukarıda belirtilen her iki fonksiyon da uygulamalı matematiğin yanı sıra, astrofizikte, nükleer fizikte, olasılık teorisinde vb. alanlarda bir çok uygulamalara sahip olduğu görülmektedir.$[22, 23, 26, 28, 31, 32, 33]$

Uygulamalı matematiğin bir diğer önemli konusu ise kesirli türev konusudur. İlk olarak 17. yüzyılda Riemann-Liouville tarafından ortaya konulan kesirli integral operatörü $\operatorname{Re}(\mu) < 0$ olmak üzere

$$D_z^{\mu}\left\{f(z)\right\}=\frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int\limits_0^z f(t)(z-t)^{-\mu-1}\,dt$$

şeklinde tanımlanmıştır.$[14-25]$

300 yılı aşkın süredir incelenen bu konunun son yıllarda matematik ve mühendisliğin yanı sıra genetik, tıp, biyoloji, jeoloji, istatistik ve eczacılık alanlarında zengin uygulama alanları vardır.

Bu çalışmada ilk olarak gama, beta fonksiyonu Pochhammer sembolü incelenmiştir. Daha sonra Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonları, ardından iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyonları tanıtılmış ve çeşitli özellikleri verilmiştir. Ardından klasik manadaki Riemann-Liouville kesirli integral öperatörü ve çeşitli özel fonksiyonlara uygulamaları incelenmiştir.

3. Bölümde ise tam olmayan gama ve beta fonksiyonu tanımlanmış, bu fonksiyonlar kullanılarak tam olmayan Pochhammer sembolü ortaya koyulmuştur. Ardından tam olmayan Pochhammer sembolü yardımıyla yeni tam olmayan Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonları elde edilmiştir.[5]

Son olarak tam olmayan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü tanımlanmış ve yeni tanımlanan bu operatör yardımıyla yeni tanımlanan hipergeometrik fonksiyonların çeşitli özellikleri incelenmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmasında temel kaynak olarak "Mehmet Ali Özarslan ve Ceren Ustaoğlu" nun "Some incomplete hypergeometric functions and incomplete Riemann-Liouville fractional integral operators" adlı makalesi ve H.M Srivastava nın "Theory and Applications of Fractional Differential Equantions" isimli kitabı kullanılmıştır.$[5-31]$ Ayrıca bu konularla ilgili literatürdeki pek çok makale ve kaynaktan yararlanılmıştır.$[1-33]$

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada uygulamalı matematik alanında çokça kullanılan gama, beta fonksiyonlarının, Pochhammer sembolünün, Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının, Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün tam olmayan hali tanımlanmış ve çeşitli özellikleri elde edilmiştir.

2 . TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda ileriki kısımlarda kullanılacak olan temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1. Gama Fonksiyonu

Euler 1729 yılında x in herhangi bir pozitif tamsayı olduğunda $x!$ e bir anlam verebilmek amacıyla n nin pozitif tamsayı değerleri arasında $n!$ interpolasyonu problemini ele almıştır. Böylece özel fonksiyonların araştırılmasında karşımıza çıkacak olan gama fonksiyonunu incelemiştir.$[3, 27, 31]$

n pozitif tamsayı ve

$$f(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \tag{2.1.1}$$

olsun. (2.1.1) integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$f(n) = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = nf(n-1),\ n = 2, 3, ...$$

olup

$$f(1) = 1$$

iken

$$f(n) = n(n-1)...3.2.1$$

elde edilir. Böylece

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt, \quad n = 1, 2, ...$$

dir. Aslında n nin $\mathrm{Re}(n) > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde yukarıdaki integral ifadesi tanımlıdır. Yani integral yakınsaktır. Bu öneriler altında faktöriyel fonksiyonu

$$z! = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \Gamma(z+1), \quad (\mathrm{Re}(z) > -1)$$

şeklinde tanımlanabilir. Yukarıdaki ifadede z yerine $z-1$ alınırsa

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{2.1.2}$$

olduğu görülebilir. Şimdi Euler, Gauss ve Weierstrass tarafından verilmiş olan gama fonksiyonunun üç farklı tanımını verelim.

Tanım 2.1.1. : $\mathrm{Re}(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{2.1.3}$$

dir.$[3,27,31]$

Tanım 2.1.2. : $z \neq 0, -1, -2, ...,$ için

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \right\} \tag{2.1.4}$$

dır.$[3,27,31]$

Tanım 2.1.3. :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\delta z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right] \tag{2.1.5}$$

dır.$[3,27,31]$

Burada Euler-Mascheroni sabiti δ,

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right\} \cong 0,5772156649\dots \tag{2.1.6}$$

olarak tanımlanmıştır.

(2.1.2) de verilen ifadede z yerine $z+1$ alınır ve integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^{z+1-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \\ &= [-t^z e^{-t}]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

olup

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.1.7}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. [1] (2.1.7) deki rekürans bağıntısı $z \neq 0,-1,-2,...$ için geçerlidir. $\Gamma(\frac{1}{\sigma})$ fonksiyonu $\sigma = -1,-\frac{1}{2},\ldots$ noktalarında basit kutuplara sahip olduğu için, $\sigma = 0$ noktası $\Gamma(\frac{1}{\sigma})$ nın kutuplarının bir yığılma noktasıdır. Ayrıca, (2.1.2) de $\Gamma(\frac{1}{z})$ nin kutup noktası yoktur ve $\Gamma(z)$ asla sıfır olamaz.

Böylece,

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, & (\mathrm{Re}(z) > 0) \\ \frac{\Gamma(z+1)}{z}, & (\mathrm{Re}(z) < 0, z \neq 0,-1,-2,...) \end{cases} \tag{2.1.8}$$

tanımlanır. $[3,27,31]$

2.2. Beta Fonksiyonu

$B(x,y)$ ile ifade edilen beta fonksiyonu iki kompleks değişkeni x ve y olan birinci tür Eulerian integrali ile

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0) \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır.$[3,27,31]$

(2.2.1) ifadesinde sırasıyla $t = \sin^2\theta$ ve $t = \frac{u}{u+1}$ değişken değişimi yapılırsa

$$B(x,y) = \int_0^1 (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}d\theta \tag{2.2.2}$$

ve

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}du \tag{2.2.3}$$

eşitlikleri elde edilir. Bunlara ek olarak (2.1.2) eşitliğinde $t = s^2$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty s^{2x-1} e^{-s^2} ds \tag{2.2.4}$$

olup $\Gamma(x)$ in bu ifadesinden dolayı

$$\Gamma(y) = 2 \int_0^\infty t^{2y-1} e^{-t^2} dt \tag{2.2.5}$$

de elde edilebilir. Şimdi (2.2.4) ve (2.2.5) ifadelerini taraf tarafa çarpıp

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty s^{2x-1} t^{2y-1} e^{-t^2-s^2} ds dt$$

$s = r\cos\theta$ ve $t = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçiş yapılırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r^{2x+2y-2} (\cos\theta)^{2x-1} (\sin\theta)^{2y-1} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2x-1} (\sin\theta)^{2y-1} d\theta \right] \left[2 \int_0^\infty \int_0^\infty r^{2x+2y-2} e^{-r^2} r dr \right] \\ &= B(x,y)\Gamma(x+y) \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

ifadesi elde edilir. Böylece $B(x,y)$ ile $\Gamma(x)$ arasındaki $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ bağıntısı elde edilmiş olur. Buradan da kolayca görülmektedir ki

$$B(x,y) = B(y,x) \tag{2.2.7}$$

olup beta fonksiyonu değişkenlerine göre simetri özelliğine sahiptir.

Dolayısıyla (2.1.8) ifadesine benzer şekilde

$$B(x,y) = \begin{cases} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt & , (\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0) \\ \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} & , (\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0), \\ & (x, y \neq -1, -2, \ldots) \end{cases} \tag{2.2.8}$$

yazılabilir.$[3, 27, 31]$

2.3. Pochhammer Sembolü

Bu çalışma boyunca Pochhammer sembolü $(\lambda)_n$

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+n-1) & n=1,2,..., \end{cases} \quad (2.3.1)$$

olarak tanımlanmıştır. Özel olarak, $\lambda = 1$ alınırsa

$$(1)_n = 1(1+1)(1+2)...(1+n-1) = 1.2...n = n!$$

olduğundan dolayı $(\lambda)_n$ sembolü faktöriyel fonksiyonu olarak da tanımlanmaktadır. Şimdi, (2.1.7) ifadesinde $z+1$ yerine $\lambda+n$ yazılır ve bu işlem n kez tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda+n) &= (\lambda+n-1)\Gamma(\lambda+n-2) \\ &= (\lambda+n-1)(\lambda+n-2)...(\lambda)\Gamma(\lambda) \\ &= (\lambda)_n\Gamma(\lambda) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilip,

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty t^{\lambda+n-1}e^{-t}dt \quad , \ (\lambda \neq -1,-2,...) \quad (2.3.2)$$

olur. Böylece $(\lambda)_n$ Pochhammer sembolünün Gamma fonksiyonu türünden eşitliği elde edilir.[3, 27, 31]

Lemma 1.

$$(\lambda)_{m+n} = (\lambda)_m(\lambda+m)_n \quad (2.3.3)$$

dir.[3, 27, 31]

İspat. (2.3.1) ifadesinde (2.3.2) uygulanırsa

$$\begin{aligned} (\lambda)_{m+n} &= \frac{\Gamma(\lambda+m+n)}{\Gamma(\lambda)}.\frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda+m)} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}.\frac{\Gamma(\lambda+m+n)}{\Gamma(\lambda+m)} \\ &= (\lambda)_m(\lambda+m)_n \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 2.
$$(1-x)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda)_n \frac{x^n}{n!} \quad ,(\ |x|<1) \tag{2.3.4}$$

dir.

İspat. $(1-x)^{-\lambda}$ fonksiyonu $x=0$ noktası komşuluğunda Taylor serisine açılırsa istenilen sonuç elde edilir. $\square$

2.4. Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu ve Serisi

a,b,c reel ya da kompleks olmak üzere ikinci dereceden lineer diferensiyel denklemi

$$z(z-1)\frac{d^2\omega}{dz^2} + [c-(a+b-1)z]\frac{d\omega}{dz} - ab\omega = 0 \tag{2.4.1}$$

ya da

$$\{\delta(\delta+c-1) - z(\delta+a)(\delta+b)\}\,\omega = 0 \quad ,\ \delta = z\left(\tfrac{d}{dz}\right) \tag{2.4.2}$$

şeklinde ifade edilir. Bu diferansiyel denklem, $z=0,1,\infty$ da üç tane düzgün aykırı noktaya sahiptir.[3,27,31]

(2.4.1) ifadesindeki hipergeometrik denklemin $z=0,1,\infty$ daki seri çözümleri doğrudan Frobenius yöntemi kullanılarak elde edilebilir. $t=0$ düzgün aykırı noktası komşuluğunda seri çözümü, c sıfır veya pozitif tamsayı olmadığı taktirde

$$\omega = A\ {}_2F_1(a,b;c;z) + B\ z^{1-c}{}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z) \tag{2.4.3}$$

dir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

(2.4.3) deki ${}_2F_1(a,b;c;z)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= 1 + \tfrac{ab}{1.c}z + \tfrac{a(a+1).b(b+1)}{1.2.c(c+1)}z^2 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n\, n!},\ (c \neq 0,-1,-2,...) \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

şeklinde olup, (2.4.4) ifadesi Pochhammer sembolünden faydalanarak tanımlanmıştır.[3,27,31]

(2.4.4) ifadesinde z yerine $\frac{z}{b}$ yazılır ve $|b| \to \infty$ için limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{|b|\to\infty} {}_2F_1\left(a,b;c;\tfrac{z}{b}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \lim_{|b|\to\infty} \left\{(b)_n \tfrac{1}{b^n}\right\}\end{aligned}$$

elde edilebilir. Yukarıdaki ifadede $\lim\limits_{|b|\to\infty} \left\{(b)_n \frac{1}{b^n}\right\} = 1$ olduğundan dolayı Kummer fonksiyonu olarak da bilinen konflüent hipergeometrik fonksiyonu

