Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **17** (2017) 021304 (500-505)
AKU J. Sci.Eng.**17** (2017) 021304 (500-505)
DOI: 10.5578/fmbd.60774

Gamma ve Weibull Dağılımları Arasında Kullback-Leibler Uzaklığına Dayalı Ayrım

Hayrinisa Demirci Biçer, Cenker Biçer
Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, Kırıkkale, TÜRKİYE

e-posta: hdbicer@hotmail.com, *cbicer@kku.edu.tr*

Geliş Tarihi: 04.11.2016 ; Kabul Tarihi: 31.08.2017

Anahtar kelimeler
Kullback-Leibler uzaklığı; En çok olabilirlik testi; Gamma dağılımı; Weibull dağılımı; Doğru seçim olasılığı.

Özet

Gamma ve Weibull dağılımları sağlık, güvenilirlik, mühendislik vb. ortak uygulama alanlarına sahip olan dağılımlardır. Çoğu zaman bu iki dağılım bir veri seti için benzer sonuç çıkarımlar sağlasa da (çakışsa da), veri setini en iyi modelleyecek olan dağılımın seçilmesi arzulanır. Bu çalışmada, Gamma ya da Weibull dağılımlarından herhangi birinden gözlendiği varsayılan bir veri seti için iki dağılım arasından seçim probleminin çözümü için Kullback-Leibler uzaklıkları oran (RMKLD) yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca yapılan simülasyon çalışmaları ile kullanılan yöntem farklı örneklem büyüklükleri ve dağılımların farklı parametre değerleri için en çok olabilirlik oran testi ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen bilgiler, RMKLD'nin Gamma ve Weibull dağılımlarının ayrımı için kullanılabileceğini göstermektedir.

DiscriminationBetween Gamma andWeibull Distribution Based on Kullback-LeiblerDivergence

Keywords
Kullback-Leibler divergence; Maximum likelihood Ratio test; Gamma distribution; Weibull distribution; Probability of correct selection

Abstract

Gamma and Weibull are distributions having common application areas such as reliability, lifetime, engineering, etc. Although, these two distributions provide similar inferences for a data set (overlapping). It is desirable to be selected the distribution which will give the best model the data set. In this study, Ratio of Kullback Leibler divergences method (RMKLD) has been used for the solution of discrimination between gamma and weibull distributions for any data set taken from gamma or weibull distributions. In addition, with simulation studies, used method has been comparised with maximum likelihood estimation method for different sample sizes and parameter values. Information obtained indicates RMKLD test can be used for the discrimination between the Gamma and Weibull distributions.

1. Giriş

Gamma ve Weibull dağılımları pozitif ve çarpık verilerin analizi için sıkça kullanılan dağılımlardır. Çoğu zaman bu dağılımlar mühendislik, sağlık, yaşam bilimleri, fen bilimleri gibi alanlardan gözlenen bir veri setini modellemede birbirinin yerine kullanılabilmektedir. Aslında, bu dağılım modelleri makul örneklem büyüklükleri için bir birine çok yakın veriler içerirler. Her ne kadar bu dağılımlar bir birlerinin yerlerine kullanılabilseler de, model seçimine bağlı olarak özellikle kuyruk olasılıkları yanlış model seçiminden önemli düzeyde etkilenmektedir. Bu nedenle, veri setinin modellenmesi aşamasında araştırmacı tarafından doğru veya doğruya en yakın modelin seçimi arzu edilir.

