T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI BİNOM KATSAYILI MATRİSLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Şafak YENİAYDIN

EYLÜL 2020

Matematik Anabilim Dalı'nda Şafak YENİAYDIN tarafından hazırlanan "Bazı Binom Katsayılı Matrislerin Spektral Özellikleri" adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Anabilim Dalı Başkanı
Prof. Dr. Ali OLGUN

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Danışman
Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Jüri Üyeleri

Başkan	:	Doç. Dr. Murat OLGUN
Üye	:	Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ

08/09/2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

BAZI BİNOM KATSAYILI MATRİSLERİN
SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

YENİAYDIN, Şafak
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. İlker AKKUŞ
Eylül 2020, 57 sayfa

Bu tezde öncelikle kaynak özetleri verilerek binom katsayıları, sağa dayalı binom katsayılı matrisler ile bir matrisin determinantı, izi, özdeğeri ve karakteristik polinomunun yanı sıra Fibonacci ve Lucas sayılarının genel yapısı hakkında bilgiler sunulmuştur. Daha sonra sağa dayalı binom katsayılı matrislerin tersiyle farkı olan fark matrislerinin ve toplamı olan toplam matrislerinin determinant, iz, özdeğer, karakteristik polinom ile mod3, mod5 ve mod7 deki karakteristik polinomların yapısında görülen Lucas ve Fibonacci sayılarıyla ilgili bilgiler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, sağa dayalı binom matrisi, özdeğer, determinant, karakteristik polinom, iz, toplam matrisi, fark matrisi.

ABSTRACT

SPECTRAL PROPERTIES OF
MATRICES WITH SOME BINOMIAL COEFFICIENTS

YENİAYDIN, Şafak
Kırıkkale University
Institute of Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlker AKKUŞ

September 2020, 57 pages

In this thesis, as first, some informations are introduced by research summaries about determinant, eigenvalue, characteristic polynomial and trace properties of a matrix, beside Lucas and Fibonacci numbers. Theorems about the Lucas and Fibonacci numbers which are seen in the structure of the determinant, trace, eigenvalue, characteristic polynomial of the sum matrix which is the sum of right-justified binomial matrix with it's inverse matrix and also theorems on the generalized polynomials in modulo 3, modulo 5 and modulo 7 are introduced and finally, theorems about the Lucas and Fibonacci numbers which are seen in the structure of the determinant, trace, eigenvalue, characteristic polynomial of the subtract matrix which is the subtract of right-justified binomial matrix with it's inverse matrix and also theorems on the characteristic polynomials in modulo 3, modulo 5 and modulo 7 are introduced.

Key Words: Fibonacci numbers, Lucas numbers, right-justified binomial matrix, eigen value, determinant, characteristic polinomial, trace, sum matrix, subtract matrix.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, devamlı yol gösteren, sabrını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. İlker Akkuş'a ve katkılarından dolayı aileme teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Fibonacci dizisi her bir terimi kendinden önceki iki teriminin toplamı şeklinde ve ilk iki terimi $f_1 = f_2 = 1$ olan bir tamsayı dizisidir. Başka bir ifadeyle başlangıç koşulları $f_1 = f_2 = 1$ ve dizinin n ninci terimi f_n olacak şekilde $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ rekürans bağıntısıyla tanımlanan tamsayı dizisine *Fibonacci sayı dizisi* denir.

Fibonacci dizisinin ilk kullanıldığı alan çoğu kişinin bildiği gibi tavşan problemidir. Fibonacci, bir erkek bir dişi iki tavşanın ölümsüz ve her ay biri dişi biri erkek iki yavru tavşan vereceğini varsayarak bir yılın sonunda toplam kaç adet tavşanı olacağını kendine sorar ve bu problemin çözümü üzerine matematiksel bir açıklama getirmeye çalışır. Fibonacci sayılarını kullanarak bu sayının 144 olacağını hesaplamıştır.

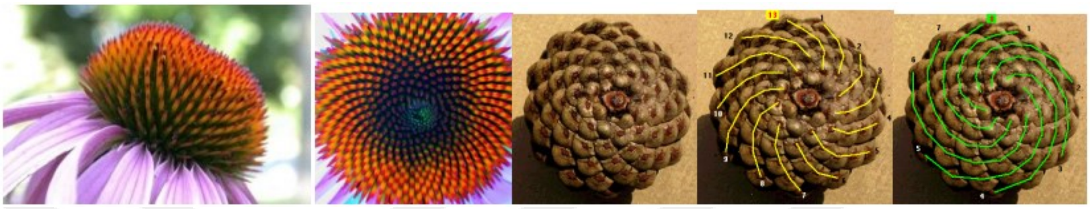
Yaprak sayılarına göre yapılan diğer bir çalışmada aşağıdaki tablo elde edilmiştir [1].

YAPRAK SAYISI	ÇİÇEĞİN ADI
1	Beyaz Zambak
3	Zambak, Süsen
5	Düğün Çiçeği, Yabani Gül ve Hezaren
8	Hezaren
13	Altıncık
21	Hindiba
34	Pire Otu

Tablo 1.1.

Resim 1.1.

Fibonacci sayıları bitkilerin çiçek göbeklerinde de belli bir düzende görülmektedir [2]. Çoğu papatya ve ayçiçeği kellesinde dışa doğru 55, içe doğru 34 kıvrım olduğu gözlemlenmiştir [3]. Çam kozalaklarında ve karnabaharın yapraklarında da bu kıvrımlar net bir şekilde görülebilmektedir [4]. Benzer şekilde muz bitkisinin pullarında 8,13 veya 21 adet pul bulunmaktadır. Tüm bu örneklere rağmen bilinmelidir ki doğa *Fibonacci* sayılarına uymaya çalışmaz, gözlemlenen bu durum daha derin bir fiziksel işlemin ürünüdür. Bu da kıvrımların kusursuzluğunu açıklamaktadır.



Resim 1.2.

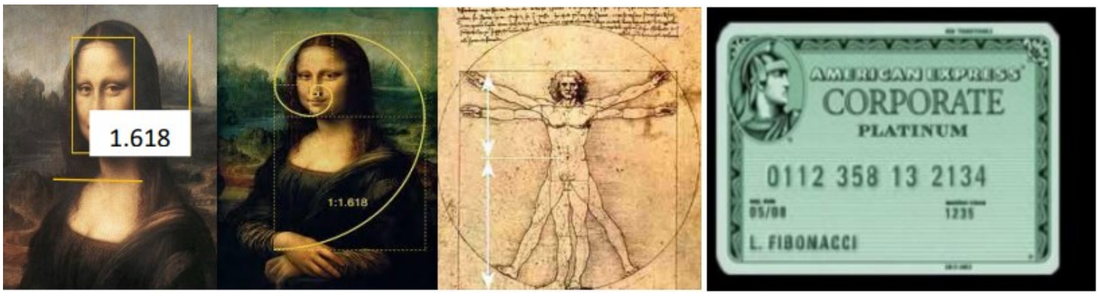
İnsan vücudu da Fibonacci dizisinden izler taşımaktadır. Örneğin her insanın iki eli vardır, her birinin beş parmağı vardır ve her parmağın iki eklemi ile ayrılmış üç kısmı vardır. Bunun yanı sıra el kemiklerimizin uzunlukları da Fibonacci sayılarıyla ilişkilidir [5].

Resim 1.3.

Bilindiği üzere altın oran her bir Fibonacci sayısının kendinden bir önceki Fibonacci sayısına oranının sonsuzdaki limitidir; yani

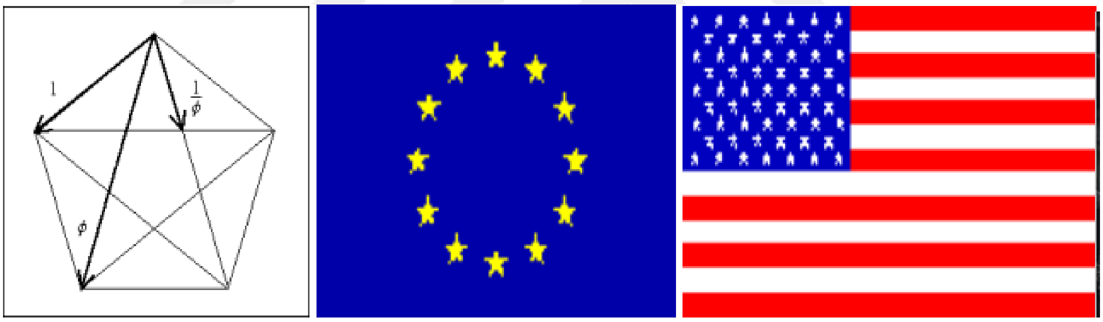
$$\varphi = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right) = 1{,}618$$

dir. Leonardo Da Vinci'nin Kusursuz Adam (Perfect Man) modelinde yer alan ölçümler, binlerce yıldır üzerine tartışılan ve araştırmalar yapılmakta olan Altın Oran'a dayanmaktadır.



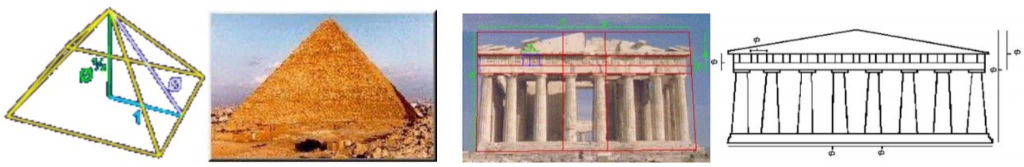
Resim 1.4.

Altın oran günümüzde yaygın bir şekilde geometride de görülmektedir. Stakov'un 1989 yılında yaptığı bir çalışma göstermiştir ki düzgün beşgenin bir kenarının köşegenine oranı altın oranı vermektedir ve ayrıca her bir köşegen birbirini bu oranda bölmektedir. Birçok ulusun bayrağındaki yıldız figürü çiziminde düzgün beşgenler kullanılmaktadır.