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad , \ (c \neq 0,-1,-2,...) \qquad (2.4.5)$$

şeklinde tanımlanır.[3,27,31]

Teorem 2.1. Gauss hipergeometrik fonksiyonu olan ${}_2F_1(a,b;c;z)$ nin

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} \ {}_1F_1(b;c;zt)\,dt \qquad (2.4.6)$$

integral gösterimi mevcuttur.[1 − 10]

İspat. ${}_2F_1(a,b;c;z)$ in (2.4.4) deki seri gösterimi

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

dir. (2.3.2) ifadesi ve (2.1.2) eşitliğindeki integral gösteriminden faydalanarak

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{a+n-1} e^{-t} \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} dt$$

yazılıp, seri düzgün yakınsak olduğundan dolayı kolaylıkla toplam ve integral ifadelerinin yerleri değiştirilirse aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{(zt)^n}{n!} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} \ {}_1F_1(b;c;zt)\,dt \ .\end{aligned}$$

Burada, ${}_1F_1(b;c;z)$ (2.4.5) te verilen Kummer (konflüent) hipergeometrik fonksiyonudur.[22 − 26] □

Teorem 2.2. Gauss hipergeometrik fonksiyonu olan ${}_2F_1\left(a,b;c;z\right)$ nin

$$ {}_2F_1\left(a,b;c;z\right)=\frac{1}{B\left(b,c-b\right)}\int\limits_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}\left(1-zt\right)^{-a}dt \tag{2.4.7}$$

şeklinde bir başka integral gösterimi de mevcuttur.[2]

İspat. (2.2.8) eşitliğinde tanımlanan beta fonksiyonu ve Pochhammer sembolünün aşağıdaki özelliği kullanılarak

$$\frac{(b)_n}{(c)_n}=\frac{B\left(b+n,c-b\right)}{B\left(b,c-b\right)}=\frac{1}{B\left(b,c-b\right)}\int\limits_0^1 t^{b+n-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}dt \tag{2.4.8}$$

elde edilir.[2] Şimdi, (2.4.8) deki eşitlik (2.4.4) te yerine yazılıp, seri düzgün yakınsak olduğundan dolayı gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ {}_2F_1\left(a,b;c;z\right)=\frac{1}{B\left(b,c-b\right)}\int\limits_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\frac{(zt)^n}{n!}dt$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede (2.3.4) deki eşitlikten faydalanarak istenilen sonuç kolaylıkla elde edilebilir. □

Lemma 3. (2.4.7) de $z=1$ alınarak Gauss toplam formülü olarak bilinen

$$ {}_2F_1\left(a,b;c;1\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad \left(\mathrm{Re}\left(c-a-b\right)>0;c\neq 0,-1,-2,...\right) \tag{2.4.9}$$

formülü elde edilebilir.

İspat. (2.4.7) de $z=1$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(a,b;c;1\right) &= \frac{1}{B\left(b,c-b\right)}\int\limits_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}\left(1-t\right)^{-a}dt \\ &= \frac{1}{B\left(b,c-b\right)}\int\limits_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-a-1}dt \\ &= \frac{B\left(b,c-b-a\right)}{B\left(b,c-b\right)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(b)\ \Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\ \Gamma(c-b)} \\
&= \frac{\Gamma(c)\ \Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\ \Gamma(c-b)}
\end{aligned}
$$

dir. $\square$

Teorem 2.3.

$$ {}_2F_1(a,b,c;z) = (1-z)^{c-b-a} . {}_2F_1(c-a,c-b;c;z) $$

dir.

İspat.

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt $$

Euler integral gösteriminde $t = 1-s$ dönüşümü uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)} \int_0^1 s^{c-b-1}(1-s)^{b-1}\left(1-\frac{zs}{z-1}\right)^{-a} ds \\
&= (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right)
\end{aligned}
$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin sağ yanındaki hipergeometrik fonksiyona elde edilen indirgeme formülü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;z) &= (1-z)^{-a}\left(1-\frac{z}{z-1}\right)^{b-c} {}_2F_1\left(c-a, c-b, c; \frac{\frac{z}{z-1}}{\frac{z}{z-1}-1}\right) \\
&= (1-z)^{c-b-a}\ {}_2F_1(c-a, c-b, c; z)
\end{aligned}
$$

dir.$[11-20]$ $\square$

2.5. Appell Hipergeometrik Fonksiyonları

Tek değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar teorisindeki büyük başarı iki veya daha fazla değişkenli hipergeometrik fonksiyonların ortaya çıkmasına katkı sağlamıştır. 1926 yılında P. Appell iki tane Gauss hipergeometrik fonksiyonunun çarpımını aşağıdaki şekilde ele almıştır.$[3-31]$

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(a_1,b_1;c_1;x\right).{}_2F_1\left(a_2,b_2;c_2;y\right)\\
&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_m(b_1)_m(a_2)_n(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}
\end{aligned}
\tag{2.5.1}
$$

olsun. (2.5.1) ifadesinde (2.3.3) özelliği kullanılıp a_2,b_2,c_2 ifadelerinin yerine sırasıyla $a_2=a_1+m,\ b_2=b_1+m, c_2=c_1+m$ yazılırsa

$$
\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_n\ ,\ \left(b_1\right)_m\left(b_2\right)_n\ ,\ \left(c_1\right)_m\left(c_2\right)_n
$$

için

$$
\left(a_1\right)_m\left(a_1+m\right)_n\ ,\ \left(b_1\right)_m\left(b_1+m\right)_n\ ,\ \left(c_1\right)_m\left(c_1+m\right)_n
$$

çarpım ifadeleri sırasıyla

$$
\left(a_1\right)_{m+n}\ ,\left(b_1\right)_{m+n}\ ,\left(c_1\right)_{m+n}
$$

olup

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(a_1,b_1;c_1;x\right).{}_2F_1\left(a_2,b_2;c_2;y\right)\\
&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_m(a_1+m)_n(b_1)_m(b_1+m)_n}{(c_1)_m(c_{1+m})_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\\
&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_{m+n}}{(c_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}
\end{aligned}
\tag{2.5.2}
$$

elde edilir.

Ayrıca, (2.5.2) eşitliğinde $\sigma=m+n$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(a_1,b_1;c_1;x\right).{}_2F_1\left(a_2,b_2;c_2;y\right)\\
&=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\sigma}\frac{(a_1)_\sigma(b_1)_\sigma}{(c_1)_\sigma}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{\sigma-m}}{(\sigma-m)!}\\
&=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{(a_1)_\sigma(b_1)_\sigma}{(c_1)_\sigma}\left(\sum_{m=0}^{\sigma}\frac{\sigma!}{(\sigma-m)!m!}\ x^m y^{\sigma-m}\right)\\
&=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{(a_1)_\sigma(b_1)_\sigma}{(c_1)_\sigma}\frac{(x+y)^\sigma}{\sigma!}\\
&=\ {}_2F_1\left(a_1,b_1;c_1;x+y\right)
\end{aligned}
$$

sağlanır.$[1-21]$

(2.5.1) ifadesinde $a_2=a_1+m$ ve $c_2=c_1+m$ yerlerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa meydana gelen iki değişkenli hipergeometrik fonksiyona birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu denir ve

$$\begin{aligned} F_1\left[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y\right] &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_{m+n}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ & \quad \left\{(x,y) : |x| < 1, |y| < 1\right\}. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

gösterimine sahiptir.[5, 32]

Benzer şekilde (2.5.1) ifadesinde $a_2 = a_1 + m$ alınırsa ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu, tekrar (2.5.1) de $c_2 = c_1 + m$ seçilirse üçüncü tip Appell hipergeometrik fonksiyonu ve son olarak (2.5.1) de $a_2 = a_1 + m$, $b_2 = b_1 + m$ alınırsa dördüncü tip Appell hipergeometrik fonksiyonu elde edilir.

Bu hipergeometrik fonksiyonların serisel gösterimleri aşağıda sırasıyla verilmiştir.[5, 32]

$$\begin{aligned} F_2\left[a_1,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y\right] &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ & \quad \left\{(x,y) : |x| + |y| < 1\right\} \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

$$\begin{aligned} F_3\left[a_1,a_2,b_1,b_2;c_1;x,y\right] &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m(a_2)_n(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_{m+n}} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ & \quad \left\{(x,y) : |x| < 1, |y| < 1\right\} \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$\begin{aligned} F_4\left[a_1,b_1;c_1,c_2;x,y\right] &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_{m+n}}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ & \quad \left\{(x,y) : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1\right\} \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

bu fonksiyonlar verilen bölgeler altında yakınsaktır.

Şimdi, birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu F_1 in (2.5.3) ifadesinde yer alan $\frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_{m+n}}$ terimine $\Lambda_{m,n}$ diyelim.

O halde

$$\omega = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda_{m,n} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.5.7}$$

$$\Lambda_{m+1,n} = \frac{(a_1+m+n)(b_1+m)}{(m+1)(c_1+m+n)} \Lambda_{m,n}$$

ve

$$\Lambda_{m,n+1} = \frac{(a_1+m+n)(b_2+n)}{(n+1)(c_1+m+n)}\Lambda_{m,n}$$

dir.

$\psi = x\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\phi = y\frac{\partial}{\partial y}$ operatörleri göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Appell hipergeometrik fonksiyonu F_1 için aşağıdaki kısmi diferensiyel denklemler

$$\left\{(\psi+\phi+a_1)(\psi+b_1) - \frac{1}{x}\psi(\psi+\phi+c_1-1)\right\}\omega = 0$$

$$\left\{(\psi+\phi+a_1)(\psi+b_2) - \frac{1}{x}\psi(\psi+\phi+c_1-1)\right\}\omega = 0$$

sağlanır.[5, 31, 32]

Birinci ve ikinci dereceden kısmi türevler için $p = \frac{\partial}{\partial x}, q = \frac{\partial}{\partial x}, s = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, r = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, t = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ gösterimlerinden faydalanarak F_1 in sağladığı kısmi türevli denklem sistemi

$$F_1 : \begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + [c_1 - (a_1+b_1+1)x]p \\ \qquad -b_1yq - a_1b_1\omega = 0 \\ y(1-y)t + x(1-y)s + [c_1 - (a_1+b_2+1)y]q \\ \qquad -b_2xp - a_1b_1\omega = 0 \end{cases} \tag{2.5.8}$$

elde edilir. Diğer Appell fonksiyonları için aşağıdaki kısmi türevli denklemler benzer biçimde sağlanır.

$$F_2 : \begin{cases} x(1-x)r - xys + [c_1 - (a_1+b_1+1)x]p \\ \qquad -b_1yq - a_1b_1\omega = 0 \\ y(1-y)t - xys + [c_1 - (a_1+b_2+1)y]q \\ \qquad -b_2xp - a_1b_2\omega = 0 \end{cases} \tag{2.5.9}$$

$$F_3 : \begin{cases} x(1-x)r + ys + [c_1 - (a_1+b_1+1)x]p - a_1b_1\omega = 0 \\ y(1-y)t + xs + [c_1 - (a_1+b_2+1)y]q - a_1b_2\omega = 0 \end{cases} \tag{2.5.10}$$

ve

$$F_4:\begin{cases} x(1-x)r+y^2t-2xys+[c_1-(a_1+b_1+1)x]\,p \\ \qquad -(a_1+b_1+1)yq-a_1b_1\omega=0 \\ y(1-y)t-x^2r-2xys+[c_1-(a_1+b_2+1)y]\,q \\ \qquad -(a_1+b_1+1)xp-a_1b_2\omega=0 \end{cases} \tag{2.5.11}$$

dır.[3,5,27,31,32]

