T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ BASKAKOV KANTOROVICH OPERATORLERİ

SEDANUR GÜNEY

EYLÜL 2020

Matematik Anabilim Dalında Sedanur GÜNEY tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ BASKAKOV KANTOROVICH OPERATORLERİ adlı Yüksek Lisans tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. ALİ OLGUN
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. ALİ OLGUN
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan :Prof. Dr. Ali ARAL

Üye(Danışman) : Prof. Dr. ALİ OLGUN

Üye : Doç. Dr. RABİA AKTAŞ

02/09/2020

Bu Tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans Derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. RECEP ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ

BASKAKOV KANTOROVICH OPERATÖRLERİ

GÜNEY, Sedanur

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ali OLGUN

Eylül 2020, 90 sayfa

Bu tez, genelleştirilmiş iki değişkenli Baskakov Kantorovich operatörünün yaklaşım özelliklerini incelemek için dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde bazı temel kavramlar ve iki değişkenli Kantorovich operatör tanımı verilmektedir.

Üçüncü bölümde yardımcı sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ikinci ve üçüncü bölümde açıklanan tanımlar ve yardımcı sonuçlar ile ana sonuçların ispatı verilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar kullanılarak K_{n_1,n_2}^{a} operatörleri için yaklaşım hızı, Voronovskaja tipi teorem ve türevler için yaklaşım incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Korovkin teoremi, Yakınsama Oranı, Eşzamanlı Yaklaşım Baskakov Kantorovich operatörleri, İki Değişkenli Süreklilik Modülü.

ABSTRACT

BIVARIATE GENERALIZED

BASKAKOV KANTOROVICH OPERATORS

GÜNEY, Sedanur

Kırıkkale University

Graduate School of Naturel and Applied science

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali Olgun

September 2020, 90 pages

This thesis consists of four parts to examine the generalized bivariate Baskakov Kantorovich operator's approach features. The first part is reserved for introduction.

In the second section some basic concepts and the definition of the bıvariate Kantorovich operator are given.

Auxiliary results are given in the third section.
In the fourth section, the definitions and auxiliary results explained in the second and third sections and the proof of the main results are given. In addition, using the obtained results, the approach speed for $K^{a}_{n_1,n_2}$ operators, the approach for Voronovskaja type theorem and derivatives were investigated.

Key Words: Korovkin Theorem, Convergence Rate,

Simultaneous Approximation, Baskakov Kantorovich Operators,

Bivariate Moduls of Continuity.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ali OLGUN a, teşekkür ve saygılarımı sunarım. Eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{C[a,b]}$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C[0,\infty)}$	$[0,\infty)$ tanımlı sürekli fonksiyon uzayı
$\boldsymbol{L(f;\ x)}$	L lineer operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\boldsymbol{L_n(f;\ x)}$	Lineer pozitif operatörler dizisi
$\boldsymbol{\|f\|_{C[a,b]}}$	$x \in [a,b]$ için $\|f\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a\le x\le b} \|f(x)\|$ ile tanımlı norm
$\boldsymbol{K_n^a}$	Kantorovich operatörü
$\boldsymbol{K_{n_1,n_2}^a(f;x,y)}$	İki değişkenli Kantorovich operatörü
$\boldsymbol{M_{n,r}^a(x)}$	Yardımcı operatör
$\boldsymbol{u_{n,r}^a(x)}$	K_n^a operatörünün özel hali
$\boldsymbol{P_k(n,a)}$	Yardımcı eşitlik
$\boldsymbol{W_{n,k}^a(x)}$	Özel tanımlı fonksiyon
$\boldsymbol{\upsilon_{n,r}^a(x)}$	Özel tanımlı bir operatör
$\boldsymbol{\frac{\partial^i f}{\partial x^i}}$	f fonksiyonunu x değişkenine göre i yinci basamaktan kısmi türevi
$\boldsymbol{\kappa(f;\delta)}$	f fonksiyonu için Peetre’s K fonksiyoneli
$\boldsymbol{\overline{K}_{n_1,n_2}^a(f;x,y)}$	Yardımcı Kantorovich operatörü
$\boldsymbol{\omega(f;\delta)}$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\boldsymbol{C^2[a,b]}$	$f, f', f'' \in C[a,b]$ olan fonksiyon uzayı

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM 1

1.1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinde lineer pozitif operatörler ile yaklaşım metotları önemli rol oynar. Örneğin: Monotonluk, konvekslik, şekil koruma gibi birçok özelliğin incelenmesinde daha nitelikli sonuçlar elde edilir.

1953 yılında P.P.Korovkin $C[0,1]$ kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonları için yine $C[0,1]$ üzerinde tanımlı (L_n), $n \in \mathbb{N}$ şeklindeki lineer pozitif operatör dizisinin f ye yakınsaması için yani $(L_n f) \to f$ düzgün yakınsak olması için çok güçlü aynı zamanda da çok basit olan kriterleri verdi. Öyle ki $L_n(f) \to f$ nin $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaklığının sağlanması için $f \in \{1, x, x^2\}$ olmasının yeterli olduğunu gösterdi. Bu durum ortaya çıktıktan sonra son 50 yılda bu konuda birçok genelleştirmeler yapıldı. Üstelik bu genelleştirmelerin çoğu matematiğin çeşitli dallarına yayıldı ve çok kullanışlı uygulamalar elde edildi. Halende bu çalışmalar devam etmektedir.

Korovkin teoremi için en kolay uygulama operatörü Bernstein operatörü olmuştur. Daha sonra bu operatör baz alınarak birçok yeni operatör tanımlanmış ya da operatörün değişik şekilleri incelenmiştir.

Bilinen klasik Binom teoremi temel alınarak farklı genelleştirmelerde yapılmıştır. Bu genelleştirmeler yardımı ile tanımlanan operatörlerden biriside Baskakov operatörüdür. Bu operatörde 1957 yılında V.A.Baykakov tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu operatörde birçok araştırmacı tarafından genellemeleri verilmiştir. Bu operatörün değişik şekillerinin çeşitli uzaylardaki incelemelerinde yoğunlukla çalışılmaktadır.

1930 yılında L.V.Kantorovich 1913 yılında Bersten tarafından tanımlanan Bernstein operatörlerini baz alarak integrallenebilen fonksiyonlar için Bernstein Kantorovich operatörlerini tanımlamıştır. Daha sonra bilinen birçok operatörün Kantorovich genelleştirmeleri yapılmıştır.

Bu tezde bu tip genelleştirmelerden birisi olan Baskakov Kantorovich tipli bir operatörün yakınsaklık özellikleri incelenecektir.

1.2.KAYNAK ÖZETLERİ

Bu tezde M.Goyal ve P.N.Agrawal tarafından 2015 yılında yapılan bir çalışma temel alınacak ve konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalardan kaynak olarak faydalanılacaktır. Tez süresince kaynaklarda verilen lemma ve teoremlerin ispatları okuyucuya kolay anlaşılır bir şekilde açıklanarak okuyucu için yeni çalışmalarda kolaylık olması sağlanmaya çalışılarak bir kaynak oluşturulmaya çalışılacaktır.

1.3.TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde yararlanacağımız bazı tanımlar, teoremler ile bazı eşitsizlikler verilecektir:

Tanım 1.3.1.(Lineer Operatör):

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun.

$L: X \to Y$;

$f \to L(f) = g$ şeklinde X'deki bir fonksiyonunu Y'deki bir g fonksiyonuna dönüştüren dönüşüme operatör denir. $L(f) = g$ eşitliği genellikle

$L(f(t); x) = g(x)$ şeklinde de gösterilir.

Eğer $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in$ X için; L operatörü

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1) + \beta L(f_2)$$

özelliğini sağlarsa L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.3.2.(Lineer Pozitif Operatör):

$L: X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. $\forall f \in X$ ve $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ oluyorsa operatöre lineer pozitif operatör denir.

Eğer L lineer operatörü pozitif ise o taktirde

$\forall t \in X$ için $f(t) \leq g(t) \Rightarrow L(f(t);x) \leq L(g(t);x)$ eşitsizliği sağlanır. Yani L operatörü monotondur.

Gerçekten de $f(t) \leq g(t)$ olduğundan

$$g(t) - f(t) \geq 0$$

$$\Rightarrow L(g(t) - f(t);x) \geq 0$$

$$\Rightarrow L(g(t);x) - L(f(t);x) \geq 0$$

$$\Rightarrow L(f(t);x) \leq L(g(t);x)$$

eşitsizliği sağlanır ki bu L'nin monoton olduğunu gösterir.

L lineer ve pozitif bir operatör olsun. L monoton olduğundan, L operaötürü

$$-|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow L(-|f(t)|;x) \leq L(f(t);x) \leq L(|f(t)|;x)$$

$$\Rightarrow -L(|f(t)|;x) \leq L(f(t);x) \leq L(|f(t)|;x)$$

$$\Rightarrow \left|L\big(f(t;x)\big)\right| \leq L(|f(t)|;x)$$

eşitsizliğini de sağlar.

Tanım 1.3.3.:

$[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan reel değerli fonksiyonlar kümesi $C[a, b]$ şeklinde gösterilir. $f \in C[a, b]$ olsun, bu uzayda norm

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Bir (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsak olması her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

olmasıdır.

Yani

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması demektir.

(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3.4. (Korovkin Teoremi):

$f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende sınırlı olsun. Eğer $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ üzerinde

$$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$$

$$L_n(t;x) \rightrightarrows x$$

$$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$$

koşullarını sağlıyorsa $L_n(f;x)$ dizisi $[a,b]$ aralığında $f(x)$'e düzgün yakınsaktır.

Yani:

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$$

dir.

Tanım 1.3.5. (Hölder Eşitsizliği):

Sonlu sayıda hepsi sıfır olmayan $(x_k), (y_k), k \in \mathbb{N}$ sayıları için ve

$p > 1$ ve q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliği sağlanacak şekilde seçilirse

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği adı verilir. Bu eşitsizlik ilk kez 1889'da O.Hölder tarafından verilmiştir.

Tanım 1.3.6. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği):

Sonlu sayıda hepsi sıfır olmayan (x_k), (y_k), $k \in \mathbb{N}$ sayıları için, Hölder eşitsizliği tanımı gereğince $p = 2$, $q = 2$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği adı verilir.

Tanım 1.3.7. (Tek Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Serisi):

$f(x)$ fonksiyonu x_0 noktasında her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

serisine x_0 noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi adı verilir.

Tanım 1.3.8. (İki Değişkenli Fonksiyonlar İçin Taylor Serisi):

$f(s,t)$ fonksiyonunun (x,y) noktasında her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun. Bu durumda

$$f(s,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[f_x(x,y)(s-x)+f_y(x,y)(t-y)\right]^{(k)}$$

$$=f(x,y)+\frac{1}{1!}\left[f_x(x,y)(s-x)+f_y(x,y)(t-y)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x,y)(s-x)^2+2f_{x,y}(x,y)(s-x)(t-y)+f_{yy}(x,y)(t-y)^2\right]+\ldots$$

şeklinde bir seriye açılabilir. Bu seriye $f(s,t)$ fonksiyonunun (x,y) noktasında Taylor serisi denir.

Tanım 1.3.9. (Süreklilik Modülü):

$f(x),[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. $\delta>0$ ve $x,y\in[a,b]$ için

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{|x-y|<\delta\\ x,y\in[a,b]}}|f(x)-f(y)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f nin süreklilik modülü denir. Süreklilik modülü gösterimleri için $\omega(\delta)$ veya $\omega_1(\delta)$ gösterimleri de kullanılmaktadır. Bu şekilde tanımlanan süreklilik modülü aşağıdaki önemli özellikleri sağlar.

i) $\omega(f,\delta)$ fonksiyonu monoton artandır.

ii) f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)=0$$

dır.

iii) $m\in\mathbb{N}$ için,

$$\omega(f,m\delta)\le m\omega(f,\delta)$$

dır.

iv) $\gamma > 0$ reel sayısı için,

$$\omega(f, \gamma\delta) \leq (\gamma + 1)\omega(f, \delta)$$

dır.

v) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon olmak üzere

$\forall\, x, t \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f, |t - x|)$$

dir.

1.4.OPERATÖRÜN OLUŞTURULMASI

Matematik Analizden iyi bilinmektedir ki

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}, \quad \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k, \quad (1+x)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k-i}$$

eşitlikleri vardır. Buna göre,

$$\frac{e^{at}}{(1-t)^n} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}\right\}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k\right\}$$

şeklinde yazıldıktan sonra, bu eşitlikte t yerine $t = \frac{x}{1+x}$ alınırsa

$$\frac{e^{\frac{ax}{1+x}}}{\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^n} = e^{\frac{ax}{1+x}}(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(n+i-1)!\, a^{k-i}}{(n-1)!\, k!} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

yazılabilir. Burada $\binom{k}{i} = \frac{k!}{(k-i)!i!}$ olup $(n)_0 = 1$ ve $(n)_i = n(n+1)\ldots(n+i-1)$ Pochammer sembolü kullanılıp

$$P_k(n,a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (n)_i \, a^{k-i}$$

gösterimi kullanılırsa

$$e^{\frac{ax}{1+x}}(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^k}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$1 = e^{\frac{-ax}{1+x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

olur. Burada kolayca görülebilir ki

$$(n)_i = n(n+1)\ldots(n+i-1) = \frac{(n-1)!\, n(n+1)\ldots(n+i-1)}{(n-1)!} = \frac{(n+i-1)!}{(n-1)!}$$

eşitliği sağlanır.

1998 de V.Mihesan

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right); x \in [0,\infty), \;\; n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlanan Baskakov operatörlerini negatif olmayan bir a sayısı için

$$P_k(n,a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (n)_i \, a^{k-i}$$

olmak üzere

$$B_n^a(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} f\left(\frac{k}{n}\right), f \in C[0,\infty)$$

şeklinde genişletti. Daha sonrada bu operatörün yakınsaklık özelliklerini inceledi. 2015 de N.Rao ve A.Wafi bu operatörde $f\left(\frac{k}{n}\right)$ yerine $f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$ alarak Stancu varyantının yakınsaklık özelliklerini incelediler.

2005 de ise A.Wafi ve S.Khatoon bu operatörün

$$V_n^a(f;x) = ne^{-\frac{ax}{1+x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \, ; \; x \geq 0, \; n \in \mathbb{N}$$

şeklindeki Kantorovich versiyonunun yakınsaklık özelliklerini incelemişlerdir. 2014 de A.Erençin ve S.Büyük Durakoğlu bu operatörü daha da genelleştirerek diziler yardımı ile yakınsaklık özelliklerini incelediler.