Resim 1.5.

Altın oran antik mimarinin en gelişmiş örneği olarak kabul edilen mısır piramitlerinde de gözlemlenmektedir. Bu piramitlerin çevresi, yüksekliklerinin iki katına bölündüğünde altın oran elde edilmektedir [1].



Resim 1.6.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında giriş kısmına ait görsel ve temel bilgilerde de [1], [2], [3], [4] ve [5] numaralı kaynaklardan, matrislerle ilgili temel kavramların tanımlarında [6],[7] ve [8] numaralı kaynaklardan ve diğer kavram ve teoremlerde [9], [10], [11] ve [12] numaralı kaynaklardan faydalanılmıştır.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezin amacı sağa dayalı binom matrisinin tersiyle toplanması ve çıkarılması ile elde edilen toplam ve fark matrislerinin karakteristik polinom, özdeğer, iz ve determinant kavramlarının yanı sıra mod3, mod5 ve mod7 deki karakteristik polinomlarının elde edilmesi amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. $n \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ olmak üzere

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

yineleme bağıntısıyla tanımlanan f_n sayısına *n* ninci *Fibonacci sayısı* denir.
Fibonacci sayılarının Binet formu

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

şeklindedir[9].

Tanım 2.2. $n \geq 2$ olmak üzere başlangıç koşulları $l_0 = 2$ ve $l_1 = 1$ olan ve

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan l_n sayısına *n* ninci *Lucas sayısı* denir.
Lucas sayılarının Binet formu

$$l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

şeklindedir [9].

Tanım 2.3. *n* ve *r* birer doğal sayı ve $r \leq n$ olmak üzere

$$(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$$

sayısına *n nin r lisi* veya n nin r li *binom katsayısı* denir.

Tanım 2.4. K bir cisim ve $A \in K_n^n$ olmak üzere her bir satırından ve her bir sütunundan yalnız ve yalnız bir eleman alınmak üzere A matrisinin n tane elemanının çarpımı $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\ldots a_{nj_n}$ olarak gösterilebilir. Birinci alt indisler doğal sırasında bulunurken ikinci alt indislerin temsil edebileceği birbirinden farklı n tane sütun bulunmaktadır. Bu durumda ikinci alt indislerin dizisi $\sigma = j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonunu oluşturur ve A matrisi $n!$ tane çarpım içerir. Bu durumda $A \in K_n^n$ matrisinin determinantı, her çarpım permütasyon işareti $\operatorname{sgn} \sigma$ ile çarpılmak üzere $n!$ tane çarpımın toplamıdır ve det$A$ veya $|A|$ ile gösterilir. Sonuç olarak

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}a_{3\sigma_3}\ldots a_{n\sigma_n}$$

sayısına A matrisinin determinantı denir [6].

Tanım 2.5. K bir cisim olmak üzere $\lambda \in K$, n ninci mertebeden birim matris I_n ve herhangi bir matris $A_n \in K_n^n$ olmak üzere $P_n(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ polinomuna A matrisinin *karakteristik polinomu* ve bu polinomun her bir köküne de *karakteristik değer* veya *özdeğer* denir [7]. A_n matrisinin herhangi bir m ninci kuvveti A_n^m olmak üzere bu matrisin karakteristik polinomu da $P_n^m(\lambda)$ ile gösterilir.

Tanım 2.6. K bir cisim ve n ninci mertebeden herhangi bir karesel matris $A_n \in K_n^n$ olmak üzere A matrisinin köşegeni üzerindeki tüm elemanların toplamına *A matrisinin izi* denir ve $\operatorname{tr}(A)$ veya $iz(A)$ ile gösterilir [8].

Tanım 2.7. n ninci mertebeden $A_n = [a_{ij}] = \left[\binom{i-1}{n-j}\right]$ şeklinde tanımlanan A_n matrisine *sağa dayalı binom matrisi* denir [10].

Örnek 2.1. 4 üncü mertebeden A_4 matrisi

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.8. K bir cisim olmak üzere $\lambda \in K$, n ninci mertebeden herhangi bir matris $A_n \in K_n^n$ olmak üzere A_n matrisinin özdeğerlerinden oluşan kümeye *özdeğerler kümesi* denir ve V_n ile gösterilir. A_n matrisinin herhangi bir m ninci kuvveti A_n^m olmak üzere bu matrisin özdeğerleri kümesi de V_n^m ile gösterilir.

3. BAZI FIBONACCI VE LUCAS SAYILARININ mod3, mod5 VE mod7 DEKİ DEĞERLERİ

Lemma 3.1.

a. $l_{8k-1} \equiv 2 \text{ (mod3)},\ l_{8k-3} \equiv 2 \text{ (mod3)},\ l_{8k-5} \equiv 1 \text{ (mod3)},\ l_{8k-7} \equiv 1 \text{ (mod3)}.$

b. $f_{8k} \equiv 0 \text{ (mod3)},\ f_{8k-2} \equiv 2 \text{ (mod3)},\ f_{8k-4} \equiv 0 \text{ (mod3)},\ f_{8k-6} \equiv 1 \text{ (mod3)}.$

İspat. Lucas sayılarının mod m deki periyodu j olmak üzere

$$\begin{cases} l_k \equiv 2 \text{ (mod } m) \\ l_{k+1} \equiv 1 \text{ (mod } m) \end{cases} \Leftrightarrow j|k \qquad [12]$$

olduğundan $l_{8k+1} \equiv 1$ (mod3) ve $l_{8k} \equiv 2$ (mod3) dir. Tanım 2.2. den a ve b şıklarından birer tane denklik ispatlanacak olup diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir. Buna göre

a. $l_{8k-1} \equiv l_{8k+1} - l_{8k} \equiv 1 - 2 \equiv 2 \text{ (mod3)}$

b. $f_{8k-2} \equiv l_{8k-1} - f_{8k} \equiv 2 - 0 \equiv 2 \text{ (mod3)}$

şeklindedir.

Lemma 3.2. $l_{4k} \equiv 2$ (mod5) ve $l_{4k+2} \equiv 3$ (mod5) tir.

İspat. Lucas sayılarının mod m ye göre periyodu j olmak üzere

$$\begin{cases} l_k \equiv 2 \text{ (mod } m) \\ l_{k+1} \equiv 1 \text{ (mod } m) \end{cases} \Leftrightarrow j|k \qquad [12]$$

biçimindedir. Lucas sayılarının mod5 e göre periyodu 4 olduğundan

$$l_{4k} \equiv 2 \text{ (mod5) ve } l_{4k+1} \equiv 1 \text{ (mod5)}$$

şeklindedir. Tanım 2.2. den

$$l_{4k+2} \equiv l_{4k+1} + l_{4k} \equiv 3 \text{ (mod5)}$$

olarak elde edilir.

Lemma 3.3.

a. $l_{16k-1} \equiv 6 \text{ (mod7)}$, $l_{16k-3} \equiv 3 \text{ (mod7)}$, $l_{16k-5} \equiv 3 \text{ (mod7)}$,

$l_{16k-7} \equiv 6 \text{ (mod7)}$, $l_{16k-9} \equiv 1 \text{ (mod7)}$, $l_{16k-11} \equiv 4 \text{ (mod7)}$,

$l_{16k-13} \equiv 4 \text{ (mod7)}$, $l_{16k-15} \equiv 1 \text{ (mod7)}$.

b. $f_{16k} \equiv 0 \text{ (mod7)}$, $f_{16k-2} \equiv 6 \text{ (mod7)}$, $f_{16k-4} \equiv 4 \text{ (mod7)}$,

$f_{16k-6} \equiv 6 \text{ (mod7)}$, $f_{16k-8} \equiv 0 \text{ (mod7)}$, $f_{16k-10} \equiv 1 \text{ (mod7)}$,

$f_{16k-12} \equiv 3 \text{ (mod7)}$, $f_{16k-14} \equiv 1 \text{ (mod7)}$.

İspat. Lucas sayılarının mod m deki periyodu j olmak üzere

$$\begin{cases} l_k \equiv 2 \text{ (mod } m) \\ l_{k+1} \equiv 1 \text{ (mod } m) \end{cases} \Leftrightarrow j|k \qquad [12]$$

olduğundan

$$l_{16k} \equiv 2 \text{ (mod7) ve } l_{16k+1} \equiv 1 \text{ (mod7)}$$

şeklindedir.

a. Tanım 2.2. den $k \geq 1$ olmak üzere

$$l_{16k-3} = l_{16k-1} - l_{16k-2} \equiv 6 - 3 \equiv 3 \ (\text{mod}7)$$

$$l_{16k-5} = l_{16k-3} - l_{16k-4} \equiv 3 - 0 \equiv 3 \ (\text{mod}7)$$

$$l_{16k-7} = l_{16k-5} - l_{16k-6} \equiv 3 - 4 \equiv 6 \ (\text{mod}7)$$

$$l_{16k-9} = l_{16k-7} - l_{16k-8} \equiv 6 + 2 \equiv 1 \ (\text{mod}7)$$

$$l_{16k-11} = l_{16k-9} - l_{16k-10} \equiv 1 - 4 \equiv 4 \ (\text{mod}7)$$

$$l_{16k-13} = l_{16k-11} - l_{16k-12} \equiv 4 - 0 \equiv 4 \ (\text{mod}7)$$

$$l_{16k-15} = l_{16k-13} - l_{16k-14} \equiv 4 + 4 \equiv 1 \ (\text{mod}7)$$

şeklindedir.

b. $k \geq 1$ olmak üzere Fibonacci sayılarının mod j de periyodu m olmak üzere

$$\begin{cases} f_k \equiv 0 \ (\text{mod}\, j) \\ f_{k+1} \equiv 1 \ (\text{mod}\, j) \end{cases} \Leftrightarrow m|k \qquad [12]$$

ve Fibonacci sayılarının mod7 de periyodu 16 olduğundan

$$f_{16k} \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 7)$$

şeklindedir. Tanım 2.1. den ve

$$f_{16k} \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 7) \text{ ve } f_{16k+1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod} 7) \qquad [12]$$

olduğundan

$$f_{16k-2} = f_{16k} - f_{16k-1} \equiv 0 - 1 \equiv 6 \ (\mathrm{mod} 7)$$

$$f_{16k-4} = f_{16k-2} - f_{16k-3} \equiv 6 - 2 \equiv 4 \ (\mathrm{mod} 7)$$

$$f_{16k-6} = f_{16k-4} - f_{16k-5} \equiv 4 - 5 \equiv 6 \ (\mathrm{mod} 7)$$

olarak elde edilir ve diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

4. $T_n = A_n + (A_n)^{-1}$ TOPLAM MATRİSİNİN İNCELENMESİ

Tanım 4.1. $2 \le n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n ninci mertebeden sağa dayalı binom matrisi A_n ve A_n matrisinin tersi $(A_n)^{-1}$ olmak üzere $T_n = A_n + (A_n)^{-1}$matrisine n ninci mertebeden *toplam matrisi* denir.

