T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL BERNSTEIN OPERATÖRLERİ

HALİL DEMİR

HAZİRAN 2019

ÖZET

ÜSTEL BERNSTEIN OPERATÖRLERİ

DEMİR, Halil
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak temel teoremler, tanımlar ve bazı eşitsizlikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin temelini oluşturan üstel Bernstein operatörü ve bu operatörü oluşturan üstel Bernstein polinomları tanımlanmıştır. Bu operatörün yakınsaklık özellikleri ile ilgili teoremler verilmiş, lineer pozitif operatör olduğu gösterilmiş, düzgün yakınsaklığı, yaklaşım hızı ve asimptotik yaklaşımı incelenmiş ve şekil koruma özellikleri gösterilmiştir. Aynı zamanda üstel Bernstein polinomlarının indirgeme bağıntısı incelenmiş, bu polinomların simetrik olduğu, negatif olmadığı ve birim parçalanış olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde üstel Bernstein operatörünün hangi durumlarda daha iyi olduğunu gösteren fonksiyon ailesi bulunmuştur. Ayrıca üstel Bernstein operatörü ve klasik Bernstein operatörü arasında grafik ve nümerik tablolar yardımı ile karşılaştırmalar yapılmış, böylece üstel Bernstein operatörünün Klasik Bernstein operatöründen daha iyi yakınsadığı gösterilmiştir.

Son bölümde ise üstel Bernstein Operatörünün yaklaşımı hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yaklaşım, Lineer Pozitif Operatörler, Süreklilik Modülü, Üstel Bernstein Operatörleri

ABSTRACT

EXPONENTIAL BERNSTEIN OPERATORS

DEMİR, Halil
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL

The thesis consists of three chapters. The aim of the study is given in the first chapter.

In the second chapter, some fundamental concepts, definitions and inequalities used throughout the thesis are given.

In the third chapter, exponential Bernstein operator and exponential Bernstein polynomials forming this operator are defined. Theorems related to approximation properties of the operators are given. This operator has been shown to be a lineer positive operator. The smooth convergence, approach speed and asiptotic approach of this operator were investigated and this operator’s shape preservation properties are shown. At the same time , the reduction relation of exponential Bernstein polynomials was examined, it was shown that polynomials of exponential Bernstein were symmetrical, not negative and unit fragmentation.

In the fourth chapter, a family of functions were found which showed the better conditions of the exponential Bernstein operator. In addition, comparisons between graphical and numerical tables were made between the exponential Bernstein and the classical Bernstein operator. Thus, it has been shown that the operator of the exponential Bernstein has a better approximation than the classical Bernstein operator.

At the end, information was given about the approach of the exponential Bernstein operator.

Key Words: Approximation, Lineer Positive Operators, Modulus of Continuity, Exponential Bernstein Operators.

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırlarken biz araştırmacılara yol gösteren bilimsel deney imkânları başta olmak üzere bir öğrencinin karşılaşabileceği problemleri çözmede bizlerin önüne bütün imkânları sunarak bizlere destek olan tez yöneticisi hocam Sayın Prof. Dr. Ali ARAL'a, tezimin başından sonuna kadar yaptığım araştırmalarımda karşıma çıkan bilimsel problemleri çözmemde ve tezimin yazımında yardımcı olan hocam Sayın Arş. Gör. Fırat ÖZSARAÇ'a ve Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana maddi ve manevi olarak destek olan yol arkadaşım eşime, kalplerim diye hitap ettiğim oğlum ve kızıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

ÇİZELGE Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı.
$L(f;x)$	L: $X \rightarrow Y$ tanımlanmış operatör.
$B_n(f;x)$	f fonksiyonunun n. dereceden Bernstein operatörü.
$P_{n,k}(x)$	f fonksiyonunun n. dereceden Bernstein polinomları.
$G_n(f;x)$	f fonksiyonunun n. dereceden üstel Bernstein operatörü.
$G_{n,k}(a_n(x))$	f fonksiyonunun n. dereceden üstel Bernstein polinomları.
$\lVert L \rVert_{X \rightarrow Y}$	L operatörünün normu.
$\omega(f,\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modulü.

1.GİRİŞ

Polinomlar kolay tanımlandıkları için bilgisayar sisteminde hızlı hesaplandıkları ve çeşitli fonksiyonlarla temsil edildikleri için çok kullanışlı matematiksel araçlardır. Ayrıca polinomlar kolayca türevlenebilir ve integrallenebilirler ve herhangi bir fonksiyona yaklaşabilecek olan eğriyi oluşturmak için birleştirilebilirler [1].

Alman matematikçi Karl Weierstrass'ın $[a,b]$ aralığında sürekli olan her fonksiyona yine bu aralıkta yakınsayan bir polinom olabileceğini ispat etmesiyle (1885) Yaklaşım teorisi başlamıştır. 1912 yılında Ukraynalı Matematikçi Sergei Natanoviç Bernstein, Weierstrass teoreminin ispatı için toplam biçiminde bir polinom tanımlamış ve C[0,1] uzayındaki fonksiyonlara düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. Sonraki yıllarda bu polinom Bernstein polinomu olarak adlandırılmıştır.

f fonksiyonu [0,1] aralığında tanımlı olmak üzere

$$B_n f(x) = B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x)$$

biçiminde tanımlanan operatöre *n*.dereceden Bernstein operatörü denir. [2]

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

polinomlarına ise Bernstein polinomları denir.

Daha sonraları lineer pozitif operatörlerin sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için hangi şartlar geçerlidir sorusu akla gelmiş ve bu soru üzerine Bohman, 1952 yılında lineer pozitif operatörlerin sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için aşağıdaki koşulların gerek ve yeter olduğunu ispatlamıştır.

$x \in [0,1]$, $0 \leq a_{k,n} \leq 1$ olmak üzere

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(a_{k,n}\right) P_{n,k}(x), \qquad P_{n,k}(x) \geq 0$$

lineer pozitif operatör dizisinin , $n \to \infty$ için [0,1] aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşullar üç tanedir. Bunlar;

$L_n(1;x) \rightrightarrows 1$

$L_n(t;x) \rightrightarrows x$

$L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

şeklinde ifade edilir. [3]

Korovkin (1953) genel bir teorem ispatlamış ve göstermiştir ki Bohman'ın koşulları genel halde de $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu içinde geçerlidir. [3]

Daha sonraki yıllarda da Bernstein operatörünün sürekli bir f fonksiyona yaklaşımı ve yaklaşım hızının bulunması üzerine birtakım çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları Lorentz'in (1953) yazdığı Bernstein Polynomials kitabıdır. Yine Shisha ve Mond (1968), Bernstein polinomlarının yaklaşım hızları ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Durmayer ise 1967 yılında [0,1] aralığında Bernstein operatörlerinin integrallenebilir modifikasyonlarını tanımlamıştır.

Biz de bu tezde Bernstein operatörlerinin bir genelleşmesi olan $\mu > 0$ olmak üzere $exp(\mu t)$ ve $exp(2\mu t)$ üstel fonksiyonlarını yeniden üreten bir operatör üzerinde yoğunlaşacağız. Bu operatörü oluşturan polinomları inceleyeceğiz. Bu yeni operatörün Korovkin teoremi yardımı ile yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz. Aynı zamanda, bu operatörün Voronovskaya tipli teoremlerini süreklilik modülü yardımı ile yakınsaklık hızını asimptotik yaklaşımını ve saturation problemini inceleyeceğiz. Son olarak genel konvekslik şartlarını göz önünde bulundurarak bu operatörün şekil koruma özelliklerini göstereceğiz.