BÖLÜM 2

2.1.GENELLEŞTİRİLMİŞ İKİ DEĞİŞKENLİ KANTOROVICH OPERATÖRLERİN TANIMLANMASI VE YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ:

2011 de A. Erençin, Mihesan'ın tarafından genelleştirilen Baskakov operatörünün $i \geq 1$ için

$$W_{n,k}^{a}(x) = e^{-\frac{ax}{1+x}} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$P_k(n,a) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (n)_i \, a^{k-i}, ve \; (n)_i = n(n+1) \ldots (n+i-1)$$

olmak üzere

$$L_n^a(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x) \frac{1}{B(k+1,n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{n+k+1}} f(t)dt, \; x \geq 0$$

şeklindeki Durmeyer tipi operatörü tanımlayarak yakınsaklık özelliklerini inceledi. Son zamanlarda, Agrewel ve arkadaşları bu operatörleri kullanarak türevleri sınırlı varyasyona sahip fonksiyonların yaklaşımı ve eşzamanlı yaklaşımı üzerinde çalışmışlardır. [2] numaralı kaynakta ise M.Goyal ve A.Wafi

$$C_\gamma[0,\infty) \coloneqq \{f \in C[0,\infty) : t \to \infty \; ve \; bazı \; \gamma > 0 \; için \; f(t) = O(t^\gamma)\}$$

kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonları için

$$K_n^a(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt, \; a \geq 0 \qquad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanan operatörlerin yakınsaklık özelliklerini incelemişlerdir. Bu tezde amaçlanan (2.1.1) ile verilen operatörlerin iki değişkenli halinin incelenmesidir.

$I=[0,\infty)\times[0,\infty)$ ve $\omega_\gamma(x)=(1+x^\gamma)^{-1}$ için $\gamma\in\mathbb{N}_0$ (tüm negatif olmayan tamsayıların kümesi) olsun. Ayrıca, $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{N}_0$ sabiti için

$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)=\omega_{\gamma_1}(x)\omega_{\gamma_2}(y)$ olmak üzere

$$f\in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$$

$$=\left\{f\in C(I)\colon \omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)f(x,y)\ \text{üzerinde I sınırlı ve düzgün sürekli}\right\}$$

fonksiyonları için (2.1.1) de verilen operatörlerin iki değişkenli hali:

$$K_{n_1,n_2}^a(f;x,y)=(n_1+1)(n_2+1)$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^a(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}f(u,v)\,dudv,\quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada

$$W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^a(x,y)=\frac{x^{k_1}y^{k_2}p_{k_1}(n,a)p_{k_2}(n,a)e^{\frac{-ax}{1+x}}e^{\frac{-ay}{1+y}}}{k_1!\,k_2!\,(1+x)^{n_1+k_1}(1+y)^{n_2+k_2}}$$

dir. Eğer $f\in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ ve tüm $(x,y)\in I$ için $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ şeklinde yazılabiliyorsa, o takdirde $(x,y)\in I$ ve $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ için

$$K_{n_1,n_2}^a(f(u,v);x,y)=K_{n_1}^a(f_1(u);x)K_{n_2}^a(f_2(v);y),\qquad (2.1.3)$$

şelinde yazılabilir.

$C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ üzerindeki supremum normu

$$\|f\|_{\gamma_1,\gamma_2} = \sup_{(x,y)\in I} |f(x,y)|\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y),\ f \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I) \tag{2.1.4}$$

olarak tanımlanır. $f \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ için süreklilik modülü

$$\omega(\, f, C_{\gamma_1,\gamma_2}(I); t, s\,) \coloneqq \sup_{0<h<t}\ \sup_{0<\delta<s} \left\|\Delta_{h,\delta} f(.,.)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2},\ \ t,s \geq 0, \tag{2.1.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(x,y) \in I$ ve $h,\delta > 0$ için

$$\Delta_{h,\delta} f(x,y) \coloneqq f(x+h, y+\delta) - f(x,y)$$

dir. Ayrıca $f \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ daki bütün sürekli fonksiyonlar; sabit $m \in \mathbb{N}$ için $C^m_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ da bulunsun, bu durumda kısmi türevlerde

$$\frac{\partial^k}{\partial x^s\, \partial y^{k-s}} \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I), s = 1,2,\dots,k;\ k = 1,2,\dots,m.$$

dir.

2.2. YARDIMCI SONUÇLAR

Tezin bu kısmında ispatlarda kolaylık olması bakımından kullanılacak bazı yardımcı sonuçlar verilecektir.

Lemma 2.2.1.: $u_{n,r}^{a}(x) \coloneqq K_n^a((t-x)^r;x)$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda K_n^a nın r yinci merkez momenti için aşağıdakiler doğrudur.

(i) $u_{n,0}^{a}(x)=1,\ u_{n,1}^{a}(x)=\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)$ ve

$u_{n,2}^{a}(x)=\frac{1}{(n+1)^2}\left\{(n+1)x^2+(n-1)x+\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}+2ax\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{1}{3}\right\}$ dir.

(ii) $u_{n,r}^{a}(x)$, a ve r parametrelerine bağlı x'in rasyonel bir fonksiyonudur;

(iii) Her $x\in(0,\infty)$ için $u_{n,r}^{a}(x)=O\left(\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}\right)$ olup, burada $\left[\frac{r+1}{2}\right]$ gösterimi $\frac{r+1}{2}$ sayısının tam kısmını göstermektedir.

İspat:

$(\boldsymbol{i})$ $u_{n,0}^{a}(x):=K_n^a(1;x)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $K_n^a(f;x)$ de $f=1$ alınırsa

$$K_n^a(1;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}}1dt$$

olur. Bu eşitliğin integral kısmı hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} 1dt = t\Big|_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

elde edilir. Bu değer yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K_n^a(1;x) &= (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \frac{1}{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Biz biliyoruz ki

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_k(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} = 1$$

olup, buradan

$$K_n^a(1;x) = 1$$

olarak elde edilir.

Şimdi

$$u_{n,1}^a(x) = \frac{1}{n+1}\left(-x + \frac{ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right)$$

olduğunu gösterelim:

$u_{n,1}^{a}(x) \coloneqq K_n^a\big((t-x);x\big)$ olup, K_n^a lineer olduğundan

$$u_{n,1}^{a}(x) = K_n^a\big((t-x);x\big) = K_n^a(t;x) - xK_n^a(1;x)$$

şeklinde yazılabileceğinden, önce $(2.1.1)$ ile tanımlanan $K_n^a(f;x)$ operatöründen yararlanarak $K_n^a(t;x)$ değerini hesaplayalım. Bunun için $K_n^a(f;x)$ de $f=t$ alınırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K_n^a(t;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t\,dt$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left\{\frac{1}{2(n+1)^2}\left[(k+1)^2-k^2\right]\right\}$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{(n+1)k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left\{\frac{1}{2(n+1)^2}(2k+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{kx^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$= \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k(k-1)!}\frac{kx^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{2(n+1)}K_n^a(1;x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)}\sum_{\underbrace{k=1}_{(k\to k+1)}}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{(k-1)!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{2(n+1)}K_n^a(1;x)$$

$$K_n^a(t;x) = \frac{1}{(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k+1}(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{2(n+1)} K_n^a(1;x)$$

elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k+1}(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

ifadesinin değerini hesaplamak için aşağıdaki yolu izleyelim.

$$e^{at}(1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n,a)}{k!} t^k$$

Bu eşitliğin her iki tarafının t'ye göre türevi alınırsa

$$e^{at}(1-t)^{-n}[n(1-t)^{-1}+a] = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{(k\to k+1)} \frac{P_k(n,a)}{(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+1}(n,a)}{k!} t^k$$

$$n(1-t)^{-1}+a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+1}(n,a)}{k!} t^k e^{-at}(1-t)^n$$

olur. $x \in [0,\infty)$ için bu eşitlikte $t = \frac{x}{1+x}$ yazılırsa

$$n(1+x)+a = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k+1}(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \qquad (2.2.1)$$

olarak elde edilir. Buradan ifadenin değeri ve $K_n^a(1;x) = 1$ yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$u_{n,1}^{a}(x) = K_n^a\big((t-x);x\big) = K_n^a(t;x) - xK_n^a(1;x)$$

eşitliğinde kullanılarak

$$u_{n,1}^{a}(x) = K_n^a(t-x;x) = \frac{x}{(n+1)(1+x)}[n(1+x)+a] + \frac{1}{2(n+1)} - x$$

$$= \frac{xn}{n+1} + \frac{ax}{(n+1)(1+x)} + \frac{1}{2(n+1)} - x$$

$$= \frac{1}{n+1}(xn - xn - x) + \frac{ax}{(n+1)(1+x)} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-x + \frac{ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

Şimdi de,

$$u_{n,2}^{a}(x) = \frac{1}{(n+1)^2}\left\{(n+1)x^2 + (n-1)x + \frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + 2ax\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{3}\right\}$$

olduğunu gösterelim:

$$u_{n,2}^{a}(x) = K_n^a((t-x)^2;x) = K_n^a(t^2;x) - 2xK_n^a(t;x) + x^2K_n^a(1;x) \qquad (2.2.2)$$

şeklinde yazılabileceğini biliyoruz.

(2.2.2) ifadesinde $K_n^a(t;x)$ ve $K_n^a(1;x)$ operatörlerinin değerlerini hesapladık. Şimdi $K_n^a(t^2;x)$ operatörünün değerini hesaplayalım. Bunun için (2.1.1) de $f = t^2$ alınırsa

$$K_n^a(t^2;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t^2 dt$$

olur. Bu eşitlikte önce $\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t^2 dt$ integrali hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t^2 dt = \left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} = \frac{(k+1)^3}{3(n+1)^3} - \frac{k^3}{3(n+1)^3}$$

$$= \frac{1}{3(n+1)^3}[k^3+3k^2+3k+1-k^3] = \frac{1}{3(n+1)^3}[3k^2+3k+1]$$

olarak elde edilir. Bu değer $K_n^a(t^2;x)$ de yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$K_n^a(t^2;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\frac{1}{3(n+1)^3}[3k^2+3k+1]$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k k^2}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$+ \frac{1}{3(n+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

olur. ilk ifadede $k^2 \to k(k-1)+k$ yazıp işleme devam edilirse

$$K_n^a(t^2;x) = \frac{1}{(n+1)^2} \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}}_{(k\to k+2)} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_k(n,a)}{(k-2)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$+ \frac{2}{(n+1)^2} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{(k\to k+1)} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_k(n,a)}{(k-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{3(n+1)^2} K_n^a(1;x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \frac{x^2}{(1+x)^2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k+2}(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2} \frac{x}{(1+x)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k+1}(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{3(n+1)^2}$$

elde edilir.

$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k+2}(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$ ifadesinin değerini hesaplamak için

$$e^{at}(1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k(n,a)}{k!} t^k$$

eşitliğinin her iki tarafının t'ye göre türevi alınırsa

$$e^{at}(1-t)^{-n}[n(1-t)^{-1}+a] = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{(k\to k+1)} \frac{P_k(n,a)}{(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+1}(n,a)}{k!} t^k$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafını tekrar t'ye göre türevi alınırsa

$$e^{at}(1-t)^{-n}[n(n+1)(1-t)^{-2}+2an(1-t)^{-1}+a^2] = \sum_{\underbrace{k=1}_{(k\to k+1)}}^{\infty} \frac{P_{k+1}(n,a)t^{k-1}k}{k(k-1)!}$$

$$e^{at}(1-t)^{-n}[n(n+1)(1-t)^{-2}+2an(1-t)^{-1}+a^2] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{k+2}(n,a)t^{k}}{k!}$$

$$n(n+1)(1-t)^{-2}+2na(1-t)^{-1}+a^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-at}P_{k+2}(n,a)t^{k}}{k!\,(1-t)^{-n}}$$

elde edilir. $x \in [0,\infty)$ için bu eşitlikte $t = \frac{x}{1+x}$ yazılır ve düzenlenirse

$$n(n+1)(1+x)^2+2na(1+x)+a^2 \\ = \sum_{k=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k+2}(n,a)}{k!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{2.2.3}$$

elde edilir. (2.2.1) ve (2.2.3) yerlerine yazılırlarsa

$$K_n^a(t^2;x) = \frac{1}{(n+1)^2}\frac{x^2}{(1+x)^2}[n(n+1)(1+x)^2+2na(1+x)+a^2] \\ + \frac{1}{(n+1)^2}\frac{x}{(1+x)}[n(1+x)+a] + \frac{1}{3(n+1)^2}$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar (2.2.2) dan yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$K_n^a((t-x)^2;x)$

$$=\frac{x^2}{(n+1)^2}\left[\frac{n(n+1)(1+x)^2+2an(1+x)+a^2}{(1+x)^2}\right]+\frac{2x}{(n+1)^2}\left[\frac{n(1+x)+a}{(1+x)}\right]$$
$$+\frac{1}{3(n+1)^2}-\frac{2x^2}{(n+1)(1+x)}[n(1+x)+a]-\frac{x}{n+1}+x^2$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}\left\{x^2(n+1)+(n-1)x+\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}+2ax\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{1}{3}\right\}$$

olarak istenilen elde edilir.

$(\boldsymbol{ii})$ ve $(\boldsymbol{iii})$ nin ispatı için aşağıdaki yolu izleyelim.

Şimdi

$$\mu_{n,r}^a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left(\frac{k}{n+1}-x\right)^r \tag{2.2.4}$$

operatörünü tanımlayalım. Bu operatör için

$$x(1+x)\left(\mu_{n,r}^a(x)\right)'$$
$$=(n+1)(1+x)\mu_{n,r+1}^a(x)-ax\mu_{n,r}^a(x)-rx(1+x)^2\mu_{n,r-1}^a(x);\ r\in\mathbb{N}$$

rekürans bağıntısı sağlanır. Bu rekürans bağıntısı göstermektedir ki $\mu_{n,r}^a(x)$ fonksiyonu öyle bir fonksiyondur ki

$$\mu_{n,r}^a(x)=x^r+\frac{q_r(x,a)+O(1)}{n+1} \tag{2.2.5}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Buna göre

$$u_{n,r}^{a}(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} (t-x)^{r} dt$$

$$= \frac{n+1}{r+1}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x)\left\{\left(\frac{k+1}{n+1}-x\right)^{r+1} - \left(\frac{k}{n+1}-x\right)^{r+1}\right\}$$

$$= \frac{n+1}{r+1}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x)\left\{\sum_{v=0}^{r+1}\binom{r+1}{v}\left[\left(\frac{k}{n+1}-x\right)^{r+1-v}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{v} - \left(\frac{k}{n+1}-x\right)^{r+1}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{r+1}\sum_{v=1}^{r+1}\binom{r+1}{v}\frac{1}{(n+1)^{v-1}}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x)\left(\frac{k}{n+1}-x\right)^{r+1-v}$$

$$= \frac{1}{r+1}\sum_{v=1}^{r+1}\binom{r+1}{v}\frac{1}{(n+1)^{v-1}}\mu_{n,r+1-v}^{a}(x),$$

elde edilir. Buda (2.2.5) eşitliği göz önüne alındığında $u_{n,r}^{a}(x)$ fonksiyonunun a ve r parametrelerine bağlı x in bir rasyonel fonksiyonu olduğunu gösterir. Eğer

$$\mu_{n,r}^{*a}(x) = \frac{1}{n^{r}}\mu_{n,r}^{a}(x) \qquad (2.2.6)$$

olacak şekilde tanımlanırsa

$$\mu_{n,r}^{*a}(x) = \frac{1}{n^{r}}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)^{r}$$ olur. Buradan da

$$\mu_{n,r}^{*a}(x) = O\left(\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}\right)$$ yazılabilir.