İstatistikte verilen bir veri setinin muhtemel iki olasılık dağılımından hangisi ile modelleneceğinin belirlenmesi problemi oldukça eski bir problemdir. Literatürde bu problemin üstesinden gelebilmek için yapılmış çok sayıda çalışma ve farklı yaklaşım vardır. Gamma ve Weibull dağılımları arasındaki ayrım problemi Mohd Saat vd. (2008) tarafından en çok olabilirlik oran testi ve Voung testi ile incelenmiştir. Cox (1961,962), Atkinson (1969,1970), ve Dyer (1973) bir veri setinin bilinen iki dağılımdan hangisinden geldiğini belirleme üzerine çalışmalar yapmışlardır. Dumonceaux ve Antle (1973) Log-normal ve Weibull dağılımlarını ayırt etmek için en çok olabilirlik oran testini ele alıp kritik değerleri elde etmişlerdir. Bain ve Englehardt (1980) Weibull ve Gamma dağılımları için doğru seçim olasılıklarını yaptıkları simülasyon çalışması ile elde etmişlerdir. Gupta ve Kundu (2003) çalışmalarında, Weibull ve genelleştirilmiş Üstel dağılımları ele almışlar ve bu iki dağlım arasındaki ayrım problemini en çok olabilirlik oran yöntemine göre tartışmıştır. Bromideh (2012) Weibull ve Log-Normal dağılımları arasındaki seçim problemini Kullback-Leibler uzaklığına göre incelemiştir. Bromideh ve Valizadeh (2013) bir veri setinin muhtemel iki dağılımdan hangisi ile modelleneceğinin belirlenebilmesi için minumumlaştırılmışKullback-Lebibler uzaklıkları oranı (RMKLD) yöntemini önermiş ve çalışmalarında Gamma ve Log-Normal dağılımlarını ayırt etme problemini ele alıp simülasyon çalışmasına dayalı doğru seçim olasılıklarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, Gamma ve Weibull dağılımları arasında ayırt etme problemi Bromideh ve Valizadeh (2013) tarafından önerilen RMKLD yöntemi göz önünde bulundurularak incelenmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde Kullback-Leibler uzaklığı ve RMKLD yöntemi kısaca açıklanmıştır. Ayrıca Gamma ve Weibull dağılımları arasındaki Kullback-Leibler uzaklıkları elde edilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde ise RMKLD yönteminin performansını literatürde sıkça kullanılan en çok olabilirlik oranı yöntemine göre karşılaştırmak istenilmiştir Bu amaç doğrultusunda RMKLD ve en çok olabilirlik oranı yöntemleri için simülasyon çalışmasına dayalı doğru seçim olasılıkları verilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise elde edilen bilgiler tartışılmıştır.

2.Kullback-Leibler uzaklığı ve RMKLD

Kullback- Leibler uzaklığı ilk olarak Kullback ve Leibler (1951) tarafından tanımlanmıştır. İstatistikte Kulback-Leibler uzaklığı (Kullback- Leibler bilgi kazancı, göreli entropi) bir X rasgele değişkeni için söz konusu olabilecek f ve g gibi iki dağılım arasındaki uzaklığın simetrik olmayan bir ölçüsüdür. $f$ve g dağılımı arasındaki Kullback-Leibler uzaklığı $D_{KL}(f\|g)$ ile gösterilmek üzere,

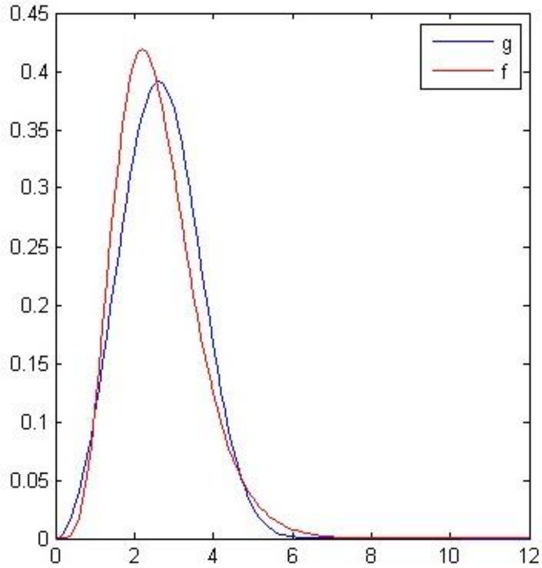
$$D_{KL}(f\|g)=E_f\left[\ln\frac{f(X)}{g(X)}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}dx \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır (Bromideh ve Validezah 2013). Burada $E_f(.)$, f fonksiyonuna göre beklenen değeri ifade etmektedir. (1) eşitliği ile verilen tanımdan

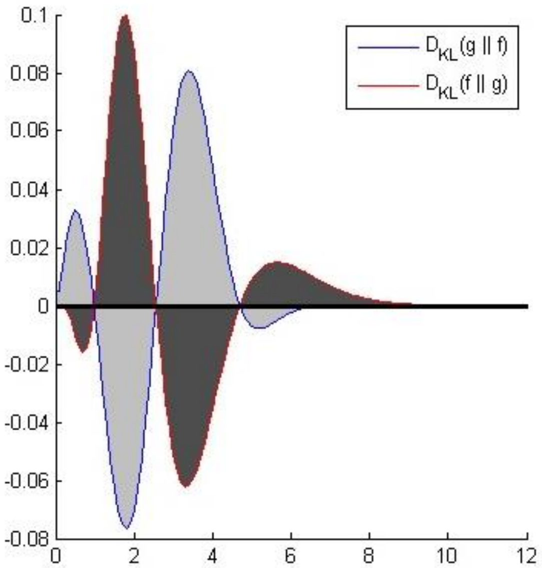
$$D_{KL}(f\|g)=E_f\left[\ln f(X)\right]-E_f\left[\ln g(X)\right]$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece Kullback-Leibler uzaklığı iki beklenen değerin farkıdır. İki farklı dağılım için genelde