Teorem 2.4. Appell hipergeometrik fonksiyonları F_1, F_2 ve F_3 ün integral gösterimleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir.[3,5,27,31,32]

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y]=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1-b_2)} \int_0^1\int_0^{1-q} p^{b_1-1}q^{b_2-1}(1-p-q)^{c_1-b_1-b_2-1}(1-px-qy)^{-a_1}\,dpdq \tag{2.5.12}$$

$$F_2[a_1,b_1,b_2;c_1,c_2;x,y]=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)} \int_0^1\int_0^1 p^{b_1-1}q^{b_2-1}(1-p)^{c_1-b_1-1}(1-q)^{c_2-b_2-1}(1-px-qy)^{-a_1}\,dpdq \tag{2.5.13}$$

$$F_3[a_1,a_2,b_1,b_2;c_1;x,y]=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1-b_2)} \int_0^1\int_0^{1-q} p^{b_1-1}q^{b_2-1}(1-p-q)^{c_1-b_1-b_2-1}(1-px)^{-a_1}(1-qy)^{-a_2}\,dpdq \tag{2.5.14}$$

$$(p\geq 0, q\geq 0, p+q\leq 1)$$

İspat. F_1 in (2.5.3) deki serisel gösteriminde beta fonksiyonunun integral formülü

$$\frac{(b_1)_m}{(c_1)_m}=\frac{1}{B(b_1,c_1-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}\,dt$$

şeklinde kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, (2.5.12) deki eşitlik kolaylıkla elde edilir. Aynı yöntemler (2.5.4) ve (2.5.5) deki serisel gösterimlerde uygulanırsa, (2.5.13) ve (2.5.14) integral ifadeleri sağlanır. □

Teorem 2.5. Appell hipergeometrik fonksiyonu F_1 in dönüşüm formülleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir.[3,5,27,31,32]

$$\begin{aligned} F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y] &= (1-x)^{-b_1}(1-y)^{-b_2} \\ &\quad\times F_1\left[c_1-a_1,b_1,b_2;c_1;-\frac{x}{1-x},-\frac{y}{1-y}\right] \end{aligned} \tag{2.5.15}$$

$$F_1\left[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y\right] = (1-x)^{-a_1} \times F_1\left[a_1,c_1-b_1-b_2,b_2;c_1;-\frac{x}{1-x},-\frac{y-x}{1-x}\right] \tag{2.5.16}$$

$$F_1\left[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y\right] = (1-x_2)^{-a_1} \times F_1\left[a_1,b_1,c_1-b_1-b_2;c_1;\frac{x-y}{1-y},-\frac{y}{1-y}\right] \tag{2.5.17}$$

$$F_1\left[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y\right] = (1-x)^{c_1-b_1-a_1}(1-x)^{-b_2} \times F_1\left[c_1-a_1,c_1-b_1-b_2,,b_2;c_1;x,\frac{x-y}{1-y}\right] \tag{2.5.18}$$

$$F_1\left[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y\right] = (1-x)^{-b_1}(1-y)^{c_1-b_2-a_1} \times F_1\left[c_1-a_1,b_1,c_1-b_1-b_2;c_1;\frac{y-x}{1-x},y\right] \tag{2.5.19}$$

İspat. F_1 birinci çeşit Appel hipergeometrik fonksiyonu için

$$F_1\left[a_1,b_1,b_2;c_1;x,y\right]=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c_1-a_1)}\int\limits_0^1 p^{a_1-1}(1-p)^{c_1-a_1-1}(1-px)^{-b_1}(1-py)^{-b_2}\,dp$$

integral gösteriminde sırasıyla $p=1-q, p=\frac{q}{1-x+qx}, p=\frac{q}{1-y+qy}, p=\frac{1-q}{1-qx}$ ve $p=\frac{1-q}{1-qy}$ dönüşümleri yerlerine konulursa, istenilen sonuçlar kolaylıkla elde edilir. □

Teorem 2.6. Appell hipergeometrik fonksiyonu F_2 nin dönüşüm formülleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir. [3,5,27,31,32]

$$F_2\left[a_1,b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2\right] = (1-x_1)^{-a_1} \times F_2\left[\begin{array}{c} a_1,c_1 \\ -b_1,b_2;c_1,c_2;-\frac{x_1}{1-x_1},-\frac{x_2}{1-x_2} \end{array}\right] \tag{2.5.20}$$

$$F_2\left[a_1,b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2\right] = (1-x_2)^{-a_2} \times F_2\left[\begin{array}{c} a_1,b_1,c_2 \\ -b_2;c_1,c_2;\frac{x_1}{1-x_2},-\frac{x_2}{1-x_2} \end{array}\right] \tag{2.5.21}$$

$$F_2[a_1,b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] = (1-x_1-x_2)^{-a_1} \times F_2\left[\begin{array}{c} a_1, c_1-b_1, c_2 \\ -b_2; c_1, c_2; -\frac{x_1}{1-x_1-x_2}, -\frac{x_2}{1-x_1-x_2} \end{array}\right] \tag{2.5.22}$$

İspat. (2.5.13) eşitliğinde sırasıyla

$$\mu = 1-\acute{\mu}, \nu = \acute{\nu}$$
$$\mu = \acute{\mu}, \nu = 1-\acute{\nu}$$
$$\mu = 1-\acute{\mu}, \nu = 1-\acute{\nu}$$

dönüşümleri uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa istenilen sonuçlara kolaylıkla ulaşılabilir. □

2.6. Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü

α reel veya kompleks keyfi bir sayı olmak üzere kesirli türev en basit manada

$$\frac{d^{\alpha}}{dz^{\alpha}}\{e^{az}\} = D_z^{\alpha}\{e^{az}\} = a^{\alpha}e^{az} \tag{2.6.1}$$

şeklinde tanımlanır. Literatürde kesirli türevlerin ortaya çıkışı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{a_n z} \tag{2.6.2}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon için Liouville α kesirli türevi

$$D_z^{\alpha}\{f(z)\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^{\alpha}\, e^{a_n z} \tag{2.6.3}$$

şeklindedir.[33]

Euler 1731 de türev formülünü

$$D_z^n\left\{z^{\lambda}\right\} = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)z^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}z^{\lambda-n} \tag{2.6.4}$$
$$(n=0,1,2,..)$$

şeklinde genişletmiştir. Daha sonra bu formülün genel formu

$$D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda}\right\}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}z^{\lambda-\mu} \tag{2.6.5}$$

şeklindedir. (Burada μ keyfi bir karmaşık sayıdır.)

Bu kesirli türeve başka bir yaklaşım Cauchy tarafından

$$\begin{aligned} D_z^{-n}\{f(z)\} &= \int_0^z\int_0^{t_n}\ldots\int_0^{t_3}\int_0^{t_2} f(t_1)\,dt_1dt_2\ldots dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z f(t)(z-t)^{n-1}\,dt, n=1,2,3,\ldots \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

yineleme integrali olarak verilmiştir.[33]

(2.6.6) da $-n$ yerine μ alınırsa

$$D_z^{\mu}\{f(z)\}=\frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int_0^z f(t)(z-t)^{-\mu-1}\,dt, (\mathrm{Re}(\mu)<0) \tag{2.6.7}$$

elde edilir.

$\mathrm{Re}(\mu)<0$ için (2.6.7) integrali 0 dan z ye kadar karmaşık düzlemde Riemann-Liouville integrali olarak tanımlanır.

$m-1<\mathrm{Re}(\mu)<m$ $(m=1,2,3\ldots)$, için (2.6.7) integrali

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\{f(z)\} &= \frac{d^m}{dz^m}D_z^{\mu-m}\{f(z)\} \\ &= \frac{d^m}{dz^m}\left\{\frac{1}{\Gamma(-\mu+m)}\int_0^z f(t)(z-t)^{-\mu+m-1}\,dt\right\} \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

olarak yazılabilir.[33]

(2.6.7) de $f(z)=z^{\lambda}$ alındığında

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda}\right\} &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int_0^z t^{\lambda}(z-t)^{-\mu-1}\,dt=\frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(-\mu)}B(\lambda+1,-\mu) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}z^{\lambda-\mu}, (\mathrm{Re}(\lambda)>-1, \mathrm{Re}(\mu)<0) \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

dir. Bu ise (2.6.5) de verilen ifadedir.

2.6.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar ile İlgili Uygulamalar

Bu kısımda ilk olarak kesirli integral için bir teorem ispat edilecektir. Bu teorem bir analitik fonksiyon için kesirli türev tanımını açıkça ortaya koymaktadır.

Teorem 2.7. Eğer $f(z)$ fonksiyonu, $|z| < \rho$ analitik diski için

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < \rho \tag{2.6.10}$$

kuvvet serisine sahip ise

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} f(z)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \qquad (2.6.11) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n, (\operatorname{Re}(\lambda) > 0, \operatorname{Re}(\mu) < 0, |z| < \rho) \end{aligned}$$

dir.[33]

İspat. (2.6.7) ve (2.6.10) dan

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\left\{z^{\mu-1} f(z)\right\} &= D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z (z-t)^{-\mu-1} t^{\lambda-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 \xi^{\lambda-1} (1-\xi)^{-\mu-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \xi^n\right) d\xi \end{aligned}$$

dir. Burada integrale $t = \xi z$ değişken değişimi yapılmıştır. Ayrıca

i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \xi^n$$

serisi mutlak yakınsaktır.

ii)

$$\int_0^1 \left|\xi^{\lambda-1} (1-\xi)^{-\mu-1}\right| d\xi$$

integrali $\mathrm{Re}(\lambda) > 0, \mathrm{Re}(\mu) < 0$ koşulları altında yakınsaktır. Böylece integral ile toplam yer değiştirebilir. Buradan

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} f(z)\right\} &= \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \int_0^1 \xi^{\lambda+n-1} (1-\xi)^{-\mu-1} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n \\ &\quad (\mathrm{Re}(\lambda) > 0, \mathrm{Re}(\mu) < 0, |z| < \rho) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.[33] □

Teorem 2.8. (2.6.10) eşitliğinin sağladığı hipotezler altında

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} f(z)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

dir. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0, |z| < \rho$ için (2.6.12) eşitliği doğrudur. Doğurucu fonksiyonları türetirken ihtiyaç duyacağımız kesirli türev formülleri

$$\begin{aligned} & D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1} (1-az)^{-\alpha} (1-bz)^{-\beta} (1-cz)^{-\gamma}\right\} \\ = & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_D^{(3)} [\lambda, \alpha, \beta, \gamma; \mu; az, bz, cz] \\ & (\mathrm{Re}(\lambda) > 0, |az| < 1, |bz| < 1, |cz| < 1) \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

ve

$$\begin{aligned} & D_y^{\lambda-\mu}\left\{y^{\lambda-1} (1-y)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{cc} \alpha, \beta; & \dfrac{x}{1-y} \\ \gamma; & \end{array}\right]\right\} \\ = & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} y^{\mu-1}\, F_2 [\alpha, \beta, \lambda; \gamma, \mu; x, y]\ ,\ (\mathrm{Re}(\lambda) > 0, |x| + |y| < 1) \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

dir.[33]

