T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEJENERE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER

Rabia Kevser YILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ali OLGUN

KIRIKKALE - 2023

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEJENERE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER

Rabia Kevser YILMAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ali OLGUN

KIRIKKALE - 2023

Rabia Kevser YILMAZ tarafından hazırlanan "DEJENERE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. Ali OLGUN İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Halil ANAÇ İmza
Matematik Anabilim Dalı, Gümüşhane Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi İlker GENÇTÜRK İmza
Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.
Tez Savunma Tarihi: 01.08.2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Tez çalışmalarımız devam ederken kaybettiğimiz değerli danışman
hocam Prof. Dr. Recep ŞAHİN'in anısına...

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Rabia Kevser YILMAZ
01.08.2023

ÖZET

DEJENERE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLER

YILMAZ, Rabia Kevser
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman:Prof. Dr. Ali OLGUN
Ağustos 2023, 66 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır, bu bölümde yapılan çalışmalar ve tezin genel amacı hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, dejenere Gamma fonksiyonu ve dejenere Laplace dönüşümü açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, ARA integral dönüşümü açıklanarak bu dönüşümle ilgili uygulamalar verilmiştir. Dördüncü bölümde ise ARA integral dönüşümünün dejenere hali tanımlanmış ve çeşitli uygulamalar verilmiştir. Bu bölüm tezin orijinal kısmıdır. Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç kısmından oluşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Laplace dönüşümü, Aboodh dönüşümü, Mohand dönüşümü, Elzaki dönüşümü, Sumudu dönüşümü, Laplace Carson dönüşümü, dejenere Gamma fonksiyonu, dejenere Laplace dönüşümü, ARA integral dönüşümü, dejenere ARA integral dönüşümü, dejenere Elzaki dönüşümü, dejenere Sumudu dönüşümü.

ABSTRACT

DEGENERATE INTEGRAL TRANSFORMS

YILMAZ, Rabia Kevser
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali OLGUN
August 2023, 66 pages

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devated to the introduction, which contains information on the studies as well as the general purpose of the thesis. In the second chapter, the degenerate Gamma function and the degenerate Laplace transform are explained. In the third chapter, the ARA integral transform is explained and applications related to this transform are given. In the fourth chapter, the degenerate form of the ARA integral transform is defined and various applications are given. This chapter is the original part of the thesis. The fifth chapter consists of discassion and conclusion.

Key Words: Gamma function, Beta function, Laplace transform, Aboodh transform, Mohand transform, Elzaki transform, Sumudu transform, Laplace Carson transform, degenerate Gamma function, degenerate Laplace transform, ARA integral transform, degenerate ARA integral transform, degenerate Elzaki transform, degenerate Sumudu transform.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma imkanı sağlayan, çalışmalarım süresince yakın ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen ve çalışmalarımız devam ederken kaybettiğimiz değerli danışman hocam Sayın Prof.Dr. Recep ŞAHİN'e en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda çalışmalarım süresince ve çalışmalarımı tamamlamam konusunda ilgi ve desteğini hiç esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ali OLGUN'a en derin saygılarımı sunar, teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan anneme ve babama da sevgilerimi sunar, teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam
$\int$	İntegral
$\Gamma(s)$	Gamma Fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta Fonksiyonu
$L\{f(t)\}$	Laplace Dönüşümü
$u_c(t)$	Birim Basamak Fonksiyonu
$L_*\{g(t)\}$	Laplace Carson Dönüşümü
$\mathfrak{G}(u)$, $S\{f(t);u\}$	Sumudu Dönüşümü
$E\{f(t)\}$, $T(v)$	Elzaki Dönüşümü
$R(s,u)$	Natural Dönüşüm
$A\{g(t)\}$	Aboodh Dönüşümü
$M\{g(t)\}$	Mohand Dönüşümü
e_λ^t	Dejenere Üstel Fonksiyon
$L_\lambda\{f(t)\}$	Dejenere Laplace Dönüşümü
$\Gamma_\lambda(s)$	Dejenere Gamma Fonksiyonu
$G_n\{g(t)\}(s)$	ARA İntegral Dönüşümü
$G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s)$	Dejenere ARA İntegral Dönüşümü
$(f*g)(t)$	Konvolüsyon Çarpımı
$\mathfrak{G}_\lambda(s)$	Dejenere Sumudu Dönüşümü
$T_\lambda(v)$	Dejenere Elzaki Dönüşümü
$A_\lambda\{g(t)\}$	Dejenere Aboodh Dönüşümü
$M_\lambda\{g(t)\}$	Dejenere Mohand Dönüşümü
$L_{\lambda,*}\{g(t)\}$	Dejenere Laplace Carson Dönüşümü

1 . GİRİŞ

Doğada gelişen birbiri ile bağlantılı olarak değişim gösteren birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesi yapıldığı zaman çoğunlukla karşımıza genel anlamda diferensiyel denklem içeren bir matematiksel model ortaya çıkar. Olayla ilgili kesin ve net sonuçların verilerek fiziksel yorumlarının yapılabilmesi için öncelikle diferensiyel denklemi çözmek gerekir. Genel olarak bazı denklem tipleri hariç diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasına yönelik belirgin bir çözüm metodu verilememektedir. Böyle olmakla birlikte bazı tipten denklemler için de özel çözüm metodları geliştirilmiştir. Bu çözüm metodlarından bazıları integral dönüşümleri içermektedir.

İntegral dönüşüm metodu ilk olarak 1870 yılında Fransız matematikçi ve fizikçi P. S. Laplace tarafından tanımlanmıştır ve literatürde Laplace Dönüşümü[19][22] olarak bilinmektedir. Genel olarak biliyoruz ki Laplace dönüşümü, bir fonksiyonu bir integral yardımıyla başka bir fonksiyona dönüştüren özel bir integral operatör olarak tanımlanır. Laplace dönüşümü adı verilen bu integral özellikle sabit ve polinom katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde oldukça kullanışlı bir tekniktir. f, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere eğer

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$

integrali yakınsak ise s nin bir fonksiyonu olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx \tag{1.1}$$

ifadesine f nin Laplace dönüşümü denir. f fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$L\{f(x)\} = F(s)$$

biçiminde gösterilmektedir[7].

Literatürde çok karşılaşılan birim basamak fonksiyonu,

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{1.2}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Laplace dönüşümü ile çözümü zor olan diferensiyel denklemlerin Laplace dönüşümleri alınıp, daha kolay çözülebilen polinom şeklindeki ifadelere dönüştürülüp, daha sonra da ters Laplace dönüşümleri yardımı ile denklemlerin çözümlerini bulma amaçlanmıştır. Laplace dönüşümüyle başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin çözümleri, dinamik sistemlerin çözümleri yoluyla sinyalleme işlemlerinin yapılması ve olasılık teorisindeki birçok problemin çözümü daha da kolaylaşmıştır.

Daha sonra 1822 de yine bir Fransız olan J. Fourier, Fourier integral dönüşümünü[6] tanımladı. Fourier dönüşümleri de yine diferensiyel denklemlerin çözümlerine büyük katkılar sağlamıştır. Bu dönüşüm yine belirli şartları sağlayan $f(t)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \ \ ya \ da \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve açısal frekansların belirlenmesinde çok önemli rol oynar. Laplace ve Fourier dönüşümleri sadece uygulamalı matematikte değil, fizik, mühendislik, astronomi vb. gibi diğer bilim dallarında da çok geniş uygulamalara sahiptir.

Daha sonraları çeşitli araştırmacılar bazı yeni integral dönüşümler tanımladılar. Bunlardan bazıları için aşağıdaki bilgiler verilebilir.

$$A = \left\{ f(t); \exists M,\ \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\} \tag{1.3}$$

kümesinin elemenlarına üstel basamaktan fonksiyonlar denir.

1993 te Watugala Sumudu, $f(t)$ üstel basamaktan fonksiyonun Sumudu dönüşümünü

$$\mathfrak{G}(u) \quad : \quad = S\{f(t); u\} := \int_0^{\infty} f(ut) e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t)\,dt \quad , \ u \in (\tau_1, \tau_2) \tag{1.4}$$

şeklinde tanımladı[21].

2008 de Khan, $f(t)$ üstel basamaktan fonksiyonunun N-dönüşümünü

$$R(s,u) := \frac{1}{u}\int_0^\infty f(t)\,e^{-\frac{st}{u}}\,dt, \ \ u \in (\tau_1, \tau_2) \tag{1.5}$$

şeklinde tanımladı[11].

2011 yılında Elzaki, $f(t)$ fonksiyonları (1.3) ile verilen A kümesinin elemanları olmak üzere Elzaki dönüşümünü

$$E\{f(t)\} = T(v) = v\int_0^\infty f(t)\,e^{-\frac{t}{v}}\,dt, \ \ v \in (\tau_1, \tau_2) \tag{1.6}$$

şeklinde tanımladı[9].

Son yıllarda, matematikçiler yeni integral dönüşümleri tanımlamak ve geliştirmekle yoğun olarak ilgilendiler. 2013 yılında Atangana ve Kılıçman, Novel dönüşümünü[4], 2015 yılında Srivastava, Luo ve Raina, yeni bir integral dönüşümü[20], 2016 yılında Zafar, ZZ dönüşümünü[25] tanımlamışlardır. Yine 2016 yılında; Ramadan, Raslan, El-Danaf ve Hadhoud tarafından RG dönüşümü[16], Yang tarafından yeni bir integral dönüşümü[23] ve Barnes tarafından bir polinom dönüşümü[5] gibi birçok dönüşüm tanımlanmıştır. Ayrıca, 2013 yılında Aboodh dönüşümü[1], 2017 yılında Rangaig dönüşümü[17] ve 2019 yılında da Shehu dönüşümü tanımlandı[14].

Bunlardan en çok bilinenleri olarak $g(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $t \geq 0$ olmak üzere, Aboodh dönüşümü[1]

$$A\{g(t)\} = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \ , \tag{1.7}$$

Laplace Carson dönüşümü[2]

$$L_*\{g(t)\} = s\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \tag{1.8}$$

ve Mohand dönüşümü[15]

$$M\{g(t)\} = s^2 \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

2020 yılında R. Saadeh, A. Qazza ve A. Burqan; klasik Laplace dönüşümü, Sumudu dönüşümü, Elzaki dönüşümü, N-dönüşümü, Yang dönüşümü ve Shehu dönüşümünün bazı varyantlarını birleştiren güçlü ve çok yönlü bir genellemesini; $n \in \mathbb{N}$ ve $(0,\infty)$ aralığında sürekli $g(t)$ fonksiyonu için

$$G_n\{g(t)\}(s) = G(n,s) = s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} g(t)\, dt\ ,\ \ s > 0$$

şeklinde bir integral dönüşüm tanımladılar ve adına ARA integral dönüşümü[18] adını verdiler.

Uygulamalı matematikte sık kullanılan Gamma fonksiyonu, matematikte faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genellenmesi olan bir fonksiyondur. Γ simgesiyle gösterilir. İyi bilindiği üzere Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt \quad , \quad s \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{1.10}$$

olarak tanımlanmaktadır. (1.10) dan kolayca

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

ve

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

oldukları gösterilebilir[3].

Yine bir genelleştirilmiş integral yardımıyla iki değişkenli bir fonksiyon olarak tanımlanan ve $B(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt \quad , \quad \mathrm{Re}(x) > 0\ ,\ \mathrm{Re}(y) > 0 \tag{1.11}$$

dir ve

$$\begin{aligned}
B(x,y) &= 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta \\
B(x,y) &= \int\limits_{0}^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \\
B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}
\end{aligned}$$

biçimlerinde de tanımlanmaktadır. Bu tanımlamalardan dördüncüsü bu tezde de sıkça kullanacağımız Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Yine aynı eşitlikten Beta fonksiyonunun simetri özelliğini sağladığı görülür[3].

Daha önce verilen Sumudu ve Elzaki dönüşümlerinin dejenere halleri ise $\lambda \in (0,\infty)$, $t \geq 0$ ve f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere; dejenere Sumudu dönüşümü[8]

$$\mathfrak{G}_{\lambda}(s) = S_{\lambda}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\int\limits_{0}^{\infty} e_{\lambda}^{-\frac{t}{s}} f(t)dt, \tag{1.12}$$

dejenere Elzaki dönüşümü[10]

$$\begin{aligned}
T_{\lambda}(s) &= E_{\lambda}\{f(t)\} = s^2\int\limits_{0}^{\infty} e_{\lambda}^{-t} f(st)dt \\
&= s\int\limits_{0}^{\infty} e_{\lambda}^{-\frac{t}{s}} f(t)dt
\end{aligned} \tag{1.13}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Matematikte ve özellikle fonksiyonel analizde konvolüsyon ya da evrişim, bir fonksiyonun başka bir fonksiyon tarafından nasıl modifiye edildiğini gösteren bir integral işlemdir. f ile g fonksiyonunun konvolüsyonu,

$$(f*g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

integrali ile ifade edilebilir.

f,g fonksiyonları $0 \leq t \leq b$ nin bütün kapalı alt aralıklarında parçalı sürekli ve üstel mertebeden olmak üzere

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

ifadesine konvolüsyon çarpımı denir.

Her dereceden türevli, gerçel ya da karmaşık bir $f(x)$ fonksiyonunun a gerçel ya da karmaşık bir sayı olmak üzere $(a-r, a+r)$ aralığındaki Taylor serisi,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \tag{1.14}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$f(x,t)$ bir $R = \{(x,t) : \ a \leq x \leq b, \ c \leq t \leq d\}$ dikdörtgeninde tanımlı bir fonksiyon, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ de $a \leq x \leq b$ de tanımlı iki fonksiyon olmak üzere

$$\phi(x) = \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} f(x,t)\, dt$$

şeklinde ifade edilen $\phi(x)$ fonksiyonu integral yardımıyla tanımlanmış bir fonksiyondur. Bu integral ile tanımlanan $\phi(x)$ fonksiyonunda f ve $\frac{\partial f}{\partial x}$ in

$$R = \{(x,t) : a \leq x \leq b, \ c \leq t \leq d\}$$

dikdörtgeninde sürekli ve değer bölgeleri $[c,d]$ de olan $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ in $a \leq x \leq b$ de sürekli ve de türevlenebilir olduklarını kabul edelim. O takdirde $\phi^{'}(x)$ türevi,

$$\phi^{'}(x) = f[x, u_1(x)]\, u_1^{'}(x) - f[x, u_0(x)]\, u_0^{'}(x) + \int_{u_0(x)}^{u_1(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt \tag{1.15}$$

dir. Bu formül, integral yardımıyla tanımlanan fonksiyonlarda türevler için Leibnitz kuralı olarak bilinir. İntegrasyon sınırlarının sabitler olması halinde

$$\phi\left(x\right)=\int\limits_{c}^{d}f\left(x,t\right)dt$$

fonksiyonunun türevinin

$$\phi^{\prime}\left(x\right)=\int\limits_{c}^{d}\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial x}dt \quad ; \qquad a<x<b$$

olduğu (1.15) ten açıkça görülmektedir[3].