$D_{KL}(f\|g)\neq D_{KL}(g\|f)$ (2) olduğundan Kulback-Leibler uzaklığı bir metrik değildir. $D_{KL}\left(f\|g\right)=D_{KL}\left(g\|f\right)$olabilmesi ancak ve ancak f=g olması ile mümkündür. $Gamma\left(6.5,0.4\right)$ve $Weibull\left(3,1/3\right)$dağılımlarının olasılık yoğunluk fonksiyonları grafikleri Şekil 1. de verilmiştir. Şekil 2. de ise, bu iki dağılımın Kullback-Leibler uzaklıklarının hesabında kullanılan alanlargörülmektedir. Söz konusu olan iki dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonlarının birbirine çok yakın olmasına rağmen Kullback-Leibler uzaklıklarının bir birine eşit olmadığı yani farklı olduğu Şekil 1. ve Şekil 2. den görülmektedir.



Şekil 1. $Gamma(6.5,0.4)$ ve $Weibull(3,1/3)$ dağılımlarına ait olasılık yoğunluk fonksiyonları



Şekil 2. $Gamma(6.5,0.4)$ ve $Weibull(3,1/3)$ dağılımları arasındaki Kullback-Leibler uzaklıklarını veren alanlar.

Bromideh ve Valizadeh (2013) yaptıkları çalışma ile bir X rasgele değişkeninin muhtemel *f* ve *g* dağılımlarından hangisi ile modellenmesi gerektiğini belirleyebilmek için

$$\begin{aligned} H_0 &: X \sim f(x,.) \\ H_1 &: X \sim g(x,.) \end{aligned} \qquad (3)$$

hipotezini göz önüne almış ve (3) ile verilen hipotezi test edebilecek; Kullback-Leibler uzaklığına dayalı bir test istatistiği olarak

$$RMKLD = \ln\left[\frac{D_{KL}(f\|g)}{D_{KL}(g\|f)}\right] \qquad (4)$$

önermiştir. (4) eşitliği ile verilen test istatistiği için bir karar kuralı ise Bromideh ve Valizadeh (2013) tarafından

$$\begin{aligned} &RMKLD < 0 \text{ ise } H_0 \text{ hipotezi reddedilemez.} \\ &RMKLD > 0 \text{ ise } H_0 \text{ hipotezi reddedililir.} \end{aligned} \qquad (5)$$

olarak verilmiştir.

2.1. Gamma ve Weibull dağılımları için Kullback-Leibler uzaklıkları

Gamma dağılımına sahip bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{GA}(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \; ; x > 0 \quad (6)$$

eşitliği ile verilir. Burada $\alpha > 0$ dağılımın şekil parametresi $\beta > 0$ ise dağılımın ölçek parametresidir. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Gamma dağılımından alınan bir örneklem olmak üzere Gamma dağılımının olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L_{GA}(\alpha,\beta;x_1,\ldots,x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f_{GA}(x_i;\alpha,\beta) \\ &= \frac{1}{\beta^{n\alpha}\left[\Gamma(\alpha)\right]^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned} \qquad (7)$$

dır. $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ sırasıyla Gamma dağılımının bilinmeyen α ve β parametrelerinin ençok olabilirlik tahmin edicilerini göstermek üzere, $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ arasındaki ilişki

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\hat{\alpha}} \qquad (8)$$

dır.

Weibull dağılımına sahip bir *X* rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g_{WE}(x;\theta,\lambda) = \theta\lambda^{\theta} x^{\theta-1} e^{-(x\lambda)^{\theta}} \quad , x > 0 \qquad (9)$$

eşitliği ile verilir. Burada $\theta > 0$ bir şekil parametresi $\lambda > 0$ ise dağılımın bilinmeyen ölçek parametresidir. Varsayalım ki, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Weibull dağılımından rasgele bir örneklem olsun. Bu durumda Weibull dağılımının olabilirlik fonksiyonu

$$L_{WE}(\theta,\lambda;x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{WE}(x_i;\theta,\lambda)$$
$$=\theta^n\lambda^{n\theta}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}e^{-\lambda^{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i} \tag{10}$$

dır ve θ ve λ parametrelerinin ençok olabilirlik tahmin edicileri $\hat{\theta}$ ve $\hat{\lambda}$ arasındaki ilişki

$$\hat{\lambda}=\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^{\hat{\theta}}}\right)^{\frac{1}{\hat{\theta}}} \tag{11}$$

olarak elde edilir.