Gerçekten de

$$\mu_{n,r}^{*a}(x) = \frac{1}{n^r}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^{a}(x)(k-nx)^r = \frac{1}{n^r}\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j} x^{r-j} n^j \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k}{n}-x\right)^j W_{n,k}^{a}\right\}$$

$$= \frac{1}{n^r}\sum_{j=0}^{r} n^j O\left(\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}\right) = \frac{1}{n^r}\sum_{j=0}^{r} O\left(n^{\left[j/2\right]}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}\right)$$

olur. Bu ifadenin bir sonucu olarak

$$\left|u_{n,r}^{a}(x)\right| \leq C\sum_{v=1}^{r+1}\frac{1}{n^{v-1}}\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1-v}{2}\right]}} \leq C\frac{1}{n^{\left[\frac{r+1}{2}\right]}}$$

elde edilir.

Lemma 2.2.2.: $e_{i,j}: I \to I, e_{i,j} = x^i y^j, 0 \leq i,j \leq 2$ iki boyutlu test fonksiyonları olsun. Buradan (2.1.2) de tanımlanan K_{n_1,n_2}^{a} operatörler aşağıdaki sonuçları sağlar:

$(i) K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0}; x, y\right) = 1;$

$(ii) K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{1,0}; x, y\right) = \frac{1}{n_1+1}\left(n_1 x + \frac{ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right);$

$(iii) K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,1}; x, y\right) = \frac{1}{n_2+1}\left(n_2 y + \frac{ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right);$

$(iv) K^a_{n_1,n_2}(e_{2,0};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^2x^2 + n_1x^2 + 2n_1x + \frac{2an_1x^2}{1+x} + \frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{2ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right)$$

$(v) K^a_{n_1,n_2}(e_{0,2};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^2y^2 + n_2y^2 + 2n_2y + \frac{2an_2y^2}{1+y} + \frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{2ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right)$$

$(vi) K^a_{n_1,n_2}(e_{3,0};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^3x^3 + \frac{3n_1^2x^2}{2}(3+2x) + \frac{3n_1x^2}{2} + \frac{n_1x}{2}(4x^2+6x+7) + \frac{3ax^3n_1^2}{1+x} + \frac{3an_1x^2}{1+x}\left\{(3+x) + \frac{ax}{1+x}\right\} + \frac{ax}{1+x}\left\{\frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{9}{2}\frac{ax}{(1+x)} + \frac{7}{2}\right\} + \frac{1}{4}\right);$$

$(vii)\ K^a_{n_1,n_2}(e_{0,3};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^3y^3 + \frac{3n_2^2y^2}{2}(3+2y) + \frac{3n_2y^2}{2} + \frac{n_2y}{2}(4y^2+6y+7) + \frac{3ay^3n_2^2}{1+x} + \frac{3an_2y^2}{1+y}\left\{(3+y) + \frac{ay}{1+y}\right\} + \frac{ay}{1+y}\left\{\frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{9}{2}\frac{ay}{(1+y)} + \frac{7}{2}\right\} + \frac{1}{4}\right).$$

İspat: İspat yapılırken Lemma 2.2.1 de verilen sonuçlardan faydalanılacaktır.

$(\boldsymbol{i})$ $K^{a}_{n_1,n_2}(e_{0,0};x,y)=1$ olduğunu gösterelim:

$f(u,v)=1$ alınırsa

$$K^{a}_{n_1,n_2}(e_{0,0};x,y)=(n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W^{a}_{n_1,n_2,k_1,k_2}(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}dudv$$

$$=(n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W^{a}_{n_1,n_2,k_1,k_2}(x,y)\frac{1}{(n_2+1)}\frac{1}{(n_1+1)}$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}=1$$

ve

$$\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}=1$$

olduğunu biliyoruz. Buradan $K^{a}_{n_1,n_2}(e_{0,0};x,y)=1$ elde edilir.

$(\boldsymbol{ii})$ $K^{a}_{n_1,n_2}(e_{1,0};x,y)=\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)$ olduğunu göstermek için $f(u,v)=u$ alınırsa

$$K^{a}_{n_1,n_2}(e_{1,0};x,y)=(n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W^{a}_{n_1,n_2,k_1,k_2}(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}ududv$$

olur. Burada integral hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}} \int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}} ududv = \left(\frac{2k_1+1}{2(n_1+1)^2}\right)\left(\frac{1}{n_2+1}\right)$$

elde edilir. Buradan

$K^a_{n_1,n_2}\left(e_{1,0};x,y\right)$

$$= (n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} W^a_{n_1,n_2,k_1,k_2}(x,y)\left(\frac{2k_1+1}{2(n_1+1)^2}\right)\left(\frac{1}{n_2+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{(n_1+1)}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}k_1}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right)$$

$$+\frac{1}{2(n_1+1)}\,K^a_{n_1,n_2}\left(e_{0,0};x,y\right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)}\sum_{\underbrace{k_1=1}_{(k_1\to k_1+1)}}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1(k_1-1)!}\frac{x^{k_1}k_1}{(1+x)^{n_1+k_1}}+\frac{1}{2(n_1+1)}$$

$$= \frac{x}{(n_1+1)(1+x)}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1+1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}+\frac{1}{2(n_1+1)}$$

bulunur.

$\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1+1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} = n_1(1+x)+a$ olduğunu biliyoruz:

Bu değer yerine yazılırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{1,0};x,y\right)=\frac{x}{(n_1+1)(1+x)}\left[n_1(1+x)+a\,\right]+\frac{1}{2(n_1+1)}$$
$$=\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

$(\boldsymbol{iii})$ $K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,1};x,y\right)=\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)$ olduğunu göstermek için $f(u,v)=v$ alınırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,1};x,y\right)=(n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}vdudv$$

olur. Şimdi integral hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}vdudv=\left(\frac{2k_2+1}{2(n_2+1)^2}\right)\left(\frac{1}{n_1+1}\right)$$

elde edilir. Buradan

$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,1};x,y)$

$$= (n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\left(\frac{2k_2+1}{2(n_2+1)^2}\right)\left(\frac{1}{n_1+1}\right)$$

$$= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right)\left(\frac{1}{(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}k_2}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2(n_2+1)} K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,0};x,y)$$

$$= \frac{1}{(n_2+1)} \underbrace{\sum_{k_2=1}^{\infty}}_{(k_2\to k_2+1)} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2(k_2-1)!}\frac{y^{k_2}k_2}{(1+y)^{n_2+k_2}} + \frac{1}{2(n_2+1)}$$

$$= \frac{y}{(n_2+1)(1+y)}\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2+1}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} + \frac{1}{2(n_1+1)}$$

yazılabilir.

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2+1}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} = n_2(1+y)+a \text{ olduğunu biliyoruz:}$$

Bu değer yerine yazılırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,1};x,y) = \frac{y}{(n_2+1)(1+y)} + \frac{1}{2(n_2+1)}$$
$$= \frac{1}{n_2+1}\left(n_2 y + \frac{ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

$(\boldsymbol{iv})$ $K_{n_1,n_2}^{a}(e_{2,0};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^2x^2 + n_1x^2 + 2n_1x + \frac{2an_1x^2}{1+x} + \frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{2ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right)$$

olduğunu göstermek için $f(u,v)=u^2$ alınırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{2,0};x,y)$$

$$=(n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}u^2\,du\,dv$$

olur.

İntegral hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}u^2\,du\,dv=\left(\frac{1}{n_2+1}\right)\left(\frac{3k_1^2+3k_1+1}{3(n_1+1)^3}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{2,0};x,y)$$

$$=(n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\left(\frac{1}{n_2+1}\right)\left(\frac{3k_1^2+3k_1+1}{3(n_1+1)^3}\right)$$

$$=\left(\frac{(n_2+1)}{(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right)$$

$$\times\left(\frac{(n_1+1)}{(n_1+1)^3}\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\left[k_1^2+k_1+\frac{1}{3}\right]\right)$$

elde edilir.

Burada $k_1^2 + k_1 + \frac{1}{3}$ ifadesinde $k_1^2 \rightarrow k_1(k_1-1) + k_1$ yazarak düzenlenirse

$k_1(k_1-1) + 2k_1 + \frac{1}{3}$ elde edilir. Bu değer yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılır, operatörün lineerliğinden faydalanılır ve Lemma 2.2.1 deki sonuçlar kullanılırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{2,0};x,y)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2} \sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} \left[k_1(k_1-1) + 2k_1 + \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1}\{ k_1(k_1-1)\}}{(1+x)^{n_1+k_1}} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1} k_1}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{1}{3} K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,0};x,y) \right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1(k_1-1)(k_1-2)!} \frac{x^{k_1}\{ k_1(k_1-1)\}}{(1+x)^{n_1+k_1}} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1(k_1-1)!} \frac{x^{k_1} k_1}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{1}{3} K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,0};x,y) \right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2} \left(\sum_{k_1=2}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{(k_1-2)!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{k_1=1}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{(k_1-1)!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{1}{3} K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,0};x,y) \right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(\sum_{\underbrace{k_1=2}_{(k_1\to k_1+2)}}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{(k_1-2)!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{\underbrace{k_1=1}_{(k_1\to k_1+1)}}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{(k_1-1)!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{1}{3} K_{n_1,n_2}^{a}\big(e_{0,0};x,y\big) \right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(\frac{x^2}{(1+x)^2} \sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1+2}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} \right.$$

$$\left. + \frac{2x}{(1+x)} \sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1+1}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{1}{3} K_{n_1,n_2}^{a}\big(e_{0,0};x,y\big) \right)$$

ifadesi yazılabilir. Burada

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{P_{k_1+2}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k}}{(1+x)^{n+k_1}} = n_1(n_1+1)(1+x)^2 + 2n_1 a(1+x) + a^2$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1+1}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} = n_1(1+x) + a$$

ve $K_{n_1,n_2}^{a}\big(e_{0,0};x,y\big) = 1$ oldukları bilinmektedir. Bunları yerlerine yazılırlarsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{2,0};x,y)$$

$$=\frac{1}{(n_1+1)^2}\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}(n_1(n_1+1)(1+x)^2+2n_1a(1+x)+a^2)\right.$$

$$\left.+\frac{2x}{(1+x)}(n_1(1+x)+a)+\frac{1}{3}\right)$$

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{2,0};x,y)$$

$$=\frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^2x^2+n_1x^2+2n_1x+\frac{2an_1x^2}{1+x}+\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}+\frac{2ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)$$

elde edilir.

$(\boldsymbol{v})$ $K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,2};x,y)$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^2y^2+n_2y^2+2n_2y+\frac{2an_2y^2}{1+y}+\frac{a^2y^2}{(1+y)^2}+\frac{2ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)$$

olduğunu göstermek için $f(u,v)=v^2$ alınırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,2};x,y)$$

$$=(n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}}v^2\,du\,dv$$

bu ifadedeki integral hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}} v^2 du dv = \left(\frac{1}{n_1+1}\right)\left(\frac{3k_2^2+3k_2+1}{3(n_2+1)^3}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,2};x,y\right)$$

$$= (n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\left(\frac{1}{n_1+1}\right)\left(\frac{3k_2^2+3k_2+1}{3(n_2+1)^3}\right)$$

$$= \left(\frac{(n_2+1)}{(n_2+1)^3}\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\left[k_2^2+k_2+\frac{1}{3}\right]\right)$$
$$\times\left(\frac{(n_1+1)}{(n_1+1)}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right)$$

elde edilir.

Buradaki $k_2^2+k_2+\frac{1}{3}$ ifadesinde $k_2^2 \to k_2(k_2-1)+k_2$ yazılarak düzenlenirse $k_2(k_2-1)+2k_2+\frac{1}{3}$ elde edilir. Böylece gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K^a_{n_1,n_2}\left(e_{0,2};x,y\right)$$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^2}\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\left[k_2(k_2-1)+2k_2+\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^2}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}\{k_2(k_2-1)\}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right.$$

$$\left.+2\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}k_2}{(1+y)^{n_2+k_2}}+\frac{1}{3}K^a_{n_1,n_2}\left(e_{0,0};x,y\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^2}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2(k_2-1)(k_2-2)!}\frac{y^{k_2}\{k_2(k_2-1)\}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right.$$

$$\left.+2\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2(k_2-1)!}\frac{y^{k_2}k_2}{(1+y)^{n_2+k_2}}+\frac{1}{3}K^a_{n_1,n_2}\left(e_{0,0};x,y\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^2}\left(\sum_{k_2=2}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{(k_2-2)!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right.$$

$$\left.+2\sum_{k_2=1}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{(k_2-1)!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}+\frac{1}{3}K^a_{n_1,n_2}\left(e_{0,0};x,y\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^2}\left(\sum_{\underbrace{k_2=2}_{(k_2\to k_2+2)}}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{(k_2-2)!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right.$$

$$\left.+2\sum_{\underbrace{k_2=1}_{(k_2\to k_2+1)}}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{(k_2-2)!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}+\frac{1}{3}K^a_{n_1,n_2}\left(e_{0,0};x,y\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(\frac{y^2}{(1+y)^2}\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2+2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right.$$

$$\left. + \frac{2y}{(1+y)}\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2+1}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} + \frac{1}{3}K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0};x,y\right)\right)$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2+2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} = n_2(n_2+1)(1+y)^2 + 2n_2a(1+y) + a^2$$

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2+1}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} = n_2(1+y) + a$$

ve $K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0};x,y\right) = 1$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,2};x,y\right)$$
$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(\frac{y^2}{(1+y)^2}\left(n_2(n_2+1)(1+y)^2 + 2n_2a(1+y) + a^2\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2y}{(1+y)}\left(n_2(1+y) + a\right) + \frac{1}{3}\right)$$

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,2};x,y\right)$$
$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^2y^2 + n_2y^2 + 2n_2y + \frac{2an_2y^2}{1+y} + \frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{2ay}{1+y} + \frac{1}{3}\right)$$

şeklinde istenilen elde edilir.