Örnek 4.1. 5 inci mertebeden T_5 matrisi

$$T_5 = A_5 + (A_5)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1. $p, n, \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \ge 2$ için p ninci mertebeden sağa dayalı binom matrisi A_p olmak üzere $T_p = A_p + (A_p)^{-1}$ matrisinin özdeğerleri kümesi olan V_p aşağıdaki gibidir.

a. $n \ge 1$ olmak üzere

$$V_{2n} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\sqrt{5} f_{2k+1}, -\sqrt{5} f_{2k+1}\}.$$

b. $n \geq 1$ olmak üzere

$$V_{4n+1} = \bigcup_{k=0}^{2n} \{(-1)^k l_{2k}\}.$$

c. $n \geq 0$ olmak üzere

$$V_{4n+3} = \bigcup_{k=0}^{2n+1} \{(-1)^{k+1} l_{2k}\}.$$

İspat.

a. Çift mertebeli toplam matrislerinin özdeğerleri her $n \geq k \geq 0$ doğal sayısı için $\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}$ ve $\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1}$ şeklinde ve bu özdeğerler Fibonacci sayıları cinsinden

$$\beta^{2k+1} - \alpha^{2k+1} = -(\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}) = -\sqrt{5}\,\frac{(\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1})}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}\, f_{2k+1}$$

$$\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1} = \sqrt{5}\,\frac{(\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1})}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\, f_{2k+1}$$

Buradan

$$V_{2n} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\sqrt{5} f_{2k+1}, -\sqrt{5} f_{2k+1}\}$$

olduğu görülür.

b. Mertebesi $4n+1$ formunda olan toplam matrislerin özdeğerleri her $2n \geq k \geq 0$ için

$$\alpha^0 + \beta^0, -(\alpha^2 + \beta^2), \dots, (-1)^{2n-1}(\alpha^{4n-2} + \beta^{4n-2}), (-1)^{2n}(\alpha^{4n} + \beta^{4n})$$

şeklindedir. Lucas sayılarının Binet formundan yararlanılarak

$$V_{4n+1} = \bigcup_{k=0}^{2n} \{(-1)^k l_{2k}\}$$

bulunur.

c. Mertebesi $4n+3$ formunda olan toplam matrislerin özdeğerleri her $2n+1 \geq k$ için

$$-(\alpha^0+\beta^0), (\alpha^2+\beta^2), \dots, (-1)^{2n+1}(\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2}),\ (-1)^{2n+2}(\alpha^{4n+2}+\beta^{4n+2})$$

biçimindedir. Lucas sayılarının Binet formundan yararlanılarak

$$V_{4n+3} = \bigcup_{k=0}^{2n+1} \{(-1)^{k+1} l_{2k}\}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. $p,\ n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $p \geq 2$ için $T_p = A_p + (A_p)^{-1}$ toplam matrisinin iz değerleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$\text{tr}(T_{2n+1}) = 2 f_{2n+1} \text{ ve } \text{tr}(T_{2n}) = 0$$

şeklindedir.

İspat. $\text{tr}(A_{2n+1}) = \text{tr}\left[(A_{2n+1})^{-1}\right]$ ve $\text{tr}(A_{2n}) = -\,\text{tr}\left[(A_{2n})^{-1}\right]$ dir. [10]

İz toplamsal bir özellik olduğundan

$$\mathrm{tr}(T_{2n+1}) = \mathrm{tr}(A_{2n+1}) + \mathrm{tr}\left[(A_{2n+1})^{-1}\right] = 2\,\mathrm{tr}(A_{2n+1}) = 2f_{2n+1}$$

$$\mathrm{tr}(T_{2n}) = \mathrm{tr}(A_{2n}) + \mathrm{tr}[(A_{2n})^{-1}] = \mathrm{tr}(A_{2n}) - \mathrm{tr}(A_{2n}) = 0$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3. *p, m,* $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $T_p = A_p + (A_p)^{-1}$ toplam matrisinin herhangi bir *m* ninci kuvvetinin izi:

a. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\mathrm{tr}(T_{2n}^m) = \begin{cases} 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sqrt{5}f_{2k+1}\right)^m & , m \text{ çift} \\ 0 & , m \text{ tek} \end{cases}$$

b. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\mathrm{tr}(T_{4n+1}^m) = \begin{cases} (l_0)^m + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(l_{2k})^m & , m \text{ çift} \\ (l_0)^m + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{km}(l_{2k})^m & , m \text{ tek} \end{cases}$$

c. $n \geq 0$ olmak üzere

$$\mathrm{tr}(T_{4n+3}^m) = \begin{cases} (l_0)^m + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(l_{2k})^m & , m \text{ çift} \\ (-l_0)^m + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{(k+1)m}(l_{2k})^m & , m \text{ tek} \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. m bir doğal sayı olmak üzere bir matrisin herhangi bir m. kuvvetinin izi, kendi özdeğerlerinin m. kuvvetlerinin toplamıdır. Bu durumda Teorem 4.1. den

a.

$$V_{2n}^{m} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{ \left(\sqrt{5} f_{2k+1}\right)^{m}, \left(-\sqrt{5} f_{2k+1}\right)^{m} \right\}$$

olduğundan

$$\mathrm{tr}(T_{2n}^{m}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{5} f_{2k+1}\right)^{m} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\sqrt{5} f_{2k+1}\right)^{m}$$

$$= \begin{cases} 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{5} f_{2k+1}\right)^{m} & , m \text{ çift} \\ 0 & , m \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

b.

$$V_{4n+1}^{m} = \bigcup_{k=0}^{2n} \{[(-1)^{k} l_{2k}]^{m}\}$$

olduğundan ve l_0 hariç diğer kökler Lucas sayıları cinsinden çift katlı kök olduğundan

$$\mathrm{tr}(T_{4n+1}^{m}) = \begin{cases} (l_0)^{m} + 2 \sum_{k=1}^{2n} (l_{2k})^{\mathrm{m}} & , m \text{ çift} \\ (l_0)^{m} + 2 \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{km} (l_{2k})^{m} & , m \text{ tek} \end{cases}$$

biçimindedir.

c.

$$V_{4n+3}^{m} = \bigcup_{k=0}^{2n+1}\{[(-1)^{k+1} l_{2k}]^{m}\}$$

olduğundan ve $-l_0$ hariç diğer kökler Lucas sayıları cinsinden çift katlı kök olduğundan

$$\operatorname{tr}(T_{4n+3}^{m}) = \begin{cases} (l_0)^m + 2\sum_{k=1}^{2n+1}(l_{2k})^m & , m \text{ çift} \\ (-l_0)^m + 2\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{(k+1)m}(l_{2k})^m & , m \text{ tek} \end{cases}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4. *p, n* $\in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $T_p = A_p + (A_p)^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ olmak üzere

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - 5(f_{2k+1})^2\right].$$

b. $n \geq 1$ olmak üzere

$$P_{4n+1}(x) = (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2.$$

c. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{4n+3}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^{k} l_{2k}\right]^2.$$

İspat.

a. Teorem 4.1. den özdeğerlerin her biri $n - 1 \geq k$ için $\sqrt{5}f_{2k+1}$ veya $-\sqrt{5}f_{2k+1}$ olduğundan bu özdeğerleri kök kabul eden her bir monik polinom, karakteristik polinomun birer bölenidir. Buradan $\forall k \leq\ n - 1$ için her bir

$$\left(x - \sqrt{5}f_{2k+1}\right)\left(x + \sqrt{5}f_{2k+1}\right) = x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2$$

polinomu karakteristik polinomun bir bölenidir. Sonuç olarak

$$P_{2n}(\mathrm{x}) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2\right]$$

şeklindedir.

b. Teorem 4.1. den özdeğerlerin her biri her $1 \leq k \leq n$ için l_0 dışındaki $-l_2$, l_4, $-l_6$, l_8,…, $-l_{4k-2}$, l_{4k} kökleri çift dereceli köklerdir. Dolayısıyla bu kökleri kabul eden

$$(x + l_2)^2\ ,\ (x - l_4)^2\ ,\ (x + l_6)^2,\ (x - l_8)^2,\ \ldots,\ (x + l_{4k-2})^2,\ \ (x - l_{4k})^2$$

polinomları karakteristik polinomun birer çarpanıdır. Buradan

$$P_{4n+1}(x) = (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

elde edilir.

c. Teorem 4.1. den özdeğerlerin her biri her $1 \le k \le n$ için $-l_0$ dışındaki, $l_2, -l_4, l_6, -l_8, \ldots, , l_{4k-2}, -l_{4k}$ kökleri çift dereceli köklerdir. Dolayısıyla bu kökleri kabul eden

$$(x - l_2)^2, (x + l_4)^2, (x - l_6)^2, (x + l_8)^2, \ldots, (x - l_{4k-2})^2, (x + l_{4k})^2$$

polinomları karakteristik polinomun birer çarpanıdır. Buradan

$$P_{4n+3}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^{k} l_{2k}\right]^2$$

elde edilir.