Fiziksel olaylar ve dinamik sistemlerde her zaman düzgün değişimler veya doğal beklentiler olmayabilir. Bu gibi durumlarda sistemin çözümleri için verilen integral dönüşümler yeterli olmayabilmektedir. Bu sebepten dolayı son zamanlarda araştırmacılar daha önceden tanımlanan integral dönüşümlerin ve bazı özel fonksiyonların dejenere şekillerini tanımlamışlardır. Bu tezde de T. Kim ile D. S. Kim tarafından 2017 yılında tanımlanan ve bazı temel özellikleri elde edilen dejenere Gamma fonksiyonu ve dejenere Laplace dönüşümü verilecektir. Daha sonra 2020 yılında R. Saadeh, A. Qazza ve A. Burqan tarafından yeni bir integral dönüşüm olarak tanımlanan ARA integral dönüşümünden bahsedilecektir. Son olarak bu 2020 yılında tanımlanan ve yeni bir integral dönüşümü olan ARA integral dönüşümünün dejenere şekli tanımlanacaktır. ARA integral dönüşümünün dejenere halinin bazı temel özelliklerinden ve uygulamalarından da bahsedilecektir. Bu çalışmaları yaparken daha önceden yapılmış çalışmalardan faydalanılacaktır.

2 . DEJENERE GAMMA FONKSİYONU VE DEJENERE LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, dejenere üstel fonksiyon yardımıyla tanımlanmış dejenere Gamma fonksiyonu ve dejenere Laplace dönüşümü tanıtılacaktır.

2.1. Dejenere Üstel Fonksiyon

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon adını veriyoruz. Özel olarak $a = e$ olması durumunda $f(x) = e^x$ uygulamada çok kullanılan üstel fonksiyonlardan biridir. Tezin bu kısmında uygulamada çok kullanılan e^t üstel fonksiyonunun dejenere şekli hakkında genel bilgiler verilip daha sonra bu tür fonksiyonlar yardımıyla bilinen bazı özel fonksiyonların dejenere şekilleri ve bazı uygulamaları verilecektir.

Fonksiyonların dejenere şekilleri limit yardımıyla tanımlanmaktadır. Dolayısıyla e^t üstel fonksiyonu, limit yardımıyla dejenere üstel fonksiyon olarak aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. e^t üstel fonksiyonunun dejenere şeklinin gösterimi e_λ^t şeklindedir[12].

$$\lim_{\lambda \to 0^+} e_\lambda^t = \lim_{\lambda \to 0^+} (1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n = e^t \tag{2.1}$$

eşitliğinden dolayı e_λ^t dejenere üstel fonksiyonu $\lambda \in (0, \infty)$ ve $t \in R$ olmak üzere

$$e_\lambda^t = (1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir[12].

e^t üstel fonksiyonu yardımıyla tanımlanan ve uygulamada iyi bilinen bazı fonksiyonlar vardır. Bu fonksiyonlar Euler formülü olarak da bilinen aşağıdaki ifadeler kullanılarak yazılmaktadır. Euler formülü,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2.3}$$

dir. $\sin\theta$ fonksiyonunun tek fonksiyon olması sebebi ile (2.3) ten

$$e^{ia\theta} = \cos a\theta + i\sin a\theta \tag{2.4}$$

$$e^{-ia\theta} = \cos a\theta - i\sin a\theta \tag{2.5}$$

eşitlikleri de yazılabilir. (2.4) ve (2.5) teki ifadelerin taraf tarafa toplanıp çıkarılmasıyla

$$\cos a\theta = \frac{e^{ia\theta}+e^{-ia\theta}}{2} \tag{2.6}$$

$$\sin a\theta = \frac{e^{ia\theta}-e^{-ia\theta}}{2i} \tag{2.7}$$

eşitlikleri elde edilir[12].

Euler formülü ve dejenere üstel fonksiyonun tanımı göz önüne alınarak e_λ^t dejenere üstel fonksiyonu için Euler formülleri,

$$\lim_{\lambda\to 0^+} e_\lambda^{it} = \lim_{\lambda\to 0^+} (1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}} = e^{it} = \cos t + i\sin t \tag{2.8}$$

ve

$$e_\lambda^{it} = (1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}} = \cos_\lambda(t) + i\sin_\lambda(t) \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır[12].

(2.8) ve (2.9) eşitlikleri göz önüne alındığında e_λ^t dejenere üstel fonksiyonun reel ve sanal kısımlarından

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \cos_\lambda(t) = \cos t \tag{2.10}$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \sin_\lambda(t) = \sin t \tag{2.11}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür[12].

Yine (2.9) dan

$$\cos_\lambda(t) = \frac{e_\lambda^{it}+e_\lambda^{-it}}{2} \tag{2.12}$$

$$\sin_\lambda(t) = \frac{e_\lambda^{it}-e_\lambda^{-it}}{2i} \tag{2.13}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu fonksiyonlara sırasıyla dejenere kosinüs ve dejenere sinüs fonksiyonları denir[12].

2.2. Dejenere Gamma Fonksiyonu

Giriş kısmında verilen Gamma fonksiyonunun tanımı göz önüne alındığında e^{-t} üstel fonksiyonunun dejenere şeklinden hareket edilerek Gamma fonksiyonunun dejenere hali de aşağıdaki şekilde tanımlanır.
Her $\lambda \in (0,\infty)$ aralığında ve s kompleks değişkeni $0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{\lambda}$ olmak üzere (2.1) ve (2.2) den dejenere Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma_\lambda(s) = \int_0^\infty e_\lambda^{-t} t^{s-1} dt = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}} t^{s-1} dt \tag{2.14}$$

olarak tanımlanmaktadır[12].
Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişki dikkate alınarak dejenere Gamma fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde elde edilir.
Eğer (2.14) integraline $\lambda t = u$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma_\lambda(s) = \lambda^{-s} \int_0^\infty (1+u)^{-\frac{1}{\lambda}} u^{s-1} du = \lambda^{-s} B\left(s, \frac{1}{\lambda} - s\right) \tag{2.15}$$

integrali elde edilir. Böylece, dejenere Gamma fonksiyonu (2.14) ile klasik Beta fonksiyonu arasındaki ilişki görülür[12].
Gamma fonksiyonunun çok iyi bilinen bir özelliği olan

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

ifadesinin dejenere şekli için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1. $\lambda \in (0,1)$ olsun. $0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ için

$$\Gamma_\lambda(s+1) = \frac{s}{(1-\lambda)^{s+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(s) \tag{2.16}$$

dir[12].

İspat. Teorem 2.1 deki şartlar altında (2.14) ten

$$\Gamma_\lambda(s+1)=\int_0^\infty e_\lambda^{-t}t^s dt=\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}t^s dt$$

eşitliği yazılır. Sağ taraftaki son integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}t^s dt &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\lambda-1}(1+\lambda t)^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}}t^s\Big|_0^b \\
&\quad +\frac{s}{1-\lambda}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}}t^{s-1}dt \\
&= \frac{s}{1-\lambda}\int_0^\infty\left[1+\frac{\lambda}{(1-\lambda)}(1-\lambda)t\right]^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}}[(1-\lambda)t]^{s-1} \\
&\quad \times\frac{1}{(1-\lambda)^{s-1}}dt \\
&= \frac{s}{(1-\lambda)^s}\int_0^\infty\left[1+\frac{\lambda}{(1-\lambda)}(1-\lambda)t\right]^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}}[(1-\lambda)t]^{s-1}dt \\
&= \frac{s}{(1-\lambda)^{s+1}}\int_0^\infty\left(1+\frac{\lambda}{1-\lambda}y\right)^{-\frac{1-\lambda}{\lambda}}y^{s-1}dy \\
&= \frac{s}{(1-\lambda)^{s+1}}\Gamma_{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar[12]. □

Dejenere Gamma fonksiyonu için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.2. $\lambda\in\left(0,\frac{1}{k+1}\right)$ ve $k\in\mathbb{N}$ olsun. $k<\mathrm{Re}(s)<\frac{1-\lambda}{\lambda}$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda(s+1) &= \frac{s(s-1)...(s-(k+1)+1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)...(1-k\lambda)(1-(k+1)\lambda)^{s-k+1}} \\
&\quad\times\Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(s-k)
\end{aligned}\tag{2.17}$$

dir[12].

İspat. İspat için λ yı belirli aralıklarda seçerek ve (2.16) kullanılarak aşağıdakiler yazılabilir.

$\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olsun. O halde Teorem 2.1 e göre $1 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda(s+1) &= \frac{s}{(1-\lambda)^{s+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-\lambda}}(s) \\
&= \left[\frac{s}{(1-\lambda)^{s+1}}\right] \left[\frac{(1-\lambda)^s (s-1)}{(1-2\lambda)^s}\right] \Gamma_{\frac{\lambda}{1-2\lambda}}(s-1) \\
&= \frac{s(s-1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)^s} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-2\lambda}}(s-1) \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

yazılır.

$\lambda \in (0, \frac{1}{3})$ olsun. Daha sonra, $2 < \mathrm{Re}(s) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ için Teorem 2.1 tekrar kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda(s+1) &= \frac{s(s-1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)^s} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-2\lambda}}(s-1) \\
&= \frac{s(s-1)(s-2)(1-2\lambda)^{s-1}}{(1-\lambda)(1-2\lambda)^s(1-3\lambda)^{s-1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-3\lambda}}(s-2) \\
&= \frac{s(s-1)(s-2)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)^{s-1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{1-3\lambda}}(s-2) \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.18) ve (2.19) daki işlemlere devam edilirse $\lambda \in \left(0, \frac{1}{k+1}\right)$, $k < \mathrm{Re}(s) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ için

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda(s+1) &= \frac{s(s-1)(s-2)...(s-(k+1)+1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)...(1-k\lambda)(1-(k+1)\lambda)^{s-k+1}} \\
&\quad \times \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(s-(k+1)+1) \\
&= \frac{s(s-1)(s-2)...(s-(k+1)+1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)(1-3\lambda)...(1-k\lambda)(1-(k+1)\lambda)^{s-k+1}} \\
&\quad \times \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(s-k)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır[12]. $\square$

Teorem 2.2 nin bir sonucu olarak $k \in \mathbb{N}$ ve $k < \mathrm{Re}(s) < \frac{1-\lambda}{\lambda}$ ile $\lambda \in \left(0, \frac{1}{k+1}\right)$ olmak üzere

$$(1-(k+1)\lambda)^{s-k+1} \frac{\Gamma_\lambda(s+1)}{\Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(s-k)} = \frac{s(s-1)...(s-k)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)...(1-k\lambda)}$$

eşitliği yazılabilir[12].

Teorem 2.3. $k \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$ için

$$\Gamma_\lambda(k) = \frac{(k-1)!}{(1-\lambda)(1-2\lambda)...(1-k\lambda)} \tag{2.20}$$

dir[12].

İspat. $\lambda \in \left(0, \frac{1}{k+2}\right)$ olmak üzere Teorem 2.2 de $s = k+1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda(k+2) &= \frac{(k+1)k(k-1)...(k+1-k-1+1)}{(1-\lambda)(1-2\lambda)...(1-k\lambda)(1-(k+1)\lambda)^{k+1-k+1}} \\
&\quad \times \Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(k+1-k) \\
&= \frac{(k+1)!}{(1-\lambda)(1-2\lambda)...(1-k\lambda)(1-(k+1)\lambda)^2}\Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(1) \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada, $\lambda \in \left(0, \frac{1}{k+2}\right)$ için $\Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(1)$ değeri (2.14) ten

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}}(1) &= \int_0^\infty \left(1 + \frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}t\right)^{-\frac{1-(k+1)\lambda}{\lambda}} t^{1-1}dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(1 + \frac{\lambda}{1-(k+1)\lambda}t\right)^{-\frac{1-(k+1)\lambda}{\lambda}} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1 + (k+1)\lambda}\right)\left(\frac{1-(k+1)\lambda}{\lambda}\right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{\lambda t}{1-(k+1)\lambda}\right)^{-\frac{1-(k+2)\lambda}{\lambda}}\Bigg|_0^b \\
&= \frac{1-(k+1)\lambda}{1-(k+2)\lambda}
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve bulunan bu değer (2.21) ifadesinde yerine yazılırsa $\lambda \in \left(0, \frac{1}{k+2}\right)$ için

$$\Gamma_\lambda(k+2) = \frac{(k+1)!}{(1-\lambda)(1-2\lambda)...(1-k\lambda)(1-(k+1)\lambda)(1-(k+2)\lambda)} \tag{2.22}$$

olur. O halde, (2.22) de k yerine $k-2$ yazılırsa (2.20) elde edilir[12]. $\square$

(2.15) göz önüne alındığı takdirde aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 2.1. Herhangi bir $s \in \mathbb{C} \setminus \left\{0, -1, -2, ..., \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}+1, \frac{1}{\lambda}+2, ...\right\}$ için

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda}(s) &= \lambda^{-s}\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \\ &= \lambda^{-s}B\left(s, \frac{1}{\lambda}-s\right) \end{aligned} \tag{2.23}$$

ve

$$\lambda^{s}\Gamma_{\lambda}(s) = \lambda^{\frac{1}{\lambda}-s}\Gamma_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-s\right) \tag{2.24}$$

dir[13].

İspat. (2.15) ten dejenere Gamma fonksiyonu (2.14) ile klasik Beta fonksiyonu arasında

$$\Gamma_{\lambda}(s) = \lambda^{-s}B\left(s, \frac{1}{\lambda}-s\right)$$

şeklinde bir bağıntı vardır ve

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

ilişkisinden

$$\lambda^{-s}B\left(s, \frac{1}{\lambda}-s\right) = \lambda^{-s}\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)}$$

yazılır. Böylece (2.23) eşitliği ispatlanır.

(2.15) te Beta fonksiyonunun simetri özelliği ve bilinen tanımı kullanılır ve $u = \lambda t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} B\left(s, \frac{1}{\lambda}-s\right) &= B\left(\frac{1}{\lambda}-s, s\right) \\ &= \int_{0}^{\infty} \frac{u^{\frac{1}{\lambda}-s-1}}{(1+u)^{\frac{1}{\lambda}}}du \\ &= \lambda\int_{0}^{\infty} (\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-s-1}(1+\lambda t)^{-1/\lambda}dt \\ &= \lambda^{\frac{1}{\lambda}-s}\int_{0}^{\infty} (1+\lambda t)^{-1/\lambda}t^{\frac{1}{\lambda}-s-1}dt \\ &= \lambda^{\frac{1}{\lambda}-s}\Gamma_{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}-s\right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\lambda^s \Gamma_\lambda(s) = B\left(s, \frac{1}{\lambda} - s\right) = \lambda^{\frac{1}{\lambda} - s} \Gamma_\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - s\right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (2.24) ifadesi ispatlanmış olur[13]. □

Teorem 2.4. $\lambda \in (0,1)$ olsun. O zaman herhangi bir
$s \in \mathbb{C} \setminus \left\{0, -1, -2, ..., \frac{1}{\lambda} - 1, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} + 1, \ ...\right\}$ için

$$\Gamma_\lambda(s+1) = \frac{s}{1 - \lambda(s+1)} \Gamma_\lambda(s) \tag{2.25}$$

eşitliği sağlanır[13].