$(\boldsymbol{vi})\ \ K_{n_1,n_2}^{a}(e_{3,0};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^3x^3 + \frac{3n_1^2x^2}{2}(3+2x) + \frac{3n_1x^2}{2} + \frac{n_1x}{2}(4x^2+6x+7) + \frac{3ax^3n_1^2}{1+x} + \frac{3an_1x^2}{1+x}\left\{(3+x) + \frac{ax}{1+x}\right\} + \frac{ax}{1+x}\left\{\frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{9}{2}\frac{ax}{(1+x)} + \frac{7}{2}\right\} + \frac{1}{4}\right)$$

olduğunu göstermek için $f(u,v) = u^3$ alınırsa

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{3,0};x,y) = (n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}} u^3\,du\,dv$$

İntegral hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}} u^3\,du\,dv = \left(\frac{1}{n_2+1}\right)\left(\frac{1}{(n_1+1)^4}\left(k_1^3 + \frac{3}{2}k_1^2 + k_1 + \frac{1}{4}\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$K^{a}_{n_1,n_2}\big(e_{3,0};x,y\big)=(n_1+1)(n_2+1)$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W^{a}_{n_1,n_2,k_1,k_2}(x,y)\left(\frac{1}{n_2+1}\right)\left(\frac{1}{(n_1+1)^4}\left(k_1^3+\frac{3}{2}k_1^2+k_1+\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{(n_2+1)}{(n_2+1)}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right)$$

$$\times\left(\frac{(n_1+1)}{(n_1+1)^4}\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\left(k_1^3+\frac{3}{2}k_1^2+k_1+\frac{1}{4}\right)\right)$$

elde edilir. Burada $k_1^3\rightarrow k_1(k_1-1)(k_1-2)+3k_1^2-2k_1$ ve $k_1^2\rightarrow k_1(k_1-1)+k_1$ eşitlikleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K^{a}_{n_1,n_2}\big(e_{3,0};x,y\big)=\frac{1}{(n_1+1)^3}\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}$$

$$\text{x}\left(k_1(k_1-1)(k_1-2)+\frac{9}{2}k_1(k_1-1)+\frac{7}{2}k_1+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{(n_1+1)^3}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}k_1(k_1-1)(k_1-2)}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right.$$

$$+\frac{9}{2}\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}k_1(k_1-1)}{(1+x)^{n_1+k_1}}$$

$$+\frac{7}{2}\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}k_1}{(1+x)^{n_1+k_1}}$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^3}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1(k_1-1)(k_1-2)(k_1-3)!} \frac{x^{k_1}k_1(k_1-1)(k_1-2)}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{9}{2}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1(k_1-1)(k_1-2)!} \frac{x^{k_1}k_1(k_1-1)}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{7}{2}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1(k_1-1)!} \frac{x^{k_1}k_1}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^3}\left(\sum_{\underbrace{k_1=3}_{k_1\to k_1+3}}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{(k_1-3)!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{9}{2}\sum_{\underbrace{k_1=2}_{k_1\to k_1+2}}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{(k_1-2)!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{7}{2}\sum_{\underbrace{k_1=1}_{k_1\to k_1+1}}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{(k_1-1)!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} + \frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}} \frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!} \frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^3}\left(\frac{x^3}{(1+x)^3}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1+3}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right.$$

$$+\frac{9}{2}\frac{x^2}{(1+x)^2}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1+2}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}$$

$$+\frac{7}{2}\frac{x}{(1+x)}\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1+1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}$$

$$\left.+\frac{1}{4}K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0};x,y\right)\right)$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1+3}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}$$

$$= n_1(n_1+1)(n_1+2)(1+x)^3 + 3n_1(n_1+1)a(1+x)^2 + 3n_1a^2(1+x) + a^3$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{P_{k_1+2}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k}}{(1+x)^{n+k_1}} = n_1(n_1+1)(1+x)^2 + 2n_1a(1+x) + a^2$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1+1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}} = n_1(1+x) + a$$

ve $K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0};x,y\right) = 1$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$K^{a}_{n_1,n_2}(e_{3,0};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^3}\left(\frac{x^3}{(1+x)^3}(n_1(n_1+1)(n_1+2)(1+x)^3 + 3n_1(n_1+1)a(1+x)^2 + 3n_1a^2(1+x) + a^3) + \frac{9}{2}\frac{x^2}{(1+x)^2}(n_1(n_1+1)(1+x)^2 + 2n_1a(1+x) + a^2) + \frac{7}{2}\frac{x}{(1+x)}(n_1(1+x)+a) + \frac{1}{4}\right)$$

$K^{a}_{n_1,n_2}(e_{3,0};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^3x^3 + \frac{3n_1^2x^2}{2}(3+2x) + \frac{3n_1x^2}{2} + \frac{n_1x}{2}(4x^2+6x+7) + \frac{3ax^3n_1^2}{1+x} + \frac{3an_1x^2}{1+x}\left\{(3+x) + \frac{ax}{1+x}\right\} + \frac{ax}{1+x}\left\{\frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{9}{2}\frac{ax}{(1+x)} + \frac{7}{2}\right\} + \frac{1}{4}\right)$$

olarak elde edilir.

$(\boldsymbol{vii})$ $K^{a}_{n_1,n_2}(e_{0,3};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^3y^3 + \frac{3n_2^2y^2}{2}(3+2y) + \frac{3n_2y^2}{2} + \frac{n_2y}{2}(4y^2+6y+7) + \frac{3ay^3n_2^2}{1+x} + \frac{3an_2y^2}{1+y}\left\{(3+y) + \frac{ay}{1+y}\right\} + \frac{ay}{1+y}\left\{\frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{9}{2}\frac{ay}{(1+y)} + \frac{7}{2}\right\} + \frac{1}{4}\right)$$

için $f(u,v) = v^3$ alıp işleme devam edersek

$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,3};x,y)$

$$= (n_1+1)(n_2+1)\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}} v^3dudv$$

İntegral hesaplanırsa

$$\int_{\frac{k_2}{n_2+1}}^{\frac{k_2+1}{n_2+1}}\int_{\frac{k_1}{n_1+1}}^{\frac{k_1+1}{n_1+1}} v^3dudv = \left(\frac{1}{n_1+1}\right)\left(\frac{1}{(n_2+1)^4}\left(k_2^3+\frac{3}{2}k_2^2+k_2+\frac{1}{4}\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,3};x,y) = (n_1+1)(n_2+1)$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}W_{n_1,n_2,k_1,k_2}^{a}(x,y)\left(\frac{1}{n_1+1}\right)\left(\frac{1}{(n_2+1)^4}\left(k_2^3+\frac{3}{2}k_2^2+k_2+\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$=\left(\frac{(n_1+1)}{(n_1+1)}\sum_{k_1=0}^{\infty}e^{\frac{-ax}{1+x}}\frac{p_{k_1}(n,a)}{k_1!}\frac{x^{k_1}}{(1+x)^{n_1+k_1}}\right)$$

$$\times\left(\frac{(n_2+1)}{(n_2+1)^4}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\left(k_2^3+\frac{3}{2}k_2^2+k_2+\frac{1}{4}\right)\right)$$

elde edilir. Bu ifadede $k_2^3 \to k_2(k_2-1)(k_2-2)+3k_2^2-2k_2$ ve

$k_2^2 \to k_2(k_2-1)+k_2$ eşitlikleri kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$K^{a}_{n_1,n_2}(e_{0,3};x,y)=\frac{1}{(n_2+1)^3}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$\text{x}\left(k_2(k_2-1)(k_2-2)+\frac{9}{2}k_2(k_2-1)+\frac{7}{2}k_2+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^3}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}k_2(k_2-1)(k_2-2)}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right.$$

$$+\frac{9}{2}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}k_2(k_2-1)}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$+\frac{7}{2}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}k_2}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right)$$

$$=\frac{1}{(n_2+1)^3}\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2(k_2-1)(k_2-2)(k_2-3)!}\frac{y^{k_2}k_2(k_2-1)(k_2-2)}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right.$$

$$+\frac{9}{2}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2(k_2-1)(k_2-2)!}\frac{y^{k_2}k_2(k_2-1)}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$+\frac{7}{2}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2(k_2-1)!}\frac{y^{k_2}k_2}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sum_{k_2=0}^{\infty}e^{\frac{-ay}{1+y}}\frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!}\frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}\right)$$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^3}\left(\underbrace{\sum_{k_2=3}^{\infty}}_{k_2 \to k_2+3} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2}(n,a)}{(k_2-3)!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} \right.$$

$$+ \frac{9}{2} \underbrace{\sum_{k_2=2}^{\infty}}_{k_2 \to k_2+2} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2}(n,a)}{(k_2-2)!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$+ \frac{7}{2} \underbrace{\sum_{k_2=1}^{\infty}}_{k_2 \to k_2+1} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2}(n,a)}{(k_2-1)!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$\left. + \frac{1}{4} \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2}(n,a)}{k_2!} \frac{x^{k_1}}{(1+y)^{n_2+k_2}} \right)$$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^3}\left(\frac{y^3}{(1+y)^3} \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2+3}(n,a)}{k_2!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} \right.$$

$$+ \frac{9}{2} \frac{y^2}{(1+y)^2} \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2+2}(n,a)}{k_2!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$+ \frac{7}{2} \frac{y}{(1+y)} \sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2+1}(n,a)}{k_2!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$\left. + \frac{1}{4} K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0}; x, y\right) \right)$$

olur. Burada da

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2+3}(n,a)}{k_2!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}}$$

$$= n_2(n_2+1)(n_2+2)(1+y)^3 + 3n_2(n_2+1)a(1+y)^2 + 3n_2a^2(1+y) + a^3$$

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2+2}(n,a)}{k_2!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} = n_2(n_2+1)(1+y)^2 + 2n_2a(1+y) + a^2$$

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} e^{\frac{-ay}{1+y}} \frac{p_{k_2+1}(n,a)}{k_2!} \frac{y^{k_2}}{(1+y)^{n_2+k_2}} = n_2(1+y) + a$$

ve $K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0}; x, y\right) = 1$ ifadeleri yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned}
K_{n_1,n_2}^{a}&\left(e_{0,3}; x, y\right) \\
&= \frac{1}{(n_2+1)^3}\left(\frac{y^3}{(1+y)^3}(n_2(n_2+1)(n_2+2)(1+y)^3 \right. \\
&\quad + 3n_2(n_2+1)a(1+y)^2 + 3n_2a^2(1+y) + a^3) \\
&\quad + \frac{9}{2}(n_2(n_2+1)(1+y)^2 + 2n_2a(1+y) + a^2) + \frac{7}{2}(n_2(1+y)+a) \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,3}; x, y\right) \\
&= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^3y^3 + \frac{3n_2^2y^2}{2}(3+2y) + \frac{3n_2y^2}{2} + \frac{n_2y}{2}(4y^2+6y+7) + \frac{3ay^3n_2^2}{1+x} \right. \\
&\qquad + \frac{3an_2y^2}{1+y}\left\{(3+y) + \frac{ay}{1+y}\right\} + \frac{ay}{1+y}\left\{\frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{9}{2}\frac{ay}{(1+y)} + \frac{7}{2}\right\} \\
&\qquad \left. + \frac{1}{4}\right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Lemma 2.2.3.: $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$(\boldsymbol{i})\ K_{n_1,n_2}^{a}(u-x;x,y)=\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right);$$

$$(\boldsymbol{ii})\ K_{n_1,n_2}^{a}(v-y;x,y)=\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right);$$

$$(\boldsymbol{iii})\ K_{n_1,n_2}^{a}((u-x)^2;x,y)$$
$$=\frac{1}{(n_1+1)^2}\left((n_1+1)x^2+\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}+2ax\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{1}{3}\right);$$

$$(\boldsymbol{iv})\ K_{n_1,n_2}^{a}((v-y)^2;x,y)$$
$$=\frac{1}{(n_2+1)^2}\left((n_2+1)y^2+\frac{a^2y^2}{(1+y)^2}+2ay\left(\frac{1-y}{1+y}\right)+\frac{1}{3}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat : $K_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)$ operatörünün lineerliği gereğince

$$(\boldsymbol{i})\ K_{n_1,n_2}^{a}(u-x;x,y)=K_{n_1,n_2}^{a}(u;x,y)-xK_{n_1,n_2}^{a}(1;x,y)$$

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{1,0};x,y\right)=K_{n_1,n_2}^{a}(u;x,y)=\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)$$

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0};x,y\right)=K_{n_1,n_2}^{a}(1;x,y)=1$$

Buradan

$$K_{n_1,n_2}^{a}(u-x;x,y)=\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}-n_1x-x\right)$$
$$=\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)$$

olarak elde edilir.

$(\boldsymbol{ii})$ $K_{n_1,n_2}^{a}(v-y;x,y)=K_{n_1,n_2}^{a}(v;x,y)-y(1;x,y)$

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,1};x,y\right)=\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)$$

$$K_{n_1,n_2}^{a}\left(e_{0,0};x,y\right)=K_{n_1,n_2}^{a}(1;x,y)=1$$

Buradan

$$K_{n_1,n_2}^{a}(v-y;x,y)=\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}-n_2y-y\right)$$
$$=\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)$$

olarak elde edilir.

$(\boldsymbol{iii})$ $K^{a}_{n_1,n_2}((u-x)^2;x,y)$

$$= K^{a}_{n_1,n_2}(u^2;x,y) - 2xK^{a}_{n_1,n_2}(u;x,y) + x^2K^{a}_{n_1,n_2}(1;x,y)$$

$$K^{a}_{n_1,n_2}\left(e_{2,0};x,y\right) = K^{a}_{n_1,n_2}(u^2;x,y)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^2x^2 + n_1x^2 + 2n_1x + \frac{2an_1x^2}{1+x} + \frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{2ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$K^{a}_{n_1,n_2}\left(e_{1,0};x,y\right) = K^{a}_{n_1,n_2}(u;x,y) = \frac{1}{n_1+1}\left(n_1x + \frac{ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$K^{a}_{n_1,n_2}\left(e_{0,0};x,y\right) = K^{a}_{n_1,n_2}(1;x,y) = 1$$

Böylece

$$K^{a}_{n_1,n_2}((u-x)^2;x,y)$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^2x^2 + n_1x^2 + 2n_1x + \frac{2an_1x^2}{1+x} + \frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{2ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right) - 2x\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x + \frac{ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right) + x^2$$

$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left((n_1+1)x^2 + \frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + 2ax\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{3}\right)$$

olarak bulunur.