Teorem 4.5. *p*, $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ ve $p \ge 2$ için $T_p = A_p + (A_p)^{-1}$ toplam matrisinin mod3 teki karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

a. $n \ge 1$ olmak üzere $P_{2n}(x) \equiv (x^2 + 1)^n$.

b. $n \ge 1$ ve olmak üzere $P_{8n+1}(x) \equiv x^{4n}(x+1)^{2n+1}(x+2)^{2n}$.

c. $n \ge 0$ ve olmak üzere $P_{8n+3}(x) \equiv x^{4n+2}(x+1)^{2n}(x+2)^{2n+1}$.

d. $n \ge 0$ ve olmak üzere $P_{8n+5}(x) \equiv x^{4n+2}(x+1)^{2n+1}(x+2)^{2n+2}$.

e. $n \ge 0$ ve olmak üzere $P_{8n+7}(x) \equiv x^{4n+4}(x+1)^{2n+2}(x+2)^{2n+1}$.

İspat. [11] numaralı kaynak makaledekine benzer şekilde ispat yapılabilmektedir. Bu makalede binom matrisinin karakteristik polinomlarının mod3 te doğrudan nasıl bulunacağı anlatılmıştır. Bu yöntem benzer bir şekilde toplam matrisine uygulanarak teoremin ispatı yapılabilir; fakat bu tez çalışmasında toplam matrislerinin karakteristik polinomları hali hazırda bilindiğinden bu polinomlar mod3 te tekrar incelenmiştir.

a. Her $n \geq 1$ için $T_{2n} = A_{2n} + (A_{2n})^{-1}$ matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2\right]$$

olduğundan her $k \leq n-1$ doğal sayısı için

$$(-5)\left(f_{2k+1}\right)^2 \equiv \left(f_{2k+1}\right)^2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}3)$$

olduğu gösterilmelidir. Her k doğal sayısı için Lemma 3.1. den

$$\left(f_{2k+1}\right)^2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}3)$$

ve buradan

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2\right] \equiv \prod_{k=0}^{n-1}(x^2+1) \equiv (x^2+1)^n \ (\mathrm{mod}3)$$

elde edilir.

b. Her $n \geq 1$ için $T_{4n+1} = A_{4n+1} + (A_{4n+1})^{-1}$ matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3 ten

$$P_{4n+1}(x) = (x - l_0) \prod_{k=1}^{2n} \left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

şeklindedir. Polinomda n yerine $2n$ yazılırsa

$$P_{8n+1}(x) = (x - l_0)\prod_{k=1}^{4n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

elde edilir. Buradan

$$P_{8n+1} = (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}(x + l_{4k+2})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{8k-4})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{8k})^2$$

polinomunda Lemma 3.1. ve Tanım 2.2. den

$$\begin{aligned} P_{8n+1}(x) &= (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}(x + l_{4k+2})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{8k-4})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{8k})^2 \\ &\equiv (x+1)\prod_{k=1}^{2n} x^2 \prod_{k=1}^{n}(x+2)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+1)^2 \\ &\equiv x^{4n}(x+1)^{2n+1}(x+2)^{2n} \pmod{3} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

c. Her $n \geq 0$ için $T_{4n+3} = A_{4n+3} + (A_{4n+3})^{-1}$ matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+3}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^{k} l_{2k}\right]^2$$

dir. Polinomda n yerine $2n$ yazılırsa

$$P_{8n+3}(x) = (x + l_0) \prod_{k=1}^{4n+1} \left[x + (-1)^k l_{2k}\right]^2$$

elde edilir. Lemma 3.1. ve Tanım 2.2. den

$$\begin{aligned} P_{8n+3}(x) &= (x + l_0) \prod_{k=1}^{4n+1} \left[x + (-1)^k l_{2k}\right]^2 \\ &= (x + l_0) \prod_{k=1}^{2n+1} (x - l_{4k-2})^2 \prod_{k=1}^{n} (x + l_{8k-4})^2 \prod_{k=1}^{n} (x + l_{8k})^2 \\ &\equiv x^{4n+2}(x+1)^{2n}(x+2)^{2n+1} \pmod{3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

d. Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+1}(x) = (x - l_0) \prod_{k=1}^{2n} \left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

polinomunda n yerine $2n+1$ yazıldığında Lemma 3.1 ve Tanım 2.2. den

$$P_{8n+5}(x) = (x - l_0) \prod_{k=1}^{4n+2} \left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

$$= (x - l_0)(x + l_2)^2(x - l_4)^2 \ldots (x + l_{8n+2})^2(x - l_{8n+4})^2$$

$$= (x - l_0)\prod_{k=1}^{n+1}(x + l_{8k-6})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x - l_{8k-4})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{8k-2})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{8k})^2$$

$$\equiv (x+1)x^{2n+2}(x+2)^{2n+2}x^{2n}(x+1)^{2n}$$

$$\equiv x^{4n+2}(x+1)^{2n+1}(x+2)^{2n+2} \ (\mathrm{mod}3)$$

elde edilir.

e. Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+3}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^k l_{2k}\right]^2$$

polinomunda n yerine $2n$+1 yazıldığında Lemma 3.1. ve Tanım 2.2. den

$$P_{8n+7}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{4n+3}\left[x + (-1)^k l_{2k}\right]^2$$

$$= (x + l_0)\prod_{k=1}^{n+1}(\mathrm{x} - l_{8k-6})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x + l_{8k-4})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x - l_{8k-2})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{8k})^2$$

$$\equiv (x+2)\prod_{k=1}^{n+1}x^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n+1}x^2 \prod_{k=1}^{n}(x+2)^2$$

$$\equiv x^{4n+4}(x+1)^{2n+2}(x+2)^{2n+1}(\mathrm{mod}3)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.6. $p,\ n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $T_p = A_p + (A_p)^{-1}$ toplam matrisinin mod5 teki karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ olmak üzere $P_{2n}(x) \equiv x^{2n}$.

b. $n \geq 1$ olmak üzere $P_{4n+1}(x) \equiv (x+3)^{4n+1}$.

c. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{4n+3}(x) \equiv (x+2)^{4n+3}$.

İspat.

a. $n \geq 1$ olmak üzere $T_{2n} = A_{2n} + (A_{2n})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - 5(f_{2k+1})^2\right]$$

dir. Buradan

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - 5(f_{2k+1})^2\right] \equiv \prod_{k=0}^{n-1} x^2 \equiv x^{2\mathrm{n}}$$

olduğu görülür.

b.

$$-l_0 \equiv 3 \text{ (mod5)}$$

olduğundan ve Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+1}(x) = (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2 = (x+3)\, A_{4n+1}(x)$$

şeklinde çarpanlarına ayrıldığında

$$\begin{aligned} A_{4n+1}(x) &= \prod_{k=1}^{2n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2 \\ &= (x+l_2)^2(x-l_4)^2 ... (x+l_{4n-2})^2(x-l_{4n})^2 \\ &\equiv (x+3)^{4n}(\mathrm{mod}5) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} P_{4n+1}(x) &= (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2 \\ &\equiv (x+3)(x+3)^{4n} \equiv (x+3)^{4n+1}(\mathrm{mod}5) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

c. $n \geq 0$ olmak üzere $4n$+3 mertebeli $T_{4n+3} = A_{4n+3} + (A_{4n+3})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+3}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^{k} l_{2k}\right]^2$$

dir. Lemma 3.2. den

$$
\begin{aligned}
P_{4n+3}(x) &= (x+l_0)\prod_{k=1}^{2n+1}\left[x+(-1)^k l_{2k}\right]^2 \\
&= (x+l_0)(x-l_2)^2(x+l_4)^2\ldots(x+l_{4n})^2(x-l_{4n+2})^2 \\
&= (x+2)\prod_{k=1}^{n}(x+l_{4k})^2\prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{4k-2})^2 \\
&\equiv (x+2)\prod_{k=1}^{n}(x+2)^2\prod_{k=1}^{n+1}(x+2)^2 \\
&\equiv (x+2)^{4n+3} \pmod 5
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Teorem 4.7. $p,\ n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ ve $p \geq 2$ için $T_p = A_p + \left(A_p\right)^{-1}$ toplam matrisinin mod7 deki karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ için $P_{4n}(x) \equiv (x^2+1)^n(x^2+2)^n$.

b. $n \geq 0$ için $P_{8n+2}(x) \equiv (x^2+2)^{2n+1}$.

c. $n \geq 0$ için $P_{8n+6}(x) \equiv (x^2+1)^{2n+2}(x^2+2)^{2n+1}$.

d. $n \geq 1$ için $P_{16n+1}(x) \equiv x^{4n}(x+2)^{2n}(x+3)^{4n}(x+4)^{4n}(x+5)^{2n+1}$.

e. $n \geq 0$ için $P_{16n+3}(x) \equiv x^{4n}(x+2)^{2n+1}(x+3)^{4n}(x+4)^{4n+2}(x+5)^{2n}$.

f. $n \geq 0$ için $P_{16n+5}(x) \equiv x^{4n+2}(x+2)^{2n}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n}(x+5)^{2n+1}$.

g. $n \geq 0$ için $P_{16n+7}(x) \equiv x^{4n+2}(x+2)^{2n+1}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+2}(x+5)^{2n}$.

h. $n \geq 0$ için $P_{16n+9}(x) \equiv x^{2n+2}(x+2)^{2n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{6n+2}(x+5)^{2n+1}$.

i. $n \geq 0$ için $P_{16n+11}(x) \equiv x^{2n+2}(x+2)^{2n+1}(x+3)^{6n+4}(x+4)^{4n+2}(x+5)^{2n+2}$.

j. $n \geq 0$ için $P_{16n+13}(x) \equiv x^{4n+4}(x+2)^{2n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+4}(x+5)^{2n+1}$.

k. $n \geq 0$ için $P_{16n+15}(x) \equiv x^{4n+4}(x+2)^{2n+1}(x+3)^{4n+4}(x+4)^{4n+4}(x+5)^{2n+2}$.