İspat. Lemma 2.1 den

$$\begin{aligned}
\Gamma_\lambda(s+1) &= \lambda^{-s-1} \frac{\Gamma(s+1)\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - s - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \\
&= \frac{s\lambda^{-s}}{\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - s - 1\right)} . \frac{\Gamma(s)\left(\frac{1}{\lambda} - s - 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - s - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \\
&= \frac{s}{\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - s - 1\right)} \lambda^{-s} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{\lambda} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \\
&= \frac{s}{1 - \lambda(s+1)} \Gamma_\lambda(s)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve ispat tamamlanır[13]. □

2.3. Dejenere Laplace Dönüşümü

$\lambda \in (0, \infty)$ ve $f(t)$, $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun. O halde

$$F_\lambda(s) = L_\lambda\{f(t)\} = \int_0^\infty e_\lambda^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty (1 + \lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f(t) dt \tag{2.26}$$

integrali yakınsaksa bu integrale $f(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü adı verilir ve $L_\lambda\{f(t)\} = F_\lambda(s)$ gösterimi kullanılır[12].

Tanım 2.1. Her $t > T$ için

$$|f(t)| \leq M(1 + \lambda t)^{\frac{C}{\lambda}}$$

olacak şekilde $C, M > 0$ ve $T > 0$ sabitleri varsa $f(t)$ fonksiyonuna $C-yinci$ basamaktan dejenere üstel tiptendir denir. Eğer $f(t)$, $(0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $C-yinci$ basamaktan dejenere üstel fonksiyon ise $s > C+\lambda$ için $L_\lambda\{f(t)\}$ vardır[12].

Dejenere Laplace dönüşümü lineer bir dönüşümdür. Gerçekten de (2.26) tanımı ve α, β sabitleri için

$$\begin{aligned} L_\lambda\{\alpha f(t)+\beta g(t)\} &= \int_0^\infty e_\lambda^{-st}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]dt \\ &= \alpha\int_0^\infty e_\lambda^{-st} f(t)\,dt+\beta\int_0^\infty e_\lambda^{-st} g(t)\,dt \\ &= \alpha L_\lambda\{f(t)\}+\beta L_\lambda\{g(t)\} \end{aligned} \tag{2.27}$$

ifadesi elde edilir ki bu dejenere Laplace dönüşümünün lineerliğini gösterir[12].

Bazı temel fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$f(t)=1$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü (2.26) dan

$$\begin{aligned} L_\lambda\{1\} &= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\,dt \\ &= \lim_{b\to 0}\frac{1}{-s+\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s-\lambda}{\lambda}}\Big|_0^b \\ &= \frac{1}{s-\lambda}\quad ,\ (s>\lambda) \end{aligned} \tag{2.28}$$

olarak elde edilir[12].

$f(t)=e_\lambda^{at}=(1+\lambda t)^{-\frac{a}{\lambda}}$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü ise (2.26) da

$$\begin{aligned} L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-\frac{a}{\lambda}}\right\} &= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}(1+\lambda t)^{-\frac{a}{\lambda}}\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1+\lambda t)^{-\frac{s+a}{\lambda}}\,dt \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve son integralde $u=1+\lambda t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^b u^{-\frac{s+a}{\lambda}}du &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\lambda}.\frac{\lambda}{\lambda-s-a}(1+\lambda t)^{-\frac{s+a-\lambda}{\lambda}}\Big|_0^b \\
&= \frac{1}{s+a-\lambda}\ ,\ \ (s>-a+\lambda)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir[12].

Dejenere kosinüs, dejenere sinüs, dejenere kosinüs hiperbolik ve dejenere sinüs hiperbolik fonksiyonlarının ve t^n tipindeki polinom fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümleri de incelenebilir. Bu fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümlerinin hesaplanabilmesi için, yani dönüşümdeki integrallerin yakınsaması için s değerleri uygun aralıkta tanımlanmalıdır[12].

(2.12) ve (2.13) ile verilen dejenere kosinüs ve dejenere sinüs fonksiyonları,

$$\cos_\lambda(t)=\frac{e_\lambda^{it}+e_\lambda^{-it}}{2}=\frac{1}{2}\left[(1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}}\right], \tag{2.29}$$

$$\sin_\lambda(t)=\frac{e_\lambda^{it}-e_\lambda^{-it}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[(1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}}-(1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}}\right] \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilebilir[12].

Dejenere kosinüs fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü için (2.26) ve (2.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_\lambda\{\cos_\lambda(at)\} &= \int\limits_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\cos_\lambda(at)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left((1+\lambda t)^{\frac{ai}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{ai}{\lambda}}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \left[(1+\lambda t)^{-\frac{s-ai}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{s+ai}{\lambda}}\right]dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_0^b \left[(1+\lambda t)^{-\frac{s-ai}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{s+ai}{\lambda}}\right]dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\lambda}{-s+ai+\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s-ai-\lambda}{\lambda}}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\lambda}{-s-ai+\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s+ai-\lambda}{\lambda}}\Big]\Big|_0^b \\
= & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\lambda-ai}+\frac{1}{s-\lambda+ai}\right) \\
= & \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+a^2}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde dejenere sinüs fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü için de (2.26) ve (2.30) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
L_\lambda\{\sin_\lambda(at)\} &= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\sin_\lambda(at)\,dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left[(1+\lambda t)^{-\frac{s-ai}{\lambda}}-(1+\lambda t)^{-\frac{s+ai}{\lambda}}\right]dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2i}\int_0^b \left[(1+\lambda t)^{-\frac{s-ai}{\lambda}}-(1+\lambda t)^{-\frac{s+ai}{\lambda}}\right]dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2i\lambda}\left[\frac{\lambda}{-s+ai+\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s-ai-\lambda}{\lambda}}\right. \\
&\quad \left.-\frac{\lambda}{-s-ai+\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s+ai-\lambda}{\lambda}}\right]\Big|_0^b \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-\lambda-ai}-\frac{1}{s-\lambda+ai}\right) \\
&= \frac{a}{(s-\lambda)^2+a^2}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir[12].

Kosinüs hiperbolik ve sinüs hiperbolik fonksiyonları, (2.3) ile verilen Euler formülü yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\cosh(at) &= \frac{e^{at}+e^{-at}}{2} &\quad (2.31)\\
\sinh(at) &= \frac{e^{at}-e^{-at}}{2} &\quad (2.32)
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanmaktadır. Buna göre dejenere kosinüs hiperbolik ve dejenere sinüs hiperbolik fonksiyonları, (2.2) deki dejenere üstel fonksiyon yardımı ile

$$
\cosh_\lambda(at) = \frac{e_\lambda^{at}+e_\lambda^{-at}}{2} = \frac{1}{2}\left[(1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{a}{\lambda}}\right], \qquad (2.33)
$$

$$\sinh_\lambda(at) = \frac{e_\lambda^{at} - e_\lambda^{-at}}{2} = \frac{1}{2}\left[(1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{-\frac{a}{\lambda}}\right] \tag{2.34}$$

şeklinde yazılabilir[12].

Böylece dejenere kosinüs hiperbolik ve dejenere sinüs hiperbolik fonksiyonlarının dejenere Laplace dönüşümü,

$$L_\lambda\{\cosh_\lambda(at)\} = \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 - a^2},$$

$$L_\lambda\{\sinh_\lambda(at)\} = \frac{a}{(s-\lambda)^2 - a^2}$$

olarak elde edilir[12].

Gerçekten de (2.33) te verilen dejenere kosinüs hiperbolik fonksiyonu, (2.26) ile tanımlanan dejenere Laplace dönüşümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_\lambda\{\cosh_\lambda(at)\} &= \int_0^\infty e_\lambda^{-st}\cosh_\lambda(at)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left[(1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}} + (1+\lambda t)^{-\frac{a}{\lambda}}\right]dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^b \left[(1+\lambda t)^{-\frac{s-a}{\lambda}} + (1+\lambda t)^{-\frac{s+a}{\lambda}}\right]dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\lambda}{\lambda-s+a}(1+\lambda t)^{-\frac{s-a}{\lambda}+1}\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{\lambda}{\lambda-s-a}(1+\lambda t)^{-\frac{s+a}{\lambda}+1}\right]\right|_0^b \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a-\lambda} + \frac{1}{s+a-\lambda}\right) = \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 - a^2}
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, (2.34) teki dejenere sinüs hiperbolik fonksiyonuna (2.26) ile tanımlanan dejenere Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
L_\lambda\{\sinh_\lambda(at)\} &= \int_0^\infty e_\lambda^{-st}\sinh_\lambda(at)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left[(1+\lambda t)^{\frac{a}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{-\frac{a}{\lambda}}\right]dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^b \left[(1+\lambda t)^{-\frac{s-a}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{-\frac{s+a}{\lambda}} \right] dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{\lambda}{\lambda - s + a} (1+\lambda t)^{-\frac{s-a}{\lambda}+1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{\lambda - s - a} (1+\lambda t)^{-\frac{s+a}{\lambda}+1} \right] \Bigg|_0^b \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a-\lambda} - \frac{1}{s+a-\lambda} \right) \\
&= \frac{a}{(s-\lambda)^2 - a^2}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir[12].

$f(t) = t^n$ polinom fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümü ile klasik Beta fonksiyonu arasında bir ilişki kurulabilir. t^n tipindeki polinom fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümü incelenecek olursa

$$
L_\lambda \{t^n\} = \int_0^\infty e_\lambda^{-st} t^n dt = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} t^n dt
$$

ifadesi yazılabilir. Bu integralde $\lambda t = u$ dönüşümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} t^n dt &= \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int_0^\infty \frac{u^n}{(1+u)^{\frac{s}{\lambda}}} du \\
&= \lambda^{-n-1} B\left(n+1, \frac{s}{\lambda} - n - 1\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitlik göstermektedir ki polinom tipindeki fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümleri ile klasik Beta fonksiyonu arasında

$$
L_\lambda \{t^n\} = \lambda^{-n-1} B\left(n+1, \frac{s}{\lambda} - n - 1\right) \tag{2.35}
$$

eşitliği vardır[12].

$f(t) = t^n$ şeklindeki polinom fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümü ile dejenere Gamma fonksiyonu arasında da bir ilişki söz konusudur. Bu ilişki aşağıda bir teorem olarak ifade edilecektir.

Teorem 2.5. $n \in \mathbb{N}$ ve $s > (n+1)\lambda$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_\lambda\{t^n\} &= \frac{n!}{(s-\lambda)(s-2\lambda)\ldots(s-n\lambda)(s-(n+1)\lambda)} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}.\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{s}\right)\left(1-\frac{2\lambda}{s}\right)\ldots\left(1-\frac{(n+1)\lambda}{s}\right)} \end{aligned} \tag{2.36}$$

dir. Ayrıca,

$$L_\lambda\{t^n\} = s^{-n-1}\Gamma_{\frac{\lambda}{s}}(n+1) \tag{2.37}$$

eşitliği sağlanır[12].

İspat. $n \in \mathbb{N}$ ve $s > (n+1)\lambda$ şartları altında (2.26) da $g(t) = t^n$ için

$$L_\lambda\{t^n\} = \int_0^\infty e_\lambda^{-st} t^n dt = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} t^n dt$$

yazılır. Bu integrale kısmi integrasyon uygulanıp $u = t^n,\ dv = (1+\lambda t)^{-s/\lambda}\, dt$ denirse

$$\begin{aligned} L_\lambda\{t^n\} &= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} t^n dt \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{\lambda}{s-\lambda}.\frac{1}{\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s-\lambda}{\lambda}} t^n \Big|_0^b \\ &\quad + \frac{n}{s-\lambda}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s-\lambda}{\lambda}} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{s-\lambda}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s-\lambda}{\lambda}} t^{n-1} dt \end{aligned} \tag{2.38}$$

olarak elde edilir. (2.38) e benzer değişkenler yardımı ile tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} L_\lambda\{t^n\} &= \frac{n}{s-\lambda}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s-\lambda}{\lambda}} t^{n-1} dt \\ &= \frac{n}{s-\lambda}\lim_{b\to\infty} t^{n-1}\left(\frac{-1}{s-2\lambda}\right)(1+\lambda t)^{-\frac{s-2\lambda}{\lambda}}\Big|_0^b \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{(s-\lambda)(s-2\lambda)}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s-2\lambda}{\lambda}} t^{n-2} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{n(n-1)}{(s-\lambda)(s-2\lambda)} \int\limits_0^{\infty} (1+\lambda t)^{-\frac{s-2\lambda}{\lambda}} t^{n-2} dt \tag{2.39}$$

elde edilir ve bu işleme devam edilerek kısmi integrasyon işlemi arka arkaya $(n-2)$ kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} L_\lambda\{t^n\} &= \frac{n(n-1)}{(s-\lambda)(s-2\lambda)} \int\limits_0^{\infty} (1+\lambda t)^{-\frac{s-2\lambda}{\lambda}} t^{n-2} dt = \ldots \\ &= \frac{n!}{(s-\lambda)(s-2\lambda)\ldots(s-n\lambda)} \int\limits_0^{\infty} (1+\lambda t)^{-\frac{s-n\lambda}{\lambda}} dt \\ &= \frac{n!}{(s-\lambda)(s-2\lambda)\ldots(s-n\lambda)} \\ &\quad \times \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\lambda}.\frac{\lambda}{n\lambda+\lambda-s}(1+\lambda t)^{\frac{-s+n\lambda+\lambda}{\lambda}}\Big|_0^b \\ &= \frac{n!}{(s-\lambda)(s-2\lambda)\ldots(s-n\lambda)(s-(n+1)\lambda)} \end{aligned} \tag{2.40}$$

olarak bulunur. Böylece (2.40) ta son ifadenin s parantezine alınmasıyla

$$\begin{aligned} L_\lambda\{t^n\} &= \frac{n!}{(s-\lambda)(s-2\lambda)\ldots(s-n\lambda)(s-(n+1)\lambda)} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \frac{n!}{\left(1-\frac{\lambda}{s}\right)\left(1-\frac{2\lambda}{s}\right)\ldots\left(1-\frac{(n+1)\lambda}{s}\right)} \\ &= \frac{1}{s^{n+1}} \Gamma_{\frac{\lambda}{s}}(n+1) \end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir[12].