Son bölümde de üstel Bernstein operatörünün klasik Bernstein operatöründen daha iyi yakınsadığını gösteren grafik ve nümerik tablolar yardımı ile karşılaştırmalar yapılacaktır.

1.1 Kaynak Özetleri

Bu tezde temel olarak Ali Aral, Daniel Cardenas-Morales ve Pedro Garrancho tarafından yazılan "Üstel fonksiyonları koruyan Bernstein-tipi operatörler" isimli makalede [8] ilk kez gösterilmiş olan üstel fonksiyonları koruyan Bernstein operatörlerini inceleyeceğiz. Bu inceleme esnasında bahsedilen konu ile ilgili olarak verilen diğer kaynaklardan da yararlanacağız. Bu operatörlerin incelenmesi esnasında konunun daha iyi anlaşılabilmesi için incelemeler en geniş anlamda yapılacaktır. Tezin son bölümünde yer alan kaynaklar kısmında da tezde kullanılan diğer materyaller verilecektir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde üstel fonksiyonları koruyan Bernstein tipi operatörler incelenecektir. Biliyoruz ki klasik Bernstein operatörleri teknolojiden sanayiye ve otomotiv sektöründe kullanılan pek çok uygulama alanına sahip bir operatördür. Bu tezde uygun fonksiyonlar için üstel genelleştirilmiş bernstein operatörlerinin klasik Bernstein operatörüne göre avantajları tartışılacak ve elde edilen sonuçlar örnekler ve grafiklerle açıklanacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanacağımız bazı tanımları vereceğiz. Bunlar çok sık kullanılan lineer pozitif operatörlerin tanımı, lineerlik, pozitiflik, monotonluk ve sınırlılık özellikleri, Bernstein operatörlerinin tanımı, lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık koşulları, Weierstrass yaklaşım teoremi, Korovkin teoremi, Bernstein operatörünün yaklaşım özellikleri ve süreklilik modülünün tanımı ve özellikleri olacaktır.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

X ve *Y* lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer *X* den alınan herhangi bir f fonksiyonuna *Y* de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir *L* kuralı varsa bu durumda *X* uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L(f;x) = L(f(t);x) = L(f)$$

biçiminde gösterilir. *X* uzayı *L* operatörünün tanım bölgesidir ve *X=D(L)* ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x) = g(x)$, *Y* uzayının bir elemanı olur ve bu şekilde *g* fonksiyonları kümesine *L* operatörünün değer kümesi denir.

Tanım 2.1.1: $L:X\to Y$ bir operatör olsun. Her $f_1, f_2 \in X$ ve $a,b\in$IR olmak üzere

$$L(af_1 + bf_2; x) = aL(f_1; x) + bL(f_2; x)$$

eşitliği sağlanıyor ise *L*'ye lineer operatör denir.

Tanım 2.1.2: $L:X\to Y$ bir lineer operatör olsun. Her $f\in X$ve $f \geq 0$ için $L(f) \geq 0$ oluyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir.

Tanım 2.1.3: $L:X\to Y$ bir operatör olsun. Her $f, g \in X$ ve her $t\in$ IR için

$$f(t) \leq g(t) \;\Rightarrow\; L(f(t);x) \leq L(g(t);x)$$

özelliğine monotonluk özelliği denir.

Lemma 2.1.1: *L* lineer pozitif operatör olsun. O halde *L* operatörü monotondur.

İspat:$f(t) \leq g(t) \Rightarrow g(t) - f(t) \geq 0$

L operatörü pozitif operatör olduğundan

$f(t) \leq g(t) \Rightarrow L(g(t) - f(t); x) \geq 0$

L operatörü lineer operatör olduğundan

$f(t) \leq g(t) \Rightarrow L(g(t); x) - L(f(t); x) \geq 0$

$\Rightarrow \ L(g(t); x) \geq \ L(f(t); x)$' dir ve ispat tamamlanır.

Tanım 2.1.4: X bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in X$ ve $a \in$IR için aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|\,.\,\|: X\text{x}X \rightarrow \|X\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

1) Tüm $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

2) Eğer $x \in X$ ve a skaler ise $\|ax\| = |a|.\|x\|$

3) Eğer $x \neq 0$ ise $\|x\| > 0$

Şartları sağlanıyorsa $\|\,.\,\|$ ile tanımlanan lineer uzayına normlu vektör uzayı denir ve $(X, \|\,.\,\|)$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.5: X ve Y lineer normlu iki fonksiyon uzayı olsun.

$L: X \rightarrow Y$

lineer bir operatör olsun. X üzerinde ki norm $\|.\|_X$, Y üzerinde ki norm $\|.\|_Y$ ve operatörün tanım kümesi $D(L)$ olmak üzere $\forall\ f \in D(L)$ için

$\|f\|_Y \leq M\|f\|_X$

olacak şekilde M>0 pozitif sayısı varsa L operatörüne sınırlı operatör denir.

NOT: Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar sınırlı ise görüntü kümesi de sınırlıdır. Ancak bu durum operatörler için geçerli değildir.

Tanım 2.1.6: $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1.7: X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun.

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = sup\left\{\frac{\|L(f)\|_Y}{\|f\|_X}, \|f\|_X \neq 0\right\}$$

$\|L\|_{X \rightarrow Y}$ ifadesine L operatörünün normu denir.

Tanım 2.1.8: $L: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $\delta(\varepsilon, f_0) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa öyle ki $\|f - f_0\|_X < \delta$ iken $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa, L operatörü $f_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. [4]

Tanım 2.1.9: (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_0$ vardır öyle ki $\forall\, x \in$ A için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Teorem 2.1.1: X ve Y iki normlu uzay, $L: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Bu halde L operarörü için sınırlılık ve süreklilik denktir.

Tanım 2.1.10: $n \in$IN olmak üzere $\left(L_n(f;x)\right)$ dizisine operatör dizisi denir.

2.2 Lineer Pozitif Operatörler Dizisinin Yakınsaklık Koşulları

Yaklaşım teorisinin amacı, keyfi bir fonksiyonun daha basit ve kullanışlı olan diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Bunun için bilinen temel teorem Weierstrass tarafından 1885'de verilmiştir.

Weierstarss, $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir. Bu teoremin ifadesi aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.2.1: (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)

f fonksiyonu , $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|\, f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n. dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Başka bir ifade ile $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$'e , $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi karşılık gelir.

Lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri ile ilgili temel teorem de Korovkin tarafından verilmiştir.

$x\in[0,1]$, $0 \le a_{n,k} \le 1$ olduğunda

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(a_{n,k}(x))P_{n,k}(x), \quad P_{n,k}(x) \ge 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin, $n \to \infty$ için , $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t;x) - x\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2;x) - x^2\| = 0$$

gerek ve yeter koşuldur ve bunlar Korovkin teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.2.2: (Korovkin Teoremi) L_n lineer pozitif operatör dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ aralığında düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $x\in[a,b]$için

$$\lim_{n\to\infty} L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(t;x) = x + \beta_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x)$$

şartları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f;x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$'e düzgün yakınsar. Burada f, $[a,b]$'de sürekli ve reel eksenin tamamında sınırlı bir fonksiyondur.

2.3 Bernstein Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

$f\in C[0,1]$ ve $x\in[0,1]$ olsun.