İspat. (2.3.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}(1-cz)^{-\gamma}\right\} \\
= \; & D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_n(\gamma)_p}{m!n!p!}a^m b^n c^p z^{m+n+p}\right\} \\
= \; & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m+n+p}(\alpha)_m(\beta)_n(\gamma)_p}{(\mu)_{m+n+p}}\frac{(az)^m}{m!}\frac{(bz)^n}{n!}\frac{(cz)^p}{p!}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise (2.6.13) ün ispatını tamamlar. (2.6.13) te $c=0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}\right\} \\
= \; & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F_1[\lambda,\alpha,\beta,\mu;az,bz],\ (\mathrm{Re}(\lambda)>0,|az|<1,|bz|<1)
\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

dir. Öte yandan $a=1$ *ve* $b=c=0$ durumunda (2.6.13) tekrar düzenlenirse

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\right\}=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\,{}_2F_1\left[\begin{array}{c}\lambda,\alpha;\\ \mu;\end{array}z\right],(\mathrm{Re}(\lambda)>0,|z|<1) \tag{2.6.16}$$

olur. $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ *ve* $|x|+|y|<1$ şartları altında

$$\begin{aligned}
& D_y^{\lambda-\mu}\left\{y^{\lambda-1}(1-y)^{-\alpha}\,{}_2F_1\left[\begin{array}{c}\alpha,\beta;\\ \gamma;\end{array}\frac{x}{1-y}\right]\right\} \\
& =D_y^{\lambda-\mu}\left\{\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_m}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{\lambda+n-1}}{n!}\right\} \\
& =\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(\gamma)_m}\frac{x^m}{m!n!}D_y^{\lambda-\mu}\left\{y^{\lambda+n-1}\right\} \\
& =\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}y^{\mu-1}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\lambda)_n}{(\gamma)_m(\mu)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}, \\
& =\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}y^{\mu-1}F_2[\alpha,\beta,\lambda;\gamma,\mu;x,y]
\end{aligned}$$

olup, bu ise (2.6.14) ün ispatını tamamlar.[33] □

2.6.2. Lineer Doğurucu Fonksiyonlar

Aşağıdaki eşitlikleri göz önüne alalım.

$$[(1-x)-t]^{-\lambda}=(1-t)^{-\lambda}\left(1-\frac{x}{1-t}\right)^{-\lambda} \tag{2.6.17}$$

ve

$$[1-(1-x)t]^{-\lambda}=(1-t)^{-\lambda}\left(1+\frac{xt}{1-t}\right)^{-\lambda} \tag{2.6.18}$$

olsun. (2.6.17) doğurucu fonksiyon elde etmek için, yeniden düzenlenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}(1-x)^{-\lambda-n}t^n=(1-t)^{-\lambda}\left(1-\frac{x}{1-t}\right)^{-\lambda},\ |t|<|1-x| \tag{2.6.19}$$

dir. Şimdi (2.6.19) un her iki tarafı $x^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $D_x^{\alpha-\beta}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & D_x^{\alpha-\beta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}x^{\alpha-1}(1-x)^{-\lambda-n}t^n\right\} \\ = \; & (1-t)^{-\lambda}D_x^{\alpha-\beta}\left\{x^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{1-t}\right)^{-\lambda}\right\} \end{aligned} \tag{2.6.20}$$

elde edilir. Ayrıca $\mathrm{Re}(\alpha)>0,\ |t|<|1-x|$ şartları altında (2.6.20) de türev operatörü ile toplam yer değiştirilirse

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}D_x^{\alpha-\beta}\left\{x^{\alpha-1}(1-x)^{-\lambda-n}\right\}t^n=(1-t)^{-\lambda}D_x^{\alpha-\beta}\left\{x^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{1-t}\right)^{-\lambda}\right\}$$

olur. (2.6.16) göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}x^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\lambda+n,\alpha; \\ \beta;\end{matrix}\ x\right]t^n \\ = \; & \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}x^{\beta-1}(1-t)^{-\lambda}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\lambda,\alpha; \\ \beta;\end{matrix}\ \frac{x}{1-t}\right], \\ & (|x|<\min(1,|1-t|)) \end{aligned} \tag{2.6.21}$$

olur ve böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{cc}\lambda+n,\alpha; & \\ \beta; & x\end{array}\right]t^n=(1-t)^{-\lambda}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{cc}\lambda,\alpha; & \dfrac{x}{1-t}\\ \beta; & \end{array}\right] \qquad (2.6.22)$$

dir. Daha sonra $|t|<|1-x|^{-1}$ için (2.6.18) eşitliği

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}x^{\alpha-1}(1-x)^{n-\rho}t^n=(1-t)^{-\lambda}x^{\alpha-1}(1-x)^{-\rho}\left(1+\frac{xt}{1-t}\right)^{-\lambda} \qquad (2.6.23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.6.23), (2.6.22) nin her iki tarafı $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\rho}$ ile çarpılıp düzenlenerek elde edilmiştir. Çünkü bu durum sonucu daha genel bir hale getirmemize yardımcı olacaktır.

$\mathrm{Re}(\alpha)>0$ için (2.6.23) ün her iki yanına $D_x^{\alpha-\beta}$ operatörü uygulanır ve toplam ile operatör yer değiştirilirse

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}D_x^{\alpha-\beta}\left\{x^{\alpha-1}(1-x)^{n-\rho}\right\}t^n \qquad (2.6.24)\\ &=(1-t)^{-\lambda}D_x^{\alpha-\beta}\left\{x^{\alpha-1}(1-x)^{-\rho}\left(1+\frac{xt}{1-t}\right)^{-\lambda}\right\}\end{aligned}$$

olur. $\left|\frac{xt}{1-t}\right|<1$ şartı atında (2.6.15) ve (2.6.16) göz önüne alınırsa (2.6.24) ün

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{cc}\rho-n,\alpha; & \\ \beta; & x\end{array}\right]t^n=(1-t)^{-\lambda}\ F_1\left[\alpha,\rho,\lambda;\beta;x,-\frac{xt}{1-t}\right] \qquad (2.6.25)$$

formu elde edilir.

$\lambda=\beta-\rho$ alınır ve

$$F_1\left[\alpha,\beta,\beta';\beta+\beta';x,y\right]=(1-y)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left[\begin{array}{cc}\alpha,\beta; & \dfrac{x-y}{1-y}\\ \beta+\beta; & \end{array}\right] \qquad (2.6.26)$$

eşitliği (2.6.25) de kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta-\rho)_n}{n!} \; {}_2F_1 \left[\begin{array}{c} \rho-n, \alpha; \\ \beta; \end{array} x \right] t^n \tag{2.6.27}$$

$$= \quad (1-t)^{\alpha-\beta+\rho} \; (1-t+xt)^{-\alpha} \; {}_2F_1 \left[\begin{array}{cc} \rho, \alpha; & \dfrac{x}{1-t+xt} \\ \beta; & \end{array} \right]$$

elde edilir. $\rho = 0$ için (2.6.27)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \; {}_2F_1 \left[\begin{array}{c} -n, \alpha; \\ \beta; \end{array} x \right] t^n = (1-t)^{\alpha-\beta} \, (1-t+xt)_2^{-\alpha} \tag{2.6.28}$$

ifadesine indirgenir. (2.6.28) in her iki tarafı $t^{\gamma-1}$ ile çarpılır ve $D_t^{\gamma-\delta}$ operatörü uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{(\delta)_n} \; {}_2F_1 \left[\begin{array}{c} -n, \alpha; \\ \beta; \end{array} x \right] \frac{t^n}{n!} = F_1 \left[\gamma, \beta-\alpha, \alpha; \delta; t, (1-x)\, t\right] \tag{2.6.29}$$

olur. Bu ise F_1 birinci çeşit Appell Hipergeometrik fonksiyonu için bir doğurucu fonksiyon ifadesidir.[33]

3 . TAM OLMAYAN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE TAM OLMAYAN RIEMANN-LIOUVILLE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLERİ ÜZERİNE

Bu kısımda tam olmayan gama ve beta fonksiyonlarıyla bu fonksiyonlar kullanılarak elde edilen tam olmayan Pochhammer sembolü ve tam olmayan hipergeometrik fonksiyonlar tanıtılacaktır.

Ayrıca özel fonksiyonlar konusunda önemli bir yer tutan Riemann-Liouville kesirli türev operatörünün de tam olmayan hali verilecek ve bu operatörün çeşitli özellikleri incelenecektir.

Bu bölümün incelenmesinde M.Ali Özarslan-Ceren Ustaoğlu tarafından yazılan "Some Incomplete Hypergeometric Functions and Incomplete Riemann-Liouville Fractional Integral Operators" adlı makale referans alınmıştır.[5]

Tanım 3.0.1. Tam olmayan $\gamma(s,x)$ ve $\Gamma(s,x)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır. [5]

$$\begin{aligned} \gamma(s,x) \quad &: \quad = \int_0^x t^{s-1}e^{-t}dt \ \ , \ \ (\operatorname{Re}(s)>0\,;\,x\geq 0) \\ \Gamma(s,x) \quad &: \quad = \int_x^\infty t^{s-1}e^{-t}dt \ \ , \ \ (x\geq 0;\operatorname{Re}(s)>0 \text{ iken } x=0)\ . \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}(s)>0$ olmak üzere bu fonksiyonlar,

$$\begin{aligned} &\gamma(s,x)+\Gamma(s,x)=\Gamma(s) \qquad\qquad (\operatorname{Re}(s)>0) \\ &\int_0^x t^{s-1}e^{-t}dt+\int_x^\infty t^{s-1}e^{-t}dt=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

özelliğini sağlar.[5]

Tam olmayan $\gamma(s,x)$ ve $\Gamma(s,x)$ fonksiyonları yardımıyla (2.3.1) de tanımlanan Pochhammer sembolünün tam olmayan halleri aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.0.2. $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$; $x \geq 0$ olmak üzere tam olmayan Pochhammer sembolleri

$$(\lambda;x)_{\nu} = \frac{\gamma(\lambda+\nu,x)}{\Gamma(\lambda)} \quad (\lambda, \nu \in \mathbb{C}, x \geq 0) \tag{3.0.2}$$

$$[\lambda;x]_{\nu} = \frac{\Gamma(\lambda+\nu,x)}{\Gamma(\lambda)} \quad (\lambda, \nu \in \mathbb{C}, x \geq 0) \tag{3.0.3}$$

dır.[5]

Ayrıca (3.0.2) ve (3.0.3) ten

$$(\lambda;x)_{\nu} + [\lambda;x]_{\nu} = (\lambda)_{\nu} \quad (\lambda, \nu \in \mathbb{C}, x \geq 0) \tag{3.0.4}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 3.0.3. Tam olmayan Gamma fonksiyonları yardımıyla tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$${}_2\gamma_1 \left[\begin{array}{ccc} (a,x) & b; & \\ & c; & z \end{array} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,x)_n \ (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{3.0.5}$$

ve

$${}_2\Gamma_1 \left[\begin{array}{ccc} (a,x) & b; & \\ & c; & z \end{array} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_n \ (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{3.0.6}$$

şeklinde tanımlanır.[5]

Lemma 4.

$${}_2\gamma_1 \left[\begin{array}{ccc} (a,x) & b; & \\ & c; & z \end{array} \right] + {}_2\Gamma_1 \left[\begin{array}{ccc} (a,x) & b; & \\ & c; & z \end{array} \right] = {}_2F_1 \left[\begin{array}{ccc} a, & b; & \\ & c; & z \end{array} \right]$$

dir.[5]

İspat. (3.0.5) ve (3.0.6) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} {}_2\gamma_1 \left[\begin{array}{ccc} (a,x) & b; & \\ & c; & z \end{array} \right] + {}_2\Gamma_1 \left[\begin{array}{ccc} (a,x) & b; & \\ & c; & z \end{array} \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,x)_n \ (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_n \ (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(a,x)_n + [a,x]_n\} \ (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

dir. (3.0.4) dikkate alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \ (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = {}_2F_1 \left[\begin{array}{cc} a, & b; \\ & c; \end{array} z \right]$$

olur. □

Tanım 3.0.4. $\mathrm{Re}(x) > \mathrm{Re}(z) > 0$, $0 \leq y < 1$ olmak üzere tam olmayan beta fonksiyonu

$$B_y(x,z) = \int_0^y t^{x-1}(1-t)^{z-1}\,dt, \quad (\mathrm{Re}(x) > \mathrm{Re}(z) > 0\ ,\ 0 \leq y < 1) \tag{3.0.7}$$

dır.[5]

Eğer (3.0.7) de $t = uy$ dönüşümü yapılır ve (2.4.7) özelliği kullanılırsa

$$B_y(x,z) = \frac{y^x}{x}(1-y)^z \ {}_2F_1(1, x+z; 1+x, y) \tag{3.0.8}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.[5, 12]

Tanım 3.0.5. $0 \leq y < 1$ olmak üzere tam olmayan $[b,c;y]_n$ ve $\{b,c;y\}_n$ Pochhammer sembolleri tam olmayan beta fonksiyonu yardımıyla

$$[b,c:y]_n = \frac{B_y(b+n, c-b)}{B(b,c-b)} \tag{3.0.9}$$

ve

$$\{b,c;y\}_n = \frac{B_{1-y}(c-b, b+n)}{B(b,c-b)} \tag{3.0.10}$$

şeklinde tanımlanır.[5, 12]

Bu fonksiyonlar

$$[b,c:y]_n + \{b,c;y\}_n = \frac{(b)_n}{(c)_n} \tag{3.0.11}$$

özelliğini sağlar.