Yukarıdaki teorem için klasik Gamma ve Beta fonksiyonunun

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{ve} \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki şekilde de ispatı elde edilebilir:

$$\begin{aligned} L_\lambda\{t^n\} &= \frac{1}{\lambda^{n+1}} B\left(n+1, \frac{s}{\lambda}-n-1\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^{n+1}}.\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}-n-1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}\right)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.\frac{\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}-n-1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}\right)} \\
&= \frac{n!}{\lambda^{n+1}}.\frac{\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}-n-1\right)}{\left(\frac{s}{\lambda}-1\right)\left(\frac{s}{\lambda}-2\right)...\left(\frac{s}{\lambda}-n-1\right)\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}-n-1\right)} \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}.\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{s}\right)\left(1-\frac{2\lambda}{s}\right)...\left(1-\frac{(n+1)\lambda}{s}\right)} \\
&= \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma_{\frac{\lambda}{s}}(n+1).
\end{aligned}
$$

□

$f(t)=t^n$ de $n=\alpha\in\mathbb{R}$ $(\alpha>-1)$ olması durumunu ayrıca inceleyelim.

$\alpha\in\mathbb{R}$ ve $\alpha>-1$ olsun. $s>(\alpha+1)\lambda$ için basit değişken değiştirmeleri ile

$$
\begin{aligned}
L_\lambda\{t^\alpha\} &= \int_0^\infty e_\lambda^{-st}t^\alpha dt = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^\alpha dt \\
&= \int_0^\infty \left(1+\frac{\lambda}{s}st\right)^{-\frac{s}{\lambda}} t^\alpha dt \\
&= \frac{1}{s^\alpha}\int_0^\infty \left(1+\frac{\lambda}{s}st\right)^{-\frac{s}{\lambda}} (st)^\alpha dt \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty \left(1+\frac{\lambda}{s}x\right)^{-\frac{s}{\lambda}} x^\alpha dx \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}}\Gamma_{\frac{\lambda}{s}}(\alpha+1) \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

elde edilir[12].

Teorem 2.6. $f^{(n)}(t)=\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ olmak üzere $f, f', ..., f^{(n-1)}$ fonksiyonları $(0,\infty)$ aralığında sürekli ve üstel basamaktan fonksiyonlar, $f^{(n)}(t)$ de $(0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyon ise bu durumda

$$
\begin{aligned}
L_\lambda\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s(s+\lambda)...(s+(n-1)\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-n}f(t)\right\} \qquad (2.42) \\
&\quad -\sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0)\left(\prod_{\ell=1}^{n-i-1} s+(\ell-1)\lambda\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği sağlanır[12].

İspat. Önce $f(t)$, sürekli ve üstel basamaktan bir fonksiyon olmak üzere, $f(t)$ nin birinci türevinin dejenere Laplace dönüşümünü bulalım.

$$L_\lambda\left\{f'(t)\right\} = L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f'(t)\,dt \tag{2.43}$$

integraline kısmi integrasyon uygulayalım.

$(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} = u$, $-s(1+\lambda t)^{-\frac{s+\lambda}{\lambda}}dt = du$, $f'(t)\,dt = dv$, $f(t) = v$ denirse buradan

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f'(t)\,dt &= \lim_{b\to\infty}(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f(t)\Big|_0^b + s\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s+\lambda}{\lambda}} f(t)\,dt \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}(1+\lambda t)^{-1} f(t)\,dt \\ &= -f(0) + sL_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1} f(t)\right\} \qquad (2.44)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre $f(t)$ fonksiyonunun ikinci türevinin dejenere Laplace dönüşümü benzer yol ile

$$L_\lambda\left\{f''(t)\right\} = L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}f'(t)\right\} = -f'(0) + sL_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1} f'(t)\right\} \tag{2.45}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1} f'(t)\right\} &= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}(1+\lambda t)^{-1} f'(t)\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty}(1+\lambda t)^{-\frac{s+\lambda}{\lambda}} f(t)\Big|_0^b \\ &\quad + (s+\lambda)\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}(1+\lambda t)^{-2} f(t)\,dt \\ &= -f(0) + (s+\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-2} f(t)\right\} \qquad (2.46)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $f''(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü,

$$L_\lambda\left\{f''(t)\right\} = -f'(0) - sf(0) + s(s+\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-2} f(t)\right\} \tag{2.47}$$

olur.

Yine $f(t)$ fonksiyonunun üçüncü türevinin dejenere Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned} L_\lambda\left\{f'''(t)\right\} &= L_\lambda\left\{\frac{d^2}{dt^2}f'(t)\right\} = L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}f''(t)\right\} \\ &= -f''(0) + sL_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1} f''(t)\right\} \\ &= -f''(0) + s\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} (1+\lambda t)^{-1} f''(t)\,dt \\ &= -f''(0) + s\lim_{b\to\infty} (1+\lambda t)^{-\frac{s+\lambda}{\lambda}} f'\Big|_0^b \\ &\quad + s(s+\lambda)\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s+2\lambda}{\lambda}} f'(t)\,dt \\ &= -f''(0) - sf'(0) + s(s+\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-2} f'(t)\right\} \end{aligned} \tag{2.48}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-2} f'(t)\right\} &= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s+2\lambda}{\lambda}} f'(t)\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty} (1+\lambda t)^{-\frac{s+2\lambda}{\lambda}} f(t)\Big|_0^b \\ &\quad + (s+2\lambda)\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} (1+\lambda t)^{-3} f(t)\,dt \\ &= -f(0) + (s+2\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-3} f(t)\right\} \end{aligned} \tag{2.49}$$

olur. Burada (2.49), (2.48) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L_\lambda\left\{f'''(t)\right\} &= -f''(0) - sf'(0) - s(s+\lambda)f(0) \\ &\quad + s(s+\lambda)(s+2\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-3} f(t)\right\} \end{aligned} \tag{2.50}$$

elde edilir. (2.44), (2.47), (2.50) göz önüne alındığında $f(t)$ fonksiyonunun n-yinci türevinin dejenere Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned} L_\lambda\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= s(s+\lambda)\ldots(s+(n-1)\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-n} f(t)\right\} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(0)\left(\prod_{\ell=1}^{n-i-1} s+(\ell-1)\lambda\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece istenilen elde edilir[12]. □

Yukarıdaki teoremin sonuçlarına ilişkin örnekler vermeden önce bazı fonksiyonların dejenere hallerinin türevleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

Dejenere kosinüs ve dejenere sinüs fonksiyonlarının türevleri,

$$\begin{aligned}
[\cos_\lambda(t)]' &= \frac{d}{dt}\cos_\lambda(t) = \left[\frac{1}{2}\left((1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}} + (1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{i}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{\frac{i-\lambda}{\lambda}} - \frac{i}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{-\frac{i+\lambda}{\lambda}}\right]\frac{(1+\lambda t)}{(1+\lambda t)} \\
&= -\frac{1}{1+\lambda t}.\frac{1}{2i}\left[(1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}}\right] \\
&= -\frac{1}{1+\lambda t}\sin_\lambda(t) \qquad (2.51)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\sin_\lambda(t)]' &= \frac{d}{dt}\sin_\lambda(t) = \left[\frac{1}{2i}\left((1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{\frac{i-\lambda}{\lambda}} + \frac{i}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{-\frac{i+\lambda}{\lambda}}\right]\frac{(1+\lambda t)}{(1+\lambda t)} \\
&= \frac{1}{1+\lambda t}\cos_\lambda(t) \qquad (2.52)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir[12].

Dejenere kosinüs hiperbolik ve dejenere sinüs hiperbolik fonksiyonlarının türevleri,

$$\begin{aligned}
[\cosh_\lambda(t)]' &= \frac{d}{dt}\cosh_\lambda(t) \\
&= \left[\frac{1}{2}\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} + (1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}\lambda(1+\lambda t)^{-\frac{1+\lambda}{\lambda}}\right).\frac{1+\lambda t}{1+\lambda t} \\
&= \frac{1}{2(1+\lambda t)}\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - (1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right) \\
&= \frac{1}{(1+\lambda t)}\sinh_\lambda(t) \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

ve

$$[\sinh_\lambda(t)]' = \frac{d}{dt}\sinh_\lambda(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{2}\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda}\lambda\,(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1}+\frac{1}{\lambda}\lambda\,(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}-1}\right].\frac{1+\lambda t}{1+\lambda t} \\
&= \frac{1}{2(1+\lambda t)}\left[(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right] \\
&= \frac{1}{1+\lambda t}\cosh_\lambda(t) \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

dir[12].

Şimdi yukarıda türevi verilen bu fonksiyonların dejenere Laplace dönüşümlerini hesaplayalım.

Örnek 1. $[\cos_\lambda(t)]' = \frac{d}{dt}\cos_\lambda(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü için (2.44) ile verilen

$$L_\lambda\left\{f'(t)\right\} = -f(0) + sL_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1} f(t)\right\}$$

eşitliğinde $f(t) = \cos_\lambda(t)$ alınır ve (2.29) ifadesi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}\cos_\lambda(t)\right\} &= -\cos_\lambda(0) + sL_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1}\cos_\lambda(t)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\left[(1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}}\right]\Bigg|_{t=0} \\
&\quad + sL_\lambda\left\{\frac{1}{2}(1+\lambda t)^{-1}\left((1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}}\right)\right\} \\
&= -1+\frac{s}{2}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left((1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}-1}+(1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= -1+\frac{s}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \left((1+\lambda t)^{-\frac{s-i}{\lambda}-1}+(1+\lambda t)^{-\frac{s+i}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= -1+\frac{s}{2\lambda}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\lambda}{-s+i}(1+\lambda t)^{-\frac{s-i}{\lambda}}\right. \\
&\quad \left.+\frac{\lambda}{-s-i}(1+\lambda t)^{-\frac{s+i}{\lambda}}\right)\Bigg|_0^b \\
&= -1+\frac{s}{2}\left(\frac{1}{s-i}+\frac{1}{s+i}\right) = -1+\frac{s^2}{s^2+1} \\
&= -\frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda (2.51) de bulunan

$$\frac{d}{dt}\cos_\lambda(t) = -\frac{1}{1+\lambda t}\sin_\lambda(t)$$

eşitliği kullanılırsa $\frac{d}{dt}\cos_\lambda(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü pratik olarak

$$\begin{aligned}
L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}\cos_\lambda(t)\right\} &= L_\lambda\left\{-(1+\lambda t)^{-1}\sin_\lambda(t)\right\} \\
&= -\frac{1}{2i}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left((1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}-1} - (1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= -\frac{1}{2i}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \left((1+\lambda t)^{-\frac{s-i}{\lambda}-1} - (1+\lambda t)^{-\frac{s+i}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= -\frac{1}{2i\lambda}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\lambda}{-s+i}(1+\lambda t)^{-\frac{s-i}{\lambda}} - \frac{\lambda}{-s-i}(1+\lambda t)^{-\frac{s+i}{\lambda}}\right)\Bigg|_0^b \\
&= -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) \\
&= -\frac{1}{2i}.\frac{2i}{s^2+1} = -\frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

şeklinde de elde edilebilir.

Örnek 2. $[\sin_\lambda(t)]' = \frac{d}{dt}\sin_\lambda(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü, (2.52) eşitliği kullanılırsa pratik olarak

$$\begin{aligned}
L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}\sin_\lambda(t)\right\} &= L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1}\cos_\lambda(t)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left((1+\lambda t)^{\frac{i}{\lambda}-1} + (1+\lambda t)^{-\frac{i}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \left((1+\lambda t)^{-\frac{s-i}{\lambda}-1} + (1+\lambda t)^{-\frac{s+i}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\lambda}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\lambda}{-s+i}(1+\lambda t)^{-\frac{s-i}{\lambda}} + \frac{\lambda}{-s-i}(1+\lambda t)^{-\frac{s+i}{\lambda}}\right)\Bigg|_0^b \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i} + \frac{1}{s+i}\right) \\
&= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3. $[\cosh_\lambda(t)]' = \frac{d}{dt}\cosh_\lambda(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü, (2.53) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}\cosh_\lambda(t)\right\} &= L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1}\sinh_\lambda(t)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1} - (1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \left((1+\lambda t)^{-\frac{s-1}{\lambda}-1} - (1+\lambda t)^{-\frac{s+1}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{-s+1}(1+\lambda t)^{-\frac{s-1}{\lambda}} - \frac{1}{-s-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s+1}{\lambda}}\right)\Bigg|_0^b \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) \\
&= \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4. $[\sinh_\lambda(t)]' = \frac{d}{dt}\sinh_\lambda(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümü, (2.54) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_\lambda\left\{\frac{d}{dt}\sinh_\lambda(t)\right\} &= L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1}\cosh_\lambda(t)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\left((1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}-1} + (1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \left((1+\lambda t)^{-\frac{s-1}{\lambda}-1} + (1+\lambda t)^{-\frac{s+1}{\lambda}-1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{-s+1}(1+\lambda t)^{-\frac{s-1}{\lambda}} + \frac{1}{-s-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s+1}{\lambda}}\right)\Bigg|_0^b \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right) \\
&= \frac{s}{s^2-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.7. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$L_\lambda \left\{ (\log(1+\lambda t))^n f(t) \right\} = (-1)^n \lambda^n \frac{d^n}{ds^n} F_\lambda(s) \tag{2.55}$$

dir[12].

İspat. Dejenere Laplace dönüşümünün (2.26) dan

$$F_\lambda(s) = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f(t)\, dt$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin s ye göre bir kez türevi,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} F_\lambda(s) &= -\int_0^\infty \log(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f(t)\, dt \\
&= -\lambda^{-1} \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} \log(1+\lambda t) f(t)\, dt \\
&= -\lambda^{-1} L_\lambda \left\{ \log(1+\lambda t) f(t) \right\}
\end{aligned}$$

olur. İkinci türevi ise

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2} F_\lambda(s) &= (-1)^2 \int_0^\infty \left(\log(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^2 (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f(t)\, dt \\
&= (-1)^2 \lambda^{-2} \int_0^\infty (\log(1+\lambda t))^2 (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f(t)\, dt \\
&= (-1)^2 \lambda^{-2} L_\lambda \left\{ (\log(1+\lambda t))^2 f(t) \right\}
\end{aligned}$$

dir. Bu şekilde türev alınmaya devam edilirse $n - yinci$ türevi,

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{ds^n} F_\lambda(s) &= (-1)^n \int_0^\infty \left(\log(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^n (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} f(t)\, dt \\
&= (-1)^n \lambda^{-n} \int_0^\infty (\log(1+\lambda t))^n f(t) (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}\, dt \\
&= (-1)^n \lambda^{-n} L_\lambda \left\{ (\log(1+\lambda t))^n f(t) \right\}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$L_\lambda \{(\log(1+\lambda t))^n f(t)\} = (-1)^n \lambda^n \frac{d^n}{ds^n} F_\lambda(s)$$

elde edilerek ispat tamamlanmış olur[12]. □

Bu teoremin bir sonucu olarak

$$\begin{aligned} L_\lambda \left\{(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}} (\log(1+\lambda t))^n\right\} &= (-1)^n \lambda^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right) \\ &= \lambda^n n! \left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right)^{n+1} \end{aligned} \tag{2.56}$$

eşitliği yazılabilir[12].