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlı olan lineer pozitif operatörlere Bernstein operatörleri denir.[5]

Teorem 2.3.1: Bernstein operatörleri $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna yine bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $f \in C[0,1]$ ise

$$B_n(f;x) \rightrightarrows f(x)\ ,\ x \in [0,1]$$

dir.

İspat: Öncelikle $B_n(f;x)$'in lineer ve pozitif bir operatör dizisi olduğunu gösterelim. Lineerliği için her $a,b \in$IR ve $f,g \in$C[0,1] için,

$$B_n(af+bg\,;x) = \sum_{k=0}^{n}\left[af\left(\frac{k}{n}\right) + bg\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} af\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} bg\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$+ b\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= aB_n(f;x) + bB_n(g;x)$$

olduğundan B_n lineer bir operatördür. Ayrıca k∈IN ve $x \in [0,1]$ için

$$\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \geq 0 \text{ ve } f \geq 0$$

olduğundan $B_n(f;x) \geq 0$ olur. Dolayısıyla $B_n(f;x)$ operatörü pozitiftir.

Korovkin teoreminin şartları olan

(i) $B_n(1;x) \rightrightarrows 1$

(ii) $B_n(t;x) \rightrightarrows x$

(iii) $B_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterirsek $B_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ olduğunu ispatlamış oluruz. Şimdi bunları gösterelim.

(i) $f(x) = 1$ için $B_n(1;x) \rightrightarrows 1$ olduğunu gösterelim.

$$B_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= (x + 1 - x)^n$$

$$= 1^n$$

$$= 1$$

elde edilir.

(ii) $f(x) = x$ için $B_n(t;x) \rightrightarrows x$ olduğunu gösterelim.

$$B_n(t;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x(x+1-x)^{n-1}$$

$$= x$$

elde edilir.

(iii) $B_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ olduğunu gösterelim. Bunun için $f(x) = x^2$alırsak

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k(k+1)+k}{n^2}\right) \frac{n!}{(n-k)!k!} \, x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \, x^k (1-x)^{n-k}$$

yazılır. Bu eşitlikte k yerine $k+1$ yazılırsa

$$B_n(t^2;x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \, x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n}\right) \binom{n-1}{k} \, x^{k+1} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n}\right) \binom{n-1}{k} \, x^{k} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n-1}{k} \, x^k (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n-1}{k} \, x^k (1-x)^{n-k-1} \right]$$

$$= x \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \, x^k (1-x)^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n-1}{k} \, x^k (1-x)^{n-k-1} \right]$$

$$= x \left[\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \, x^k (1-x)^{n-k-1} \right]$$

$$= x \left[\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \, x^k (1-x)^{n-k-1} \right]$$

yazılır. Bu eşitlikte k yerine $k+1$ yazılırsa

$$B_n(t^2;x) = x\left[\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)\frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}\; x^{k+1}(1-x)^{n-k-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}\; x^{k+1}(1-x)^{n-k-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!}\; x^{k}(1-x)^{n-k-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x\,(x+1-x)^{n-2}\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x\;1^{n-2}\right]$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

bulunur ve $B_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$ elde edilir. Dolayısı ile (*i*), (*ii*) ve (*iii*)
şartları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince $f \in C[0,1]$ için [0,1] aralığında

$$B_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \qquad (n \to \infty)$$

bulunur.

Teorem 2.3.2: $f \in C^2[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} 2n\big(B_n f(x) - f(x)\big) = x(1-x)f''(x)$$

dir. [6]

2.4. Süreklilik Modülü

Lineer pozitif operatörlerin yakınsama hızının belirlenmesi için en önemli kavramlardan birisi olan süreklilik modülü, keyfi sınırlı fonksiyonlar için tanımlanabilir. Bir çok kullanışlı özelliği sürekli fonksiyonlar için de geçerlidir.

Tanım 2.4.1: Kabul edelim ki f, $[a, b]$ aralığında tanımlanmış sınırlı bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta) = sup|f(t) - f(x)| \text{ , } |t - x| < \delta$$

$$= sup|f(x + h) - f(x)| \text{ , } |h| < \delta$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülü yakınsama hızının belirlenmesinde önemli rol oynayan bazı özelliklere sahiptir. Bunların bazılarını ispatıyla verelim.

Lemma 2.4.1: $m \geq 1$ bir doğal sayı olmak üzere

$$\omega(f, m\delta) \leq m\omega(f, \delta)$$

dır.

İspat: $\omega(f, m\delta) = sup|f(t) - f(x)| \text{ , } |t - x| < m\delta$

$$= sup|f(x + h) - f(x)| \text{ , } (t - x) \to h \text{ , } h < m\delta$$

$$= sup|f(x + h) + f(x + 2h) - f(x + 2h) + f(x + 3h)$$

$$-f(x + 3h) + \ldots + f(x + kh) - f(x + kh) - f(x)| \text{ , } h < m\delta$$

$$= sup|f(x + mh) - f(x)| \text{ , } (h \to mh) \text{ , } |h| < \delta$$

$$= sup\left|\sum_{k=0}^{m-1} f\big(x + (k + 1)h\big) - f(x + kh)\big)\right| \text{ , } |h| < \delta$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} sup\left|f\big(x + (k + 1)h - f(x + kh)\big)\right| \text{ , } |h| < \delta$$

$$= m\omega(f,\delta).$$

Lemma 2.4.2: $\lambda > 0$ bir reel sayı olmak üzere

$$\omega(f,\lambda\delta) \leq \ (1+\lambda)\ \omega(f,\delta)$$

dir.

İspat: $[\![\lambda]\!] \leq \ \lambda < [\![\lambda]\!]+1$ eşitliği her zaman doğru olduğundan

$$\omega(f,\lambda\delta) \leq \ \omega(f,([\![\lambda]\!]+1\,)\delta)$$

$$\leq ([\![\lambda]\!]+1\,)\ \omega(f,\delta)$$

$$\leq (1+\lambda\,)\ \omega(f,\delta)$$

yazılabilir.

Lemma 2.4.3: $x, t \in [a,b]$ olmak üzere $\delta > 0$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq (1+\tfrac{|t-x|}{\delta})\ \omega(f,\delta)$$

dir.

İspat: Her $x, t \in [a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)| \leq \ \omega(f,|t-x|)$$

$$= \omega(f,|t-x|\,\tfrac{\delta}{\delta})$$

$$= \omega(f,\tfrac{|t-x|}{\delta}\delta)\ \left\{\tfrac{|t-x|}{\delta} = \lambda \in \text{IR}\ alınırsa\right\}$$

$$\leq (1+\tfrac{|t-x|}{\delta})\ \omega(f,\delta)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 2.4.4: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0$$

dır.

İspat: : f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli (düzgün sürekli) olduğundan,

$\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\gamma > 0$ bulunabilir öyle ki

$|t-x| < \gamma$ şartını sağlayan $x, t\in$[a,b] için $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$'dur.

Eğer $\delta < \gamma$ seçilirse $|t-x| < \delta < \gamma$ şartını sağlayan x ve t ler için

$0 \leq \omega(f,\delta) \leq \varepsilon$ olur.

$\Rightarrow \omega(f,\delta) \to 0$, $(\delta \to 0)$

$\Rightarrow -\varepsilon < 0 < \omega(f,\delta) - 0 \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |\omega(f,\delta) - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0$.