(4) ile verilen RMKLD testi için gerekli olan Gamma dağılımının Weibull dağılımına olan Kullback-Leibler uzaklığı

$$D_{KL}(f_{GA}\|g_{WE})=\int_0^{\infty} f_{GA}(x)\ln\left(\frac{f_{GA}(x)}{g_{WE}(x)}\right)dx$$
$$=\int_0^{\infty} f_{GA}(x)\ln\left(f_{GA}(x)\right)dx$$
$$-\int_0^{\infty} f_{GA}(x)\ln\left(g_{WE}(x)\right)dx \tag{12}$$
$$=1-\alpha-2\ln\Gamma(\alpha)-\ln\theta+$$
$$\ln\Gamma(\theta+\alpha)+(\alpha-\theta)\psi(\alpha)$$

olarak hesaplanır. Burada $\Gamma(.)$ gamma fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca $\psi(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\left(\Gamma(\alpha)\right)$ olup Digamma fonksiyonu olarak bilinir (Bernardo, 1976).

Benzer şekilde Weibull dağılımından Gamma dağılımına olan Kullback-Leibler uzaklığı

$$D_{KL}(g_{WE}\|f_{GA})=\int_0^{\infty} g_{WE}(x)\ln\left(\frac{g_{WE}(x)}{f_{GA}(x)}\right)dx$$
$$=\int_0^{\infty} g_{WE}(x)\ln\left(g_{WE}(x)\right)dx$$
$$-\int_0^{\infty} g_{WE}(x)\ln\left(f_{GA}(x)\right)dx \tag{13}$$
$$=-\alpha\left(\ln\alpha+\frac{\psi(1)}{\theta}-\ln\Gamma\left(1+\frac{1}{\theta}\right)-1\right)$$
$$+\ln\theta+\ln\Gamma(\alpha)+\psi(1)-1$$

olarak bulunur. (12) ve (13) eşitliklerinde bulunan bilinmeyen parametrelerin yerine (8) ve (11) eşitliklerinin çözümünden elde edilen ençok olabilirlik tahminleri kullanılırsa

$$RMKLD=\ln\left[\frac{D_{KL}\left(f(x;\hat{\alpha},\hat{\beta})\middle\|g(x;\hat{\theta},\hat{\lambda})\right)}{D_{KL}\left(g(x;\hat{\theta},\hat{\lambda})\middle\|f(x;\hat{\alpha},\hat{\beta})\right)}\right] \tag{14}$$

biçiminde elde edilir ve (3) ile verilen hipotez için $RMKLD<0$ ise veri setinin dağılımı Gamma'dır, aksi halde Weibull dağılır olarak karar verilir.

3. Bulgular

Bu kısımda Bromideh ve Validezah (2013) tarafından önerilen ve (4) ile verilen test istatistiğinin Gamma ve Weibull dağılımlarını ayıt etme problemine uygulanması durumunda yöntemin performansını, (3) ile verilen hipotezi test edebilecek

$$T_n=\ln\left[\frac{L_{GA}(\hat{\alpha},\hat{\beta})}{L_{WE}(\hat{\theta},\hat{\lambda})}\right] \tag{15}$$

biçiminde tanımlanan ençok olabilirlik oranı yöntemi(GuptaveKundu, 2003) ile karşılaştırmalı olarak ortaya koymak için yapılan simülasyon çalışmaları üzerinde durulacaktır. Eşitlik (15) de verilen $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ sırasıyla Gamma dağılımının α ve β parametrelerinin en çok olabilirlik tahminleri, $\hat{\theta},\hat{\lambda}$ Weibull dağılımın sırasıyla θ ve λ parametrelerine ait ençok olabilirlik tahminleri, $L_{GA}(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ ve $L_{WE}(\hat{\theta},\hat{\lambda})$ sırasıyla (7) ve (10) eşitliklerinde verilen Gamma ve Weibull dağılımlarına ait olabilirlik fonksiyonlarının tahminidir.