Gerçekten (2.26) eşitliğinde $f(t) = (1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}$ seçilirse

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} (1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}} dt &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b (1+\lambda t)^{-\frac{s-\alpha}{\lambda}} dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\lambda}.\frac{\lambda}{-s+\alpha+\lambda} (1+\lambda t)^{-\frac{s-\alpha-\lambda}{\lambda}}\Big|_0^b \\ &= \frac{1}{s-\alpha-\lambda} \end{aligned}$$

olarak bulunur ve (2.55) göz önüne alınarak

$$L_\lambda \left\{(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}} (\log(1+\lambda t))^n\right\} = (-1)^n \lambda^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right) \tag{2.57}$$

ifadesi yazılabilir. Şimdi $\frac{1}{s-\alpha-\lambda}$ ifadesinin n kere türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right) &= \frac{-1}{(s-\alpha-\lambda)^2} \\ \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right) &= \frac{(-1)^2.2(s-\alpha-\lambda)}{(s-\alpha-\lambda)^4} = \frac{(-1)^2.2!}{(s-\alpha-\lambda)^3} \\ \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right) &= \frac{(-1)^3.2.3(s-\alpha-\lambda)^2}{(s-\alpha-\lambda)^6} = \frac{(-1)^3.3!}{(s-\alpha-\lambda)^4} \\ \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right) &= \frac{(-1)^n.n!}{(s-\alpha-\lambda)^{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade de (2.57) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}(\log(1+\lambda t))^n\right\} &= (-1)^n\lambda^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right) \\ &= \lambda^n n!\left(\frac{1}{s-\alpha-\lambda}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

olarak bulunur[12].

Yine bu teoremin bir sonucu olarak

$$\begin{aligned} L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}f(t)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\lambda^{-n}}{n!}L_\lambda\left\{(\log(1+\lambda t))^n f(t)\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)^n}{n!}.\frac{d^n}{ds^n}F_\lambda(s) \end{aligned} \tag{2.58}$$

eşitliği sağlanır. Bunun için

$$L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}f(t)\right\} = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}f(t)\,dt$$

ifadesinde $(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}$ nın α ya göre n kez türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}} &= \frac{1}{\lambda}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}\log(1+\lambda t) \\ \frac{d^2}{d\alpha^2}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}} &= \frac{1}{\lambda^2}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}(\log(1+\lambda t))^2 \\ \frac{d^n}{d\alpha^n}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}} &= \frac{1}{\lambda^n}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}(\log(1+\lambda t))^n \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}$ nın Taylor açılımı,

$$(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^n}.\frac{(\log(1+\lambda t))^n\alpha^n}{n!}$$

olacağından bu ifade, $(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}f(t)$ fonksiyonunun dejenere Laplace dönüşümünde yerine yazılırsa

$$L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}f(t)\right\} = \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}(1+\lambda t)^{\frac{\alpha}{\lambda}}f(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda^n} \cdot \frac{(\log(1+\lambda t))^n \alpha^n}{n!} f(t)\, dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^{-n}\alpha^n}{n!} \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}} (\log(1+\lambda t))^n f(t)\, dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^{-n}\alpha^n}{n!} L_\lambda \left\{ (\log(1+\lambda t))^n f(t) \right\} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^{-n}\alpha^n}{n!} (-1)^n \lambda^n \frac{d^n}{ds^n} F_\lambda(s) \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{d^n}{ds^n} F_\lambda(s)
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir ki bu istenilendir[12].

3 . ARA İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

Tanım 3.1. $(0,\infty)$ aralığında sürekli $g(t)$ fonksiyonunun n mertebeden ARA integral dönüşümü,

$$G_n\{g(t)\}(s) = G(n,s) = s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}g(t)dt, \quad s>0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır[18].

Tanım 3.2. $g(t)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümünün tersi

$$\begin{aligned} g(t) &= G_{n+1}^{-1}\{G_{n+1}\{g(t)\}\} \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\left((-1)^n\left(\frac{1}{s\Gamma(n-1)}\int_0^s (s-x)^{n-1}\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\times G(n+1,x)\,dx + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{s^k}{k!}\frac{\partial^k G(0)}{\partial s^k}\right)\right)ds \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}g(t)\,dt \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanan ve $(n-1)$ kere türevlenebilen fonksiyondur[18].

$g(t)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümü tanımından yararlanılarak türev için aşağıdaki rekürans bağıntısı verilebilir[18]:

$$G(n+1,s) = G_{n+1}\{g(t)\}(s) = (-1)^n s\frac{d^nG(s)}{ds^n}.$$

Gerçekten de (3.2) nin s ye göre ardışık olarak n kere türevi alınırsa

$$G'(s) = -\int_0^\infty te^{-st}g(t)\,dt$$

$$G''(s) = \int_0^\infty t^2 e^{-st} g(t)\, dt$$

$$G'''(s) = -\int_0^\infty t^3 e^{-st} g(t)\, dt$$

$$G^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st} g(t)\, dt \tag{3.3}$$

ifadesi elde edilir ve buradan (3.3) ifadesi ile (3.1) deki ARA integral dönüşümü arasında

$$\begin{aligned} G(n+1,s) &= G_{n+1}\{g(t)\}(s) \\ &= s\int_0^\infty t^n e^{-st} g(t)\, dt = (-1)^n s \frac{d^n G(s)}{ds^n} \end{aligned} \tag{3.4}$$

bağıntısının varlığı görülmüş olur[18].

(3.4) rekürans bağıntısı göz önüne alınarak tanım 3.2 nin doğruluğu aşağıdaki şekilde görülebilir.

$$\frac{1}{s\Gamma(n-1)} \int_0^s (s-t)^{n-1} G(n+1,t)\, dt = (-1)^n \left(G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{\partial^k G(0)}{\partial s^k} \right)$$

ifadesini yazabiliriz. Her tarafı $(-1)^n$ ile çarptıktan sonra ifade düzenlenirse

$$\frac{(-1)^n}{s\Gamma(n-1)} \int_0^s (s-t)^{n-1} G(n+1,t)\, dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{\partial^k G(0)}{\partial s^k} = G(s)$$

elde edilir. Buradan da tanımlar kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \left((-1)^n \left(\frac{1}{s\Gamma(n-1)} \int_0^s (s-x)^{n-1} G(n+1,x)\, dx \right.\right. \\ & \left.\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{\partial^k G(0)}{\partial s^k} \right) \right) ds \\ = & \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \left((-1)^n G(s) \right) ds \end{aligned}$$

$$G_{n+1}^{-1}\left\{G_{n+1}\left\{g\left(t\right)\right\}\right\}=\frac{\left(-1\right)^{2n}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}G\left(s\right)ds=g\left(t\right)$$

olarak bulunur[18].

Teorem 3.1. $g\left(t\right)$ fonksiyonu, her sonlu $0\leq t\leq\alpha$ aralıkta parçalı sürekli ve

$$\left|t^{n-1}g\left(t\right)\right|\leq Ke^{\beta t} \tag{3.5}$$

sağlıyorsa bu durumda her $s>\beta$ için $g\left(t\right)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümü vardır. Burada $K>0$ bir sabittir[18].

İspat. Biliyoruz ki bir $g\left(t\right)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümü

$$G_n\left\{g(t)\right\}(s)=G(n,s)=s\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-st}g(t)dt,\quad s>0$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buradan

$$\begin{aligned}G_n\left\{g(t)\right\}(s) &= s\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-st}g\left(t\right)dt\\ &= s\int_0^{\alpha}t^{n-1}e^{-st}g\left(t\right)dt+s\int_{\alpha}^{\infty}t^{n-1}e^{-st}g\left(t\right)dt\end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g\left(t\right)$ fonksiyonu parçalı sürekli olduğundan sağ taraftaki ilk integralin varlığı açıktır. Ayrıca, Teorem 3.1 deki kabul gereğince (3.6) nın sağ tarafındaki ikinci integral için ise

$$\begin{aligned}\left|s\int_{\alpha}^{\infty}t^{n-1}e^{-st}g\left(t\right)dt\right| &\leq s\int_{\alpha}^{\infty}e^{-st}\left|t^{n-1}g\left(t\right)\right|dt\leq s\int_{\alpha}^{\infty}e^{-st}Ke^{\beta t}dt\\ &= sK\int_{\alpha}^{\infty}e^{\beta t-st}dt=\lim_{b\to\infty}-sK\frac{e^{-t(s-\beta)}}{s-\beta}\Bigg|_{\alpha}^{b}\\ &= \frac{sK}{s-\beta}e^{-\alpha(s-\beta)}\end{aligned} \tag{3.7}$$

ifadesi yazılabilir. Bu son ifade her $s>\beta$ için sonludur. Dolayısıyla $g\left(t\right)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümü vardır[18]. □

3.1. ARA İntegral Dönüşümü İle Bazı İntegral Dönüşümleri Arasındaki Bağıntılar

$$F(u) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

olmak üzere ARA integral dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasındaki iki bağıntı sırasıyla $n = 0$ ve $n = 1$ alınarak

$$\begin{aligned} G_0\{f(t)\}(s) &= s\int_0^\infty t^{-1} e^{-st} f(t)\, dt \\ &= sL\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = s\int_0^\infty F(u)\, du \end{aligned} \tag{3.8}$$

ve

$$\begin{aligned} G_1\{f(t)\}(s) &= s\int_0^\infty t^{1-1} e^{-st} f(t)\, dt = s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\ &= sL\{f(t)\} = sF(s) \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde elde edilir[18].

$$H(t) = \int_{-\infty}^{1} \delta(s)\, ds$$

(Dirac delta) Heaviside fonksiyonu olmak üzere bir $f(t)$ fonksiyonunun $n-yinci$ basamaktan ARA integral dönüşümünün ters Laplace dönüşümü,

$$L^{-1}\{G_n\{f(t)\}(s)\} = t^{n-2}(2H(t)-1)\left((n-1)f(t) + tf'(t)\right)$$

eşitliğini sağlar. Gerçekten de $f(t)$ fonksiyonunun $n-yinci$ basamaktan ARA integral dönüşümünün ters Laplace dönüşümü alınırsa tanım gereğince aşağıdaki ifadeler yazılabilir[18]:

$$
\begin{aligned}
L^{-1}\left\{G_n\left\{f(t)\right\}(s)\right\} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}G_n\left\{f(t)\right\}(s)\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}\left(s\int\limits_{0}^{\infty} e^{-st}t^{n-1}f(t)\,dt\right)ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}sL\left\{t^{n-1}f(t)\right\}ds \\
&= L^{-1}\left\{sL\left\{t^{n-1}f(t)\right\}\right\} \\
&= L^{-1}\left\{s\right\} * L^{-1}\left\{L\left\{t^{n-1}f(t)\right\}\right\} \\
&= \delta^{'}(t) * t^{n-1}f(t) \\
&= \int\limits_{0}^{t} \delta^{'}(t-\tau)\,\tau^{n-1}f(\tau)\,d\tau \\
&= t^{-2+n}\left(-1+2H(t)\right)\left((-1+n)f(t)+tf^{'}(t)\right).
\end{aligned}
$$

$\frac{e^{-t}}{t}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olmamasına rağmen bu fonksiyonun ikinci basamaktan ARA integral dönüşümü $G_2\left\{\frac{e^{-t}}{t}\right\}$ şeklinde elde edilir[18].

ARA integral dönüşümü ve Laplace Carson dönüşümü arasında aşağıdaki bağıntı kurulabilir.

$$
\begin{aligned}
L_*\left\{g(t)\right\} &= s\int\limits_{0}^{\infty} e^{-st}g(t)\,dt \qquad (3.10)\\
&= G_1\left\{g(t)\right\}(s)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
G_n\left\{g(t)\right\}(s) &= s\int\limits_{0}^{\infty} t^{n-1}e^{-st}g(t)\,dt \\
&= s\int\limits_{0}^{\infty} e^{-st}\left(t^{n-1}g(t)\right)dt \\
&= L_*\left\{t^{n-1}g(t)\right\} \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

dir[18].

ARA integral dönüşümü ve Aboodh dönüşümü arasındaki bağıntı $n=1$ için

$$
\begin{aligned}
A\{g(t)\} &= \frac{1}{s}\int_{0}^{\infty} e^{-st} g(t)\,dt \\
&= \frac{1}{s^2} s\int_{0}^{\infty} t^{0} e^{-st} g(t)\,dt \\
&= \frac{1}{s^2} G_1\{g(t)\}(s) \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

olur ve genel hali ise

$$
\begin{aligned}
G_n\{g(t)\}(s) &= s\int_{0}^{\infty} t^{n-1} e^{-st} g(t)\,dt \\
&= s^2 \frac{1}{s}\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left(t^{n-1} g(t)\right) dt \\
&= s^2 A\left\{t^{n-1} g(t)\right\} \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir[18].

ARA integral dönüşümü ve Mohand dönüşümü arasındaki bağıntı ise

$$
\begin{aligned}
M\{g(t)\} &= s^2\int_{0}^{\infty} e^{-st} g(t)\,dt \\
&= sG_1\{g(t)\}(s) \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
G_n\{g(t)\}(s) &= s\int_{0}^{\infty} t^{n-1} e^{-st} g(t)\,dt \\
&= \frac{1}{s} s^2\int_{0}^{\infty} e^{-st}\left(t^{n-1} g(t)\right) dt
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{s} M\left\{t^{n-1} g(t)\right\} \tag{3.15}$$

olarak verilir[18].

3.2. ARA İntegral Dönüşümünün Özellikleri

Tezin bu kısmında, ARA integral dönüşümü var olan fonksiyonlar için ARA integral dönüşümünün özellikleri verilecektir.

1. $u(t)$ ve $v(t)$ ARA integral dönüşümü var olan iki fonksiyon, α ve β sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$G_n\{\alpha u(t) + \beta v(t)\}(s) = \alpha G_n\{u(t)\}(s) + \beta G_n\{v(t)\}(s) \tag{3.16}$$

eşitliği sağlanır[18].

İspat. ARA integral dönüşümünün tanımı gereğince

$$\begin{aligned} G_n\{\alpha u(t) + \beta v(t)\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st}\left[\alpha u(t) + \beta v(t)\right] dt \\ &= \alpha s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} u(t)\, dt + \beta s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} v(t)\, dt \\ &= \alpha G_n\{u(t)\}(s) + \beta G_n\{v(t)\}(s) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece ARA integral dönüşümü lineer bir dönüşümdür[18]. □

2. $g(t)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümünün var olması halinde $g(at)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümü,

$$G_n\{g(at)\}(s) = \frac{1}{a^{n-1}} G_n\{g(t)\}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a^{n-1}} G\left(n, \frac{s}{a}\right) \tag{3.17}$$

dir[18].