(3.0.8) yardımıyla

$$[b,c:y]_n = \frac{1}{B(b,c-b)} \frac{y^{b+n}}{b+n} \ {}_2F_1(b+n, 1-c+b; b+n+1; y) \tag{3.0.12}$$

ve

$$\{b,c;y\}_n = \frac{1}{B(b,c-b)} \frac{(1-y)^{c-b}}{c-b} \, {}_2F_1(c-b, 1-b-n; 1+c-b; 1-y) \qquad (3.0.13)$$

özellikleri elde edilebilir.

Teorem 3.1. $[b,c:y]_n$ ve $\{b,c;y\}_n$ fonksiyonları

$$[b,c:y]_n = \frac{(-1)^n \, \Gamma(c)}{\Gamma(c-b+n)\Gamma(b)} y^{b+n} \frac{d^n}{dy^n}\left[y^{-b} B_y(b,c-b+n)\right] \qquad (3.0.14)$$

ve

$$\begin{aligned} \{b,c;y\}_n &= \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b+2n)} \frac{1}{B(b,c-b)} (1-y)^{c-b} \\ &\quad \times \frac{d^n}{dy^n}\left((1-y)^{-c+b+n} B_{1-y}(c-b-n, b+2n)\right) \end{aligned} \qquad (3.0.15)$$

özelliklerine sahiptir.[5]

İspat. (3.0.7) ifadesi (3.0.9) da yerine yazılırsa

$$[b,c:y]_n = \frac{y^{b+n}}{B(b,c-b)} \int_0^1 u^{b+n-1} (1-uy)^{c-b-1} \, du \qquad (3.0.16)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$y^{-b} B_y(b,c-b+n) = \int_0^1 u^{b-1} (1-uy)^{c-b+n-1} \, du \qquad (3.0.17)$$

dir.

(3.0.17) nin her iki tarafının y ye göre n kez türevi alınırsa (3.0.14) elde edilir.

(3.0.15) nin ispatı da benzer şekilde yapılabilir. □

3.1. Tam Olmayan Gauss ve Konfluent Hipergeometrik Fonksiyonlar

Tam olmayan Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonlar tam olmayan Pochhammer sembolü yardımıyla $0 \leq y < 1$ olmak üzere

$$ {}_2F_1\left(a,[b,c;y],x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n [b,c;y]_n \frac{x^n}{n!}, \tag{3.1.1}$$

$$ {}_2F_1\left(a,\{b,c;y\},x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \{b,c;y\}_n \frac{x^n}{n!}, \tag{3.1.2}$$

$$ {}_1F_1\left([a,b;y],x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} [a,b;y]_n \frac{x^n}{n!}, \tag{3.1.3}$$

$$ {}_1F_1\left(\{a,b;y\},x\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \{a,b;y\}_n \frac{x^n}{n!}, \tag{3.1.4}$$

şeklinde tanımlanır.[5]

Burada hemen belirtilmelidir ki (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) ve (3.1.4) fonksiyonları

$$ {}_2F_1\left(a,[b,c;y],x\right) + {}_2F_1\left(a,\{b,c;y\},x\right) = {}_2F_1\left(a,b;c;x\right) \tag{3.1.5}$$

ve

$$ {}_1F_1\left([a,b;y],x\right) + {}_1F_1\left(\{a,b;y\},x\right) = {}_1F_1\left(a,b;x\right) \tag{3.1.6}$$

özelliğini sağlar.

Teorem 3.2. (3.1.1) ile tanımlanan hipergeometrik fonksiyon

$$ {}_2F_1\left(a,[b,c;y],x\right) = \frac{y^b}{B(b,c-b)} \int_0^1 u^{b-1}(1-yu)^{c-b-1}(1-xyu)^{-a}\,du \tag{3.1.7}$$

$$ \left(\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0\ ,\ |\arg(1-x)| < \pi\right)$$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.[5]

İspat. (3.1.1) ifadesi (3.0.7) ve (3.0.9) dikkate alınarak düzenlenirse

$$ {}_2F_1\left(a,[b,c;y],x\right) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^y t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt \tag{3.1.8}$$

dır. (3.1.8) de $t = uy$ dönüşümü uygulanırsa

$$ {}_2F_1\left(a,[b,c;y],x\right) = \frac{y^b}{B(b,c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-yu)^{c-b-1}(1-xyu)^{-a}\,du \qquad (3.1.9) $$

elde edilir □

Teorem 3.3. (3.1.2) ile tanımlanan hipergeometrik fonksiyonu için

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(a,\{b,c;y\},x\right) &= \frac{(1-y)^{c-b}}{B(b,c-b)}\int_0^1 u^{c-b-1}\left(1-u(1-y)\right)^{b-1} \qquad (3.1.10)\\ &\quad \times\left(1-x+x.u(1-y)\right)^{-a}du \\ &\quad (\operatorname{Re}(c)>\operatorname{Re}(b)>0\ ,\ |\arg(1-x)|<\pi) \end{aligned} $$

şeklinde bir integral gösterimi mevcuttur.[5]

İspat. (3.0.7) ve (3.0.10) dan

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(a,\{b,c;y\},x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\{b,c;y\}_n\frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n\int_0^{1-y} t^{c-b-1}(1-t)^{b+n-1}dt\,\frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{1-y} t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n[(1-t)x]^n}{n!}dt \\ &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^{1-y} t^{c-b-1}(1-t)^{b-1}\left[1-(1-t)x\right]^{-a}dt \end{aligned} \qquad (3.1.11) $$

olup (3.1.11) de $t = (1-y)u$ dönüşümü uygulanırsa

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(a,\{b,c;y\},x\right) &= \frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 (1-y)^{c-b-1}u^{c-b-1}\left[1-(1-y)u\right]^{b-1} \\ &\quad \times\left[1-(1-(1-y)u)x\right]^{-a}(1-y)\,du \\ &= \frac{(1-y)^{c-b}}{B(b,c-b)}\int_0^1 u^{c-b-1}\left(1-(1-y)u\right)^{b-1}\left[1-x+xu(1-y)\right]^{-a}du \end{aligned} $$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.4.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(a,[b,c;y],1\right) &= \frac{\Gamma(c-b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (3.1.12)\\
&-\frac{(1-y)^{c-b-a}y^b}{B(b,c-b)(c-a-b)}\,{}_2F_1\left(c-a,1,1+c-b-a;1-y\right)
\end{aligned}
$$

dır.[5]

İspat. (3.1.5) de $x=1$ alınır gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(a,[b,c;y],1\right) &= {}_2F_1\left(a,b;c;1\right) - {}_2F_1\left(a,\{b,c;1-y\},1\right)\\
&= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (3.1.13)\\
&-\frac{(1-y)^{c-b-a}}{B(b,c-b)}\int_0^1 u^{c-b-a-1}\left(1-u(1-y)\right)^{b-1}du
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(3.1.10) dan

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(a,[b,c;y],1\right) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} - \frac{(1-y)^{c-b-a}}{B(b,c-b)(c-a-b)}\\
&\times {}_2F_1\left(1-b,c-b-a;1+c-b-a;1-y\right) \qquad (3.1.14)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Teorem 2.3 ten (3.1.14) ün sağ yanındaki hipergeometrik fonksiyon

$$
{}_2F_1\left(1-b,c-b-a;1+c-b-a;1-y\right) = y^b\,{}_2F_1\left(c-a,1;1+c-b-a;1-y\right) \qquad (3.1.15)
$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.5.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(a,\{b,c;y\},1\right) &= \frac{\Gamma(c-b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (3.1.16)\\
&-\frac{(1-y)^{c-b-a}y^b}{B(b,c-b)\,b}\,{}_2F_1\left(c-a,1;b+1;y\right)
\end{aligned}
$$

dır.[5]

İspat. (3.1.6) ifadesinde $x=1$ alınırsa

$$ {}_2F_1\left(a,\{b,c;y\},1\right) = {}_2F_1\left(a,b;c;1\right) - {}_2F_1\left(a,[b,c;y];1\right) $$

elde edilir. Daha sonra Teorem 3.4 ün ispatındaki yollar takip edilirse istenilen sonuca ulaşılır. □

Teorem 3.6. Tam olmayan konfluent hipergeometrik fonksiyonları için integral gösterimleri

$$ {}_1F_1\left([a,b;y];x\right) = \frac{y^a}{B(a,b-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-yu)^{b-a-1}e^{uxy}du \qquad (3.1.17) $$

$$ (\operatorname{Re}(b) > \operatorname{Re}(a) > 0) $$

ve

$$ {}_1F_1\left(\{a,b;y\};x\right) = \frac{(1-y)^{b-a}}{B(a,b-a)}\int_0^1 u^{b-a-1}(1-u(1-y))^{a-1}e^{x(1-u(1-y))}du $$

$$ (\operatorname{Re}(b) > \operatorname{Re}(a) > 0) \qquad (3.1.18) $$

şeklindedir.[5]

İspat. (3.0.16) , (3.1.3) ve üstel fonksiyonun serisel gösterimi kullanılırsa (3.1.17) nin ispatı kolaylıkla görülebilir. (3.1.18) in ispatı da benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 3.7. $k\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$ \int_0^1 y^{k-1}\,{}_2F_1\left(a,[a,b,c-k;y];x\right)dy \qquad (3.1.19) $$

$$ = \frac{1}{k}\left[{}_2F_1(a,b;c-k;x) - \frac{\Gamma(c-k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)\Gamma(c)}\,{}_2F_1(a,b+k;c;x)\right] $$

dir.[5]

İspat. (2.4.7) den $k\in\mathbb{N}$ için

$$ {}_2F_1(a,b+k;c;x) = \frac{1}{B(b+k,c-b-k)}\int_0^1 y^{b+k-1}(1-y)^{c-b-k-1}(1-xy)^{-a}dy $$

olduğunu biliyoruz. $u=y^k$, $y^{b-1}(1-y)^{c-b-k-1}(1-xy)^{-a}\,dy=dv$ için kısmi integrasyon uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}{}_2F_1(a,b+k;c;x) &= \frac{B(b,c-b-k)}{B(b+k,c-b-k)} \\ &\times\left[{}_2F_1(a,b;c-k;x)-k\int_0^1 y^{k-1}\,{}_2F_1(a,[b,c-k;y];x)\,dy\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan istenilen sonuç kolaylıkla görülebilir. □

Sonuç 1. Teorem 3.7 de $k=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 {}_2F_1(a,[b,c-1;y];x)\,dy &= {}_2F_1(a,b;c-1;x) \\ &\quad -\frac{b}{c-1}\,{}_2F_1(a,b+1;c;x)\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

elde edilir.