Teorem 2.4.1: f, $[0,1]$ aralığında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun ve $\omega(f,x)$ süreklilik modülü için

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}.\omega(f,\frac{1}{\sqrt{n}}), n\in\text{IN}$$

dir. [6]

İspat:

$$B_n(f(t);x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} - f(x).1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(k/n) - f(x) \right)$$

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \, |f(k/n) - f(x)|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \, \omega(f, \left|\frac{k}{n} - x\right|)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \, \omega(f, \frac{\left|\frac{k}{n} - x\right|}{\delta}.\delta)$$

$$\leq \omega(f,\delta) \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(1 + \frac{1}{\delta}\left|\frac{k}{n} - x\right| \right)$$

$$= \omega(f,\delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} \right)$$

Cauchy Eşitsizliğinden ve $B_n((t-x)^2;x) = \frac{x(1-x)}{n}$ olduğundan ifadesinin alacağı maksimum değeri bulmak için türevi sıfıra eşitlenirse $x = \frac{1}{2}$ bulunur ve bu değer ifadede yerine yazılırsa

$\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ bulunur.

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq \omega(f,\delta)(1 + \frac{1}{\delta}.\frac{1}{2\sqrt{n}})$$

$\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ seçilirse

$$|B_n(f(t);x) - f(x)| \leq \frac{3}{2}\omega(f, \frac{1}{\sqrt{n}})$$

bulunur.

3. ÜSTEL BERNSTEIN OPERATÖRLERİ

3.1. Giriş ve ön hazırlıklar

Bu bölümde 2000 yılında Neamtu ve Morigi tarafından tanıtılan klasik Bernstein operatörlerinin [7] bir genelleşmesini ele alacağız. Özellikle $exp\,(\mu t)$ ve $exp\,(2\mu t)$, $\mu>0$ üstel fonksiyonlarını üreten bir polinom dizisi üzerine odaklanacağız. Bu yeni operatörün Korovkin teoremi yardımı ile yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz. Yine bu operatörün merkezi momentlerini hesaplayacağız. Aynı zamanda bu operatörün Voronovskaya tipli teoremlerini, süreklilik modülü yardımı ile yakınsaklık hızını, asimptotik yaklaşımını ve saturation problemini inceleyeceğiz. En son olarak genel konvekslik şartlarını göz önünde bulundurarak bu operatörün şekil koruma özelliklerini göstereceğiz.

$\mu>0$ sabit reel bir parametre olmak üzere $exp_{\mu}(t):=e^{\mu t}$ olarak tanımlamış olduğumuz üstel fonksiyonu exp_{μ} olarak yazacağız, onun ters fonksiyonunu da log_{μ} olarak yazacağız.

$e_x(t)$ fonksiyonunu $t-x$ olarak, $exp_{\mu,x}(t)$ fonksiyonunu ise $e^{\mu t}-e^{\mu x}$ olarak tanımlayacağız. Yine $e_i(t)=t^i$ olarak tanımlı polinom fonksiyonlarını da e_i olarak ifade edeceğiz.

3.2. Üstel Bernstein operatörleri ve polinomları

Tanım 3.2.1. f, [0,1] aralığında tanımlı bir fonksiyon, $n\in$ IN ve $x\in[0,1]$ için, $\mu>0$ sabit reel bir parametre olmak üzere n. dereceden üstel Bernstein polinomları dizisi

$$G_nf(x)=G_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f(\tfrac{k}{n})e^{-\mu k/n}e^{\mu x}G_{n,k}(a_n(x)) \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\boldsymbol{G_n}$ operatörüne üstel Bernstein operatörü denir.

$$G_{n,k}\big(a_n(x)\big) = \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{(n-k)} \tag{3.2}$$

polinomlarına üstel Bernstein polinomları denir.

Burada $a_n(x) = \frac{e^{\mu x/n}-1}{e^{\mu/n}-1}$ (3.3)

ve $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ dir.[8]

Matematiksel uygunluk için $k<0$ ve $k>n$ olduğunda $G_{n,k}\big(a_n(x)\big)=0$ alınmıştır. Üstel Bernstein operatörüne geçmeden önce $a_n(x)$ fonksiyonu ve üstel Bernstein polinomları incelenecektir.

3.2.1. $a_n(x)$ fonksiyonunun incelenmesi:

Dikkat edilmelidir ki burada $a_n(x)$ fonksiyonu için $a_n(0) = 0, a_n(1) = 1$'dir ve $x \in [0,1]$ için $a_n(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağladığı aşikârdır. Şöyle ki

$a_n(0) = 0$, $a_n(1) = 1$'dir.

$x \in [0,1]$ için $e^{\mu x/n}$ ifadesi her zaman $e^{\mu x/n} \geq 1$ olacağı için $a_n(x) = \frac{e^{\mu x/n}-1}{e^{\mu/n}-1} \geq 0$'dır.

Şimdi ise $a_n(x)$ fonksiyonunun artan ve konveks olduğunu gösterelim.

Birinci türevi pozitif olduğundan dolayı $a_n(x)$ fonksiyonu artandır. Şöyleki

$$a_n(x)' = \frac{\mu/n\, e^{\mu x/n}\left(e^{\mu/n}-1\right) - (e^{\mu x/n}-1).0}{\left(e^{\mu/n}-1\right)^2} = \frac{\mu/n\, e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}-1} \geq 0$$

olduğundan artandır.

İkinci türevi pozitif olduğundan dolayı $a_n(x)$ fonksiyonu konvekstir. Şöyleki

$$a_n(x)'' = \frac{\mu^2/_{n^2}\, e^{\mu x}/_n\left(e^{\mu}/_{n-1}\right)}{\left(e^{\mu}/_{n-1}\right)^2} = \frac{\mu^2/_{n^2}\, e^{\mu x}/_n}{e^{\mu}/_{n-1}} \geq 0$$

olduğundan konvekstir.

3.2.2. Üstel Bernstein polinomlarının incelenmesi:

n. dereceden $n+1$ tane üstel Bernstein polinomu vardır.
Örneğin, 1. dereceden üstel Bernstein polinomları iki tanedir ve $0 \leq x \leq 1$ ve $\mu=1$ için 1. dereceden üstel Bernstein polinomları

$$G_{1,0}\big(a_1(x)\big) = 1 - a_1(x)$$

$$= 1 - \frac{e^x - 1}{e - 1}$$

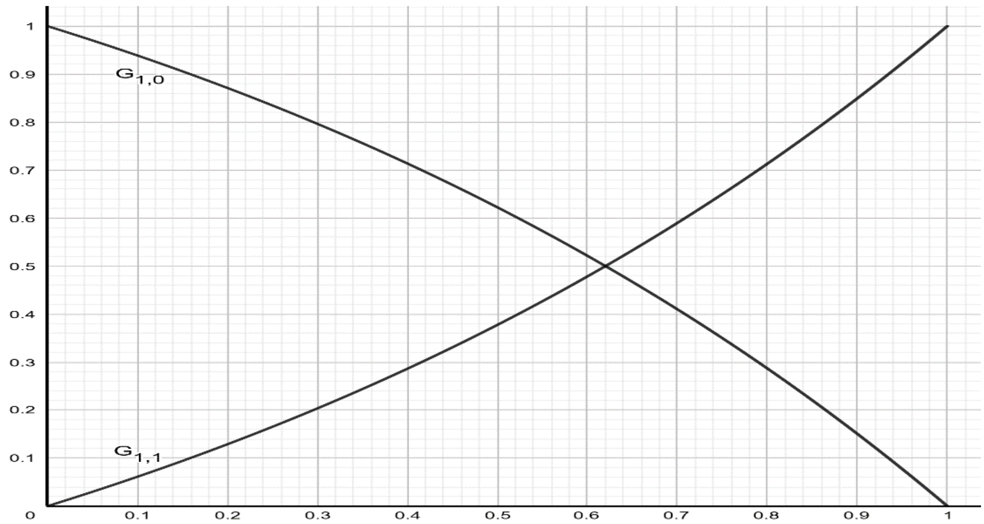
$$= \frac{e - e^x}{e - 1},$$

$$G_{1,1}\big(a_1(x)\big) = \frac{e^x - 1}{e - 1}$$

olarak elde edilir. O halde f, [0,1] aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere 1. dereceden üstel Bernstein operatörü

$$G_1 f(x) = G_1(f;x) = f(0)e^x G_{1,0}\big(a_1(x)\big) + f(1)e^{x-1} G_{1,1}\big(a_1(x)\big)$$