İspat. ARA integral dönüşümünün tanımında $g(t)$ yerine $g(at)$ alınırsa

$$G_n\{g(at)\}(s) = s\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} g(at)\, dt$$

olur. Bu integralde $u = at$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} G_n\{g(at)\}(s) &= \frac{s}{a^n}\int_0^\infty u^{n-1}e^{-\frac{s}{a}u}g(u)\,du \\ &= \frac{1}{a^{n-1}}\frac{s}{a}\int_0^\infty u^{n-1}e^{-\frac{s}{a}u}g(u)\,du \\ &= \frac{1}{a^{n-1}}G\left(n,\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da istenilendir[18]. □

3. ARA integral dönüşümü,

$$G_n\left\{e^{-ct}g(t)\right\}(s) = \frac{s}{s+c}G(n,s+c) \tag{3.18}$$

özelliğini sağlar[18].

İspat. (3.1) de $g(t)$ yerine $e^{-ct}g(t)$ alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G_n\left\{e^{-ct}g(t)\right\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}e^{-ct}g(t)\,dt \\ &= s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(s+c)t}g(t)\,dt \\ &= \frac{s}{s+c}(s+c)\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(s+c)t}g(t)\,dt \\ &= \frac{s}{s+c}G(n,s+c) \end{aligned}$$

elde edilir[18]. □

4. ARA integral dönüşümü,

$$G_n\{t^m g(t)\}(s) = G_{n+m}\{g(t)\} = G(n+m,s) \tag{3.19}$$

özelliğini sağlar[18].

İspat. (3.1) de $g(t)$ yerine $t^m g(t)$ alınırsa

$$\begin{aligned} G_n\{t^m g(t)\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}t^m g(t)\,dt = s\int_0^\infty t^{m+n-1}e^{-st}g(t)\,dt \\ &= G_{n+m}\{g(t)\}(s) = G(n+m,s) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. Ayrıca bu özellikten

$$G_n\left\{\frac{g(t)}{t^m}\right\}(s) = G_{n-m}\{g(t)\}(s) = G(n-m,s)$$

eşitliği de yazılabilir[18]. □

5. $u_c(t)$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere ARA integral dönüşümü,

$$G_n\{u_c(t)\,g(t-c)\}(s) = e^{-cs}G_1\left\{g(v)(v+c)^{n-1}\right\}(s) \tag{3.20}$$

özelliğini sağlar[18].

İspat. (3.1) de $g(t)$ yerine $u_c(t)\,g(t-c)$ alınır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} G_n\{u_c(t)\,g(t-c)\}(s) &= s\int_c^\infty t^{n-1}e^{-st}u_c(t)\,g(t-c)\,dt \\ &= s\int_c^\infty t^{n-1}e^{-st}g(t-c)\,dt \end{aligned}$$

olur. Bu integralde $t-c=v$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} s\int_0^\infty (v+c)^{n-1}e^{-s(v+c)}g(v)\,dv &= se^{-sc}\int_0^\infty e^{-sv}g(v)(v+c)^{n-1}dv \\ &= e^{-sc}G_1\left\{g(v)(v+c)^{n-1}\right\}(s) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir[18]. □

6. $f^{(m)}(t)$, $f(t)$ fonksiyonunun $m-yinci$ dereceden türevi olmak üzere $f^{(m)}(t)$ nin ARA integral dönüşümü,

$$G_n\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s) = (-1)^{n-1}s\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{G_1\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s)}{s}\right) \tag{3.21}$$

eşitliğini sağlar[18].

İspat. (3.1) de $g(t)$ yerine $f^{(m)}(t)$ alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} G_n\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s) &= s\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-st}f^{(m)}(t)\,dt \\ &= s\int_0^{\infty}\left(t^{n-1}f^{(m)}(t)\right)e^{-st}dt \\ &= G_1\left\{t^{n-1}f^{(m)}(t)\right\}(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}f^{(m)}(t)\,e^{-st} &= -te^{-st}f^{(m)}(t) \\ \frac{d^2}{ds^2}f^{(m)}(t)\,e^{-st} &= (-1)^2t^2e^{-st}f^{(m)}(t) \\ \frac{d^3}{ds^3}f^{(m)}(t)\,e^{-st} &= (-1)^3t^3e^{-st}f^{(m)}(t) \\ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}f^{(m)}(t)\,e^{-st} &= (-1)^{n-1}t^{n-1}e^{-st}f^{(m)}(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{G_1\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s)}{s}\right) &= \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{s\int_0^{\infty} f^{(m)}(t)\,e^{-st}dt}{s}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-st}f^{(m)}(t)\,dt \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{s}G_n\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$G_n\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s) = (-1)^{n-1}s\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left(\frac{G_1\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s)}{s}\right)$$

şeklinde elde edilir[18]. □

Biliyoruz ki

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

dır. ARA integral dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasındaki (3.9) bağıntısı ve (3.21) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G_n\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) &= (-1)^{n-1} s \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left(\frac{G_1\left\{f^{(m)}(t)\right\}(s)}{s} \right) \\
&= (-1)^{n-1} s \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} L\left\{f^{(n)}(t)\right\} \\
&= (-1)^{n-1} s \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left(s^{n-1} G_1\{f(t)\}(s) - s^{n-1} f(0) \right. \\
&\quad \left. -... - f^{(n-1)}(0) \right) \\
&= (-1)^{n-1} s \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left(s^{n-1} G_1\{f(t)\}(s) - \sum_{j=1}^{n} s^{n-j} f^{(j-1)}(0) \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir[18].

Şimdi, bazı fonksiyonların ARA integral dönüşümlerini verelim.

Örnek 5. $g(t) = 1$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümü için (3.1) de $g(t) = 1$ alınır ve elde edilen bu integrale $(n-1)$ kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
G_n\{1\}(s) &= s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt \\
&= s \left(\lim_{b\to\infty} -\frac{t^{n-1} e^{-st}}{s} \bigg|_0^b + \frac{(n-1)}{s} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt \right) \\
&= s \left(\lim_{b\to\infty} -\frac{t^{n-2} e^{-st}}{s} \bigg|_0^b + \frac{(n-1)(n-2)}{s^2} \int_0^\infty t^{n-3} e^{-st} dt \right) \\
&\quad ... \\
&= s \frac{(n-1)(n-2)(n-3)...1}{s^{n-1}} \int_0^\infty e^{-st} dt \\
&= s \frac{(n-1)(n-2)(n-3)...1}{s^{n-1}} . \frac{1}{s} = \frac{\Gamma(n)}{s^{n-1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca pratik olarak

$$\begin{aligned} G_n\{1\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}dt = \Gamma(n)\left(\frac{1}{s}\right)^n s\int_0^\infty \frac{t^{n-1}e^{-st}}{\Gamma(n)\left(\frac{1}{s}\right)^n}dt \\ &= \Gamma(n)\left(\frac{1}{s}\right)^n s = \frac{\Gamma(n)}{s^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{s^{n-1}} \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir[18].

Örnek 6. (3.1) de $g(t) = t$ alınırsa

$$\begin{aligned} G_n\{t\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}t\,dt = s\int_0^\infty t^n e^{-st}dt \\ &= \Gamma(n+1)\left(\frac{1}{s}\right)^{n+1} s\int_0^\infty \frac{t^n e^{-st}}{\Gamma(n+1)\left(\frac{1}{s}\right)^{n+1}}dt \\ &= \left(\frac{1}{s}\right)^{n+1}\Gamma(n+1)\,s = \frac{\Gamma(n+1)}{s^n} \end{aligned}$$

olur[18].

Örnek 7. (3.1) de $g(t) = t^m$ alınırsa

$$\begin{aligned} G_n\{t^m\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}t^m dt = s\int_0^\infty t^{m+n-1}e^{-st}dt \\ &= \Gamma(m+n)\left(\frac{1}{s}\right)^{m+n} s\int_0^\infty \frac{t^{m+n-1}e^{-st}}{\Gamma(m+n)\left(\frac{1}{s}\right)^{m+n}}dt \\ &= \left(\frac{1}{s}\right)^{m+n}\Gamma(m+n)\,s = \frac{\Gamma(m+n)}{s^{m+n-1}} \end{aligned}$$

olur[18].

Örnek 8. (3.1) de $s > a$ için $g(t) = e^{at}$ alınırsa

$$\begin{aligned} G_n\{e^{at}\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t(s-a)}dt \\ &= \Gamma(n)\left(\frac{1}{s-a}\right)^n s\int_0^\infty \frac{t^{n-1}e^{-t(s-a)}}{\Gamma(n)\left(\frac{1}{s-a}\right)^n}dt \\ &= \frac{s}{(s-a)^n}\Gamma(n) \end{aligned}$$

olarak elde edilir[18].

Örnek 9. (3.1) de $g(t)=t^m e^{at}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
G_n\left\{t^m e^{at}\right\}(s) &= s\int\limits_0^\infty t^{m+n-1}e^{-t(s-a)}dt \\
&= \Gamma(m+n)\left(\frac{1}{s-a}\right)^{m+n} s\int\limits_0^\infty \frac{t^{m+n-1}e^{-t(s-a)}}{\Gamma(m+n)\left(\frac{1}{s-a}\right)^{m+n}}dt \\
&= \frac{s}{(s-a)^{m+n}}\Gamma(m+n)
\end{aligned}$$

bulunur[18].

Örnek 10. (3.1) de $g(t)=\sin(at)$ alınıp $\sin(at)=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$ değeri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G_n\{\sin(at)\}(s) &= G_n\left\{\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2i}\left(G_n\left\{e^{iat}\right\}(s)-G_n\left\{e^{-iat}\right\}(s)\right) \\
&= \frac{s}{2i}\Gamma(n)\left(\frac{1}{(s-ia)^n}-\frac{1}{(s+ia)^n}\right) \\
&= \frac{s}{2i}\Gamma(n)\left(\frac{2i}{(s^2+a^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\right)\right) \\
&= \left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)^{-\frac{n}{2}} s^{1-n}\Gamma(n)\sin\left(n\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur[18].

Örnek 11. Benzer şekilde (3.1) de $g(t)=\cos(at)$ alınıp $\cos(at)=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$ değeri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G_n\{\cos(at)\}(s) &= G_n\left\{\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(G_n\left\{e^{iat}\right\}(s)+G_n\left\{e^{-iat}\right\}(s)\right) \\
&= \frac{s}{2}\Gamma(n)\left(\frac{1}{(s-ia)^n}+\frac{1}{(s+ia)^n}\right) \\
&= \left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)^{-\frac{n}{2}} s^{1-n}\Gamma(n)\cos\left(n\tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)\right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir[18].

Örnek 12. (3.1) de $g(t) = \sinh(at)$ alınıp $\sinh(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ değeri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
G_n\{\sinh(at)\}(s) &= G_n\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(G_n\left\{e^{at}\right\}(s) - G_n\left\{e^{-at}\right\}(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{(s-a)^n}\Gamma(n) - \frac{s}{(s+a)^n}\Gamma(n)\right] \\
&= \frac{s}{2}\Gamma(n)\left[\frac{1}{(s-a)^n} - \frac{1}{(s+a)^n}\right] \\
&= \frac{s}{2}\Gamma(n)\frac{1}{s^n}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{a}{s}\right)^n} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{s}\right)^n}\right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir[18].

Örnek 13. (3.1) de $g(t) = \cosh(at)$ alınıp $\cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ değerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
G_n\{\cosh(at)\}(s) &= G_n\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(G_n\left\{e^{at}\right\}(s) + G_n\left\{e^{-at}\right\}(s)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{(s-a)^n}\Gamma(n) + \frac{s}{(s+a)^n}\Gamma(n)\right] \\
&= \frac{s}{2}\Gamma(n)\left[\frac{1}{(s-a)^n} + \frac{1}{(s+a)^n}\right] \\
&= \frac{s}{2}\Gamma(n)\frac{1}{s^n}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{a}{s}\right)^n} + \frac{1}{\left(1+\frac{a}{s}\right)^n}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir[18].

4 . DEJENERE ARA İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

Tezin bundan önceki kısımlarında dejenere Gamma fonksiyonu, dejenere Laplace dönüşümü ve ARA integral dönüşümü hakkında genel bilgiler verildi ve bunların temel özellikleri incelendi.

Bu kısımda daha önce hakkında genel bilgiler verilen ARA integral dönüşümü için dejenere ARA integral dönüşümü tanımlanacak ve temel özellikleri incelenecektir. Bu kısımda verilen teoremler, orijinal teoremlerdir ve tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

4.1. Dejenere ARA İntegral Dönüşümü

Tanım 4.1. $g(t)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $\lambda \in (0,\infty)$ olmak üzere n. basamaktan dejenere ARA integral dönüşümü,

$$G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s) = G_{\lambda}(n,s) = s\int_{0}^{\infty} t^{n-1}e_{\lambda}^{-st}g(t)dt\ , \quad s>0 \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır.

$\lambda \to 0^{+}$ için (4.1) ile tanımlanan dejenere ARA integral dönüşümü (3.1) de verilen klasik ARA integral dönüşümüne dönüşmektedir. Yani

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0^{+}} G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s) = G_{n}\{g(t)\}(s)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1. Her sonlu alt aralıkta tanımlı parçalı sürekli bir $g(t)$ fonksiyonu için $k>0$ bir sabit olmak üzere

$$\left|t^{n-1}g(t)\right| \leq ke_{\lambda}^{\rho t} \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa o takdirde her $s-\rho>\lambda$ için $g(t)$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü vardır.

İspat. (4.1) de tanımlanan $g(t)$ fonksiyonunun dejenere ARA integral ifadesi

$$s\int_{0}^{\infty} t^{n-1}e_{\lambda}^{-st}g(t)dt = s\int_{0}^{\alpha} t^{n-1}e_{\lambda}^{-st}g(t)dt + s\int_{\alpha}^{\infty} t^{n-1}e_{\lambda}^{-st}g(t)dt \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir. $g(t)$ fonksiyonu, parçalı sürekli fonksiyon olduğundan

$$s\int_{0}^{\alpha} t^{n-1}e_{\lambda}^{-st}g(t)dt$$

integralinin varlığı aşikardır. (4.3) ün var olması için

$$s\int_{\alpha}^{\infty} t^{n-1}e_{\lambda}^{-st}g(t)dt \tag{4.4}$$

integralinin yakınsaklığını göstermek gerekir. Bunun için her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$\left| s\int_{\alpha}^{\infty} e_{\lambda}^{-st}t^{n-1}g(t)dt \right| \leq s\int_{\alpha}^{\infty} e_{\lambda}^{-st}\left|t^{n-1}g(t)\right|dt \leq s\int_{\alpha}^{\infty} e_{\lambda}^{-st}ke_{\lambda}^{\rho t}dt$$

yazılabilir. Her $s-\rho > \lambda$ için

$$\begin{aligned}
s\int_{\alpha}^{\infty} e_{\lambda}^{-st}ke_{\lambda}^{\rho t}dt &= ks\int_{\alpha}^{\infty} e_{\lambda}^{-(s-\rho)t}dt = ks\lim_{b\to\infty}\int_{\alpha}^{b}(1+\lambda t)^{-\frac{s-\rho}{\lambda}}dt \\
&= \lim_{b\to\infty} ks\frac{1}{\lambda}.\frac{\lambda}{-s+\rho+\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s-\rho-\lambda}{\lambda}}\Big|_{0}^{b} \\
&= \frac{ks}{s-\rho-\lambda}(1+\lambda t)^{-\frac{s-\rho-\lambda}{\lambda}}
\end{aligned}$$

olduğundan (4.4) genelleştirilmiş integrali yakınsaktır. Böylece $g(t)$ fonksiyonu için $G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s)$ dejenere ARA integral dönüşümünün varlığı ispatlanmış olur. □

4.2. Bazı Dejenere İntegral Dönüşümleri Arasındaki Bağıntılar

Bu bölümde, bazı dejenere integral dönüşümler arasındaki bağıntıları inceleyelim. Bunun için (4.1) deki dejenere ARA integral dönüşümündeki n e bazı özel değerler verelim.