$(\boldsymbol{iv})$ $K^{a}_{n_1,n_2}((v-y)^2;x,y)$

$$= K^{a}_{n_1,n_2}(v^2;x,y) - 2yK^{a}_{n_1,n_2}(v;x,y) + y^2K^{a}_{n_1,n_2}(1;x,y)$$

$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,2};x,y)$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^2y^2 + n_2y^2 + 2n_2y + \frac{2an_2y^2}{1+y} + \frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{2ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right)$$

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,1};x,y) = \frac{1}{n_2+1}\left(n_2y + \frac{ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right)$$

$$K_{n_1,n_2}^{a}(e_{0,0};x,y) = K_{n_1,n_2}^{a}(1;x,y) = 1$$

oldukları göz önüne alınırsa

$K_{n_1,n_2}^{a}((v-y)^2;x,y)$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^2y^2 + n_2y^2 + 2n_2y + \frac{2an_2y^2}{1+y} + \frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{2ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right) - 2y\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y + \frac{ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right) + y^2$$

$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left((n_2+1)y^2 + \frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + 2ay\left(\frac{1-y}{1+y}\right) + \frac{1}{3}\right)$$

olarak elde edilir.

Şimdi aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 1: Her $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$K_{n_1,n_2}^{a}((u-x)^2;x,y) \leq \frac{\left\{\delta_{n_1}^{a}(x)\right\}^2}{n_1+1}$$

olup, burada $\left\{\delta_{n_1}^{a}(x)\right\}^2 = \phi^2(x) + \frac{(1+a)^2}{n_1+1}$ ve $\phi(x) = \sqrt{x(1+x)}$ dir.

İspat: Lemma 2.2.3' ün (iii) den

$$K^{a}_{n_1,n_2}((u-x)^2;x,y) \leq \frac{(n_1+1)x^2+n_1x}{(n_1+1)^2}+\frac{1}{(n_1+1)^2}\left(\frac{a^2x^2}{(1+x)^2}+\frac{2ax}{1+x}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\leq \frac{1}{n_1+1}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n_1+1}\right)$$

$$\leq \frac{\left\{\delta^{a}_{n_1}(x)\right\}^2}{n_1+1}$$

kolayca istenilen sonuç elde edilir.

■

Lemma 2.2.4.: Her $\gamma_1 \in \mathbb{N}_0$ için $M_k(\gamma_1), k=1,2$ pozitif sabitleri vardır. Öyle ki tüm

$x \in \mathbb{R}_0 = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$(\boldsymbol{i})$ $\omega_{\gamma_1} K^{a}_{n}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(t)};x\right) \leq M_1(\gamma_1),$

$(\boldsymbol{ii})$ $\omega_{\gamma_1} K^{a}_{n}\left(\frac{(t-x)^2}{\omega_{\gamma_1}(t)};x\right) \leq M_2(\gamma_1)\frac{\{\delta^{a}_{n}(x)\}^2}{n+1},$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: ω_{γ_1} in tanımlanması ve K_n^a operatörünün lineerliğinden,

$$(\boldsymbol{i})\ \ \omega_{\gamma_1} K_n^a\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(t)};x\right)=\omega_{\gamma_1}(x)K_n^a(1+t^{\gamma_1};x)=\omega_{\gamma_1}(x)[K_n^a(1;x)+K_n^a(t^{\gamma_1};x)]$$

şeklinde yazılabilir. $\upsilon_{n,j}^a(x)$ operatörü

$$\upsilon_{n,j}^a(x):=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{ax}{1+x}}\frac{P_k(n,a)}{k!}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\left(\frac{k}{n+1}\right)^j \tag{2.2.7}$$

şeklinde tanımlarsa $K_n^a(1;x)=1$ olup, (2.2.7) de göz önüne alınarak

$$K_n^a(t^{\gamma_1};x)=(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} t^{\gamma_1}\,dt$$

$$=\frac{n+1}{\gamma_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x)\left\{\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^{\gamma_1+1}-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\gamma_1+1}\right\}$$

$$=\frac{n+1}{\gamma_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x)\left\{\sum_{j=0}^{\gamma_1+1}\binom{\gamma_1+1}{j}\left(\frac{k}{n+1}\right)^j\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma_1+1-j}-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{\gamma_1+1}\right\}$$

$$=\frac{n+1}{\gamma_1+1}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x)\left\{\sum_{j=0}^{\gamma_1}\binom{\gamma_1+1}{j}\left(\frac{k}{n+1}\right)^j\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma_1+1-j}\right\}$$

$$=\frac{1}{\gamma_1+1}\sum_{j=0}^{\gamma_1}\binom{\gamma_1+1}{j}\frac{1}{(n+1)^{\gamma_1-j}}\sum_{k=0}^{\infty} W_{n,k}^a(x)\left(\frac{k}{n+1}\right)^j$$

$$=\frac{1}{\gamma_1+1}\sum_{j=0}^{\gamma_1}\binom{\gamma_1+1}{j}\frac{1}{(n+1)^{\gamma_1-j}}\upsilon_{n,j}^a(x)$$

şeklinde yazılabilir.

$\omega_{\gamma_1}(x) = \frac{1}{1+x^{\gamma_1}}$ göz önüne alınarak ve $\upsilon_{n,j}^{a}(x) = x^r + \frac{(P_r(x,a)+O(1))}{n+1}$ şeklinde bir ifade olduğunu da

$$\omega_{\gamma_1}(x) K_n^a\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(t)}; x\right) = \frac{1}{1+x^{\gamma_1}}\left[1 + \frac{1}{\gamma_1+1}\sum_{j=0}^{\gamma_1}\binom{\gamma_1+1}{j}\frac{1}{(n+1)^{\gamma_1-j}}\upsilon_{n,j}^{a}(x)\right]$$
$$\leq M_1(\gamma_1)$$

yazabiliriz.

$$(\boldsymbol{ii})\ \ \omega_{\gamma_1} K_n^a\left(\frac{(t-x)^2}{\omega_{\gamma_1}(t)}; x\right) = \frac{1}{(1+x^{\gamma_1})}\left[K_n^a((t-x)^2; x) K_n^a\big((1+t^{\gamma_1}); x\big)\right]$$

Sonuç 1 den bilinmektedir ki

$$K_{n_1,n_2}^{a}((u-x)^2; x, y) \leq \frac{\left\{\delta_{n_1}^{a}(x)\right\}^2}{n_1+1}$$

olup Lemma 2.2.4' ün (i) özelliğinden

$$\omega_{\gamma_1} K_n^a\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(t)}; x\right) \leq M_1(\gamma_1)$$

dir. Buradan

$$\omega_{\gamma_1} K_n^a\left(\frac{(t-x)^2}{\omega_{\gamma_1}(t)}; x\right) \leq M_2(\gamma_1)\frac{\{\delta_n^a(x)\}^2}{n+1}$$

elde edilir.

Lemma 2.2.5.: $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $M_3(\gamma_1, \gamma_2)$ pozitif sabiti vardır. Öyle ki her $f \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ ve tüm $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|K_{n_1,n_2}^{a}(f;.,.)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2} \leq M_3(\gamma_1, \gamma_2)\|f\|_{\gamma_1,\gamma_2} \qquad (2.2.8)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : Lemma 2.2.4 ve (2.1.3) eşitliği gereğince her $(x, y) \in I$ ve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)K_{n_1,n_2}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(u,v)};x,y\right)\\
&=\left(\omega_{\gamma_1}(x)K_{n_1}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(u)};x\right)\right)\left(\omega_{\gamma_2}(x)K_{n_2}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(v)};y\right)\right)\\
&\leq \sup_{(x,y)\in I}\ \omega_{\gamma_1}(x)K_{n_1}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(u)};x\right) \sup_{(x,y)\in I}\ \omega_{\gamma_2}(x)K_{n_2}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(v)};y\right)\\
&\leq \left\|K_{n_1}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(u)};.\right)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\left\|K_{n_2}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(v)};.\right)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2} \qquad (2.2.9)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (2.2.9) eşitsizliğinin sol tarafının supremumu alınarak ve (2.1.4) kullanılarak,

$$\left\|K_{n_1,n_2}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(u,v)};x,y\right)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2} \leq M_4(\gamma_1,\gamma_2) \qquad (2.2.10)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|K_{n_1,n_2}^{a}(f;.,.)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2} \leq \|f\|_{\gamma_1,\gamma_2}\left\|K_{n_1,n_2}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(u,v)};x,y\right)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}$$

olup, (2.2.10) gereğince

$$\left\|K_{n_1,n_2}^{a}(f;.,.)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2} \leq M_3(\gamma_1,\gamma_2)\|f\|_{\gamma_1,\gamma_2}$$

şeklinde istenilen sonucu elde ederiz.

$\blacksquare$

BÖLÜM 3

$K_{n_1,n_2}(f;x,y)$ OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

3.1.NOKTASAL YAKLAŞIM:

$f \in C_B(I)$ (I'daki tüm sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı)

$C_B^2(I) = \{f \in C_B(I) : f^{(p,q)} \in C_B(I), 1 \leq p,q \leq 2\}$ olsun burada $f^{(p,q)}$, f fonksiyonunun x, y ye göre (p,q) yüncü basamaktan kısmi türevlerini göstermektedir. Bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{C_B^2(I)} = \|f\|_{C_B(I)} + \sum_{i=1}^{2} \left\|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}\right\| + \sum_{i=1}^{2} \left\|\frac{\partial^i f}{\partial y^i}\right\|$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $f \in C_B(I)$ fonksiyonları için Peetre's K-fonksiyoneli

$$\kappa(f;\delta) = \inf_{g \in C_B^2(I)} \left\{\|f-g\|_{C_B(I)} + \delta\|g\|_{C_B^2(I)}, \qquad \delta > 0\right\}$$

şeklinde verilir. Ayrıca [12] numaralı referansı 192. sayfasında Peetre's K-fonksiyoneli için $\delta > 0$ olmak üzere

$$\kappa(f;\delta) \leq M_1\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right) + min(1,\delta)\|f\|_{C_B(I)}\right\} \qquad (3.1.1)$$

şeklinde de yazılabildiği verilmektedir. Burada M_1, δ ve f' den bağımsız bir sabit olup, $\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right)$ ikinci basamaktan süreklilik modülüdür.

Öyle ki tek değişkenli durumda tanımlanan şekli olan

$$\omega_2\big(f;\sqrt{\delta}\big) = \sup_{0<h\leq\delta}\ \sup_{x,x+2h\in[0,\infty)} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$$

ifadesi anlamında tanımlanan ikinci basamaktan süreklilik modülüdür. $f \in C_B(I)$ ler için iki değişkenli halde süreklilik modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\omega(f;\delta) = \sup\left\{|f(u,v) - f(x,y)| : (u,v),(x,y)\epsilon I \text{ ve } \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} \leq \delta\right\}.$$

Ayrıca, x ve y' ye göre kısmi süreklilik modülleri

$$\omega_b(f;\delta) = \sup\{|f(x_1,y) - f(x_2,y)| : y\epsilon\mathbb{R}_0 \text{ ve } |x_1 - x_2| \leq \delta\},$$

$$\omega_c(f;\delta) = \sup\{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| : x\epsilon\mathbb{R}_0 \text{ ve } |y_1 - y_2| \leq \delta\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadelerin süreklilik modülünün özelliklerini sağladıkları açıktır. Ayrıca çeşitli kaynaklarda bu özellikler bulunmaktadır.

Şimdi $K_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)$ operatör dizisinin $f(x,y) \in C_B^2(I)$ fonksiyonuna yaklaşım derecesini Peetre's K-fonksiyoneli yardımıyla bulalım.

Bunun için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.1.: $f \in C_B(I)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|K_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y) - f(x,y)\right|$$
$$\leq 4\kappa\left(f; M_{n_1,n_2}(x,y)\right)$$
$$+\,\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$
$$\leq M\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{M_{n_1,n_2}(x,y)}\right)+\min\{1, M_{n_1,n_2}(x,y)\}\|f\|_{C_B^2(I)}\right\}$$
$$+\,\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

$M \geq 0$ sabiti, f ve $M_{n_1,n_2}(x,y)$ den bağımsız olup,

$$M_{n_1,n_2}(x,y) = \frac{\left\{\delta_{n_1}^{a}(x)\right\}^2}{n_1+1} + \frac{\left\{\delta_{n_2}^{a}(y)\right\}^2}{n_2+1}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatında kolaylık olması için aşağıdaki yardımcı operatörü tanımlayalım:

$$\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y) = K_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)$$
$$-f\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right),\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)+f(x,y) \qquad (3.1.2)$$

Bu şekilde tanımlanan $\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)$ operatörü için Lemma 2.2.3 göz önüne alındığında aşağıdakiler sağlanır.

$$\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(u-x;x,y)=0 \text{ ve } \overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(v-y;x,y)=0 \tag{3.1.3}$$

Gerçekten de

$$\begin{aligned}\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(u-x;x,y) &= K_{n_1,n_2}^{a}(u-x;x,y)-\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)+x\\ &=\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)+x\\ &=\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}-n_1x-\frac{ax}{1+x}-\frac{1}{2}+xn_1+x\right)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(v-y;x,y) &= K_{n_1,n_2}^{a}(v-y;x,y)-\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)+y\\ &=\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)+y\\ &=\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}-n_2y-\frac{ay}{1+y}-\frac{1}{2}+n_2y+y\right)=0\end{aligned}$$

olarak elde edilirler.

Şimdi $g\in C_B^2(I)$ ve $(u,v)\in I$ olsun. Taylor teoremi ve kısmi integrasyon yardımıyla

$$\begin{aligned}&g(u,v)-g(x,y)\\ &=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(u-x)+\int_x^u(u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}d\alpha+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(v-y)\\ &+\int_y^v(v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}d\beta.\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

eşitliği yazılabilir.