İspat.

a. $2n$ mertebeli $T_{2n} = A_{2n} + (A_{2n})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2\right]$$

dir. Polinomda n yerine $4n$ yazılırsa Lemma 3.2. den

$$\begin{aligned}
P_{8n}(x) &= \prod_{k=1}^{4n} \left[x^2 + 2\left(f_{2k-1}\right)^2\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left[x^2 + 2\left(f_{8k-1}\right)^2\right] \prod_{k=1}^{n} \left[x^2 + 2\left(f_{8k-3}\right)^2\right] \prod_{k=1}^{n} \left[x^2 + 2\left(f_{8k-5}\right)^2\right] \\
&\quad \prod_{k=1}^{n} \left[x^2 + 2\left(f_{8k-7}\right)^2\right] \\
&\equiv \prod_{k=1}^{n} (x^2 + 2) \prod_{k=1}^{n} (x^2 + 1) \prod_{k=1}^{n} (x^2 + 1) \prod_{k=1}^{n} (x^2 + 2) \\
&\equiv (x^2 + 1)^{2n} (x^2 + 2)^{2n} \pmod{7}
\end{aligned}$$

ve son olarak n yerine $\dfrac{n}{2}$ yazılırsa

$$P_{4n}(x) = (x^2 + 1)^n (x^2 + 2)^n \pmod{7}$$

şeklinde elde edilir.

b. $2n$ mertebeli $T_{2n} = A_{2n} + (A_{2n})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2\right]$$

dir. Polinomda n yerine $4n$+1 yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_{8n+2}(x) &= \prod_{k=0}^{4n}\left[x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2\right] \\
&\equiv \prod_{k=1}^{n}\left[x^2 + 2\left(f_{8k-1}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 + 2\left(f_{8k-3}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 + 2\left(f_{8k-5}\right)^2\right] \\
&\quad \prod_{k=1}^{n+1}\left[x^2 + 2\left(f_{8k-7}\right)^2\right] \\
&\equiv \prod_{k=1}^{n}(x^2+2)\prod_{k=1}^{n}(x^2+1)\prod_{k=1}^{n}(x^2+1)\prod_{k=1}^{n+1}(x^2+2) \\
&\equiv (x^2+1)^{2n}(x^2+2)^{2n+1} \pmod 7
\end{aligned}$$

elde edilir.

c. $2n$ mertebeli $T_{2n} = A_{2n} + (A_{2n})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{2n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[x^2 - 5\left(f_{2k+1}\right)^2\right]$$

dir. Polinomda n yerine $4n$+3 yazılırsa Lemma 3.3. den

$$P_{8n+6}(x) \equiv \prod_{k=1}^{4n+3}\left[x^2+2\left(f_{2k-1}\right)^2\right]$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n}\left[x^2+2\left(f_{8k-1}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{n+1}\left[x^2+2\left(f_{8k-3}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{n+1}\left[x^2+2\left(f_{8k-5}\right)^2\right]$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left[x^2+2\left(f_{8k-7}\right)^2\right]$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n}(x^2+2)\prod_{k=1}^{n+1}(x^2+1)\prod_{k=1}^{n+1}(x^2+1)\prod_{k=1}^{n+1}(x^2+2)$$

$$\equiv (x^2+1)^{2n+2}(x^2+2)^{2n+1} \pmod{7}$$

şeklindedir.

d. $4n+1$ mertebeli $T_{4n+1} = A_{4n+1} + (A_{4n+1})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+1}(x) = (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

dir. Polinomda n yerine $4n$ yazılırsa Lemma 3.3. ten

$$P_{16n+1}(x) = (x - l_0)\prod_{k=1}^{8n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

$$\equiv (x - l_0)\prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-14})^2\prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-12})^2\prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-10})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-8})^2\prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-6})^2\prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-4})^2\prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-2})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k})^2$$

$$\equiv (x+5)\prod_{k=1}^{n}(x+3)^2\prod_{k=1}^{n}(x^2)\prod_{k=1}^{n}(x+4)^2\prod_{k=1}^{n}(x+2)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+4)^2\prod_{k=1}^{n}x^2\prod_{k=1}^{n}(x+3)^2\prod_{k=1}^{n}(x+5)^2$$

$$\equiv x^{4n}(x+2)^{2n}(x+3)^{4n}(x+4)^{4n}(x+5)^{2n+1}(\mathrm{mod}7)$$

şeklinde elde edilir.

e. $4n+3$ mertebeli $T_{4n+3} = A_{4n+3} + (A_{4n+3})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+3}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^k l_{2k}\right]^2$$

dir. Polinomda n yerine $4n$ yazılırsa Lemma 3.3. ten

$$P_{16n+3}(x) = (x + l_0)\prod_{k=1}^{8n+1}\left[x + (-1)^k l_{2k}\right]^2$$

$$\equiv (x+2)\prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-14})^2\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-12})^2\prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-10})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-8})^2\prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-6})^2\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-4})^2\prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-2})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k})^2$$

$$\equiv (x+2)\prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2\prod_{k=1}^{n}x^2\prod_{k=1}^{n}(x+3)^2\prod_{k=1}^{n}(x+5)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+3)^2\prod_{k=1}^{n}x^2\prod_{k=1}^{n}(x+4)^2\prod_{k=1}^{n}(x+2)^2$$

$$\equiv x^{4n}(x+2)^{2n+1}(x+3)^{4n}(x+4)^{4n+2}(x+5)^{2n} \pmod 7$$

biçiminde elde edilir.

f. $4n+1$ mertebeli $T_{4n+1} = A_{4n+1} + (A_{4n+1})^{-1}$ toplam matrisinin karakteristik polinomu Teorem 4.3. ten

$$P_{4n+1}(x) = (x - l_0)\prod_{k=1}^{2n}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2$$

dir. Polinomda n yerine $4n+1$ yazılırsa Lemma 3.3. ten

$$\begin{aligned}
P_{16n+5}(x) &= (x - l_0)\prod_{k=1}^{8n+2}\left[x + (-1)^{k+1} l_{2k}\right]^2 \\
&\equiv (x+5)\prod_{k=1}^{n+1}(x + l_{16k-14})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x - l_{16k-12})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-10})^2 \\
&\quad \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-8})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-6})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-4})^2 \\
&\quad \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-2})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k})^2 \\
&\equiv (x+5)\prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n+1} x^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+2)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \\
&\quad \prod_{k=1}^{n} x^2 \prod_{k=1}^{n}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+5)^2 \\
&\equiv x^{4n+2}(x+2)^{2n}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n}(x+5)^{2n+1} \pmod 7
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve diğer şıklar da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.8. $p,\ n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $T_p = A_p + (A_p)^{-1}$ toplam matrisinin determinant değerleri aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\det T_{2n} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} 5(f_{2k+1})^2 .$$

b. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\det T_{4n+1} = l_0 \prod_{k=1}^{2n} (l_{2k})^2 .$$

c. $n \geq 0$ olmak üzere

$$\det T_{4n+3} = -l_0 \prod_{k=1}^{2n+1} (l_{2k})^2 .$$

İspat.

a. $2n$ mertebeli $T_{2n} = A_{2n} + (A_{2n})^{-1}$ matrisinin öz değerleri Teorem 4.1. gereğince her $k \leq n-1$ için $\sqrt{5}f_{2k+1}$ ve $-\sqrt{5}f_{2k+1}$ formundadır. Matrisin determinantı için bu özdeğerler çarpıldığında $n \geq 1$ ve $0 \leq k \leq n-1$ olmak üzere

$$\det T_{2n} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} 5(f_{2k+1})^2$$

olduğu görülür.

b. Teorem 4.1. gereğince $4n+1$ mertebeli $T_{4n+1} = A_{4n+1} + (A_{4n+1})^{-1}$ matrisinin özdeğerleri karakteristik polinomun l_0 hariç iki katlı kökü ve matrisin determinantı sahip olduğu özdeğerlerin çarpımına eşit olduğundan $n \geq 1$ve $1 \leq k \leq 2n$ olmak üzere

$$\det T_{4n+1} = l_0 \prod_{k=1}^{2n} (l_{2k})^2$$

şeklindedir.

c. Teorem 4.1.gereğince $4n+3$ mertebeli $T_{4n+3} = A_{4n+3} + (A_{4n+3})^{-1}$ matrisinin özdeğerleri karakteristik polinomun b. şıkkına benzer şekilde $-l_0$ hariç iki katlı kök ve sahip olduğu özdeğerlerin çarpımı matrisin determinantı olduğundan $n \geq 0$ ve $1 \leq k \leq 2n+1$ olmak üzere

$$\det T_{4n+3} = -l_0 \prod_{k=1}^{2n+1} (l_{2k})^2$$

biçimindedir.

5. $S_n = A_n - (A_n)^{-1}$ FARK MATRİSİNİN İNCELENMESİ

Tanım 5.1. $2 \leq n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n ninci mertebeden sağa dayalı binom matrisi A_n ve A_n matrisinin tersi $(A_n)^{-1}$ matrisi olmak üzere $S_n = A_n - (A_n)^{-1}$ matrisine n ninci mertebeden *fark matrisi* denir.