şeklindedir. Bu operatörü oluşturan 1. dereceden üstel Bernstein polinomlarının grafikleri ise şekildeki gibidir:



Şekil 3.1. 1. dereceden üstel Bernstein polinomları

2. dereceden üstel Bernstein polinomları üç tanedir. $0 \leq x \leq 1$ ve $\mu=1$ için 2. dereceden üstel Bernstein polinomları

$$G_{2,0}\big(a_2(x)\big) = \big(1 - a_2(x)\big)^2$$

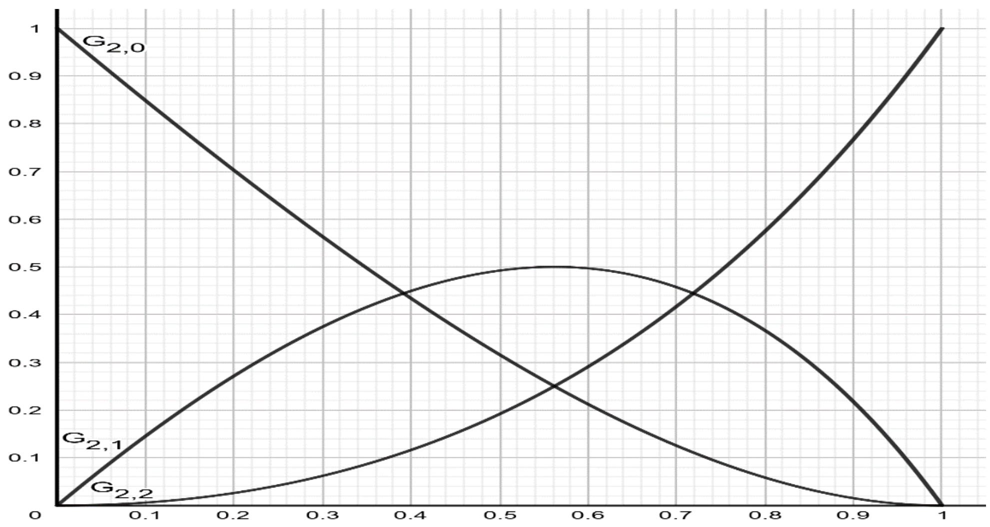
$$G_{2,1}\big(a_2(x)\big) = 2a_2(x)\big(1 - a_2(x)\big)$$

$$G_{2,2}\big(a_2(x)\big) = (a_2(x))^2$$

olarak elde edilir. O halde f, [0,1] aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere 2. dereceden üstel Bernstein operatörü

$$G_2 f(x) = f(0)e^x G_{2,0}\big(a_2(x)\big) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) e^{x-\frac{1}{2}} G_{2,1}\big(a_2(x)\big)$$
$$+ f(1)e^{x-1} G_{2,2}\big(a_2(x)\big)$$

şeklindedir. Bu operatörü oluşturan 2. dereceden üstel Bernstein polinomlarının grafikleri ise şekildeki gibidir:



Şekil 3.2. 2. dereceden üstel Bernstein polinomları

3. dereceden üstel Bernstein polinomları dört tanedir. $0 \leq x \leq 1$ ve μ=1 için 3. dereceden üstel Bernstein polinomları

$$G_{3,0}\big(a_3(x)\big) = \big(1 - a_3(x)\big)^3$$

$$G_{3,1}\big(a_3(x)\big) = 3a_3(x)\big(1 - a_3(x)\big)^2$$

$$G_{3,2}\big(a_3(x)\big) = 3a_3(x)^2\big(1 - a_3(x)\big)$$

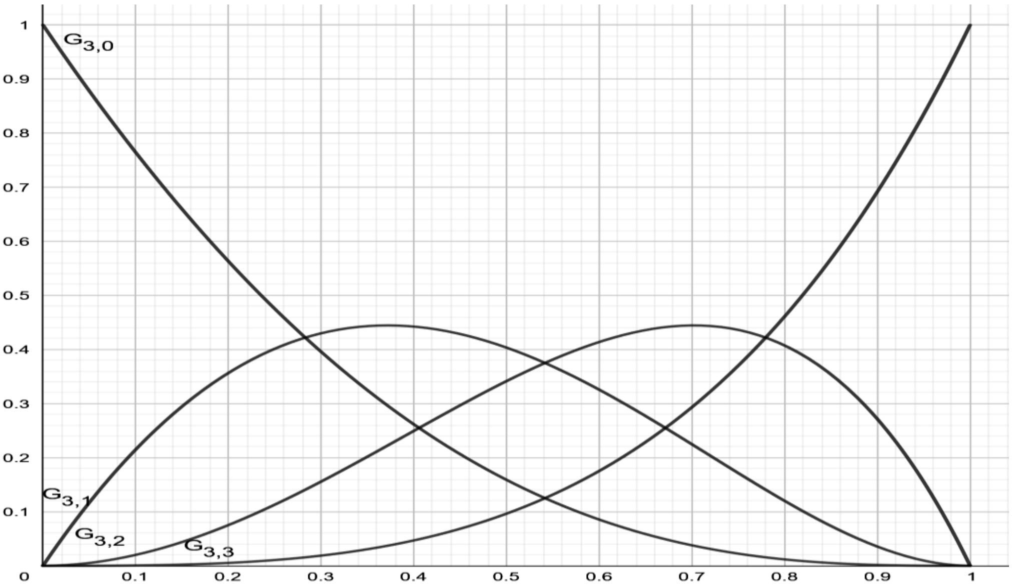
$$G_{3,3}\big(a_3(x)\big) = \big(a_3(x)\big)^3$$

olarak elde edilir. O halde f, [0,1] aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere 3. dereceden üstel Bernstein operatörü

$$G_3 f(x) = f(0)e^x G_{3,0}\big(a_3(x)\big) + f\left(\frac{1}{3}\right) e^{x-\frac{1}{3}} G_{3,1}\big(a_3(x)\big)$$