Teorem 3.8.

$$\int_0^1 y^{k-1}\,{}_2F_1(a,[b,c;y],x)\,dy=\frac{1}{k}\left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b+k)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+k)}\,{}_2F_1(a,b;c+k;x)\right] \tag{3.1.21}$$

dir.[5]

İspat. $k\in\mathbb{N}$ için Gauss hipergeometrik fonksiyonun integral gösterimi göz önüne alınırsa

$${}_2F_1(a,b,c+k;x)=\frac{1}{B(b,c-b+k)}\int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{c-b+k-1}(1-xy)^{-a}\,dy$$

dir. $u=(1-y)^k$, $y^{b-1}(1-y)^{c-b-1}(1-xy)^{-a}\,dy=dv$ denir ve kısmi integrasyon uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir. □

Sonuç 2. Teorem 3.8 de $k=1$ alınırsa

$$ {}_2F_1\left(a,b;c+1;x\right)=\frac{c}{c-b}\int\limits_0^1 {}_2F_1\left(a,\left[b,c;y\right],x\right)dy \tag{3.1.22} $$

elde edilir.

Teorem 3.9. ${}_2F_1\left(a,\left[b,c;y\right],x\right)$ için bir türev formülü

$$ \frac{d^n}{dx^n}\left({}_2F_1\left(a,\left[b,c;y\right];x\right)\right)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1\left(a+n,\left[b+n,c+n;y\right];x\right) \tag{3.1.23} $$

dir.[5]

İspat. (3.1.7) nin her iki tarafının x e göre türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dx}\left({}_2F_1\left(a,\left[b,c;y\right];x\right)\right) &= \frac{a}{B\left(b,c-b\right)}\int\limits_0^y t^b\left(1-t\right)^{c-b-1}\left(1-xt\right)^{-a-1}dt \\ &= \frac{ab}{c}\frac{1}{B\left(b+1,c-b\right)}\int\limits_0^y t^{(b+1)-1}\left(1-t\right)^{(c+1)-(b+1)-1} \\ &\quad\times\left(1-xt\right)^{-(a+1)}dt \\ &= \frac{ab}{c}\,{}_2F_1\left(a+1,\left[b+1,c+1;y\right];x\right) \end{aligned} $$

dir. Bu işlem n kez tekrar edilirse istenilen sonuç elde edilir. □

Teorem 3.10.

$$ \frac{d^n}{dx^n}\left({}_1F_1\left(\left[a,b;y\right];x\right)\right)=\frac{(a)_n}{(b)_n}\,{}_1F_1\left(\left[a+n,b+n;y\right];x\right) \tag{3.1.24} $$

dir.[5]

İspat. Teorem 3.9 daki yöntem takip edilerek ispat benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 3.11.

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(a,\left[b,c,y\right];z\right) &= \left(1-z\right)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,\left\{c-b;1-y\right\};\frac{z}{z-1}\right) \\ &\quad\left(\left|\arg\left(1-z\right)\right|<\pi\right) \end{aligned} \tag{3.1.25} $$

dır.[5]

İspat. (3.1.7) den

$$ {}_2F_1\left(a,[b,c,y];z\right)=\frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)}\int_{1-y}^{1}(1-s)^{b-1}s^{c-b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}s\right)^{-a}ds \qquad (3.1.26) $$

dir. (3.1.26) de $s=1-t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(a,[b,c,y];z\right) &= \frac{(1-z)^{-a}}{B(b,c-b)}\int_{0}^{y}t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\left(1-\frac{z}{z-1}(1-t)\right)^{-a}dt \\ &= (1-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,\{c-b,c;1-y\};\frac{z}{z-1}\right) \end{aligned} $$

elde edilir. □

Teorem 3.12.

$$ \begin{aligned} {}_2F_1\left(a,\{b,c;y\};z\right) &= (1-z)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,[c-b,c;1-y];\frac{z}{z-1}\right) \\ & \quad (|\arg(1-z)|<\pi) \end{aligned} \qquad (3.1.27) $$

dir.[5]

İspat. Teorem 3.11 in ispatındaki benzer yollar takip edilerek ispat görülebilir. □

Teorem 3.13. Tam olmayan konfluent hipergeometrik fonksiyonları için

$$ {}_1F_1\left(\{a,b;1-y\};z\right)=e^{z}\,{}_1F_1\left([b-a,b;y];-z\right) \qquad (3.1.28) $$

ve

$$ {}_1F_1\left([a,b;y];z\right)=e^{z}\,{}_1F_1\left(\{b-a,b;1-y\};-z\right) \qquad (3.1.29) $$

sağlanır.[5]

İspat. (3.1.28)ve (3.1.29) un ispatı Teorem 3.6 dan kolayca görülebilir. □

3.2. Tam Olmayan Appell Hipergeometrik Fonksiyonlar

$F_1[a,b,c;d;x,z;y]$, $F_1\{a,b,c;d;x,z;y\}$, $F_2[a,b,c;d,e;x,z;y]$ ve $F_2\{a,b,c;d,e;x,z;y\}$ tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonlar

$$F_1[a,b,c;d;x,z;y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} [a,d;y]_{m+n} (b)_m (c)_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!}, (\max\{|x|,|z|\} < 1) \quad (3.2.1)$$

$$F_1\{a,b,c;d;x,z;y\} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \{a,d;y\}_{m+n} (b)_m (c)_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!}, (\max\{|x|,|z|\} < 1) \quad (3.2.2)$$

$$F_2[a,b,c;d,e;x,z;y] = \sum_{m,n=0}^{\infty} (a)_{m+n} [b,d;y]_m [c,e;y]_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!}, (|x|+|z| < 1) \quad (3.2.3)$$

ve

$$F_2\{a,b,c;d,e;x,z;y\} = \sum_{m,n=0}^{\infty} (a)_{m+n} \{b,d;y\}_m \{c,e;y\}_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!}, (|x|+|z| < 1) \quad (3.2.4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.[5]

(3.2.1)-(3.2.4) ile tanımlanan fonksiyonların yakınsaklık bölgeleri yanlarında verilmiştir. (3.2.1) için bu durumu görelim.

$$\begin{aligned}
F_1[a,b,c;d;x,z;y] &\leq \sum_{m,n=0}^{\infty} \left| [a,d;y]_{m+n} (b)_m (c)_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!} \right| \\
&\leq \sum_{m,n=0}^{\infty} \left| [a,d;y]_{m+n} \right| \left| (b)_m (c)_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!} \right| \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{B(a,d-a)} \int_0^y t^{a+m+n-1} (1-t)^{d-a-1} dt \right| \left| (b)_m (c)_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!} \right| \\
&\leq \sum_{m,n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{B(a,d-a)} \int_0^1 t^{a+m+n-1} (1-t)^{d-a-1} dt \right| \left| (b)_m (c)_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!} \right| \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{B(a+m+n,d-a)}{B(a,d-a)} \left| (b)_m (c)_n \frac{x^m}{m!} \frac{z^n}{n!} \right|
\end{aligned}$$

dir.Yukarıdaki son seri birinci çeşit Appell $F_1[a,b,c;d;x,z]$ olup mutlak yakınsaktır. Böylece aynı şartlar altında $F_1[a,b,c;d;x,z;y]$ de mutlak yakınsaktır. Diğer fonksiyonların yakınsaklığı da benzer şekilde görülebilir. Şimdi $F_1[a,b,c;d;x,z;y]$, $F_1\{a,b,c;d;x,z;y\}$, $F_2[a,b,c;d,e;x,z;y]$ ve $F_2\{a,b,c;d,e;x,z;y\}$ fonksiyonları için bir integral gösterimi verelim.

Teorem 3.14. Tam olmayan $F_1[a,b,c;d;x,z;y]$, $F_1\{a,b,c;d;x,z;y\}$ fonksiyonları için

$$F_1[a,b,c;d;x,z;y] = \frac{y^a}{B(a,d-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-yu)^{d-a-1}(1-xyu)^{-b}(1-zyu)^{-c}\,du$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{Re}(a)>0,\ \mathrm{Re}(b)>0,\ \mathrm{Re}(c)>0,\ \mathrm{Re}(d)>0),\\ (|\arg(1-x)|<\pi, |\arg(1-z)|<\pi)\end{gathered} \tag{3.2.5}$$

ve

$$\begin{aligned}F_1\{a,b,c;d;x,z;y\} &= \frac{(1-y)^{d-a}}{B(a,d-a)}\int_0^1 u^{d-a-1}(1-u(1-y))^{a-1} \qquad (3.2.6)\\ &\times(1-x(1-u(1-y)))^{-b}(1-z(1-u(1-y)))^{-c}\,du\\ &(\mathrm{Re}(a)>0,\ \mathrm{Re}(b)>0,\ \mathrm{Re}(c)>0,\ \mathrm{Re}(d)>0),\\ &(|\arg(1-x)|<\pi, |\arg(1-z)|<\pi)\end{aligned}$$

şeklinde integral gösterimleri mevcuttur.[5]

İspat. (3.0.7) ve (3.0.9) ifadeleri (3.2.1) de yerine yazılırsa

$$F_1[a,b,c;d;x,z;y] = \frac{1}{B(a,d-a)}\int_0^y t^{a-1}(1-t)^{d-a-1}(1-xt)^{-b}(1-zt)^{-c}\,dt$$

elde edilir. Yukardaki integralde $t=yu$ dönüşümü yapılırsa,

$$F_1[a,b,c;d;x,z;y] = \frac{y^a}{B(a,d-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-yu)^{d-a-1}(1-xyu)^{-b}(1-zyu)^{-c}\,du$$

dir. Bu ise istenilen sonuçtur. (3.2.6) nin ispatı da benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 3.15. Tam olmayan $F_2[a,b,c;d,e;x,z;y]$, $F_2\{a,b,c;d,e;x,z;y\}$ Appell hipergeometrik fonksiyonları için

$$\begin{aligned}F_2[a,b,c;d,e;x,z;y] &= \frac{y^{b+c}}{B(b,d-b)B(c,e-c)}\int_0^1\int_0^1 u^{b-1}(1-yu)^{d-b-1}v^{c-1}\\ &\times(1-yu)^{e-c-1}[1-xyu-zvy]^{-a}\,dudv \qquad (3.2.7)\end{aligned}$$

$$\left(\mathrm{Re}\,(d) > \mathrm{Re}\,(a) > \mathrm{Re}\,(b) > \mathrm{Re}\,(c) > \mathrm{Re}\,(e)\,,\ \left|\arg\left(1-x-z\right)\right| < \pi\right)$$

ve

$$\begin{aligned} F_2\{a,b,c;d,e;x,z;y\} &= \frac{(1-y)^{d-b+e-c}}{B(b,d-b)\,B(c,e-c)} \\ &\times \int_0^1\int_0^1 u^{d-b-1}\left(1-u\left(1-y\right)\right)^{b-1} v^{e-c-1}\left(1-v\left(1-y\right)\right)^{c-1} \\ &\times \left[1-x\left(1-u\left(1-y\right)\right)-z\left(1-v\left(1-y\right)\right)\right]^{-a} dudv \quad (3.2.8) \end{aligned}$$

$$\left(\mathrm{Re}\,(a) > 0,\ \mathrm{Re}\,(b) > 0,\ \mathrm{Re}\,(c) > 0,\ \mathrm{Re}\,(d) > 0,\ \left|\arg\left(1-x-z\right)\right| < \pi\right)$$

şeklinde bir integral göstermi mevcuttur.[5]