(3.1.4) ifadesinin her iki tarafına $\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}$ operatörü uygulanılır ve (3.1.3) göz önüne alınırsa

$$\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left((g;x,y)-g(x,y);x,y\right)$$

$$=\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(u-x)+\int_x^u(u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}d\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(v-y)+\int_y^v(v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}d\beta;x,y\right)$$

$$\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(g;x,y\right)-g(x,y)$$

$$=\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}(u-x);x,y\right)+\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_x^u(u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}d\alpha;x,y\right)$$

$$+\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(v-y);x,y\right)$$

$$+\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_y^v(v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}d\beta;x,y\right)$$

$$=\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_x^u(u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}d\alpha;x,y\right)+\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_y^v(v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}d\beta;x,y\right)$$

$$= K_{n_1,n_2}^{a}\left(\int_x^u (u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial \alpha^2}d\alpha; x,y\right.$$

$$- \int_x^{\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)-\alpha+\int_x^x xdx\right)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial \alpha^2}d\alpha$$

$$+ K_{n_1,n_2}^{a}\left(\int_y^v (v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial \beta^2}d\beta; x,y\right.$$

$$- \int_y^{\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-\beta+\int_y^y ydy\right)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial \beta^2}d\beta$$

$$\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(g;x,y)-g(x,y)$$

$$= K_{n_1,n_2}^{a}\left(\int_x^u (u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial \alpha^2}d\alpha; x,y\right.$$

$$- \int_x^{\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)-\alpha\right)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial \alpha^2}d\alpha$$

$$+K_{n_1,n_2}^{a}\left(\int_y^v (v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial \beta^2}d\beta; x,y\right.$$

$$- \int_y^{\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-\beta\right)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial \beta^2}d\beta$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alındıktan sonra, mutlak değer fonksiyonunun sağladığı özellikleri de göz önüne alınıp sağ taraftan supremum alınırsa

$$\left|\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\,(g;x,y)-g(x,y)\right|$$

$$\leq \left| K^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_{x}^{u}(u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}\,d\alpha;x,y\right)\right.$$

$$-\int_{x}^{\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)-\alpha\right)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}\,d\alpha$$

$$+K^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_{y}^{v}(v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}\,d\beta;x,y\right)$$

$$\left.-\int_{y}^{\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-\beta\right)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}\,d\beta\right|$$

$$\left|\overline{K}^{a}_{n_1,n_2}\,(g;x,y)-g(x,y)\right|$$

$$\leq \left|K^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_{x}^{u}(u-\alpha)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}\,d\alpha;x,y\right)\right|$$

$$+\left|\int_{x}^{\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)-\alpha\right)\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}\,d\alpha\right|$$

$$+\left|K^{a}_{n_1,n_2}\left(\int_{y}^{v}(v-\beta)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}\,d\beta;x,y\right)\right|$$

$$+\left|\int_{y}^{\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-\beta\right)\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}\,d\beta\right|$$

$$\leq K_{n_1,n_2}^{a}\left(\left|\int_x^u |u-\alpha|\left|\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}\right| d\alpha\right|;x,y\right)$$

$$+\left|\int_x^{\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)} \left|\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)-\alpha\right|\left|\frac{\partial^2 g(\alpha,y)}{\partial\alpha^2}\right| d\alpha\right|$$

$$+K_{n_1,n_2}^{a}\left(\left|\int_y^v |v-\beta|\left|\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}\right| d\beta\right|;x,y\right)$$

$$+\left|\int_y^{\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)} \left|\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-\beta\right|\left|\frac{\partial^2 g(x,\beta)}{\partial\beta^2}\right| d\beta\right|$$

$$\leq \left\{K_{n_1,n_2}^{a}((u-x)^2;x,y)+\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)-x\right)^2\right\}\|g\|_{C_B^2(I)}$$

$$+\left\{K_{n_1,n_2}^{a}((v-y)^2;x,y)+\left(\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-y\right)^2\right\}\|g\|_{C_B^2(I)}$$

$$\left|\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}\,(g;x,y)-g(x,y)\right|$$

$$\leq\left\{\frac{1}{n_1+1}\left(\phi(x)+\frac{(1+a)^2}{n_1+1}\right)+\left(\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right.$$

$$+\frac{1}{n_2+1}\left(\phi(y)+\frac{(1+a)^2}{n_2+1}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)-\right)^2\right\}\|g\|_{C_B^2(I)}$$

olarak bulunur.

Bu ifade düzenlenince

$$\left|\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(g;x,y)-g(x,y)\right|$$

$$\leq\left\{\frac{2}{n_1+1}\left(\phi(x)+\frac{(1+a)^2}{n_1+1}\right)+\frac{2}{n_2+1}\left(\phi(y)+\frac{(1+a)^2}{n_2+1}\right)\right\}\|g\|_{C_B^2(I)}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left|\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)\right|$$

$$\leq\left|K_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)\right|+\left|f\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right),\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\right|$$

$$+|f(x,y)|$$

$$\leq 3\|f\|_{C_B(I)} \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.1.5) denklemini göz önüne alınarak $\left|K_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)-f(x,y)\right|$ ifadesi için norm ve süreklilik modülü fonksiyonunun tanımları ve sağladığı özellikler gereğince

$$\left|K_{n_1,n_2}^{a}(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq\left|\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(f-g;x,y)\right|+\left|\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(g;x,y)-g(x,y)\right|+|g(x,y)-f(x,y)|$$

$$+\left|f\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right),\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)-f(x,y)\right|$$

$$\leq 3\|f-g\|_{C_B(I)}+\|f-g\|_{C_B(I)}+\left|\overline{K}_{n_1,n_2}^{a}(g;x,y)-g(x,y)\right|$$

$$+\left|f\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right),\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)-f(x,y)\right|$$

$$\leq 4\|f-g\|_{C_B(I)}$$

$$+\left\{\frac{2}{n_1+1}\left(\phi(x)+\frac{(1+a)^2}{n_1+1}\right)+\frac{2}{n_2+1}\left(\phi(y)+\frac{(1+a)^2}{n_2+1}\right)\right\}\|g\|_{C_B^2(I)}$$

$$+\left|f\left(\frac{1}{n_1+1}\left(n_1x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right),\frac{1}{n_2+1}\left(n_2y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)-f(x,y)\right|$$

$$\leq \left(4\|f-g\|_{C_B(I)}+2M_{n_1,n_2}(x,y)\|g\|_{C_B^2(I)}\right)$$

$$+\,\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right) \tag{3.1.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Her $g\in C_B^2(I)$ olmak üzere (3.1.1) tanımlaması da göz önüne alınarak (3.1.6) eşitsizliğinin sağ tarafının infimumu alınırsa

$$\left|K_{n_1,n_2}^a(f;x,y)-f(x,y)\right|\leq 4\kappa\left(f;M_{n_1,n_2}(x,y)\right)$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

$$\left|K_{n_1,n_2}^a(f;x,y)-f(x,y)\right|$$

$$\leq M\left\{\omega_2\left(f;\sqrt{M_{n_1,n_2}(x,y)}\right)+\min\{1,M_{n_1,n_2}(x,y)\}\,\|f\|_{C_B^2(I)}\right\}$$

$$+\,\omega\left(f;\sqrt{\left(\frac{1}{n_1+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{1}{n_2+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)^2}\right)$$

elde edilir. Bu da gösterilmek istenilendir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.2. İKİ DEĞİŞKENLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ORANI

Teorem 3.2.1.: $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, kabul edelim ki $f \in C^1_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ olsun. O taktirde bir $M_5(\gamma_1, \gamma_2)$ pozitif sabiti vardır. Öyle ki her $x, y \in I$ ve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K^a_{n_1,n_2}(f;x,y) - f(x,y)\right|$$
$$\leq M_5(\gamma_1,\gamma_2)\left\{\|f'_x\|_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{\delta^a_{n_1}(x)}{\sqrt{n_1+1}} + \left\|f'_y\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{\delta^a_{n_2}(y)}{\sqrt{n_2+1}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $(x,y) \in I$ sabit bir nokta olsun. O taktirde $(t,z) \in I$ için

$$f(t,z) - f(x,y) = \int_x^t f'_u(u,z)\,du + \int_y^z f'_v(x,v)\,dv$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına $K^a_{n_1,n_2}$ operatörü uygulanırsa

$$K^a_{n_1,n_2}(f(t,z);x,y) - f(x,y)$$
$$= K^a_{n_1,n_2}\left(\int_x^t f'_u(u,z)\,du; x,y\right) + K^a_{n_1,n_2}\left(\int_y^z f'_v(x,v)\,dv; x,y\right) \qquad (3.2.1)$$

$$\left|K^a_{n_1,n_2}(f(t,z);x,y) - f(x,y)\right|$$
$$= \left|K^a_{n_1,n_2}\left(\int_x^t f'_u(u,z)\,du; x,y\right) + K^a_{n_1,n_2}\left(\int_y^z f'_v(x,v)\,dv; x,y\right)\right|$$

Şimdi her iki tarafı $\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)$ ifadesi ile çarpalım:

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K^a_{n_1,n_2}(f(t,z);x,y)-f(x,y)\right|$$

$$=\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K^a_{n_1,n_2}\left(\int_x^t f'_u(u,z)\,du;x,y\right)\right|$$

$$+\,\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K^a_{n_1,n_2}\left(\int_y^z f'_v(x,v)\,dv;x,y\right)\right|$$

$$=\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)K^a_{n_1,n_2}\left(\left|\int_x^t f'_u(u,z)\,du\right|;x,y\right)$$

$$+\,\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)K^a_{n_1,n_2}\left(\left|\int_y^z f'_v(x,v)\,dv\right|;x,y\right)$$

elde edilir. (2.1.4) tanımı kullanılarak

$$\left|\int_x^t f'_u(u,z)\,du\right|=\left|\int_x^t f'_u(u,z)\frac{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}\,du\right|$$

$$\leq\sup_{x\in I}\left|\int_x^t f'_u(u,z)\frac{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}\,du\right|\leq\|f'_x\|_{\gamma_1,\gamma_2}\left|\int_x^t\frac{du}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(u,z)}\right|$$

$$\leq\|f'_x\|_{\gamma_1,\gamma_2}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(t,z)}+\frac{1}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,z)}\right)|t-x|$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde

$$\left|\int_y^z f'_v(x,v)\,dv\right| = \left|\int_y^z f'_v(x,v)\frac{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}\,dv\right|$$

$$\le \sup_{y\in I}\left|\int_y^z f'_v(x,v)\frac{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}}\,dv\right| \le \left\|f'_y\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\left|\int_y^z \frac{dv}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,v)}\right|$$

$$\le \left\|f'_y\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,z)}+\frac{1}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)}\right)|z-y|$$

olur. Bu eşitsizlikler ve (2.1.3) kullanılarak, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K^a_{n_1,n_2}\left(\int_x^t f'_u(u,z)\,du; x,y\right)\right|$$

$$\le \omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)K^a_{n_1,n_2}\left(\left|\int_x^t f'_u(u,z)\,du\right|; x,y\right)$$

$$\le \|f'_x\|_{\gamma_1,\gamma_2}\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left\{K^a_{n_1,n_2}\left(\frac{|t-x|}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(t,z)}; x,y\right)+K^a_{n_1,n_2}\left(\frac{|t-x|}{\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,z)}; x,y\right)\right\}$$

$$= \|f'_x\|_{\gamma_1,\gamma_2}\omega_{\gamma_2}(y)K^a_{n_2}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_2}(z)}; y\right)$$

$$\times\left\{\omega_{\gamma_1}(x)K^a_{n_1}\left(\frac{|t-x|}{\omega_{\gamma_1}(t)}; x\right)+K^a_{n_1}(|t-x|; x)\right\} \qquad (3.2.2)$$

ifadesi yazılabilir.

Benzer şekilde

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K_{n_1,n_2}^{a}\left(\int_{y}^{z} f_v'(x,v)\,dv;x,y\right)\right|$$

$$\leq \left\|f_y'\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\left\{\omega_{\gamma_2}(y)K_{n_2}^{a}\left(\frac{|z-y|}{\omega_{\gamma_1}(z)};y\right)+K_{n_2}^{a}(|z-y|;y)\right\} \tag{3.2.3}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Hölder eşitsizliği, sonuç 1 ve Lemma 2.2.4 göz önüne alınarak, $n_1 \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} K_{n_1}^{a}(|t-x|;x) &\leq \left\{K_{n_1}^{a}((t-x)^2;x)K_{n_1}^{a}(1;x)\right\}^{1/2} \\ &\leq \frac{\delta_{n_1}^{a}(x)}{\sqrt{n_1+1}} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

ve

$$\omega_{\gamma_1}(x)K_{n_1}^{a}\left(\frac{|t-x|}{\omega_{\gamma_1}(t)};x\right) \leq \omega_{\gamma_1}(x)\left\{K_{n_1}^{a}\left(\frac{(t-x)^2}{\omega_{\gamma_1}(t)};x\right)K_{n_1}^{a}\left(\frac{1}{\omega_{\gamma_1}(t)};x\right)\right\}^{1/2}$$

$$\leq M_6(\gamma_1)\frac{\delta_{n_1}^{a}(x)}{\sqrt{n_1+1}} \tag{3.2.5}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Benzer şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$K_{n_2}^{a}(|z-y|;y) \leq \frac{\delta_{n_2}^{a}(y)}{\sqrt{n_2+1}}, \tag{3.2.6}$$

ve

$$\omega_{\gamma_2}(y)K_{n_2}^{a}\left(\frac{|z-y|}{\omega_{\gamma_2}(z)};y\right) \leq M_7(\gamma_2)\frac{\delta_{n_2}^{a}(y)}{\sqrt{n_2+1}}. \tag{3.2.7}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Böylece $(3.2.1)-(3.2.7)$ eşitliklerinden tüm $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K^a_{n_1,n_2}(f(t,z);x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq M_8(\gamma_1,\boldsymbol{\gamma_2})\left\{\|f'_x\|_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{\delta^a_{n_1}(x)}{\sqrt{n_1+1}}+\left\|f'_y\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{\delta^a_{n_2}(y)}{\sqrt{n_2+1}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

■

Teorem 3.2.2.: Kabul edelim ki $\gamma_1, \boldsymbol{\gamma_2} \in \mathbb{N}_{\mathbf{0}}$ olmak üzere $f \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ olsun. O taktirde $M_9(\gamma_1, \boldsymbol{\gamma_2})$ pozitif sabiti vardır. Öyle ki her $(x,y) \in I$ ve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K^a_{n_1,n_2}(f(t,z);x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq M_9(\gamma_1,\boldsymbol{\gamma_2})\omega\left(f;C_{\gamma_1,\gamma_2};\frac{\delta^a_{n_1}(x)}{\sqrt{n_1+1}},\frac{\delta^a_{n_2}(y)}{\sqrt{n_2+1}}\right),$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$'nın Steklov fonksiyonu $f_{h,\delta}$ olsun. Bu fonksiyon $(x,y) \in I$ ve $h, \delta \in \mathbb{R}_+$ için

$$f_{h,\delta}(x,y) := \frac{1}{h\delta}\int_0^h du \int_0^\delta f(x+u, y+v)\, dv, \tag{3.2.8}$$