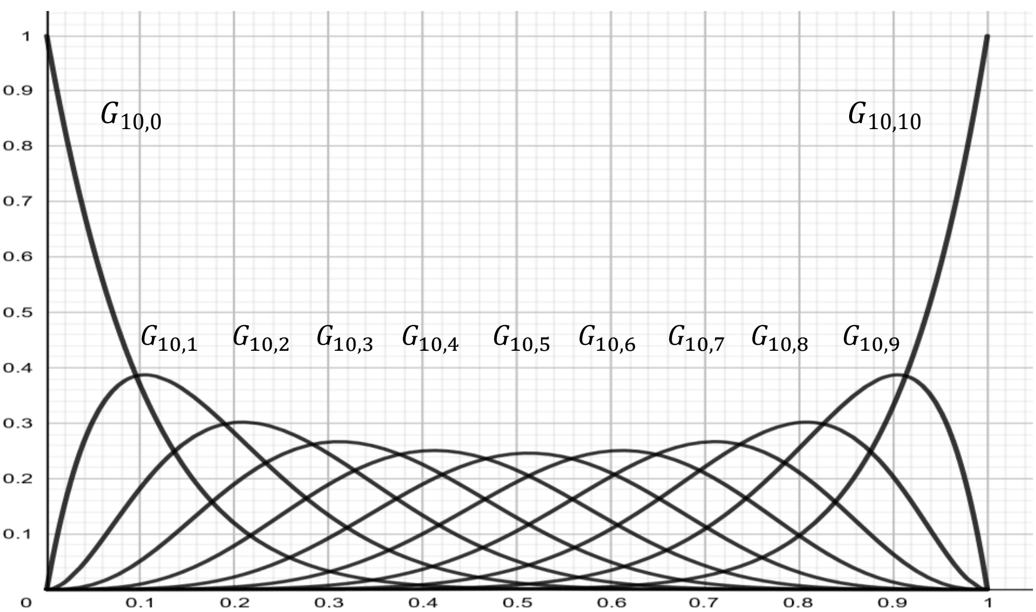
$$+ f\left(\frac{2}{3}\right) e^{x-\frac{2}{3}} G_{3,2}\big(a_3(x)\big) + f(1)e^{x-1} G_{3,3}\big(a_3(x)\big)$$

şeklindedir. Bu operatörü oluşturan 3. dereceden üstel Bernstein polinomlarının grafikleri ise şekildeki gibidir:



Şekil 3.3. 3. dereceden üstel Bernstein polinomları

10. dereceden üstel Bernstein polinomları onbir tanedir. $0 \leq x \leq 1$ ve μ=1 için 10. dereceden üstel Bernstein polinomları $G_{10,k}\big(a_{10}(x)\big) = \binom{10}{k}[a_{10}(x)]^k[1 - a_{10}(x)]^{10-k}$ olarak elde edilir. 10. dereceden üstel Bernstein polinomlarının grafikleri ise şekildeki gibidir:



Şekil 3.4. 10. dereceden üstel Bernstein polinomları

Teorem 3.2.1 (Üstel Bernstein polinomları için indirgeme bağıntısı)**:** Derecesi n olan bir üstel Bernstein polinomları derecesi (n-1) olan iki üstel Bernstein polinomlarının toplamı şeklinde yazılabilir. Yani derecesi n olan bir üstel Bernstein polinomu

$$G_{n,k}\big(a_n(x)\big) = \big(1 - a_{n-1}(x)\big).\,G_{n-1,k}\big(a_{n-1}(x)\big) + a_{n-1}(x).\,G_{n-1,k-1}\big(a_{n-1}(x)\big)$$

biçiminde yazılabilir.

İspat: Üstel Bernstein polinomu tanımı ve temel matematik hesapları ile eşitliğin sağ tarafını açalım:

$$\big(1 - a_{n-1}(x)\big).\,G_{n-1,k}\big(a_{n-1}(x)\big) + a_{n-1}(x).\,G_{n-1,k-1}\big(a_{n-1}(x)\big)$$

$$= \big(1 - a_{n-1}(x)\big)\binom{n-1}{k}[a_{n-1}(x)]^k[1 - a_{n-1}(x)]^{n-1-k}$$

$$+a_{n-1}(x)\binom{n-1}{k-1}[a_{n-1}(x)]^{k-1}[1 - a_{n-1}(x)]^{n-k}$$

$$= \tbinom{n-1}{k}[a_{n-1}(x)]^k[1 - a_{n-1}(x)]^{n-k}+\tbinom{n-1}{k-1}[a_{n-1}(x)]^k[1 - a_{n-1}(x)]^{n-k}$$

$$= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right]\ [a_{n-1}(x)]^k$$

$$= \left[\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\right][a_{n-1}(x)]^k[1 - a_{n-1}(x)]^{n-k}$$

$$= \left[(n-1)!\,\frac{n-k+k}{(n-k)!\,k!}\right][a_{n-1}(x)]^k[1 - a_{n-1}(x)]^{n-k}$$

$$= \left[\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\right][a_{n-1}(x)]^k][1 - a_{n-1}(x)]^{n-k}$$

$$= G_{n,k}\big(a_n(x)\big)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2: [0,1] aralığındaki üstel Bernstein polinomlarının her biri negatif değildir.

İspat: Üstel Bernstein polinomlarının indirgeme bağıntısından ve tümevarımdan yararlanarak ispat edilebilir.

$0 \leq x \leq 1$ ve n=1 için

$$G_{1,0}\big(a_1(x)\big) = 1 - a_1(x) = \frac{e^{\mu} - e^{\mu x}}{e^{\mu} - 1}$$

ve

$$G_{1,1}\big(a_1(x)\big) = a_1(x) = \frac{e^{\mu x} - 1}{e^{\mu} - 1}$$

fonksiyonları negatif değildir.

Şöyle ki μ>0 ve $x \in [0,1]$ için $1 \leq e^{\mu x} \leq e^{\mu}$ ve

$0 \leq a_1(x) = \frac{e^{\mu x}-1}{e^{\mu}-1} \leq 1$'dir.

O halde $G_{1,0}\big(a_1(x)\big)$ ve $G_{1,1}\big(a_1(x)\big)$ negatif değilidir.

$n=m$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani derecesi m olan tüm üstel Bernstein polinomları negatif olmasın,

$G_{m,k}\big(a_m(x)\big) \geq 0$, $G_{m,k-1}\big(a_m(x)\big) \geq 0, \ldots, G_{m,0}\big(a_m(x)\big) \geq 0$

olsun. Derecesi $m+1$ olan üstel Bernstein polinomları da negatif değil midir? İndirgeme bağıntısından biliyoruz ki

$$G_{n,k}\big(a_n(x)\big) = \big(1 - a_{n-1}(x)\big).\,G_{n-1,k}\big(a_{n-1}(x)\big) + a_{n-1}(x).\,G_{n-1,k-1}\big(a_{n-1}(x)\big)$$

dir. Burada n=m+1 yazılırsa

$$G_{m+1,k}\big(a_{m+1}(x)\big) = \big(1 - a_m(x)\big).\,G_{m,k}\big(a_m(x)\big) + a_m(x).\,G_{m,k-1}\big(a_m(x)\big)$$

eşitliğin sağ tarafının negatif olmadığını biliyoruz. O halde eşitliğin sol tarafı olan $G_{m+1,k}\big(a_{m+1}(x)\big)$ de negatif değildir. Tümevarımın ikinci şartı da sağlandığı için [0,1] aralığındaki üstel Bernstein polinomlarının her biri negatif değildir.

Teorem 3.2.3: Üstel Bernstein polinomları simetriktir. Yani

$$G_{n,k}\big(a_n(x)\big) = G_{n,n-k}\big(1 - a_n(x)\big)$$

dir.