İspat. (3.0.7) ve (3.0.9) ifadeleri (3.2.3) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_2[a,b,c;d,e;x,z;y] &= \frac{1}{B(b,d-b)\,B(c,e-c)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \int_0^y\int_0^y (a)_{m+n}\, t^{b+m-1}(1-t)^{d-b-1} \\ &\times s^{c+n-1}(1-s)^{e-c-1}\,\frac{x^m}{m!}\frac{z^n}{n!}\,dtds \end{aligned}$$

dir. Seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} F_2[a,b,c;d,e;x,z;y] &= \frac{1}{B(b,d-b)\,B(c,e-c)} \\ &\times \int_0^y\int_0^y t^{b-1}(1-t)^{d-b-1} s^{c-1}(1-s)^{e-c-1}(1-xt-zs)^{-a}\,dtds \\ &= \frac{y^{b+c}}{B(b,d-b)\,B(c,e-c)} \int_0^1\int_0^1 u^{b-1}(1-uy)^{d-b-1} \\ &\times v^{c-1}(1-vy)^{e-c-1}(1-xuy-zvy)^{-a}\,dudv \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilen sonuçtur. (3.2.8) in ispatı da benzer şekilde yapılabilir. □

3.3. Tam Olmayan Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü

Bu bölümde tam olmayan Riemann-Liouville kesirli integral operatörü tanımlanacak ve çeşitli özellikleri incelenecektir. Bilindiği üzere μ yüncü basamaktan Riemann-

Liouville kesirli integral operatörü

$$D_z^{\mu}\{f(z)\} := \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int_0^z f(t)(z-t)^{-\mu-1}dt \quad ,\mathrm{Re}(\mu)<0 \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Tam olmayan $D_z^{\mu}[f(z);y]$, $D_z^{\mu}\{f(z);y\}$ Riemann-Liouville kesirli integral operatörleri

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}[f(z);y] &= \frac{z^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)}\int_0^y f(uz)(1-u)^{-\mu-1}du \\ &= \frac{z^{-\mu}y}{\Gamma(-\mu)}\int_0^1 f(ywz)(1-wy)^{-\mu-1}dw \quad ,(\mathrm{Re}(\mu)<0) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

ve

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\{f(z);y\} &:= \frac{z^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)}\int_y^1 f(uz)(1-u)^{-\mu-1}du \\ &:= \frac{z^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)}\int_0^{1-y} f((1-t)z)t^{-\mu-1}dt \quad ,(\mathrm{Re}(\mu)<0) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

olarak tanımlanmaktadır.[5]

Sonuç 3. (3.3.2) de $y=1$ alınırsa (3.3.1) deki bilinen Riemann-Liouville kesirli integral operatörü elde edilir. Eğer (3.3.3) de $y=0$ alınırsa (3.3.1) deki bilinen Riemann-Liouville kesirli integral operatörü elde edilir. Bu yüzden (3.3.1) tanımı (3.3.2) ve (3.3.3) ün özel bir halidir.

Şimdi bazı özel fonksiyonların tam olmayan kesirli integral operatörü altındaki durumlarını inceleyelim.

Teorem 3.16. $\mathrm{Re}(\lambda)>-1$, $\mathrm{Re}(\mu)<0$ olmak üzere

$$D_z^{\mu}\left[z^{\lambda};y\right] = \frac{B_y(\lambda+1,-\mu)}{\Gamma(-\mu)}z^{\lambda-\mu} \tag{3.3.4}$$

dir.[5]

İspat. (3.0.7) ifadesi (3.3.2) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} D_z^{\mu}\left[z^{\lambda};y\right] &= \frac{z^{-\mu}}{\Gamma(-\mu)}\int_0^y (uz)^{\lambda}(1-u)^{-\mu-1}du \\ &= \frac{B_y(\lambda+1,-\mu)}{\Gamma(-\mu)}z^{\lambda-\mu} \end{aligned}$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 3.17. $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$, $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ olmak üzere

$$D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda};y\right\} = \frac{B_{1-y}(-\mu,\lambda+1)}{\Gamma(-\mu)}\, z^{\lambda-\mu} \tag{3.3.5}$$

dir.[5]

İspat. (3.3.5) in ispatı Teorem 3.16 nın ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 3.18. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\mathrm{Re}(\mu) < 0, \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $|z| < 1$ olmak üzere

$$D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha};y\right] = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1}\ {}_2F_1(\alpha,[\lambda,\mu;y];z) \tag{3.3.6}$$

ve

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha};y\right\} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1}\ {}_2F_1(\alpha,\{\lambda,\mu;y\};z) \tag{3.3.7}$$

dir.[5]

İspat. (3.3.2) de $f(z) = z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha};y\right] &= \frac{z^{\mu-\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda)} \int_0^y (uz)^{\lambda-1}(1-uz)^{-\alpha}(1-u)^{\mu-\lambda-1}\,du \\
&= \frac{z^{\mu-\lambda}\ y}{\Gamma(\mu-\lambda)} \int_0^1 (yz)^{\lambda-1}(\omega)^{\lambda-1}(1-y\omega z)^{-\alpha}(1-\omega y)^{\mu-\lambda-1}\,d\omega \\
&= \frac{z^{\mu-1}\ y^{\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda)} \int_0^1 (\omega)^{\lambda-1}(1-y\omega z)^{-\alpha}(1-\omega y)^{\mu-\lambda-1}\,d\omega
\end{aligned}$$

dir. Yukardaki son ifadede (3.1.7) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha};y\right] &= \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu-\lambda)} B(\lambda,\mu-\lambda)\ {}_2F_1(\alpha,[\lambda,\mu;y];z) \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1}\ {}_2F_1(\alpha,[\lambda,\mu;y];z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. (3.3.7) nin ispatı da benzer yollarla yapılabilir. □

Teorem 3.19. $\mathrm{Re}(\lambda) > \mathrm{Re}(\mu) > 0, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0$; $|az| < 1$ ve $|az| < 1$ olmak üzere

$$D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta};y\right] = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_1[\lambda,\alpha,\beta;\mu;az,bz;y] \quad (3.3.8)$$

ve

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta};y\right\} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_1\{\lambda,\alpha,\beta;\mu;az,bz;y\} \quad (3.3.9)$$

dir.[5]

İspat. (3.3.2) de $f(z) = z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta};y\right] \\
= & \frac{z^{\mu-\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda)} \int_0^y (uz)^{\lambda-1}(1-auz)^{-\alpha}(1-buz)^{-\beta}(1-u)^{\mu-\lambda-1}\,du \\
= & \frac{z^{\mu-\lambda}y}{\Gamma(\mu-\lambda)} \int_0^1 (y\omega)^{\lambda-1} z^{\lambda-1}(1-ay\omega z)^{-\alpha}(1-by\omega z)^{-\beta}(1-\omega y)^{\mu-\lambda-1}\,d\omega \\
= & \frac{z^{\mu-1}y^{\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda)} \int_0^1 (\omega)^{\lambda-1}(1-ay\omega z)^{-\alpha}(1-by\omega z)^{-\beta}(1-\omega y)^{\mu-\lambda-1}\,d\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.5) ifadesi son eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta};y\right] &= \frac{z^{\mu-1}}{\Gamma(\mu-\lambda)} B(\lambda,\mu-\lambda) F_1[\lambda,\alpha,\beta;\mu;az,bz;y] \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_1[\lambda,\alpha,\beta;\mu;az,bz;y]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise (3.3.8) in ispatını tamamlar. (3.3.9) un ispatı da benzer yollar kullanarak yapılabilir. □

Teorem 3.20. $\mathrm{Re}(\lambda) > \mathrm{Re}(\mu) > 0, \mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$,$\mathrm{Re}(\gamma) > 0$; $\left|\frac{t}{1-z}\right| < 1$ ve $|t| + |z| < 1$ olmak üzere

$$D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,[\beta,\gamma;y];\frac{t}{1-z}\right);y\right] \quad (3.3.10)$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_2[\alpha,\beta,\lambda;\gamma,\mu;t,z;y]$$

ve

$$D_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,[\beta,\gamma;y];\frac{t}{1-z}\right);y\right\} \tag{3.3.11}$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_2\{\alpha,\beta,\lambda;\gamma,\mu;t,z;y\}$$

dir.[5]

İspat. Teorem 3.16 ve (3.2.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,[\beta,\gamma;y];\frac{t}{1-z}\right);y\right] \\
= \ & D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\ \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n\ B_y(\beta+n,\gamma-\beta)}{n!}\left(\frac{t}{1-z}\right)^n;y\right] \\
= \ & \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)} D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1}(1-z)^{-\alpha}\ \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n\ B_y(\beta+n,\gamma-\beta)\frac{t^n}{n!}(1-z)^{-\alpha-n};y\right] \\
= \ & \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\sum_{m,n=0}^{\infty} B_y(\beta+n,\gamma-\beta)\frac{t^n}{n!}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m}{m!} D_z^{\lambda-\mu}\left[z^{\lambda-1+m};y\right] \\
= \ & \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)}\sum_{m,n=0}^{\infty} B_y(\beta+n,\gamma-\beta)\frac{t^n}{n!}\frac{(\alpha)_{n+m}}{m!}\frac{B_y(\lambda+m,\mu-\lambda)}{\Gamma(\mu-\lambda)} z^{\mu+m-1} \\
= \ & \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} z^{\mu-1} F_2[\alpha,\beta,\lambda;\gamma,\mu;t,z;y]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. (3.3.11) in ispatı da benzer yollar kullanarak yapılabilir. □

3.4. Doğurucu Fonksiyonlar

Bu kısımda ${}_2F_1(a,[b,c;y];x)$, ${}_2F_1(a,\{b,c;y\};x)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonları için lineer ve bilineer doğurucu fonksiyon bağıntıları elde edilecektir.

Teorem 3.21. $|z| < \min\{1,|1-t|\}$ ve $\mathrm{Re}(\lambda) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ olmak üzere tam olmayan hipergeometrik fonskiyonlar için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1(\lambda+n,[\alpha,\beta;y];z)t^n = (1-t)^{-\lambda}\ {}_2F_1\left(\lambda,[\alpha,\beta;y];\frac{z}{1-t}\right) \tag{3.4.1}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\ {}_2F_1\left(\lambda+n,\{\alpha,\beta;y\};z\right)t^n=(1-t)^{-\lambda}\ {}_2F_1\left(\lambda,\{\alpha,\beta;y\};\frac{z}{1-t}\right)\quad(3.4.2)$$

bağıntıları geçerlidir.[5]

İspat. Basit hesaplamalarla

$$[(1-z)-t]^{-\lambda}=(1-t)^{-\lambda}\left[1-\frac{z}{1-t}\right]^{-\lambda}$$

olduğu bilinmektedir. $|t|<|1-z|$ olmak üzere

$$(1-z)^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}\left(\frac{t}{1-z}\right)^n=(1-t)^{-\lambda}\left[1-\frac{z}{1-t}\right]^{-\lambda}\quad(3.4.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.4.3) ün her iki tarafı $z^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $D_z^{\alpha-\beta}[f(z);y]$ her iki tarafa uygulanırsa

$$D_z^{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}(1-z)^{-\lambda}\left(\frac{t}{1-z}\right)^n z^{\alpha-1};y\right]=(1-t)^{-\lambda}D_z^{\alpha-\beta}\left[z^{\alpha-1}\left[1-\frac{z}{1-t}\right]^{-\lambda};y\right]$$

şeklinde yazılabilir. $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ ve $|t|<|1-z|$ için gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}D_z^{\alpha-\beta}\left[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\lambda-n};y\right]t^n \qquad (3.4.4)\\ =\ &(1-t)^{-\lambda}D_z^{\alpha-\beta}\left[z^{\alpha-1}\left[1-\frac{z}{1-t}\right]^{-\lambda};y\right]\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. (3.4.4) ün her iki tarafındaki tam olmayan kesirli integral ope-ratörü için Teorem 3.18 deki (3.3.6) uygulanırsa istenilen sonuç elde edilebilir.

Benzer yollar takip edilir ve Teorem 3.18 deki (3.3.7) dikkate alınırsa (3.4.2) nin ispatı da yapılabilir. □

Aşağıdaki teorem tam olmayan hipergeometrik fonksiyonlar için bir diğer doğrucu fonksiyon bağıntısı vermektedir.