Eğer (4.1) de $n=0$ alınırsa

$$\begin{aligned} G_{0,\lambda}\{g(t)\}(s) &= G_{\lambda}(0,s) \\ &= s\int_{0}^{\infty} t^{-1}e_{\lambda}^{-st}g(t)dt = sL_{\lambda}\left\{\frac{g(t)}{t}\right\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. O halde $n=0$ için $g(t)$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü, $\frac{g(t)}{t}$ nin dejenere Laplace'ına dönüşmektedir.

(4.1) de $n=1$ seçilirse

$$\begin{aligned} G_{1,\lambda}\{g(t)\}(s) &= G_{\lambda}(1,s) \\ &= s\int_{0}^{\infty} e_{\lambda}^{-st}g(t)dt = sL_{\lambda}\{g(t)\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

olarak bulunur. Bu ise dejenere ARA integral dönüşümü ile dejenere Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Dejenere ARA integral dönüşümü ile dejenere Laplace dönüşümü ve (1.12) ile verilen dejenere Sumudu dönüşümü arasındaki bağıntılar da aşağıdaki şekilde verilebilir. Dejenere ARA integral dönüşümünün dejenere Laplace dönüşümü ve dejenere Sumudu dönüşümü ile arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} G_{1,\lambda}\{g(t)\}(s) &= G_{\lambda}(1,s) = sL_{\lambda}\{g(t)\} = sF_{\lambda}(s) \\ &= s\int_{0}^{\infty} e_{\lambda}^{-st}g(t)\,dt = \frac{1}{\frac{1}{s}}\int_{0}^{\infty} e_{\lambda}^{-\frac{t}{1/s}}g(t)\,dt \\ &= \mathfrak{G}_{\lambda}\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. Buradan dejenere ARA integral dönüşümünün dejenere Sumudu'ya dönüşümü görülmektedir.

Dejenere ARA integral dönüşümü, dejenere Laplace dönüşümü ve (1.13) teki dejenere

Elzaki dönüşümü arasındaki bağıntı ise

$$\begin{aligned} G_{1,\lambda}\left\{g(t)\right\}(s) &= G_{\lambda}(1,s) = sL_{\lambda}\left\{g(t)\right\} \\ &= sF_{\lambda}(s) = s^2 T_{\lambda}\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

olarak elde edilir. Gerçekten de

$$G_{1,\lambda}\left\{g(t)\right\}(s) = s\int_0^\infty e_\lambda^{-st} g(t)\,dt$$

integraline $st = u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa $dt = \frac{du}{s}$ olacağından

$$\begin{aligned} G_{1,\lambda}\left\{g(t)\right\}(s) &= \int_0^\infty e_\lambda^{-u} g\left(\frac{u}{s}\right) du \\ &= s^2 \frac{1}{s^2}\int_0^\infty e_\lambda^{-u} g\left(\frac{u}{s}\right) du \\ &= s^2 T_{\lambda}\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu da dejenere ARA integral dönüşümü ile dejenere Elzaki dönüşümü arasındaki bağıntıyı verir.

4.3. Dejenere ARA İntegral Dönüşümünün Özellikleri

Tezin bu kısmında dejenere ARA integral dönüşümünün bazı temel özelliklerini verelim.

Teorem 4.2. Dejenere ARA integral dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

İspat. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $(0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyon ve $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, (4.1) de yazılırsa

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1} e_\lambda^{-st}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] dt \\ &= \alpha s\int_0^\infty t^{n-1} e_\lambda^{-st} f(t)dt + \beta s\int_0^\infty t^{n-1} e_\lambda^{-st} g(t)dt \\ &= \alpha G_{n,\lambda}\left\{f(t)\right\}(s) + \beta G_{n,\lambda}\left\{g(t)\right\}(s) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde dejenere ARA integral dönüşümünde lineerlik özelliği sağlanır.

□

Bu özellikler verilirken $f(t)$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü $G_{n,\lambda}\{f(t)\}(s)$ olduğu göz önüne alınarak işleme devam edilecektir.

$f(at)$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü için

$$G_{n,\lambda}\{f(at)\}(s) = s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-st}f(at)\,dt$$

integralinde $u = at$ şeklinde bir değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-st}f(at)\,dt &= \frac{s}{a}\int_0^\infty \left(\frac{u}{a}\right)^{n-1} e_\lambda^{-\frac{u}{a}s}f(u)\,du \\ &= \frac{1}{a^{n-1}}.\frac{s}{a}\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-\frac{s}{a}t}f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{a^{n-1}}G_\lambda\left(n,\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f(t)$ nin dejenere ARA integral dönüşümü $G_{n,\lambda}\{f(t)\}(s) = G_\lambda(n,s)$ ise

$$G_{n,\lambda}\{f(at)\}(s) = a^{1-n}G_\lambda\left(n,\frac{s}{a}\right) \tag{4.9}$$

olur.

$g(t) = e_\lambda^{-ct}f(t)$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü,

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-ct}f(t)\right\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-(s+c)t}f(t)dt \\ &= \frac{s}{s+c}(s+c)\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-(s+c)t}f(t)dt \\ &= \frac{s}{s+c}G_\lambda(n,s+c) \qquad (4.10) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$g(t) = t^m f(t)$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü,

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{t^m f(t)\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-st}t^m f(t)dt \\ &= s\int_0^\infty t^{m+n-1}e_\lambda^{-st}f(t)dt \\ &= G_\lambda(n+m,s) \end{aligned} \tag{4.11}$$

olur.

(1.2) ile verilen birim basamak fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü ise $g(t) = u_c(t)f(t-c)$ olarak alınırsa

$$G_{n,\lambda}\{u_c(t)f(t-c)\}(s) = s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-st}f(t-c)\,dt$$

olur. Bu integralde $t - c = \mu$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{u_c(t)f(t-c)\}(s) &= s\int_0^\infty (\mu+c)^{n-1}e_\lambda^{-s(\mu+c)}f(\mu)\,d\mu \\ &= e_\lambda^{-sc}s\int_0^\infty e_\lambda^{-s\mu}(\mu+c)^{n-1}f(\mu)\,d\mu \\ &= e_\lambda^{-sc}G_{1,\lambda}\left\{f(\mu)(\mu+c)^{n-1}\right\}(s) \end{aligned} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

Şimdi de (4.1) ile tanımlanan dejenere ARA integral dönüşümünün türevleri için bir bağıntı elde edelim.

(4.1) deki tanımda ifade edilen dejenere ARA integral dönüşümünde s parametresine göre bir kez türev alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s) \\ &= \frac{d}{ds}\left[s\int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^{n-1}g(t)\,dt\right] \\ &= \int_0^\infty (1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^{n-1}g(t)\,dt - \frac{s}{\lambda}\int_0^\infty (\log(1+\lambda t))(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^{n-1}g(t)\,dt \end{aligned}$$

$$= \frac{G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s)}{s} - \lambda^{-1}G_{n,\lambda}\{(\log(1+\lambda t))\,g(t)\}(s)$$

elde edilir. Daha sonra bu ifadenin her iki tarafının tekrar s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s) &= \frac{-1}{\lambda}\int_0^\infty (\log(1+\lambda t))(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^{n-1}g(t)\,dt \\
&\quad -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (\log(1+\lambda t))(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^{n-1}g(t)\,dt \\
&\quad +(-1)^2\frac{s}{\lambda^2}\int_0^\infty (\log(1+\lambda t))^2(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^{n-1}g(t)\,dt \\
&= (-1).2.\lambda^{-1}\frac{G_{n,\lambda}\{\log(1+\lambda t)\,g(t)\}(s)}{s} \\
&\quad +(-1)^2\lambda^{-2}G_{n,\lambda}\left\{(\log(1+\lambda t))^2\,g(t)\right\}(s)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{ds^3}G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s) &= (-1)^2.3.\lambda^{-2}\frac{G_{n,\lambda}\left\{(\log(1+\lambda t))^2\,g(t)\right\}(s)}{s} \\
&\quad +(-1)^3\lambda^{-3}G_{n,\lambda}\left\{(\log(1+\lambda t))^3\,g(t)\right\}(s)
\end{aligned}$$

olur. Türev almaya benzer şekilde devam edilirse (4.1) in s ye göre $m-yinci$ türevi,

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{ds^m}G_{n,\lambda}\{g(t)\}(s) &= (-1)^{m-1}m\lambda^{-m+1}\frac{G_{n,\lambda}\left\{(\log(1+\lambda t))^{m-1}\,g(t)\right\}(s)}{s} \\
&\quad +(-1)^m\lambda^{-m}G_{n,\lambda}\{(\log(1+\lambda t))^m\,g(t)\}(s) \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

olarak genel bir ifade ile elde edilir.

Teorem 4.3. $g(t)$ ve türevleri birinci basamaktan dejenere ARA integral dönüşümü var olan fonksiyonlar ve $g^{(i)}(0)$ sonlu ve tanımlı olmak üzere

$$\begin{aligned}
G_{1,\lambda}\left\{\frac{d^m}{dt^m}g(t)\right\}(s) &= sL_\lambda\left\{g^{(m)}(t)\right\} \\
&= s^2(s+\lambda)(s+2\lambda)...(s+(m-1)\lambda)\mathfrak{L}_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-m}g(t)\right\} \\
&\quad -s\sum_{i=0}^{m-1}g^{(i)}(0)\left(\prod_{k=1}^{m-i-1}s+(k-1)\lambda\right) \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır[12].

İspat. Önce $m=1$ için doğruluğunu görelim.

$$
\begin{aligned}
G_{n,\lambda}\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}g'(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty} st^{n-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}g(t)\Big|_0^b \\
&\quad -s(n-1)\int_0^\infty t^{n-2}(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}g(t)dt \\
&\quad +s^2\int_0^\infty t^{n-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s+\lambda}{\lambda}}g(t)dt
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $n=1$ alınarak ve (4.6) daki bağıntı kullanılarak

$$
G_{1,\lambda}\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\}(s) = sL_\lambda\left\{g'(t)\right\} = -sg(0)+s^2L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-1}g(t)\right\}
$$

elde edilir. Benzer şekilde $(m-1)$ kez türev alınarak[12]

$$
\begin{aligned}
G_{1,\lambda}\left\{\frac{d^m}{dt^m}g(t)\right\}(s) &= sL_\lambda\left\{g^{(m)}(t)\right\} \\
&= s^2(s+\lambda)(s+2\lambda)...(s+(m-1)\lambda)L_\lambda\left\{(1+\lambda t)^{-m}g(t)\right\} \\
&\quad -s\sum_{i=0}^{m-1} g^{(i)}(0)\left(\prod_{k=1}^{m-i-1} s+(k-1)\lambda\right)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. □

Yukarıdaki tanımlar, teoremler ve özellikler göz önüne alındığı zaman dejenere ARA integral dönüşümünün dejenere Laplace, dejenere Sumudu ve dejenere Elzaki dönüşümleri cinsinden verilebileceği görülmektedir. Ayrıca dejenere ARA integral dönüşümünün, (4.1) de $n=1$ alınması durumunda

$$
G_{1,\lambda}\{g(t)\}(s) = L_{\lambda,*}\{g(t)\} = s\int_0^\infty e_\lambda^{-st}g(t)\,dt
$$

şeklinde dejenere Laplace Carson dönüşümüne, literatüre Aboodh ve Mohand dönüşümü olarak geçen dönüşümler için ise (4.1) de $n=1$ alınıp $\frac{1}{s^2}$ ile çarpılmasıyla dejenere ARA integral dönüşümünün,

$$\frac{1}{s^2}G_{1,\lambda}\{g(t)\}(s)=A_\lambda\{g(t)\}=\frac{1}{s}\int_0^\infty e_\lambda^{-st}g(t)dt$$

dejenere Aboodh dönüşümü olarak tanımlanabileceği ve son olarak yine (4.1) de $n=1$ alınıp s ile çarpılarak

$$sG_{1,\lambda}\{g(t)\}(s)=M_\lambda\{g(t)\}=s^2\int_0^\infty e_\lambda^{-st}g(t)dt$$

şeklinde dejenere Mohand dönüşümü olarak tanımlanabileceği kolayca görülebilir. Bu dönüşümlerin hepsinin $\lambda\to 0^+$ için klasik hallerine dönüştüğü görülür.

4.4. Uygulamalar

Bu kısımda yukarıda elde edilen sonuçlar için bazı örnekler verilecektir.

Örnek 14. $\lambda\in(0,\infty)$ olsun. (4.1) ile verilen dejenere ARA integral dönüşümü tanımında $g(t)=1$ alınır ve (2.37) kullanılırsa

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{1\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-st}dt=s\int_0^\infty t^{n-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}dt \\ &= sL_\lambda\left\{t^{n-1}\right\}=\frac{1}{s^{n-1}}\Gamma_{\frac{\lambda}{s}}(n) \end{aligned} \tag{4.15}$$

olur. Buradan $g(t)=1$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü dejenere Laplace dönüşümü ve dejenere Gamma fonksiyonu arasındaki ilişkiler görülmektedir. Bu son eşitlik ile (2.15) göz önüne alınırsa

$$G_{n,\lambda}\{1\}(s)=\lambda^{-n}sB\left(n,\frac{s}{\lambda}-n\right)$$

yazılabilir. Bu da $g(t)=1$ fonksiyonunun dejenere ARA integral dönüşümü ile klasik Beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi vermektedir. Buradan da klasik Beta fonksiyonu ve klasik Gamma fonksiyonu arasındaki bağıntı yardımı ile

$$G_{n,\lambda}\{1\}(s)=\lambda^{-n}s\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\lambda}\right)}$$

yazılabilir.

Örnek 15. (4.1) de $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere $g(t)=t^m$ alınır ve (2.37) kullanılırsa

$$\begin{aligned}G_{n,\lambda}\{t^m\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}t^m dt\\ &= s\int_0^\infty t^{m+n-1}(1+\lambda t)^{-\frac{s}{\lambda}}dt\\ &= sL_\lambda\left\{t^{m+n-1}\right\}\\ &= \frac{1}{s^{m+n-1}}\Gamma_{\frac{\lambda}{s}}(m+n)\end{aligned} \tag{4.16}$$

olur.