Simülasyon çalışmasında iki durum göz önüne alınmıştır. İlk durumda veri setinin dağılımı $Gamma(\alpha,\beta)$ olarak belirlenmiştir. $Gamma(\alpha,\beta)$ dağılımından $\alpha=0.5,1,5$ ve $\beta=0.5,1,5$ parametre değerleri için *n* =20, 40, 60, 80, 100 ve 200 birimlik rasgele örneklemler üretilmiştir. 10000 defa tekrar edilen simülasyon çalışması ile elde edilen doğru seçim olasılıkları Tablo 1 de verilmiştir.

Yöntemlerin dağılım seçim performansları Tablo 1'e göre incelendiğinde α parametresinin 0.5 olarak seçildiği durumlarda RMKLD yönteminin daha üstün bir ayrım performansına sahip olduğu aşikar olarak görülmektedir. $\alpha = 1$ olduğu durumlarda ise her iki yöntemin performanslarında ciddi derecede düşüşler gözlenmiştir. α parametresinin 5 alındığı durumda ise yöntemlerin doğru seçim performanslarının gözlem sayısı ile doğru orantılı olarak arttığı ve her iki yönteminde neredeyse eşit performanslara sahip oldukları gözlenmiştir.

Tablo 1. Veri Gamma dağılımından geldiğinde Kullback-Leibler uzaklıkları oranına göre (RMKLD) ve ayrıca en çok olabilirlik oran yöntemine göre (Tn) doğru seçim olasılıkları

			n					
α	β	Metod	20	40	60	80	100	200
0.5	0.5	RMKLD	0.8060	0.8990	0.9450	0.9630	0.9820	0.9940
		Tn	0.6540	0.7120	0.7450	0.7620	0.7860	0.8580
	1	RMKLD	0.8330	0.9080	0.9560	0.9550	0.9740	0.9990
		Tn	0.6540	0.7100	0.7330	0.7450	0.7890	0.8800
	5	RMKLD	0.8280	0.9140	0.9370	0.9590	0.9680	0.9970
		Tn	0.6510	0.6800	0.7340	0.7540	0.7760	0.8630
1	0.5	RMKLD	0.4850	0.4930	0.5030	0.4930	0.4540	0.4990
		Tn	0.5060	0.5100	0.4820	0.4890	0.4780	0.5030
	1	RMKLD	0.4710	0.4880	0.4630	0.5060	0.4640	0.4980
		Tn	0.4930	0.4910	0.5150	0.4930	0.4890	0.5030
	5	RMKLD	0.4830	0.4860	0.4710	0.4520	0.4900	0.5020
		Tn	0.5030	0.4930	0.5130	0.4540	0.5000	0.4590
5	0.5	RMKLD	0.6260	0.7000	0.7780	0.8050	0.8520	0.9250
		Tn	0.6600	0.7190	0.7940	0.8240	0.8690	0.9280
	1	RMKLD	0.6090	0.7400	0.7700	0.7890	0.8440	0.9450
		Tn	0.6470	0.7490	0.7860	0.8020	0.8530	0.9500
	5	RMKLD	0.6080	0.7280	0.7700	0.8060	0.8420	0.9330
		Tn	0.6430	0.7520	0.7930	0.8250	0.8530	0.9340

İkinci durumda ise veri setinin dağılımı $Weibull(\theta, \lambda)$ olarak belirlenmiştir. $Weibull(\theta, \lambda)$ dağılımından $\theta = 0.5, 1, 5$ ve $\lambda = 0.5, 1, 5$ parametre değerleri için *n* =20, 40, 60, 80, 100 ve 200 birimlik alınan rasgele örneklemler ile 10000 defa tekrar edilen simülasyon çalışması gerçekleştirilmiştir. Ayırma yöntemleri için ile elde edilen doğru seçim olasılıkları Tablo 2 de verilmiştir.

Tablo 2 incelendiğinde λ, θ parametrelerinin küçük değerleri ve gözlem sayısının düşük olduğu durumlar için RMKLD yöntemi daha yüksek doğru seçim olasılıklarına sahip olurken parametre değerlerinin daha büyük ve gözlem sayısının yeterince büyük olduğu durumlarda en çok olabilirlik oran yöntemi ve RMKLD yönteminin yaklaşık doğru seçim olasılıklarına sahip oldukları görülmektedir.