Örnek 5.1. 5 inci mertebeden S_5 matrisi

$$S_5 = A_5 - (A_5)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 5.1. $p,\ n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $S_p = A_p - (A_p)^{-1}$ matrisinin özdeğerleri kümesi aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 0$ olmak üzere

$$V_{4n+2} = \bigcup_{k=1}^{2n+1} \{(-1)^{k+1} l_{2k-1}\}.$$

b. $n \geq 1$ olmak üzere

$$V_{4n} = \bigcup_{k=1}^{2n} \{(-1)^k l_{2k-1}\}.$$

c. $n \geq 1$ olmak üzere

$$V_{2n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \{\sqrt{5} f_{2k-2}, -\sqrt{5} f_{2k-2}\}.$$

İspat.

a. $4n+2$ mertebeli $S_{4n+2} = A_{4n+2} - (A_{4n+2})^{-1}$ fark matrisinin her $1 \leq k \leq 2n+1$ için özdeğerleri $(-1)^{k+1}(\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1})$ formundadır. Buradan

$$V_{4n+2} = \bigcup_{k=1}^{2n+1} \{(-1)^{k+1}(\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1})\}$$
$$= \bigcup_{k=1}^{2n+1} \{(-1)^{k+1} l_{2k-1}\}$$

şeklinde bulunur.

b. $4n$ mertebeli $S_{4n} = A_{4n} - (A_{4n})^{-1}$ fark matrisinin her $1 \leq k \leq 2n$ için özdeğerleri $(-1)^k(\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1})$ formundadır. Buradan

$$V_{4n} = \bigcup_{k=1}^{2n} \{(-1)^k(\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1})\}$$
$$= \bigcup_{k=1}^{2n} \{(-1)^k l_{2k-1}\}$$

biçimindedir.

c. $2n+1$ mertebeli $S_{2n+1} = A_{2n+1} - (A_{2n+1})^{-1}$ fark matrisinin her $k \leq n+1$ için özdeğerleri $\alpha^{2k} - \beta^{2k}$ ve $\beta^{2k} - \alpha^{2k}$ formundadır. Buradan

$$\begin{aligned} V_{2n+1} &= \bigcup_{k=1}^{n+1}\{(\alpha^{2k-2} - \beta^{2k-2}), (\beta^{2k-2} - \alpha^{2k-2})\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n+1}\left\{\left(\sqrt{5}\frac{\alpha^{2k-2} - \beta^{2k-2}}{\alpha - \beta}\right), \left(\sqrt{5}\frac{\beta^{2k-2} - \alpha^{2k-2}}{\alpha - \beta}\right)\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n+1}\{\sqrt{5}f_{2k-2}, -\sqrt{5}f_{2k-2}\} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 5.2. $2 \leq n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $S_n = A_n - (A_n)^{-1}$ fark matrisinin iz değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\operatorname{tr}(S_n) = \begin{cases} 0 & , n \text{ tek} \\ 2f_n = 2f_{\frac{n}{2}} l_{\frac{n}{2}} & , n \text{ çift} \end{cases}$$

İspat.

1.Yöntem: İz toplamsal bir özellik ve $S_n = A_n - (A_n)^{-1}$olduğundan

$$\operatorname{tr}(S_n) = \operatorname{tr}(A_n) - \operatorname{tr}\left[(A_n)^{-1}\right]$$

dir. Bu durumda da

a. n tek iken

$$\operatorname{tr}(A_n) = \operatorname{tr}\left[(A_n)^{-1}\right] \qquad [10]$$

olduğundan

$$\mathrm{tr}(S_n) = \mathrm{tr}(A_n) - \mathrm{tr}\left[(A_n)^{-1}\right] = 0$$

olarak bulunur.

b. n çift iken

$$\mathrm{tr}(A_n) = -\,\mathrm{tr}\left[(A_n)^{-1}\right] \qquad [10]$$

olduğundan

$$\mathrm{tr}(S_n) = 2\mathrm{tr}(A_n) = 2f_n = 2f_{\frac{n}{2}} l_{\frac{n}{2}}$$

şeklinde bulunur.

2.Yöntem: S_n fark matrisinin köşegen yapısından faydalanılarak da iz özelliği ispatlanabilir.

$$S_n = \left[s_{ij}\right] = \begin{cases} (-1)^{i+j+n}\binom{n-i}{j-1} & , i+j < n+1 \\ 0 & , i+j = n+1 \\ \binom{n-1}{i-j} & , i+j > n+1 \end{cases}$$

dir. Bu durumda her $n \geq 1$ için

$$\mathrm{tr}(S_{2n+1}) = \sum_{k=1}^{n}\binom{2n+1-k}{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\binom{2n+1-k}{k-1} = 0$$

$$\mathrm{tr}(S_{2n}) = 2\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{k-1} = 2f_n = 2f_{\frac{n}{2}} l_{\frac{n}{2}}$$

şeklindedir.

Teorem 5.3. p, m, $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $S_p = A_p - (A_p)^{-1}$ matrisinin herhangi bir kuvvetinin izi aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\operatorname{tr}\left(S_{4n}^{2m+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k (l_{2k-1})^{2m+1}.$$

b. $n \geq 0$ olmak üzere

$$\operatorname{tr}\left(S_{4n+2}^{2m+1}\right) = 2\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1} (l_{2k-1})^{2m+1}.$$

c. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\operatorname{tr}\left(S_{2n}^{2m}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}(l_{2k-1})^{2m}.$$

d. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\operatorname{tr}\left(S_{2n+1}^{2m}\right)=2\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{5}f_{2k}\right)^{2m}.$$

e. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\operatorname{tr}\left(S_{2n+1}^{2m+1}\right) = 0.$$

İspat. Burada c ve e durumları ispatlanacak olup, diğer durumlar benzer şekilde gösterilebilir.

c. $\forall n \geq 1$ için S_{2n} matrisinin tüm özdeğerleri tek indisli olan $-l_1, l_3, -l_5, l_7, \ldots$ şeklindedir ve $(S_{2n})^{2m}$ matrisinin tüm özdeğerleri karakteristik polinomun iki katlı kökü olduğundan, matrisin izi, birbirinden farklı olan öz değerlerin toplamının iki katı olur. Sonuç olarak

$$\operatorname{tr}\left(S_{2n}^{2m}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}(l_{2k-1})^{2m}$$

şeklindedir.

e. $\forall n$ tek sayısı için S_n matrisinin özdeğerleri $k \le \frac{n-1}{2}$ olmak üzere $\sqrt{5}f_{2k-2}$, $-\sqrt{5}f_{2k-2}$ ve 0 dır. 0 haricindeki bu özdeğerlerin tek kuvvetleri, birbirinin toplamsal tersi olduğundan S_{2n+1}^{2m+1} matrisinin özdeğerlerinin toplamı 0 bulunur.

Teorem 5.4. $p,\ n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $S_p = A_p - \left(A_p\right)^{-1}$ matrisinin karakteristik polinomu aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ olmak üzere

$$P_{2n+1}(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5\left(f_{2n-2k+2}\right)^2\right].$$

b. $n \geq 1$ olmak üzere

$$P_{4n}(x) = \prod_{k=1}^{2n}\left[x - (-1)^k l_{2k-1}\right]^2.$$

c. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{4n+2}(x) = \prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^k l_{2k-1}\right]^2.$$

İspat.

a. Tek mertebeli S_{2n+1} matrisinin özdeğerleri kümesi Teorem 5.1. den

$$V_{2n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1}\left\{\sqrt{5}f_{2k-2}, -\sqrt{5}f_{2k-2}\right\}$$

dir. Buna ek olarak sıfır dışındaki özdeğerleri kök kabul eden ve karakteristik polinomun birer böleni olan 1. dereceden monik polinomlar, her $1 \leq k \leq n+1$ değeri için $x-\sqrt{5}f_{2k-2}$ ve $x+\sqrt{5}f_{2k-2}$ formunda elde edilir. Dolayısıyla her k için $x^2-5\left(f_{2n-2k+2}\right)^2$ polinomu karakteristik polinomun bir bölenidir. Buradan karakteristik polinom, bu polinomlar ile sıfırı kök kabul eden x polinomunun çarpımı olarak yazılabilir. Bu durumda

$$P_{2n+1}(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left[x^2-5\left(f_{2n-2k+2}\right)^2\right]$$

eşitliği elde edilir.

b. Çift mertebeli $S_{4n}=A_{4n}-\left(A_{4n}\right)^{-1}$matrisinin özdeğerleri kümesi $n \geq 1$ olmak üzere Teorem 5.1. den

$$V_{4n} = \bigcup_{k=1}^{2n}\left\{(-1)^k l_{2k-1}\right\}$$

dir. Her bir kök karakteristik polinomun çift katlı kökü olduğundan

$$P_{4n}(x) = \prod_{k=1}^{2n}\left[x-(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

şeklindedir.

c. Çift mertebeli $S_{4n+2}=A_{4n+2}-\left(A_{4n+2}\right)^{-1}$ matrisinin özdeğerleri kümesi $n \geq 0$ olmak üzere Teorem 5.1. den

$$V_{4n+2} = \bigcup_{k=1}^{2n+1}\left\{(-1)^{k+1} l_{2k-1}\right\}$$

dir. Her bir özdeğer karakteristik polinomun çift katlı kökü olduğundan

$$P_{4n+2}(x) = \prod_{k=1}^{2n+1} \left[x + (-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

biçimindedir.