Örnek 16. $n\in\mathbb{N}$ ve $s>n\lambda-a$ olmak üzere $g(t)=e_\lambda^{-at}$ için basit integral işlemleri ve (2.37) yardımı ile

$$\begin{aligned}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\right\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-(s+a)t}dt\\ &= \frac{s}{(s+a)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a}}(n)\end{aligned} \tag{4.17}$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada

$$\begin{aligned}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\right\}(s) &= s\lambda^{-n}B\left(n,\frac{s+a}{\lambda}-n\right)\\ &= s\lambda^{-n}\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{s+a}{\lambda}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{\lambda}\right)}\end{aligned} \tag{4.18}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliklere ek olarak $g(t)=e_\lambda^{at}$ için

$$\begin{aligned}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{at}\right\}(s) &= s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-(s-a)t}dt\\ &= \frac{s}{(s-a)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s-a}}(n),\end{aligned} \tag{4.19}$$

$g(t) = e_{\lambda}^{-ait}$ için

$$G_{n,\lambda}\left\{e_{\lambda}^{-ait}\right\}(s) = s\int_{0}^{\infty} t^{n-1}e_{\lambda}^{-(s+ai)t}dt = \frac{s}{(s+ai)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+ai}}(n), \tag{4.20}$$

$g(t) = e_{\lambda}^{ait}$ için

$$G_{n,\lambda}\left\{e_{\lambda}^{ait}\right\}(s) = s\int_{0}^{\infty} t^{n-1}e_{\lambda}^{-(s-ai)t}dt = \frac{s}{(s-ai)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s-ai}}(n) \tag{4.21}$$

eşitlikleri de elde edilir. (4.18) bağıntısında elde edilen eşitliklerin benzerleri bu fonksiyonlar için de verilebilir.

Örnek 17. (4.1) de $g(t) = t^m e_{\lambda}^{at}$ alınırsa $m \in \mathbb{N}$ ve $s > (m+n)\lambda + a$ olmak üzere (2.37) nin ispatına benzer işlemler yardımı ile pratik olarak

$$G_{n,\lambda}\left\{t^m e_{\lambda}^{at}\right\}(s) = s\int_{0}^{\infty} t^{m+n-1}e_{\lambda}^{-(s-a)t}dt = \frac{s}{(s-a)^{m+n}}\Gamma_{\frac{\lambda}{s-a}}(m+n) \tag{4.22}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 18. (4.1) de $g(t) = \cos_{\lambda}(at)$ alınırsa (2.12) ve (2.37) den

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{\cos_{\lambda}(at)\}(s) &= G_{n,\lambda}\left\{\frac{e_{\lambda}^{ait}+e_{\lambda}^{-ait}}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}G_{n,\lambda}\left\{e_{\lambda}^{ait}\right\}(s) + \frac{1}{2}G_{n,\lambda}\left\{e_{\lambda}^{-ait}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{(s-ai)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s-ai}}(n) + \frac{s}{(s+ai)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+ai}}(n)\right] \end{aligned} \tag{4.23}$$

olarak elde edilir.

Örnek 19. (4.1) de $g(t) = \sin_\lambda(at)$ alınırsa (2.13) ve (2.37) den

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{\sin_\lambda(at)\}(s) &= G_{n,\lambda}\left\{\frac{e_\lambda^{ait} - e_\lambda^{-ait}}{2i}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2i}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{ait}\right\}(s) - \frac{1}{2i}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-ait}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{s}{(s-ai)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s-ai}}(n) - \frac{s}{(s+ai)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+ai}}(n)\right] \end{aligned} \tag{4.24}$$

olarak bulunur.

Örnek 20. (4.1) de $g(t) = \cosh_\lambda(at)$ alınıp (2.33) kullanılarak (2.37) ye benzer şekilde

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{\cosh_\lambda(at)\}(s) &= G_{n,\lambda}\left\{\frac{e_\lambda^{at} + e_\lambda^{-at}}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{at}\right\}(s) + \frac{1}{2}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{(s-a)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s-a}}(n) + \frac{s}{(s+a)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a}}(n)\right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir. Daha sonra dejenere Gamma fonksiyonu ile klasik Beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi gösteren (2.15) ifadesi kullanılarak

$$G_{n,\lambda}\{\cosh_\lambda(at)\}(s) = \frac{s}{2}\lambda^{-n}\left[B(n, \frac{s-a}{\lambda} - n) + B(n, \frac{s+a}{\lambda} - n)\right]$$

eşitliği bulunur. Klasik Beta fonksiyonu ile klasik Gamma fonksiyonu arasındaki bağıntı yardımıyla

$$G_{n,\lambda}\{\cosh_\lambda(at)\}(s) = \frac{s}{2}\lambda^{-n}\Gamma(n)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{s-a}{\lambda} - n\right)}{\Gamma\left(\frac{s-a}{\lambda}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{\lambda} - n\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{\lambda}\right)}\right]$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 21. (4.1) de $g(t) = \sinh_\lambda(at)$ alınıp (2.34) kullanılır ve (2.37) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{\sinh_\lambda(at)\}(s) &= G_{n,\lambda}\left\{\frac{e_\lambda^{at} - e_\lambda^{-at}}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{at}\right\}(s) - \frac{1}{2}G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\right\}(s) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{(s-a)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s-a}}(n) - \frac{s}{(s+a)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a}}(n)\right] \quad (4.26)$$

elde edilir. Burada (2.15) ten (4.26) nın klasik Beta ve klasik Gamma fonksiyonu ile arasındaki bağıntı,

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\{\sinh_\lambda(at)\}(s) &= \frac{s}{2}\lambda^{-n}\left[B\left(n,\frac{s-a}{\lambda}-n\right) - B\left(n,\frac{s+a}{\lambda}-n\right)\right] \\ &= \frac{s}{2}\lambda^{-n}\Gamma(n)\left[\frac{\Gamma\left(\frac{s-a}{\lambda}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{s-a}{\lambda}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{s+a}{\lambda}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{\lambda}\right)}\right] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 22. (4.1) de $g(t) = e_\lambda^{-at}\cos_\lambda(bt)$ alınırsa basit integral işlemleri ile

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\cos_\lambda(bt)\right\}(s) &= G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\left(\frac{e_\lambda^{ibt}+e_\lambda^{-ibt}}{2}\right)\right\}(s) \\ &= s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-st}e_\lambda^{-at}\left(\frac{e_\lambda^{ibt}+e_\lambda^{-ibt}}{2}\right)dt \\ &= \frac{s}{2}\int_0^\infty t^{n-1}\left(e_\lambda^{-(s+a-bi)t}+e_\lambda^{-(s+a+bi)t}\right)dt \\ &= \frac{s}{2}\left[\frac{1}{(s+a-bi)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a-bi}}(n)\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{(s+a+bi)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a+bi}}(n)\right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir.

Örnek 23. (4.1) de $g(t) = e_\lambda^{-at}\sin_\lambda(bt)$ alınırsa yine basit integral işlemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\sin_\lambda(bt)\right\}(s) &= G_{n,\lambda}\left\{e_\lambda^{-at}\left(\frac{e_\lambda^{ibt}-e_\lambda^{-ibt}}{2i}\right)\right\}(s) \\ &= s\int_0^\infty t^{n-1}e_\lambda^{-st}e_\lambda^{-at}\left(\frac{e_\lambda^{ibt}-e_\lambda^{-ibt}}{2i}\right)dt \\ &= \frac{s}{2i}\int_0^\infty t^{n-1}\left(e_\lambda^{-(s+a-bi)t}-e_\lambda^{-(s+a+bi)t}\right)dt \\ &= \frac{s}{2i}\left[\frac{1}{(s+a-bi)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a-bi}}(n)\right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(s+a+bi)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a+bi}}(n)\Bigg] \tag{4.28}$$

olur.

Örnek 24. (4.1) de $g(t)=e_{\lambda}^{-at}\cosh_{\lambda}(bt)$ alınırsa (4.27) ye benzer işlemler yardımı ile

$$\begin{aligned} & G_{n,\lambda}\left\{e_{\lambda}^{-at}\cosh_{\lambda}(bt)\right\}(s) \\ = & \frac{s}{2}\left[\frac{1}{(s+a-b)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a-b}}(n)+\frac{1}{(s+a+b)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a+b}}(n)\right] \end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir.

Örnek 25. (4.1) de $g(t)=e_{\lambda}^{-at}\sinh_{\lambda}(bt)$ alınırsa (4.28) e benzer işlemler yardımı ile

$$\begin{aligned} & G_{n,\lambda}\left\{e_{\lambda}^{-at}\sinh_{\lambda}(bt)\right\}(s) \\ = & \frac{s}{2}\left[\frac{1}{(s+a-b)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a-b}}(n)-\frac{1}{(s+a+b)^n}\Gamma_{\frac{\lambda}{s+a+b}}(n)\right] \end{aligned} \tag{4.30}$$

eşitliği elde edilir.

5 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde önce bazı çok bilinen integral dönüşümlerinin genel tanımları verilmiş ve Gamma ve Beta fonksiyonlarının tanımları ile sağladıkları bazı önemli özelliklerden bahsedilmiştir. Daha sonra bilinen bazı integral dönüşümlerinin tanımlanmış olan dejenere şekillerinden bahsedilmiş ve önemli özellikleri verilmiştir. Bunlardan en çok bilinenleri dejenere Gamma ve dejenere Laplace dönüşümleri olup bunlar hakkında detaylı bilgiler verilmiştir.

2020 yılında ARA integral dönüşümü olarak tanımlanan integral dönüşümü hakkında genel bilgiler verilmiştir.

Bu tezin son kısmı, tezin orijinal kısmı olup 2020 de tanımlanan ARA integral dönüşümünün dejenere hali tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Bu dönüşümden dejenere Laplace, dejenere Sumudu ve dejenere Elzaki dönüşümlerine nasıl geçilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca özel bir durum olarak dejenere Laplace Carson dönüşümü ile arasındaki bağlantı verilmiştir. Yine ikinci bir özel durum olarak dejenere Aboodh dönüşümüne ve dejenere Mohand dönüşümüne geçişleri hakkında bilgiler verilmiştir. Son olarak dejenere ARA integral dönüşümünün uygulamaları verilmiştir.

Tez bir bütün olarak bakıldığında integral dönüşüm, dejenere integral dönüşüm ve bu dönüşümler arasındaki ilişkiler ile bazı önemli özelliklerin tanımlarını kapsamaktadır. Son bölümü de orijinal sonuçlar içermektedir. Tez bu şekliyle literatürde kaynak olarak kullanılabilecek bir özelliğe sahiptir.

KAYNAKLAR

[1] Aboodh, K. (2013). The new integral transform: Aboodh Transform. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 9(1), 35-43.

[2] Aggarwal, S., Gupta, A. R., Sharma, S. D., Chauhan, R. ve Sharma, N. (2019). Mahgoub transform (Laplace-Carson transform) of error function. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management and Applied Science*, 8(4), 92-98.

[3] Altın, A. (2020). *Uygulamalı Matematik* (2. baskı). Ankara: Gazi Kitabevi.

[4] Atangana, A., Kiliçman, A. (2013). A novel integral operator transform and its application to some FODE and FPDE with some kind of singularities. *Math. Probl. Eng.*, 2013(1), 7. http://dx.doi.org/10.1155/2013/531984

[5] Barnes, B. (2016). Polynomial integral transform for solving differential Equations. *Eur. J. Pure Appl. Math.*, 9(2), 140–151.

[6] Bochner, S., Chandrasekharan, K. (1949). Fourier Transforms. *Princeton University Press.* London, UK.

[7] Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S. (2013). *Adi Diferensiyel Denklemler* (5. baskı). Bursa: Dora.

[8] Duran, U. (2021). Degenerate Sumudu transform and its properties. *Filomat*, 35(14), 4731-4741.

[9] Elzaki, T. M. (2011). The new integral transform "Elzaki transform". *Glob. J. Pure Appl. Math.*, 7(1), 57–64.

[10] Kalavathi, A., Kohila, T. ve Upadhyaya, L. M. (2021). On the degenerate Elzaki transform. *Bull. Pure Appl. Sci. Sect. E Math. Stat. E*, 40(1), 99-107.

[11] Khan, Z.H. ve Khan, W.A. (2008). N-Transform properties and applications. *NUST J. Eng. Sci.*, 1(1), 127–133.

[12] Kim, T. ve Kim, D. S. (2017). Degenerate Laplace transform and degenerate Gamma function. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 24(2), 241-248.

[13] Kim, T. ve Kim, D. S. (2020). Note on the degenerate Gamma function. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 27(3), 352-358.

[14] Maitama, S., Zhao, W. (2019). New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations. *Int. J. Anal. Appl.*, 17(2), 167–190.

[15] Mohand, M., Mahgoub, A. (2017). The New Integral Transform "Mohand Transform". *Advances in Theoretical and Applied Mathematics,* 12(2), 113-120.

[16] Ramadan, M., Raslan, K., El-Danaf, T., Hadhoud, A. (2016). A new general integral transform: Some properties and remarks. *J. Math. Comput. Sci.*, 6(1), 103–109.

[17] Rangaig, N., Minor, N., Penonal, G., Filipinas, J., Convicto, V. (2017). On Another Type of Transform Called Rangaig Transform. *Int. J. Partial. Diff. Equ. Appl.*, 5(1), 42–48.

[18] Saadeh, R., Qazza A. ve Burqan, A. (2020). A new integral transform: ARA transform and its properties and applications. *Symmetry*, 12(6), 925. https://doi.org/10.3390/sym12060925 .

[19] Spiegel, M. R. (1965). Theory and Problems of Laplace Transforms; Schaums Outline Series; McGraw-Hill: New York, NY, USA.

[20] Srivastava, H. M., Luo, M., Raina, R. K. (2015). A new integral transform and its applications. *Acta Math. Sci.*, 35(6), 1386–1400.

[21] Watugala, G. K. (1993). Sumudu transform: A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 24, 35-43.

[22] Widder, D. V. (1946). The Laplace Transform. *Princeton University Press,* London, UK.

[23] Yang, X. J. (2016). A new integral transform with an application in heat transfer problem. *Therm. Sci.*, 20(3), 677–681.

[24] Yılmaz, R. K., Yağcı, O. ve Şahin, R. (2022). Degenerate ARA integral transform and its applications. *6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2022).* Ordu Üniversitesi, Ordu, Türkiye, 20-22 Mayıs.

[25] Zafar, Z. (2016). ZZ transform method. *Int. J. Adv. Eng. Glob. Technol.*, 4, 1605–1611.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Rabia Kevser YILMAZ

Doğum Tarihi/Yeri :

Yabancı Dil :

Eğitim Durumu

Lise :

Lisans :

Yayınları :

1.) Rabia Kevser Yılmaz, Oğuz Yağcı, Recep Şahin, Degenerate ARA integral transform and its applications, *6th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2022)*, Ordu, Türkiye, 20-22 Mayıs

Araştırma Alanları : Laplace Dönüşümü, dejenere Laplace Dönüşümü, ARA integral dönüşümü.