İspat: Üstel Bernstein polinomları tanımından ve kombinasyonun $\binom{n}{k}$= $\binom{n}{n-k}$ özelliğinden yararlanarak;

$$G_{n,k}\big(a_n(x)\big) = \binom{n}{k}\,[a_n(x)]^k[1 - a_n(x)]^{n-k}$$

$$= \binom{n}{n-k}\,[1 - a_n(x)]^{n-k}[a_n(x)]^k$$

$$= G_{n,n-k}\big(1 - a_n(x)\big)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4: Derecesi *n* olan *n*+1 tane üstel Bernstein polinomlarının toplamı 1'e eşit olduğu için birim parçalanış oluşturur. Yani

$$\sum_{k=0}^{n} G_{n,k}\big(a_n(x)\big) = 1$$

dir.

İspat: Tümevarımla ispatlayalım.

n=1 için

$$G_{1,0}\big(a_1(x)\big)+ G_{1,1}\big(a_1(x)\big) = 1 - a_1(x) + a_1(x)$$

=1' dir.

n=m için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\sum_{k=0}^{m} G_{m,k}\big(a_m(x)\big) = G_{m,0}\big(a_m(x)\big) + G_{m,1}\big(a_m(x)\big) + \cdots + G_{m,m}\big(a_m(x)\big) = 1$$

olsun. n=m+1 için de doğru mudur?

$$\sum_{k=0}^{m+1} G_{m+1,k}\big(a_{m+1}(x)\big) = G_{m+1,0}\big(a_{m+1}(x)\big) + G_{m+1,1}\big(a_{m+1}(x)\big) + \cdots$$

$$+G_{m+1,m+1}\big(a_{m+1}(x)\big)$$

$$= \big(1-a_m(x)\big).G_{m,0}\big(a_m(x)\big) + a_m(x).G_{m,-1}\big(a_m(x)\big)$$

$$+\big(1-a_m(x)\big).G_{m,1}\big(a_m(x)\big) + a_m(x).G_{m,0}\big(a_m(x)\big) + \cdots$$

$$+\big(1-a_m(x)\big).G_{m,m+1}\big(a_m(x)\big) + a_m(x).G_{m,m}\big(a_m(x)\big)$$

$$= \big(1-a_m(x)\big).\big[G_{m,0}\big(a_m(x)\big) + G_{m,1}\big(a_m(x)\big) + \cdots$$

$$+G_{m,m+1}\big(a_m(x)\big)\big]$$

$$+a_m(x)\big[G_{m,-1}\big(a_m(x)\big) + G_{m,0}\big(a_m(x)\big) + \cdots$$

$$+G_{m,m}\big(a_m(x)\big)\big]$$

olur. Köşeli parantez içi k<0 ve k> n olduğu durumlarda

$G_{m,m+1}\big(a_m(x)\big) = 0$, $G_{m,-1}\big(a_m(x)\big) = 0$ alınırsa, geri kalanlar

$$\sum_{k=0}^{m} G_{m,k}\big(a_m(x)\big) = 1$$

olur. Eşitliği tekrar düzenlersek

$$\sum_{k=0}^{m+1} G_{m+1,k}\big(a_{m+1}(x)\big) = 1 - a_m(x) + a_m(x) = 1$$

bulunur. Tümevarımın ikinci şartı da sağlandığı için derecesi n olan n+1 tane üstel Bernstein polinomu birim parçalanış oluşturur.

3.2.3. Üstel Bernstein operatörünün incelenmesi:

Her $x \in [0,1]$ ve $n \in$ IN={1, 2,…} için üstel Bernstein operatörleri altında test fonksiyonlarının görüntülerini inceleyelim.

$$G_n(1;x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\mu k/n} e^{\mu x} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} e^{-\mu k/n} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[e^{-\mu/n} a_n(x)\right]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

olur. Binom açılımından

$$G_n(1;x) = e^{\mu x}[e^{-\mu/n} a_n(x) + 1 - a_n(x)]^n$$

$$= e^{\mu x}\left[\left(e^{-\mu/n} - 1\right) a_n(x) + 1\right]^n$$

elde edilir. (3.3)'de ki $a_n(x)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$G_n(1;x) = e^{\mu x}[(e^{-\mu/n} - 1) \frac{e^{\mu x/n} - 1}{e^{\mu/n} - 1} + 1]^n$$

$$= e^{\mu x} \left[\left(\frac{1 - e^{\mu/n}}{e^{\mu/n}}\right) \frac{e^{\mu x/n} - 1}{e^{\mu/n} - 1} + 1\right]^n$$

$$= e^{\mu x} \left[\left(\frac{-1}{e^{\mu/n}}\right) \frac{e^{\mu x/n} - 1}{1} + 1\right]^n$$

$$= e^{\mu x} \left(\frac{e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}}\right)^n$$

$$= e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n \tag{3.4}$$

elde edilir. Benzer şekilde $f(t) = e^{\mu t}$ için

$$G_n\left(exp_\mu;x\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{\mu k/n} e^{-\mu k/n} e^{\mu x} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

olur. Binom açılımından

$$G_n\left(exp_\mu; x\right) = e^{\mu x} \tag{3.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $f(t) = e^{2\mu t}$ için

$$G_n\left(exp_\mu^2; x\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{2\mu k/n} e^{-\mu k/n} e^{\mu x} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} e^{\mu k/n} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[e^{\mu/n} a_n(x)\right]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

elde edilir. Binom açılımından

$$G_n\left(exp_\mu^2; x\right) = e^{\mu x} [e^{\mu/n} a_n(x) + 1 - a_n(x)]^n$$

$$= e^{\mu x} \left[\left(e^{\mu/n} - 1\right) a_n(x) + 1\right]^n$$

elde edilir. (3.3)'de ki $a_n(x)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$G_n\left(exp_\mu^2; x\right) = e^{\mu x} \left[\left(e^{\mu/n} - 1\right) \frac{e^{\mu x/n} - 1}{e^{\mu/n} - 1} + 1\right]^n$$

$$= e^{\mu x} (e^{\mu x/n})^n$$

$$= e^{2\mu x} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitliklerinden üstel Bernstein operatörlerinin exp_μ ve exp_μ^2 fonksiyonlarını koruduğu kolayca görülüyor. Diğer taraftan bilindiği üzere klasik Bernstein operatörleri de e_0 ve e_1 fonksiyonlarını korur.

Benzer şekilde $f(t) = e^{3\mu t}$ için

$$G_n\left(exp_{\mu}^3;x\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{3\mu k/n}e^{-\mu k/n}e^{\mu x}\binom{n}{k}[a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$$=e^{\mu x}\sum_{k=0}^{n}e^{2\mu k/n}\binom{n}{k}[a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$$=e^{\mu x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[e^{2\mu/n}a_n(x)\right]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

olur. Binom açılımından

$$G_n\left(exp_{\mu}^3;x\right)\ =e^{\mu x}\left[e^{2\mu/n}a_n(x)+\ 1-a_n(x)\right]^n$$

$$=e^{\mu x}\left[\left(e^{2\mu/n}-1\right)a_n(x)+1\right]^n$$

yazılabilir. (3.3)'de ki $a_n(x)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$G_n\left(exp_{\mu}^3;x\right)\ =e^{\mu x}[(e^{2\mu/n}-1)\frac{e^{\mu x/n}-1}{e^{\mu/n}-1}+1]^n$$

$$=e^{\mu x}\left[\frac{(e^{\mu/n}-1)\ (e^{\mu/n}+1)\ (e^{\mu x/n}-1)}{(e^{\mu/n}-1)}+1\right]^n$$