şeklinde tanımlanır. (3.2.8) den

$$f_{h,\delta}(x,y) - f(x,y) = \frac{1}{h\delta}\int_0^h du \int_0^\delta \Delta_{u,v} f(x,y) dv$$

dir. Gerçekten de

$$\|f_{h,\delta}(x,y) - f(x,y)\| = \left| \frac{1}{h\delta}\int_0^h du \int_0^\delta f(x+u,y+v)\, dv - \frac{1}{h\delta}\int_0^h du \int_0^\delta f(x,y)\, dv \right|$$

$$= \left| \frac{1}{h\delta}\int_0^h du \int_0^\delta [f(x+u,y+v) - f(x,y)]\, dv \right|$$

$$= \frac{1}{h\delta}\int_0^h du \int_0^\delta \Delta_{u,v} f(x,y) dv$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{h,\delta}(x,y) = \frac{1}{h\delta}\int_0^\delta \Delta_{h,0} f(x,y+v) dv$$

$$= \quad \frac{1}{h\delta}\int_0^\delta \Big(\Delta_{h,v} f(x,y) - \Delta_{0,v} f(x,y) + \Delta_{h,v} f(x+u,v) - \Delta_{\mathrm{h},v} f(x+u,v) \Big) dv$$

$$= \frac{1}{h\delta}\int_0^\delta \Big(\Delta_{h,v} f(x,y) - \Delta_{0,v} f(x,y) \Big) dv$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial y} f_{h,\delta}(x,y) = \frac{1}{h\delta}\int_0^h \Delta_{0,\delta} f(x+u,y) du$$

$$= \frac{1}{h\delta}\int_0^h \Big(\Delta_{u,\delta} f(x,y) - \Delta_{u,0} f(x,y) \Big) du$$

olur. Böylece (2.1.4) ve (2.1.5) tanımlamaları gereğince

$$\left\|f_{h,\delta}-f\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\leq\omega\left(f,C_{\gamma_1,\gamma_2};h,\delta\right),\tag{3.2.9}$$

$$\left\|\frac{\partial f_{h,\delta}}{\partial x}\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\leq 2h^{-1}\omega\left(f,C_{\gamma_1,\gamma_2};h,\delta\right),\tag{3.2.10}$$

$$\left\|\frac{\partial f_{h,\delta}}{\partial y}\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\leq 2\delta^{-1}\omega\left(f,C_{\gamma_1,\gamma_2};h,\delta\right).\tag{3.2.11}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca $h,\delta\in\mathbb{R}_+$ için ekleme çıkarma yapılarak

$$\begin{aligned}\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)&\left|K^a_{n_1,n_2}(f(t,z);x,y)-f(x,y)\right|\\&\leq\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left\{K^a_{n_1,n_2}\left(f(t,z)-f_{h,\delta}(t,z);x,y\right)\right.\\&\quad\left.+\left|K^a_{n_1,n_2}\left(f_{h,\delta}(t,z);x,y\right)-f_{h,\delta}(x,y)\right|+\left|f_{h,\delta}(x,y)-f(x,y)\right|\right\}\\&:=R_1+R_2+R_3\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.1.4) tanımı, Lemma 2.2.5 ve (3.2.9)'den

$$\begin{aligned}R_1\leq\left\|K^a_{n,n}\left(f-f_{h,\delta};.,.\right)\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}&\leq M_{10}(\gamma_1,\gamma_2)\left\|f-f_{h,\delta}\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\\&\leq M_{10}(\gamma_1,\gamma_2)\omega\left(f,C_{\gamma_1,\gamma_2};h,\delta\right)\end{aligned}$$

ve

$$R_3\leq\omega\left(f,C_{\gamma_1,\gamma_2};h,\delta\right)$$

yazılabilir.

Teorem 3.2.1, (3.2.10) ve (3.2.11) kullanılarak,

$$R_2 \leq M_{11}(\gamma_1,\gamma_2)\left\{\left\|\frac{\partial f_{h,\delta}}{\partial x}\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{\delta_{n_1}^a(x)}{\sqrt{n_1+1}}+\left\|\frac{\partial f_{h,\delta}}{\partial y}\right\|_{\gamma_1,\gamma_2}\frac{\delta_{n_2}^a(y)}{\sqrt{n_2+1}}\right\}$$

$$\leq 2M_{11}(\gamma_1,\gamma_2)\omega\left(f,C_{\gamma_1,\gamma_2};h,\delta\right)\left\{h^{-1}\frac{\delta_{n_1}^a(x)}{\sqrt{n_1+1}}+\delta^{-1}\frac{\delta_{n_2}^a(y)}{\sqrt{n_2+1}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak (3.2.12)' den hareket ederek tüm $(x,y)\in I$, $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ ve $h,\delta\in\mathbb{R}_+$ için

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K_{n_1,n_2}^a(f(t,z);x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq M_{12}(\gamma_1,\gamma_2)\omega\left(f,C_{\gamma_1,\gamma_2};h,\delta\right)\left\{1+h^{-1}\frac{\delta_{n_1}^a(x)}{\sqrt{n_1+1}}+\delta^{-1}\frac{\delta_{n_2}^a(y)}{\sqrt{n_2+1}}\right\}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan $h=\frac{\delta_{n_1}^a(x)}{\sqrt{n_1+1}}$ ve $\delta=\frac{\delta_{n_2}^a(y)}{\sqrt{n_2+1}}$ alınırsa

$$\omega_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y)\left|K_{n_1,n_2}^a(f(t,z);x,y)-f(x,y)\right|$$
$$\leq M_{13}(\gamma_1,\gamma_2)\omega\left(f;C_{\gamma_1,\gamma_2};\frac{\delta_{n_1}^a(x)}{\sqrt{n_1+1}},\frac{\delta_{n_2}^a(y)}{\sqrt{n_2+1}}\right)$$

şeklinde istenilen sonuç elde edilir.

■

Teorem 3.2.3.: Kabul edelim ki $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $f \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ olsun. Her $(x,y) \in I$ için,

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty} K^a_{n_1,n_2}(f;x,y) = f(x,y)$$

dir.

İspat:

$K^a_{n_1,n_2}\big(e_{0,0};x,y\big) = 1;$

$$K^a_{n_1,n_2}\big(e_{1,0};x,y\big) = \frac{1}{n_1+1}\left(n_1x + \frac{ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right) \underset{n_1\to\infty}{\to} x\,;$$

$$K^a_{n_1,n_2}\big(e_{0,1};x,y\big) = \frac{1}{n_2+1}\left(n_2y + \frac{ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right) \underset{n_2\to\infty}{\to} y;$$

$$K^a_{n_1,n_2}\big(e_{2,0};x,y\big)$$
$$= \frac{1}{(n_1+1)^2}\left(n_1^2x^2 + n_1x^2 + 2n_1x + \frac{2an_1x^2}{1+x} + \frac{a^2x^2}{(1+x)^2} + \frac{2ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right) \underset{n_1\to\infty}{\to} x^2$$

$$K^a_{n_1,n_2}\big(e_{0,2};x,y\big)$$
$$= \frac{1}{(n_2+1)^2}\left(n_2^2y^2 + n_2y^2 + 2n_2y + \frac{2an_2y^2}{1+y} + \frac{a^2y^2}{(1+y)^2} + \frac{2ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right) \underset{n_2\to\infty}{\to} y^2$$

olduklarından $f \in C(I)$ için Korovkin teoreminin şartları sağladığından

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty} K^a_{n_1,n_2}(f;x,y) = f(x,y)$$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 4

4.1. Voronovskaja Tipi Teorem

Bu bölümde $K^{a}_{n_1,n_2}(f;x,y)$ operatörlerinin noktasal yakınsaklığı ile ilgili iyi bilinen Voronovskaja tipi teorem verilecektir.

Teorem 4.1.1. (**Voronovskaja Tipi Teorem**):

$f \in C^{2}_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ olsun. Bu taktirde her $(x,y) \in I$ için

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left\{K^{a}_{n,n}(f;x,y) - f(x,y)\right\}
&= \left(-x + \frac{ax}{1+x} + \frac{1}{2}\right) f_x(x,y) + \left(-y + \frac{ay}{1+y} + \frac{1}{2}\right) f_y(x,y) \\
&+ \frac{x}{2}(x+2) f_{xx}(x,y) + \frac{y}{2}(y+2) f_{yy}(x,y)
\end{aligned}
$$

dir.

İspat: $(x,y) \in I$ sabit olsun. Bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar için bilinen Taylor formülü gereğince

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &= f(x,y) + f_x(x,y)(u-x) + f_y(x,y)(v-y) \\
&+ \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)(u-x)^2 + 2f_{xy}(x,y)(u-x)(v-y) \right. \\
&\left. + f_{yy}(x,y)(v-y)^2\right\} + \psi(u,v;x,y)\sqrt{(u-x)^4 + (v-y)^4}, \quad (4.1.1)
\end{aligned}
$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\psi(.,.;x,y) = \psi(.,.) \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ ve $\psi(x,y) = 0$ dır. Böylece (4.1.1) eşitliğinin her iki tarafına $n_1 = n_2 = n$ alınarak $K^{a}_{n,n}(f;x,y)$ operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)\\
&\qquad = K_{n,n}^{a}\Big(f(x,y)+f_x(x,y)(u-x)+f_y(x,y)(v-y)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\{f_{xx}(x,y)(u-x)^2+2f_{xy}(x,y)(u-x)(v-y)\\
&\qquad + f_{yy}(x,y)(v-y)^2\}+\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\Big)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. $K_{n,n}^{a}(f;x,y)$ lineer olduğundan bu eşitlik

$$
\begin{aligned}
&K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)\\
&= f(x,y)K_{n,n}^{a}(1;x,y)+f_x(x,y)K_{n,n}^{a}\big((u-x);x\big)+f_y(x,y)K_{n,n}^{a}\big((v-y);y\big)\\
&+\frac{1}{2}\{f_{xx}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x)^2;x)+2f_{xy}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x);x)K_{n,n}^{a}((v-y);y)\\
&\qquad + f_{yy}(x,y)K_{n,n}^{a}((v-y)^2;y)\}\\
&+K_{n,n}^{a}\Big(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\Big)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. $K_{n,n}^{a}(1;x,y)=1$ olduğundan bu son eşitlik

$$
\begin{aligned}
&K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)\\
&= f(x,y)+f_x(x,y)K_{n,n}^{a}\big((u-x);x\big)+f_y(x,y)K_{n,n}^{a}\big((v-y);y\big)\\
&+\frac{1}{2}\{f_{xx}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x)^2;x)+2f_{xy}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x);x)K_{n,n}^{a}((v-y);y)\\
&+ f_{yy}(x,y)K_{n,n}^{a}((v-y)^2;y)\}\\
&+K_{n,n}^{a}\Big(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\Big) \qquad (4.1.2)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 2.2.1 de elde edilen sonuçlar yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)\\
&\qquad = f(x,y)+f_x(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\qquad + f_y(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)\right.\\
&\qquad + 2f_{xy}(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\qquad \left.+ f_{yy}(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(y(1+y)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)\right\}\\
&\qquad + K_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını n ile çarpıp $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\,K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)\\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} n\left\{ f(x,y)+f_x(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\right.\\
&\qquad + f_y(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)\left(\frac{n}{n+1}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)\right.\\
&\qquad + 2f_{xy}(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\qquad \left.+ f_{yy}(x,y)\left(\frac{n}{n+1}\left(y(1+y)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)\right\}\\
&\qquad \left.+ K_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\right)\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan terim terime limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} n\, K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} nf(x,y) + f_x(x,y)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+f_y(x,y)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)+2f_{xy}(x,y)\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)+f_{yy}(x,y)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\left(y(1+y)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty} nK_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\right)$$

elde edilir. Bu eşitliğin son terimdeki limiti hesaplamak için önce operatöre Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$K_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v;x,y)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\right)$$

$$\leq \left\{K_{n,n}^{a}(\psi^2(u,v);x,y)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{K_{n,n}^{a}((u-x)^4+(v-y)^4;x,y)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left\{K_{n,n}^{a}(\psi^2(u,v);x,y)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{K_{n}^{a}((u-x)^4;x)+K_{n}^{a}((v-y)^4;y)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 3.2.3 gereğince de

$$\lim_{n\to\infty} K_{n_1,n_2}^{a}(\psi^2(u,v);x,y)=\psi^2(x,y)=0,$$

olup, Lemma 2.2.1’in (iii) özelliğinden her biri $(x,y)\in I$ için

$$K_n^a((u-x)^4;x)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ve

$$K_n^a((v-y)^4;y)=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olduklarından

$$\lim_{n\to\infty} n K_{n,n}^a\left(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\right)=0 \tag{4.1.3}$$

elde edilir. (4.1.2) ve (4.1.3) yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\{K_{n,n}^a(f;x,y)-f(x,y)\}\\ &=\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)f_x(x,y)+\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)f_y(x,y)\\ &+\frac{x}{2}(x+2)f_{xx}(x,y)+\frac{y}{2}(y+2)f_{yy}(x,y)\end{aligned}$$

istenilen sonuç elde edilir.

4.2. EŞZAMANLI YAKLAŞIM

Teorem 4.2.1.: $f \in C^1_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ olsun. O taktirde her $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} K^a_{n,n}(f; \omega, y) \right)_{\omega=x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \tag{4.2.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\partial}{\partial v} K^a_{n,n}(f; x, v) \right)_{v=y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \tag{4.2.2}$$

dir.

İspat: Önce, (4.2.1)'ü ispatlayalım. Biliyoruz ki $f \in C^1_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ fonksiyonu için $(u, v) \in I$ olmak üzere Taylor formülü

$$f(u, v) = f(x, y) + f_x(x, y)(u - x) + f_y(x, y)(v - y)$$

$$+\psi(u, v; x, y)\sqrt{(u - x)^2 + (v - y)^2} \tag{4.2.3}$$

olup, burada $\psi(u, v; x, y) \equiv \psi(.,.) \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ ve $\psi(x, y) = 0$ dır.

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $K^a_{n,n}(.,.,y)$ operatörü uygulandıktan sonra her iki tarafın ω ya göre türevi alınır ve Lemma 2.2.3'te elde edilen sonuçlar kullanılırsa $(u, v) \in I$ için,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(f(u,v);\omega,y)\right)_{\omega=x}$$

$$= f(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(1;\omega,y)\right)_{\omega=x} + f_x(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(u-x;\omega,y)\right)_{\omega=x}$$

$$+ f_y(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(v-y;\omega,y)\right)_{\omega=x}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v;x,y)\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2};\omega,y\right)\right)_{\omega=x}, \qquad (u,v)\in I \; için$$

$$= f_x(x,y)\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{n+1}\left(n\omega+\frac{a\omega}{1+\omega}+\frac{1}{2}\right)\right)\right\}_{\omega=x}$$

$$+ f_y(x,y)\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{1}{n+1}\left(ny+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)\right\}_{\omega=x} + E$$

$$= f_x(x,y)\left\{\left(\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{a(1+\omega)-a\omega}{(1+\omega)^2}\right)\right)\right\}_{\omega=x} + f_y(x,y).0 + E$$

$$= f_x(x,y)\left\{\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{a}{(1+x)^2}\right)\right\} + E$$

ifadesi yazılabilir. Burada

$$\lim_{n\to\infty} f_x(x,y)\left\{\frac{1}{n+1}\left(n+\frac{a}{(1+x)^2}\right)\right\} = f_x(x,y)$$

olup,

$$E = (n+1)^2$$

$$\times \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} W_{n,n,k_1,k_2}^{a}(x,y) \right)_{\omega = x} \int_{\frac{k_2}{n+1}}^{\frac{k_2+1}{n+1}} \int_{\frac{k_1}{n+1}}^{\frac{k_1+1}{n+1}} \psi(u,v) \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}\, dudv \quad (4.2.4)$$

şeklindedir.