Teorem 5.5. $p,\ n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $S_p = A_p - (A_p)^{-1}$ matrisinin mod3 teki karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ için

I. $P_{8n}(x) \equiv (x-1)^{4n}(x+1)^{4n}$.

II. $P_{8n+1}(x) \equiv x^{4n+1}(x^2+1)^{2n}$.

b. $n \geq 0$ için

I. $P_{8n+2}(x) \equiv (x-1)^{4n+2}(x+1)^{4n}$.

II. $P_{8n+3}(\mathrm{x}) \equiv x^{4n+1}(x^2+1)^{2n+1}$.

III. $P_{8n+4}(x) \equiv (x-1)^{4n+2}(x+1)^{4n+2}$.

IV. $P_{8n+5}(x) \equiv x^{4n+3}(x^2+1)^{2n+1}$.

V. $P_{8n+6}(x) \equiv (x-1)^{4n+2}(x+1)^{4n+4}$.

VI. $P_{8n+7}(x) \equiv x^{4n+3}(x^2+1)^{2n+2}$.

İspat.

a.I. Teorem 5.4. ve Lemma 3.1. den

$$P_{4n}(x) = \prod_{k=1}^{2n} \left[x - (-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

polinomunda *n* yerine 2*n* yazılırsa

$$P_{8n}(x)=\prod_{k=1}^{4n}\left[x-(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$=\prod_{k=1}^{n}[x+l_{8k-7}]^2\prod_{k=1}^{n}[x-l_{8k-5}]^2\prod_{k=1}^{n}[x+l_{8k-3}]^2\prod_{k=1}^{n}[x-l_{8k-1}]^2$$

$$=\prod_{k=1}^{n}(x+1)^2\prod_{k=1}^{n}(x+2)^2\prod_{k=1}^{n}(x+2)^2\prod_{k=1}^{n}(x+1)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n}(x+2)^{4n}\ (\mathrm{mod}3)$$

şeklinde elde edilir.

a.II. Genel olarak tek mertebeli $S_{2n+1}=A_{2n+1}-(A_{2n+1})^{-1}$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P_{2n+1}(x)=x\prod_{k=1}^{n}\left[x^2-5\left(f_{2n-2k+2}\right)^2\right]$$

olduğundan n yerine $4n$ yazılarak

$$P_{8n+1}(x)=x\prod_{k=1}^{4n}\left[x^2-5\left(f_{2n-2k+2}\right)^2\right]$$

olur. Buradan

$$A_{8n+1}(x)=\prod_{k=0}^{4n-1}\left[x^2-5\left(f_{8n-2k}\right)^2\right]$$

alınırsa

$$P_{8n+1}(x) = xA_{8n+1}(x)$$

ve Lemma 3.1. den

$$\begin{aligned}
A_{8n+1}(x) &= \prod_{k=0}^{4n-1} \left[x^2 - 5\left(f_{8n-2k}\right)^2\right] \\
&= \left[x^2 - 5\left(f_{8n}\right)^2\right]\left[x^2 - 5\left(f_{8n-2}\right)^2\right]\dots\left[x^2 - 5\left(f_2\right)^2\right] \\
&\equiv \left[x^2 + \left(f_{8n}\right)^2\right]\left[x^2 + \left(f_{8n-2}\right)^2\right]\dots\left[x^2 + \left(f_2\right)^2\right] \\
&\equiv \prod_{k=0}^{2n-1} x^2 \prod_{k=0}^{2n-1} \left[x^2 + \left(f_{4k+2}\right)^2\right] \\
&\equiv x^{4n}(x^2+1)^{2n} \pmod{3}
\end{aligned}$$

şeklindedir ve sonuç olarak

$$P_{8n+1}(x) \equiv x^{4n+1}(x^2+1)^{2n} \pmod{3}$$

elde edilir.

b.I. $n \geq 2$ olmak üzere $4n+2$ mertebeli $S_{4n+2} = A_{4n+2} - (A_{4n+2})^{-1}$ fark matrisinin karakteristik polinomu Teorem 5.4. ten

$$P_{4n+2}(x) = \prod_{k=1}^{2n+1} \left[x + (-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

dir. n yerine $2n$ yazılırsa Lemma 3.1. den

$$
\begin{aligned}
P_{8n+2}(x) &= \prod_{k=1}^{4n+1}\left[x+(-1)^k l_{2k-1}\right]^2 \\
&= \prod_{k=1}^{n+1}[x-l_{8k-7}]^2 \prod_{k=1}^{n}[x+l_{8k-5}]^2 \prod_{k=1}^{n}[x-l_{8k-3}]^2 \prod_{k=1}^{n}[x+l_{8k-1}]^2 \\
&\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+2)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+2)^2 \\
&\equiv (x+1)^{4n}(x+2)^{4n+2} \ (\text{mod}3)
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir.

b.II. $n \geq 1$ olmak üzere $2n+1$ mertebeli $S_{2n+1} = A_{2n+1} - (A_{2n+1})^{-1}$ fark matrisinin karakteristik polinomu

$$P_{2n+1}(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5\left(f_{2n-2k+2}\right)^2\right]$$

dir. Teorem 5.3. ve Lemma 3.1.den n yerine $4n+1$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
P_{8n+3}(x) &= x\prod_{k=1}^{4n+1}\left[x^2 - 5\left(f_{2k}\right)^2\right] \\
&= x\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5\left(f_{8k}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5\left(f_{8k-2}\right)^2\right]\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5\left(f_{8k-4}\right)^2\right] \\
&\quad \prod_{k=1}^{n+1}\left[x^2 - 5\left(f_{8k-6}\right)^2\right] \\
&\equiv x\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}x^2\prod_{k=1}^{n}(x^2+1)\prod_{k=1}^{n}x^2\prod_{k=1}^{n+1}(x^2+1) \\
&\equiv x^{4n+1}(x^2+1)^{2n+1} \ (\text{mod}3)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

b.III. $n \geq 1$ olmak üzere $4n$ mertebeli $S_{4n} = A_{4n} - (A_{4n})^{-1}$ fark matrisinin karakteristik polinomu Teorem 5.3. ten

$$P_{4n}(x) = \prod_{k=1}^{2n} \left[x - (-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

dir. Lemma 3.1. den n yerine $2n+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{8n+4}(x) &= \prod_{k=1}^{4n+2} \left[x - (-1)^k l_{2k-1}\right]^2 \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} [x + l_{8k-7}]^2 \prod_{k=1}^{n+1} [x - l_{8k-5}]^2 \prod_{k=1}^{n} [x + l_{8k-3}]^2 \prod_{k=1}^{n} [x - l_{8k-1}]^2 \\ &\equiv \prod_{\mathrm{k}=1}^{n+1} (x+1)^2 \prod_{\mathrm{k}=1}^{n+1} (x+2)^2 \prod_{\mathrm{k}=1}^{n} (x+2)^2 \prod_{\mathrm{k}=1}^{n} (x+1)^2 \\ &\equiv (x+1)^{4n+2} (x+2)^{4n+2} \ (\mathrm{mod} 3) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

b.IV. $n \geq 1$ olmak üzere $2n+1$ mertebeli $S_{2n+1} = A_{2n+1} - (A_{2n+1})^{-1}$ fark matrisinin karakteristik polinomu Teorem 5.3. ten

$$P_{2n+1}(x) = x \prod_{k=1}^{n} \left[x^2 - 5\left(f_{2n-2k+2}\right)^2\right]$$

dir. Buradan n yerine $4n+2$ yazılırsa Lemma 3.1. den

$$P_{8n+5}(x) = x\prod_{k=1}^{4n+2}\left[x^2 - 5(f_{2k})^2\right]$$

$$= x\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5(f_{8k})^2\right]\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5(f_{8k-2})^2\right]\prod_{k=1}^{n+1}\left[x^2 - 5(f_{8k-4})^2\right]$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left[x^2 - 5(f_{8k-6})^2\right]$$

$$\equiv x\prod_{k=1}^{n}(x^2+1)\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}x^2\prod_{k=1}^{n+1}(x^2+1)\prod_{k=1}^{n+1}x^2$$

$$\equiv x^{4n+3}(x^2+1)^{2n+1} \text{ (mod3)}$$

olduğu görülür. Diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 5.6. $p,\ n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $S_p = A_p - (A_p)^{-1}$ matrisinin mod5 teki karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ için $P_{2n+1}(x) \equiv x^{2n+1}$.

b.

I. $n \geq 0$ için $P_{4n+2}(x) \equiv (x+4)^{4n+2}$.

II. $n \geq 1$ için $P_{4n}(x) \equiv (x+1)^{4n}$.

İspat.

a. $n \geq 1$ olmak üzere $2n+1$ mertebeli $S_{2n+1} = A_{2n+1} - (A_{2n+1})^{-1}$ fark matrisinin karakteristik polinomu Teorem 5.4. ten

$$P_{2n+1}(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left[x^2 - 5(f_{2n-2k+2})^2\right]$$

dir. Lemma 3.2. den

$$P_{2n+1}(x) \equiv x\prod_{k=1}^{n}(x^2) \equiv x^{2n+1}(\text{mod}5)$$

olarak elde edilir.

b.I. $n \geq 0$ olmak üzere $4n$+2 mertebeli $S_{4n+2} = A_{4n+2} - (A_{4n+2})^{-1}$ fark matrisinin karakteristik polinomu Teorem 5.4. ve Lemma 3.2. den

$$P_{4n+2}(x) = \prod_{k=1}^{2n+1}\left[x + (-1)^k l_{2k-1}\right]^2 \equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x - l_{4k-3})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{4k-1})^2$$
$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \equiv (x+4)^{4n+2} \; (\text{mod}5)$$

şeklindedir.

b.II. $n \geq 1$ olmak için $4n$ mertebeli $S_{4n} = A_{4n} - (A_{4n})^{-1}$ matrisinin karakteristik polinomu Lemma 3.2. den

$$P_{4n}(x) = \prod_{k=1}^{2n}\left[x - (-1)^k l_{2k-1}\right]^2 \equiv \prod_{k=1}^{2n}(x+1)^2 \equiv (x+1)^{4n} \; (\text{mod}5)$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 5.7. *p, n* $\in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $S_p = A_p - \left(A_p\right)^{-1}$ fark matrisinin mod7 deki karakteristik polinomları aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 1$ olmak üzere $P_{8n}(x) \equiv (x+1)^{2n}(x+3)^{2n}(x+4)^{2n}(x+6)^{2n}$.

b. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+2}(x) \equiv (x+1)^{4n}(x+3)^{4n}(x+4)^{4n}(x+6)^{4n+2}$.

c. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+4}(x) \equiv (x+1)^{4n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n}(x+6)^{4n}$.

d. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+6}(x) \equiv (x+1)^{4n}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+2}(x+6)^{4n+2}$.

e. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+8}(x) \equiv (x+1)^{4n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+2}(x+6)^{4n+2}$.

f. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+10}(x) \equiv (x+1)^{4n+4}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+2}(x+6)^{4n+2}$.

g. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+12}(x) \equiv (x+1)^{4n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+4}(x+6)^{4n+4}$.

h. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+14}(x) \equiv (x+1)^{4n+4}(x+3)^{4n+4}(x+4)^{4n+4}(x+6)^{4n+2}$.

i. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+1}(x) \equiv x^{4n+1}(x^2+2)^{4n}(x^2+4)^{2n}$.

j. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+3}(x) \equiv x^{4n+1}(x^2+2)^{4n+1}(x^2+4)^{2n}$.

k. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+5}(x) \equiv x^{4n+1}(x^2+2)^{4n+1}(x^2+4)^{2n+1}$.

l. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+7}(x) \equiv x^{4n+1}(x^2+2)^{4n+2}(x^2+4)^{2n+1}$.

m. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+9}(x) \equiv x^{4n+3}(x^2+2)^{4n+2}(x^2+4)^{2n+1}$.

n. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+11}(x) \equiv x^{4n+3}(x^2+2)^{4n+3}(x^2+4)^{2n+1}$.

o. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+13}(x) \equiv x^{4n+3}(x^2+2)^{4n+4}(x^2+4)^{2n+1}$.

p. $n \geq 0$ olmak üzere $P_{16n+15}(x) \equiv x^{4n+3}(x^2+2)^{4n+5}(x^2+4)^{2n+1}$.

İspat. Lemma 3.3. ve Teorem 5.4. ten

a. $n \geq 1$olmak üzere

$$P_{8n}(x) = \prod_{k=1}^{4n}\left[x-(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(x+l_{8k-7})^2\prod_{k=1}^{n}(x-l_{8k-5})^2\prod_{k=1}^{n}(x+l_{8k-3})^2\prod_{k=1}^{n}(x-l_{8k-1})^2$$

$$\equiv (x+1)^{2n}(x+3)^{2n}(x+4)^{2n}(x+6)^{2n} \pmod 7$$

şeklinde elde edilir.

b. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{16n+2}(x) = \prod_{k=1}^{8n+1}\left[x + (-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(x - l_{16k-15})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-13})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-11})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-9})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-7})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-5})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-3})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-1})^2$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+1)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+6)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n}(x+3)^{4n}(x+4)^{4n}(x+6)^{4n+2} \ (\mathrm{mod}7)$$

şeklinde elde edilir.

c. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{16n+4}(x) = \prod_{k=1}^{8n+2}\left[x - (-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(x + l_{16k-15})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x - l_{16k-13})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-11})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-9})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-7})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-5})^2 \prod_{k=1}^{n}(x + l_{16k-3})^2 \prod_{k=1}^{n}(x - l_{16k-1})^2$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+6)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+6)^2\prod_{k=1}^{n}(x+4)^2\prod_{k=1}^{n}(x+3)^2\prod_{k=1}^{n}(x+1)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n}(x+6)^{4n} \pmod 7$$

biçiminde elde edilir.

d. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{16n+6}(x) = \prod_{k=1}^{8n+3}\left[x+(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-15})^2\prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-13})^2\prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-11})^2\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-9})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-7})^2\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-5})^2\prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-3})^2\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-1})^2$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2\prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2\prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2\prod_{k=1}^{n}(x+1)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+1)^2\prod_{k=1}^{n}(x+3)^2\prod_{k=1}^{n}(x+4)^2\prod_{k=1}^{n}(x+6)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+2}(x+6)^{4n+2} \pmod 7$$

şeklindedir.

e. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{16n+8}(x) = \prod_{k=1}^{8n+4}\left[x-(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-15})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-13})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-11})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-9})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-7})^2 \prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-5})^2 \prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-3})^2 \prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-1})^2$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n}(x+6)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+1)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+2}(x+6)^{4n+2} \pmod{7}$$

olduğu görülür.

f. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{16n+10}(x) = \prod_{k=1}^{8n+5}\left[x+(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-15})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-13})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-11})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-9})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-7})^2 \prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-5})^2 \prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-3})^2 \prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-1})^2$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n+4}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+2}(x+6)^{4n+2} \pmod{7}$$

biçimindedir.

g. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{16n+12}(x) = \prod_{k=1}^{8n+6}\left[x-(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-15})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-13})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-11})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-9})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-7})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-5})^2 \prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-3})^2 \prod_{k=1}^{n}(x-l_{16k-1})^2$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+1)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n+2}(x+3)^{4n+2}(x+4)^{4n+4}(x+6)^{4n+4} \ (\mathrm{mod}7)$$

şeklindedir.

h. $n \geq 0$ olmak üzere

$$P_{16n+14}(x) = \prod_{k=1}^{8n+7}\left[x+(-1)^k l_{2k-1}\right]^2$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-15})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-13})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-11})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-9})^2$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-7})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+l_{16k-5})^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x-l_{16k-3})^2 \prod_{k=1}^{n}(x+l_{16k-1})^2$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n+1}(x+6)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}(x+1)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+3)^2 \prod_{k=1}^{n+1}(x+4)^2 \prod_{k=1}^{n}(x+6)^2$$

$$\equiv (x+1)^{4n+4}(x+3)^{4n+4}(x+4)^{4n+4}(x+6)^{4n+2} \pmod{7}$$

şeklindedir ve diğer durumlar da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 5.8. *p,* $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ ve $p \geq 2$ için $S_p = A_p - (A_p)^{-1}$ matrisinin determinant değerleri aşağıdaki gibidir.

a. $n \geq 0$ için

$$\det S_{4n+2} = \prod_{k=1}^{2n+1}(l_{2k-1})^2.$$

b. $n \geq 0$ için

$$\det S_{4n} = \prod_{k=1}^{2n}(l_{2k-1})^2.$$

ve

$$\det S_{2n+1} = 0.$$

İspat.

a. $n \geq 0$ olmak üzere $4n$+2 mertebeli $S_{4n+2} = A_{4n+2} - (A_{4n+2})^{-1}$ matrisinin determinantı özdeğerlerinin çarpımıdır, her bir özdeğerin karakteristik polinomun iki katlı kökü olması ve Teorem 5.1. den

$$\det S_{4n+2} = \prod_{k=1}^{2n+1}(l_{2k-1})^2$$

şeklindedir.

b. $n \geq 1$ olmak üzere $4n$ mertebeli bir $S_{4n} = A_{4n} - (A_{4n})^{-1}$matrisinin determinantı, özdeğerlerinin çarpımına eşittir. S_{4n} matrisinin her bir özdeğeri iki katlı olmasından dolayı determinant bu özdeğerlerin karelerinin çarpımıdır. Buradan

$$\det S_{4n} = \prod_{k=1}^{2n} (l_{2k-1})^2$$

biçimindedir, ayrıca $n \geq 1$ olmak üzere $2n+1$ mertebeli bir $S_{2n+1} = A_{2n+1} - (A_{2n+1})^{-1}$ matrisinin özdeğerlerinden biri 0 olduğundan bu matrisin determinantı 0 dır.

$$\det S_{2n+1} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n} 5\left(f_{2k}\right)^2 = 0$$

şeklinde elde edilir.

6. SONUÇLAR

Fibonacci ve Lucas sayıları geçmişten günümüze kadar birçok yerde kullanılmış ve bugüne kadar bunlarla ilgili birçok çalışma yürütülmüştür. Bu sayılarla ilgili tanımlar, teoremler, gözlemler ve sonuçlar ortaya konulmuştur. Bu sayıların, sağa dayalı binom matrislerinin iz, determinant, özdeğerler kümesi, karakteristik polinomları gibi spektral özelliklerinde ortaya çıktığı bilinmektedir.

Bu alanda yapılan çalışmaların devamı niteliğinde olan bu tez çalışmasında sağa dayalı binom matrisinin tersi ile toplamı olan T_n toplam matrisi ve farkı olan S_n fark matrisinin iz, determinant, özdeğerler kümesi, karakteristik polinomları gibi spektral özelliklerinde karşılaşılan Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili yeni teoremler elde edilmiştir.

7.KAYNAKLAR

[1] Anonim, Fibonacci numbers in real life, http://www.plus.maths.org/content/sites/plus.maths.org/fibonaccinumbersinreallife. (Erişim tarihi: 24.06.2020)

[2] Anonim, Numbers in nature, http://www.webecoist.com/2008/09/07/17-amazing-examples -of-fractals-in-nature. (Erişim tarihi: 24.06.2020)

[3] Anonim, Fibonacci numbers seen on sun flower head, https://www.popmath.org.uk/rpamaths/rpampages/sunflower. (Erişim tarihi: 24.06.2020)

[4] S. Sinha, The Fibonacci numbers and it's amazing applications, International journal of engineering science, volume 6 issue 9, 2017.

[5] Anonim, Golden ratio, http://evolutionoftruth.com/goldensection/goldsect. (Erişim tarihi: 24.06.2020)

[6] M. Lipson, Çeviri: İ. Akkuş, Schaum's Outlines Linear Algebra, Seymour Lipschutz, Nobel Akademik Yayıncılık, 2017.

[7] H. Hacısalihoğlu, Lineer Cebir 1, Asır Yayın ve Dağıtım, Ankara, 1975.

[8] A. Sabuncuoğlu, Lineer Cebir, Nobel Dağıtım, Ankara, 2004.

[9] M. Bicknell, Verner E. Hoggatt, A primer for the Fibonacci numbers, Fibonacci quarterly, 1973.

[10] L. Carlitz, The characteristic polynomial of a certain matrix of binomial coefficients, Duke University, 1965.

[11] P. Stanica and R. Peele, Spectral properties of a binomial matrix, Auburn University Department of Mathematics, 2018.

[12] Charles. W. Campbell II, Period of the fibonacci sequence modulo j, Math 399, 2007.