Teorem 3.22. $\mathrm{Re}(\lambda)>0, \mathrm{Re}(\rho)>0,\ \mathrm{Re}(\beta)>\mathrm{Re}(\alpha)>0;\ |t|<\frac{1}{1+|z|}$ olmak üzere tam olmayan hipergeometrik fonksiyonlar için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} \, {}_2F_1\left(\rho - n, [\alpha, \beta; y]; z\right) t^n = (1-t)^{-\lambda} \; F_1\left[\alpha, \rho, \lambda; \beta; z; \frac{-zt}{1-t}; y\right] \tag{3.4.5}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} \, {}_2F_1\left(\rho - n, \{\alpha, \beta; y\}; z\right) t^n = (1-t)^{-\lambda} \; F_1\left\{\alpha, \rho, \lambda; \beta; z; \frac{-zt}{1-t}; y\right\} \tag{3.4.6}$$

dir.[5]

İspat.

$$[1-(1-z)t]^{-\lambda} = (1-t)^{-\lambda}\left[1+\frac{zt}{1-t}\right]^{-\lambda}$$

dir. $|t| < |1-z|$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} (1-z)^n t^n = (1-t)^{-\lambda}\left[1-\frac{-zt}{1-t}\right]^{-\lambda} \tag{3.4.7}$$

yazılabilir. (3.4.7) nin her iki tarafı $z^{\alpha-1}(1-z)^{-\rho}$ ile çarpılır ve $D_z^{\alpha-\beta}[f(z); y]$ operatörü uygulanırsa

$$D_z^{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} z^{\alpha-1}(1-z)^{-\rho+n} t^n; y\right] = (1-t)^{-\lambda} D_z^{\alpha-\beta}\left[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\rho}\left[1-\frac{-zt}{1-z}\right]^{-\lambda}; y\right]$$

elde edilir. $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ ve $|zt| < |1-z|$ olmak üzere gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} D_z^{\alpha-\beta}\left[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\rho+n}; y\right] t^n \\ = \; & (1-t)^{-\lambda} D_z^{\alpha-\beta}\left[z^{\alpha-1}(1-z)^{-\rho}\left[1-\frac{-zt}{1-z}\right]^{-\lambda}; y\right] \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

olur. (3.4.8) ün sol tarafına Teorem 3.19, sağ tarafına da Teorem 3.20 uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir. (3.4.6) in ispatı da (3.4.5) in ispatındaki yollar takip edilerek benzer şekilde yapılabilir. □

Son olarak aşağıdaki teoremde tam olmayan hipergeometrik fonksiyonlar için bilineer doğrucu fonksiyon ilişkisi verilecektir.

Teorem 3.23. $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\mathrm{Re}(\gamma) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0, \mathrm{Re}(\delta) > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$,

$|t| < \frac{1-|z|}{1+|x|}$ ve $|z| < 1$ olmak üzere tam olmayan hipergeometrik fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} \, {}_2F_1 \left(\gamma, [-n, \delta; y]; x\right) \, {}_2F_1 \left(\gamma, [\lambda + n, \beta; y]; z\right) t^n \\ = \; & (1-t)^{-\lambda} \; F_2 \left[\lambda, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{z}{1-t}; \frac{-xt}{1-t}; y\right] \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

ve

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} \, {}_2F_1 \left(\gamma, \{-n, \delta; y\}; x\right) \, {}_2F_1 \left(\gamma, \{\lambda + n, \beta; y\}; z\right) t^n \\ = \; & (1-t)^{-\lambda} \; F_2 \left\{\lambda, \alpha, \gamma; \beta, \delta; \frac{z}{1-t}; \frac{-xt}{1-t}; y\right\} \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

dir.[5]

İspat. (3.4.1) ifadesinde t yerine $(1-x)t$ alınır ve her iki taraf $x^{\gamma-1}$ ile çarpılıp daha sonra her iki tarafa da $D_x^{\gamma-\delta}\left[f(z);y\right]$ tam olmayan kesirli integral operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & D_x^{\gamma-\delta}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} x^{\gamma-1} \, {}_2F_1\left(\lambda+n, [\alpha,\beta;y]; z\right)(1-x)^n t^n; y\right] \\ = \; & D_x^{\gamma-\delta}\left[\left(1-(1-x)t\right)^{-\lambda} x^{\gamma-1}_2 F_1\left(\lambda, [\alpha,\beta;y]; \frac{z}{1-(1-x)t}\right); y\right] \end{aligned}$$

elde edilir. $|z| < 1, \left|\frac{1-x}{1-z} t\right| < 1$ ve $\left|\frac{z}{1-t}\right| + \left|\frac{xt}{1-t}\right| < 1$ şartları altında gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{n!} D_x^{\gamma-\delta}\left[x^{\gamma-1}(1-x)^n; y\right] \; {}_2F_1\left(\lambda+n, [\alpha,\beta;y]; z\right) \\ = \; & (1-t)^{-\lambda} D_x^{\gamma-\delta}\left[x^{\gamma-1}\left(1-\frac{-xt}{1-t}\right) \, {}_2F_1\left(\lambda, [\alpha,\beta;y]; \frac{\frac{z}{1-t}}{1-\frac{-xt}{1-t}}\right); y\right] \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

olur. (3.4.11) in sol tarafına Teorem 3.19, sağ tarafına da Teorem 3.21 uygulanırsa istenilen sonuç elde edilebilir. □

4 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada uygulamalı matematik alanında çokça kullanılan gama, beta fonksiyonlarının Pochhammer sembolünün, Gauss ve Konfluent hipergeometrik fonksiyonlarının, Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün tam olmayan hali tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ele alınmıştır.
Bu tezde amaçlanan Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün tam olmayan hali ve özellikleri için bir kaynak oluşturmaktadır. Elbette kesirli türev konusu burada anlatılan kısım kadar sınırlı değildir. Ancak incelediğimiz kısım kadarıyla okuyucuya yararlı olacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

[1] Chaudhry, M.A.; Qadir, A.; Rafique, M.; Zubair, S.M. Extension of Euler's beta function. J. Comput. Appl. Math.1997, 78, 19–32

[2] Chaudhry, M.A.; Qadir, A.; Srivastava, H.M.; Paris, R.B. Extended hypergeometric and confluent hypergeometric functions. Appl. Math. Comput. 2014, 159, 589–602.

[3] Chaudhry, M.A.; Zubair, S.M. On a Class of Incomplete Gamma Functions with Aplications; Chapman and Hall: Dhahran, Saudi Arabia, 2001.

[4] Cho, N.E.; Srivastava, R. Some extended Pochhammer symbols and their applications involving generalized hypergeometric polynomials. Appl. Math. Comput. 2014, 234, 277–285.

[5] Özarslan, M.A.; Ustaoglu,C. , Some Incomplete Hypergeometric Functions and Incomplete Riemann-Liouville Fractional Integral Operators, Mathematics 2019 7(5) 483.

[6] Lin, S.; Srivastava, H.M.; Wong, M. Some Applications of Srivastava's Theorem Involving a Certain Family of Generalized and Extended Hypergeometric Polyomials. Filomat 2015, 29, 1811–1819.

[7] Özarslan, M.A.; Özergin, E. Some generating relations for extended hypergeometric functions via generalized fractional derivative operator. Math. Comput. Model. 2010, 52, 1825–1833.

[8] Özergin, E.; Özarslan, M.A.; Altin, A. Extension of gamma, beta and hypergeometric functions. J. Comput. Appl. Math. 2011, 235, 4601–4610.

[9] Özergin, E. Some Properties of Hypergeometric Functions. Ph.D. Thesis, Eastern Mediterranean University, North Cyprus, Turkey, 2011.

[10] Srivastava, R. Some classes of generating functions associated with a certain family of extended and generalized hypergeometric functions. Appl. Math. Comput. 2014, 243, 132–137.

[11] Srivastava, H.M.; Chaudry, M.A.; Agarwal, R.P. The incomplete Pochhammer symbols and their applications to hypergeometric and related functions. Integral Transforms Spec. Funct. 2012, 23, 659–683.

[12] Choi, J.; Parmar, R.K.; Chopra, P. The Incomplete Srivastava's Triple Hypergeometric Functions gamma(H)(B) and Gamma(H)(B). Filomat 2016, 7, 1779–1787.

[13] Özarslan, M.A.; Ustaoglu, C. Incomplete Caputo fractional derivative operators. Adv. Differ. Equ. 2018, 209.

[14] Çetinkaya, A. The incomplete second Appell hypergeometric functions. Appl. Math. Comput. 2013, 219, 8332–8337.

[15] Sahai, V.; Verma, A. On an extension of the generalized Pochhammer symbol and its applications to hypergeometric functions. Asian-Eur. J. Math. 2016, 9, 1650064.

[16] Srivastava, H.M.; Saxena, R.K.; Parmar, R.K. Some Families of the Incomplete H-Functions and the Incomplete H-Functions and Associated Integral Transforms and Operators of Fractional Calculus with Applications. Russ. J. Math. Phys. 2018, 25, 116–138.

[17] Srivastava, H.M.; Agarwal, R.; Jain, S. Integral transform and fractional derivative formulas involving the extended generalized hypergeometric functions and probability distributions. Math. Methods Appl. Sci. 2017, 40, 255–273.

[18] Srivastava, H.M.; Çetinkaya, A.; Kiymaz, O.I. A certain generalized Pochhammer symbol and its applications to hypergeometric functions. Appl. Math. Comput. 2014, 226, 484–491.

[19] Srivastava, R.; Cho, N.E. Generating functions for a certain class of incomplete hypergeometric polynomials. Appl. Math. Comput. 2012, 219, 3219–3225.

[20] Srivastava, R. Some properties of a family of incomplete hypergeometric functions. Russ. J. Math. Phys. 2013, 20, 121–128.

[21] Srivastava, R. Some generalizations of Pochhammer's symboland their associated families of hypergeometric functions and hypergeometric polynomials. Appl. Math. Inf. Sci. 2013, 7, 2195–2206.

[22] Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics; World Scientific: Singapore, 2000.

[23] Kilbas, A.A.; Srivastava, H.M.; Trujillo, J.J. Theory and Applications of Fractional Differantial Equations; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[24] Rossikhin, Y.A.; Shitikova, M.V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: Novel trends and recent results. Appl. Mech. Rev. 2010, 63, 010801.

[25] Sabatier, J.; Agrawal, O.P.; Tenreiro Machado, J.A. Advances in fractional calculus. In Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2007.

[26] Spanos, P.D.; Matteo, A.D.; Cheng, Y.; Pirrotta, A.; Li, J. Galerkin Scheme-Based Determination of Survival Probability of Oscillators with Fractional Derivative Element. J. Appl. Mech. 2016, 83, 121003.

[27] Yang, X.; Baleanu, D.; Srivastava, H.M. Local Fractional Integral Transforms and Their Applications; Elsevier/Academic Press: Amsterdam, The Netherlands, 2016.

[28] Sun, H.G.; Zhang, Y.; Baleanu, D.; Chen, W.; Chen, Y.Q. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2018, 64, 213–231.

[29] Lin, S.; Srivastava, H.M.; Yao, J.C. Some classes of of generating relations associated with a family of the generalized Gauss type hypergeometric functions. Appl. Math. Inform. Sci. 2015, 9, 1731–1738.

[30] Srivastava, H.M.; Parmar, R.K.; Chopra, P. A Class of Extended Fractional Derivative Operators and Associated Generating Relations Involving Hypergeometric Functions. Axioms 2012, 1, 238–258.

[31] Srivastava, H.M.; Manocha, H.L. A Treatise on Generating Functions; Ellis Horwood: New York, NY, USA, 1984.

[32] Fernandez, A , Ustaoğlu, C. , Özarslan, M.A. Analytical Development of Incomplete Riemann–Liouville Fractional Calculus. Unpublished work.

[33] Erdelyi, A.Table of Integral Transforms, Vol-1 Hardcover – January 1, 1954, 284-294.