Şimdi $n \to \infty$ için $E \to 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için (4.2.4) den hareket edilirse

$$E = (n+1)^2$$

$$\times \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} W_{n,n,k_1,k_2}^{a}(x,y) \right)_{\omega = x} \int_{\frac{k_2}{n+1}}^{\frac{k_2+1}{n+1}} \int_{\frac{k_1}{n+1}}^{\frac{k_1+1}{n+1}} \psi(u,v) \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}\, du$$

$$= (n+1)^2 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\{(k-nx)(1+x) - ax\}}{x(1+x)^2} W_{n,n,k_1,k_2}^{a}(x,y)$$

$$\times \int_{\frac{k_2}{n+1}}^{\frac{k_2+1}{n+1}} \int_{\frac{k_1}{n+1}}^{\frac{k_1+1}{n+1}} \psi(u,v) \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}\, dudv$$

$$= \frac{n(n+1)^2}{x(1+x)} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{k_1}{n} - x \right) W_{n,n,k_1,k_2}^{a}(x,y)$$

$$\times \int_{\frac{k_2}{n+1}}^{\frac{k_2+1}{n+1}} \int_{\frac{k_1}{n+1}}^{\frac{k_1+1}{n+1}} \psi(u,v) \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}\, dudv$$

$$- \frac{a}{(1+x)^2} K_{n,n}^{a} \left(\psi(u,v) \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2}; \omega, y \right)$$

$$= E_1 + E_2$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadedeki E_1 ifadesi için bir üst sınır bulmak için Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$E_1 \leq \frac{n}{x(1+x)}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} W_{n,k_1}^{a}(x)\left(\frac{k_1}{n}-x\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left((n+1)^2 \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} W_{n,n,k_1,k_2}^{a}(x,y) \int_{\frac{k_2}{n+1}}^{\frac{k_2+1}{n+1}} \int_{\frac{k_1}{n+1}}^{\frac{k_1+1}{n+1}} \psi^2(u,v)\left((u-x)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+(v-y)^2\right)dudv\right)^{1/2}$$

$$E_1 \leq \frac{n}{x(1+x)}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} W_{n,k_1}^{a}(x)\left(\frac{k_1}{n}-x\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left\{K_{n,n}^{a}(\psi^4(u,v);x,y)\left(K_n^{a}((u-x)^4;x)+2K_n^{a}((u-x)^2;x)K_n^{a}((v-y)^2;y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_n^{a}((v-y)^4;y)\right)\right\}^{1/4}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece Lemma 3.2.1 gereğincede

$$|E_1| \leq M_{12}(x,y)\left\{K_{n,n}^{a}(\psi^4(u,v);x,y)\right\}^{1/4}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Teorem 3.2.3'ten, $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ için

$$\lim_{n\to\infty} K_{n,n}^a(\psi^4(u,v);x,y) = \psi^4(x,y) = 0$$

yazılabilir. Böylece $n \to \infty$ için $E_1 \to 0$ olduğu görülür.

E_2 içinde E_1 de izlenen yol izlenerek $n \to \infty$ için $E_2 \to 0$ olduğu aynı şekilde gösterilebilir. E_1 ve E_2 değerleri E de yerine yazılırsa $n \to \infty$ için $E \to 0$ olur.

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2: $f \in C^1_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ olsun. O taktirde her $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ için,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^a(f;x,y)\right)_{\omega=x} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\}\\ = \left(-1+\frac{a}{(1+x)^2}\right)f_x(x,y) + \left(1+\frac{ax}{1+x}\right)f_{xx}(x,y)\\ + \left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)f_{xy}(x,y) + \frac{y}{2}(1+y)f_{xyy}(x,y)\\ + \frac{x}{2}(1+x)f_{xxx}(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{\partial}{\partial v}K_{n,n}^a(f;x,y)\right)_{v=y} - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\}\\ = \left(-1+\frac{a}{(1+y)^2}\right)f_y(x,y) + \left(1+\frac{ay}{1+y}\right)f_{yy}(x,y)\\ + \left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)f_{xy}(x,y) + \frac{x}{2}(1+x)f_{xxy}(x,y)\\ + \frac{y}{2}(1+y)f_{yyy}(x,y)\end{aligned}$$

dir.

İspat: $(x,y)\in I$ sabit olsun. Bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar için bilinen Taylor formülü gereğince

$$
\begin{aligned}
&f(u,v)\\
&=f(x,y)+f_x(x,y)(u-x)+f_y(x,y)(v-y)\\
&+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)(u-x)^2+2f_{xy}(x,y)(u-x)(v-y)+f_{yy}(x,y)(v-y)^2\right\}\\
&+\psi(u,v;x,y)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4},
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

ifadesi yazılabilir. Burada $\psi(.,.;x,y)=\psi(.,.)\in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ ve $\psi(x,y)=0$ dır. Böylece (4.2.5) eşitliğinin her iki tarafına $n_1=n_2=n$ alınarak $K_{n,n}^{a}(f;x,y)$ operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
&K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)\\
&\qquad=K_{n,n}^{a}\Big(f(x,y)+f_x(x,y)(u-x)+f_y(x,y)(v-y)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)(u-x)^2+2f_{xy}(x,y)(u-x)(v-y)\right.\\
&\qquad\left.+f_{yy}(x,y)(v-y)^2\right\}+\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\Big)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. $K_{n,n}^{a}(f;x,y)$ lineer olduğundan bu eşitlik

$$
\begin{aligned}
&K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)\\
&\qquad=\ f(x,y)K_{n,n}^{a}(1;x,y)+f_x(x,y)K_{n,n}^{a}\big((u-x);x\big)\\
&\qquad+f_y(x,y)K_{n,n}^{a}\big((v-y);y\big)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x)^2;x)\right.\\
&\qquad+2f_{xy}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x);x)K_{n,n}^{a}((v-y);y)\\
&\qquad\left.+f_{yy}(x,y)K_{n,n}^{a}((v-y)^2;y)\right\}\\
&\qquad+K_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. $K_{n,n}^{a}(1;x,y)=1$ olduğundan bu son eşitlik

$$
\begin{aligned}
K_{n,n}^{a}(f(u,v);x,y)-\ f(x,y)&\\
&= f_x(x,y)K_{n,n}^{a}\big((u-x);x\big)+f_y(x,y)K_{n,n}^{a}\big((v-y);y\big)\\
&+\frac{1}{2}\{f_{xx}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x)^2;x)\\
&+2f_{xy}(x,y)K_{n,n}^{a}((u-x);x)K_{n,n}^{a}((v-y);y)\\
&+f_{yy}(x,y)K_{n,n}^{a}((v-y)^2;y)\}\\
&+K_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v)\sqrt{(u-x)^4+(v-y)^4};x,y\right)
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafına $K_{n,n}^{a}(f;\omega,y)$ operatörü uygulandıktan sonra her iki tarafın ω ya göre türevi alınır ve Lemma 2.2.3 ve sonuç 1'den elde edilen sonuçlar kullanılırsa $(u,v)\in I$ için,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(f(u,v);\omega,y)\right)_{\omega=x}-f(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(1;\omega,y)\right)_{\omega=x}\\
&=f_x(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(u-x;\omega,y)\right)_{\omega=x}+f_y(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(v-y;\omega,y)\right)_{\omega=x}\\
&+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}((u-x)^2;x)\right)_{\omega=x}\right.\\
&+2f_{xy}(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(u-x;\omega,y)\right)_{\omega=x}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(v-y;\omega,y)\right)_{\omega=x}\\
&\left.+f_{yy}(x,y)\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}((v-y)^2;y)\right)_{\omega=x}\right\}\\
&+\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}\left(\psi(u,v;x,y)\sqrt{(u-x)^2+(v-y)^2};\omega,y\right)\right)_{\omega=x},\qquad (u,v)\in I\ için
\end{aligned}
$$

olup, burada $\psi(u,v;x,y) \equiv \psi(.,.) \in C_{\gamma_1,\gamma_2}(I)$ ve $\psi(x,y) = 0$ dır.

$$\left(\frac{\partial}{\partial\omega} K_{n,n}^{a}(f(u,v);\omega,y)\right)_{\omega=x} - f(x,y)$$

$$= f_x(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right) + f_y(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(x,y)\left(\frac{1}{(n+1)}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)\right.$$

$$+2f_{xy}(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\left.+f_{yy}(x,y)\left(\frac{1}{(n+1)^2}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)\right\}$$

Buradan çarpımın türevini uygularsak

$$\left(\frac{\partial}{\partial\omega} K_{n,n}^{a}(f;x,y)\right)_{\omega=x} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-1+\frac{a(1+x)-ax}{(1+x)^2}\right) f_x(x,y) + \left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right) f_{xx}(x,y)$$

$$+\left(\frac{1}{2(n+1)}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right) f_{xx}(x,y)$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right) f_{xy}(x,y) + f_y(x,y)0$$

$$+\left(\frac{1}{2(n+1)}(1+x+x)\right) f_{xx}(x,y)$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}\left(-1+\frac{ax}{(1+x)^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right) f_{xy}(x,y)$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right) f_{xyx}(x,y)$$

$$+f_{yy}(x,y)0 + f_{yyx}(x,y)\left(\frac{1}{n+1}\left(y(1+y)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)$$

Bu eşitliğin her iki tarafını n ile çarpıp $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(f;x,y)\right)_{\omega=x} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{n+1}\left(-1+\frac{a}{(1+x)^2}\right)f_x(x,y) + \left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)f_{xx}(x,y)\right.$$
$$+\left(\frac{1}{2(n+1)}\left(x(1+x)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)f_{xx}(x,y)$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)f_{xy}(x,y)$$
$$+\left(\frac{1}{2(n+1)}(1+x+x)\right)f_{xx}(x,y)$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}\left(-1+\frac{ax}{(1+x)^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)f_{xy}(x,y)$$
$$+\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)f_{xyx}(x,y)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n+1}\left(y(1+y)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)f_{yyx}(x,y)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{1}{n+1}\left(-1+\frac{a}{(1+x)^2}\right)f_x(x,y)\right\} + \lim_{n\to\infty} n\left\{\left(1+\frac{ax}{1+x}\right)f_{xx}(x,y)\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)f_{xy}(x,y)\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n+1}\left(-1+\frac{ax}{(1+x)^2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)f_{xy}(x,y)\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty} n\left\{+\left(\frac{1}{n+1}\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{1}{n+1}\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)\right)f_{xyx}(x,y)\right\}$$

$$+\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{1}{n+1}\left(y(1+y)+\frac{(1+a)^2}{n+1}\right)\right)f_{yyx}(x,y)\right\}$$

Buradan

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\omega}K_{n,n}^{a}(f;x,y)\right)_{\omega=x}-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\}$$

$$=\left(-1+\frac{a}{(1+x)^2}\right)f_x(x,y)+\left(1+\frac{ax}{1+x}\right)f_{xx}(x,y)$$

$$+\left(-y+\frac{ay}{1+y}+\frac{1}{2}\right)f_{xy}(x,y)+\frac{y}{2}(1+y)f_{xyy}(x,y)$$

$$+\frac{x}{2}(1+x)f_{xxx}(x,y)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\left(\frac{\partial}{\partial v}K_{n,n}^{a}(f;x,y)\right)_{v=y}-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\}$$

$$=\left(-1+\frac{a}{(1+y)^2}\right)f_y(x,y)+\left(1+\frac{ay}{1+y}\right)f_{yy}(x,y)$$

$$+\left(-x+\frac{ax}{1+x}+\frac{1}{2}\right)f_{xy}(x,y)+\frac{x}{2}(1+x)f_{xxy}(x,y)$$

$$+\frac{y}{2}(1+y)f_{yyy}(x,y)$$

eşitliği için de elde edilir.

4.3.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde 2015 yılında P.N.Agrawal ve M.Goyal tarafından yapılan tek değişkenli fonksiyonlar için verilmiş Generalized Baskakov Kantorovich Operators isimli çalışma temel baz alınarak hazırlanmış olan ve yine aynı yazarların çalıştığı iki değişkenli fonksiyonlar için verilen Bivariate Generalized Baskakov Kantorovich Operators isimli çalışmada verilen operatörün düzgün yakınsaklık ve noktasal yakınsaklık özellikleri incelenmiş son olarakta Voronovskaja tipi bir teorem verilmiştir. Tez hazırlanırken yazarların kullandığı sembollere bağlı kalınarak verilen Lemma ve teoremler kapsamlı bir şekilde irdelenmiş ve bu tür konulara ilgi duyan okuyucular için anlaşılır bir dille kaynak olacak şekilde açıklamalar yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] O. Agratini, Bivariate positive operators in polynomial weighted spaces, Abstr. Appl. Anal., (2013) 8 pp. (2013).

[2] P. N. Agrawal and M. Goyal, Generalized Baskakov Kantorovich operators FILOMAT, submitted after revision.

[3] F. Altomare and M. C. Montano and V. Leonessa, On a Generalization of Sz´asz-Mirakjan-Kantorovich Operators, Results Math., 63 (3-4) (2013) 837-863.

[4] D. Barbosu, Some generalized bivariate Bernstein operators. Math Notes (Miskolc) 1 (2000) 3-10.

[5] A. Erencin, Durrmeyer type modification of generalized Baskakov operators, Appl. Math. Comput. 218 (2011) 4384-4390.

[6] L. Rempulska and M. Skorupka, On convergence of first derivatives of certain Szasz-Mirakyan type operators, Rend. Mat. Appl. 7 (1999) 269-279.

[7] M. Skorupka, Approximation of functions of two variables by some linear positive operators, Matematiche (Catania) 50 (1995) 323-336.

[8] D. D. Stancu, A new class of uniform approximating polynomial operators in two and several variables. In: G. Alexits, S. B. Stechkin(eds.): Proceedings of the conference on consecutive theory of functions. Budapest: Akad´emiai Kiad´o (1972), pp. 443-455.

[9] A. Wafi and S. Khatoon, Approximation by generalized Baskakov operators for functions of one and two variables inexponential and polynomial weight spaces, Thai. J. Math. 2 (2004) 53-66.

[10] A. Wafi and S. Khatoon, Convergence and Voronovskaja-type theorems for derivatives of generalized Baskakov operators, Cent. Eur. J. Math. 6 (2008) 325-334.

[11] G. You and P. Xaun, Weighted approximation by multidimensional Baskakov operators, J. Math. Res. Exposition 20 (2000) 43-50.

[12] P. L. Butzer and H. Berens, Semi-groups of operators and approximation, Springer, New York, xi+318 pp. (1967).