Tablo 2. Veri Weibull dağılımından geldiğinde Kullback-Leibler uzaklıkları oranına göre (RMKLD) ve en çok olabilirlik oran yöntemine göre (Tn) doğru seçim olasılıkları

			n					
λ	θ	Metod	20	40	60	80	100	200
1	2	RMKLD	0.6908	0.7540	0.7736	0.8204	0.8420	0.9176
		Tn	0.6534	0.7162	0.7422	0.7882	0.8120	0.8968
	4	RMKLD	0.7224	0.7958	0.8390	0.8746	0.9088	0.9684
		Tn	0.7150	0.8016	0.8492	0.8888	0.9238	0.9788
	6	RMKLD	0.7238	0.8120	0.8654	0.8966	0.9140	0.9770
		Tn	0.7274	0.8266	0.8882	0.9162	0.9368	0.9894
1.5	2	RMKLD	0.6956	0.7454	0.7876	0.8168	0.8468	0.9172
		Tn	0.6516	0.7152	0.7538	0.7852	0.8172	0.8974
	4	RMKLD	0.7222	0.7944	0.8516	0.8772	0.9010	0.9688
		Tn	0.7138	0.7968	0.8644	0.8950	0.9168	0.9780
	6	RMKLD	0.7268	0.8238	0.8642	0.8928	0.9190	0.9784
		Tn	0.7340	0.8366	0.8862	0.9176	0.9408	0.9896
2	2	RMKLD	0.6856	0.7494	0.7800	0.8098	0.8488	0.9174
		Tn	0.6486	0.7132	0.7474	0.7790	0.8204	0.8998
	4	RMKLD	0.7202	0.8066	0.8504	0.8816	0.9098	0.9704
		Tn	0.7150	0.8118	0.8640	0.8960	0.9248	0.9792
	6	RMKLD	0.7282	0.8034	0.8570	0.8970	0.9152	0.9810
		Tn	0.7288	0.8244	0.8776	0.9228	0.9370	0.9904

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada Gamma ve Weibull dağılımları arasında seçim problemi RMKLD yöntemine göre ele alınmıştır. RMKLD yöntemi için gerekli olan $Gamma(\alpha, \beta)$ ve $Weibull(\theta, \lambda)$ dağılımları arasındaki Kullback-Leibler uzaklıkları elde edilmiştir. Farklı örneklem büyüklükleri ve farklı parametre değerlerine göre yapılan simülasyon çalışması sonuçlarına göre veri setinin dağılımı Gamma olduğu durumlarda parametrelerin küçük değerleri için RMKLD yöntemi daha iyi sonuçlar vermektedir. Diğer parametre değerleri için RMKLD yöntemi ve en çok olabilirlik oran yöntemi ile benzer sonuçlar üretmiştir. Dolayısıyla Gamma ve Weibull dağılımlarının ayrımında RMKLD istatistiğinin kullanılması uygun görünmektedir.

Kaynaklar

Atkinson, A. (1969). A test of discriminating between models, Biometrika 56, 337-341.

Atkinson, A. (1970). A method for discriminating between models (with discussions), Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. 32, 323-353.

Bain, L. J. and Englehardt, M. (1980). Probability of correct selection of Weibull versus gamma based on likelihood ratio, Communications in Statistics Series A 9, 375-381.

Bernardo, J. M. (1976). Algorithm As 103: Psi (Digamma) function, Journal of the Royal Statistical Society Series C 25, 315-317.

Bromideh, A. A. (2012). Discriminating Between Weibull and Log-Normal Distributions Based on Kullback-Leibler Divergence. Ekonometri ve Istatistik Dergisi, (16), 44.

Bromideh, A. A., and Valizadeh, R. (2013). Discrimination between Gamma and Log-Normal Distributions by Ratio of Minimized Kullback-Leibler Divergence. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 9(4).

Cox, D. R. (1961). Tests of separate families of hypotheses, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, University of California Pres, 05-123.

Cox, D. R. (1962). Further results on tests of separate families of hypotheses, Journal of the Royal Statistical Society Ser. B 24, 406-424.

Dumonceaux, R. and Antle, C. E. (1973). Discriminating between the log-normal and Weibull distribution, Technometrics 15, 923-926.

Dyer, A. R. (1973). Discrimination procedure for separate families of hypotheses, Journal of the American Statistical Association 68, 970-974.

Gupta, R. D. and Kundu, D. K. (2003). Discriminating between Weibull and Generalized exponential distributions, Computational Statistics and Data Analysis 43, 179-196.

Kullback, S., and Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. The annals of mathematical statistics, 22(1), 79-86.

Mohd Saat, N. Z., Jemain, A. A., & Al-Mashoor, S. H. (2008). A Comparison of Weibull and Gamma Distributions in Application of Sleep Spnea. Asian Journal of Mathematics and Statistics, 1(3), 132-138.