$$=\ e^{\mu x}[(e^{\mu/n}+1)\ (e^{\mu x/n}-1)+1]^n$$

$$=e^{\mu x}\left[e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-1+1\right]^n$$

$$=e^{\mu x}\left[e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}\right]^n \qquad (3.7)$$

elde edilir. $f(t)=e^{4\mu t}$ için

$$G_n\left(exp_{\mu}^4;x\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{4\mu k/n}e^{-\mu k/n}e^{\mu x}\binom{n}{k}[a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$$=e^{\mu x}\sum_{k=0}^{n}e^{3\mu k/n}\binom{n}{k}[a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[e^{3\mu/n} a_n(x)\right]^k [1 - a_n(x)]^{n-k}$$

yazılabilir. Binom açılımından

$$G_n\left(exp_{\mu}^{4}; x\right) = e^{\mu x}\left[e^{3\mu/n} a_n(x) + \ 1 - a_n(x)\right]^n$$

$$= e^{\mu x}\left[\left(e^{3\mu/n} - 1\right) a_n(x) + 1\right]^n$$

olur. (3.3)'de ki $a_n(x)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$G_n\left(exp_{\mu}^{4}; x\right) = e^{\mu x}[(e^{3\mu/n} - 1) \frac{e^{\mu x/n} - 1}{e^{\mu/n} - 1} + 1]^n$$

$$= e^{\mu x} \left[\frac{(e^{\mu/n} - 1)\,(e^{2\mu/n} + e^{\mu/n} + 1)\,(e^{\mu x/n} - 1)}{(e^{\mu/n} - 1)} + 1\right]^n$$

$$= e^{\mu x}[(e^{2\mu/n} + e^{\mu/n} + 1)\,(e^{\mu x/n} - 1) + 1]^n$$

$$= e^{\mu x}\left[(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{2\mu/n} - e^{\mu/n} - 1 + 1\right]^n$$

$$= e^{\mu x}\left[(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{2\mu/n} - e^{\mu/n}\right]^n \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 3.2.2: $N_{n,m}(t) = L_n((t - x)^m; x), m \in \mathrm{IN}$ ile tanımlanan ifadelere L_n operatör dizisinin m-inci merkezi momentleri denir.

(3.4)−(3.8) eşitliklerinden yararlanarak her $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathrm{IN}$ için üstel Bernstein operatörlerinin ilk dört merkezi momentleri aşağıdaki gibi hesaplanır :

$m = 1$ için ve G_n operatörü lineer olduğundan

$$G_n\left(exp_{\mu,x}; x\right) = G_n((e^{\mu t} - e^{\mu x}); x)$$

$$= G_n(e^{\mu t}; x) - G_n(e^{\mu x}; x)$$

$$= e^{\mu x} - e^{\mu x} G_n(1; x)$$

$$= e^{\mu x}[1 - G_n(1;x)]$$

$$= e^{\mu x}\left[1 - e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n\right] \quad (3.9)$$

yazılabilir. $m = 2$ için ve G_n operatörü lineer olduğundan

$$G_n\left(exp_{\mu,x}{}^2;x\right) = G_n((e^{\mu t} - e^{\mu x})^2;x)$$

$$= G_n\left((e^{2\mu t} - 2e^{\mu t}e^{\mu x} + e^{2\mu x});x\right)$$

$$= G_n(e^{2\mu t};x) - 2e^{\mu x}G_n(e^{\mu t};x) + e^{2\mu x}G_n(1;x)$$

$$= e^{2\mu x} - 2e^{2\mu x} + e^{2\mu x}[e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n]$$

$$= e^{2\mu x}[e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n - 1]$$

$$= e^{2\mu x}\left[G_n\left(exp_{\mu}^0;x\right) - 1\right] \quad (3.10)$$

yazılabilir. Benzer şekilde $m = 3$ için ve G_n operatörü lineer olduğundan

$$G_n\left(exp_{\mu,x}{}^3;x\right) = G_n((e^{\mu t} - e^{\mu x})^3;x)$$

$$= G_n\left((e^{3\mu t} - 3e^{2\mu t}e^{\mu x} + 3e^{\mu t}e^{2\mu x} + e^{3\mu x});x\right)$$

$$= G_n(e^{3\mu t};x) - 3e^{\mu x}G_n(e^{2\mu t};x) + 3e^{2\mu x}G_n(e^{\mu t};x) - e^{3\mu x}G_n(1;x)$$

$$= e^{\mu x}\left(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right)^n - 3e^{3\mu x} + 3e^{3\mu x}$$

$$-e^{3\mu x}\left[e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n\right]$$

$$= e^{\mu x}\left[\left(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right)^n - e^{\mu(3x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n\right]$$

$$(3.11)$$

yazılabilir. $m = 4$ için ve G_n operatörü lineer olduğundan

$$G_n\left(exp_{\mu,x}{}^4;x\right) = G_n((e^{\mu t} - e^{\mu x})^4;x)$$

$$= G_n\left((e^{4\mu t} - 4e^{3\mu t}e^{\mu x} + 6e^{2\mu t}e^{2\mu x} - 4e^{\mu t}e^{3\mu x} + e^{4\mu x});x\right)$$

$$= G_n(e^{4\mu t};x) - 4e^{\mu x}G_n(e^{3\mu t};x) + 6e^{2\mu x}G_n(e^{2\mu t};x)$$

$$-4e^{3\mu x}G_n(e^{\mu t};x) + e^{4\mu x}G_n(1;x)$$

$$= e^{\mu x}(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{2\mu/n} - e^{\mu/n})^n$$

$$-4e^{2\mu x}\left[e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right]^n + 6e^{4\mu x} - 4e^{4\mu x}$$

$$+e^{\mu(5x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$$

$$= e^{\mu x}[2e^{3\mu x} + e^{\mu(4x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$$

$$-4e^{\mu x}(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n})^n$$

$$+\left(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n}\right)^n] \qquad (3.12)$$

yazılabilir.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu [0,1] aralığında sürekli ise $G_n(f;x)$ operatörü $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu ileride ispatlanacaktır. Şimdi bazı fonksiyonlar için G_n operatörünün görüntülerini elde edelim.

Örnek 3.1: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun G_n operatörü altındaki 5.,50. ve 100. dereceden görüntülerini hesaplayıp [0,1] aralığında grafiklerini gösterelim.

Öncelikle $\mu = 1$ için $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ fonksiyonunun G_n operatörü altındaki görüntüsünü hesaplayalım.

Açıktır ki,

$$G_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k/n} e^{-k/n} e^x \, G_{n,k}\left(a_n(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k/n} e^{-k/n} e^x \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{(n-k)}$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[a_n(x) \left(\frac{1}{4}\right)^{1/n} e^{-1/n} \right]^k [1 - a_n(x)]^{(n-k)}$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[a_n(x) \left(\frac{1}{4}\right)^{1/n} e^{-1/n} \right]^k [1 - a_n(x)]^{(n-k)}$$

$$= e^x \left[a_n(x) \left(\frac{1}{4}\right)^{1/n} e^{-1/n} + 1 - a_n(x) \right]^n$$

$$= e^x \left[a_n(x) \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{1/n} e^{-1/n} - 1 \right) + 1 \right]^n$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi ise $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ fonksiyonunun G_n operatörü altındaki 5.,50.ve 100. dereceden görüntülerini hesaplayalım.

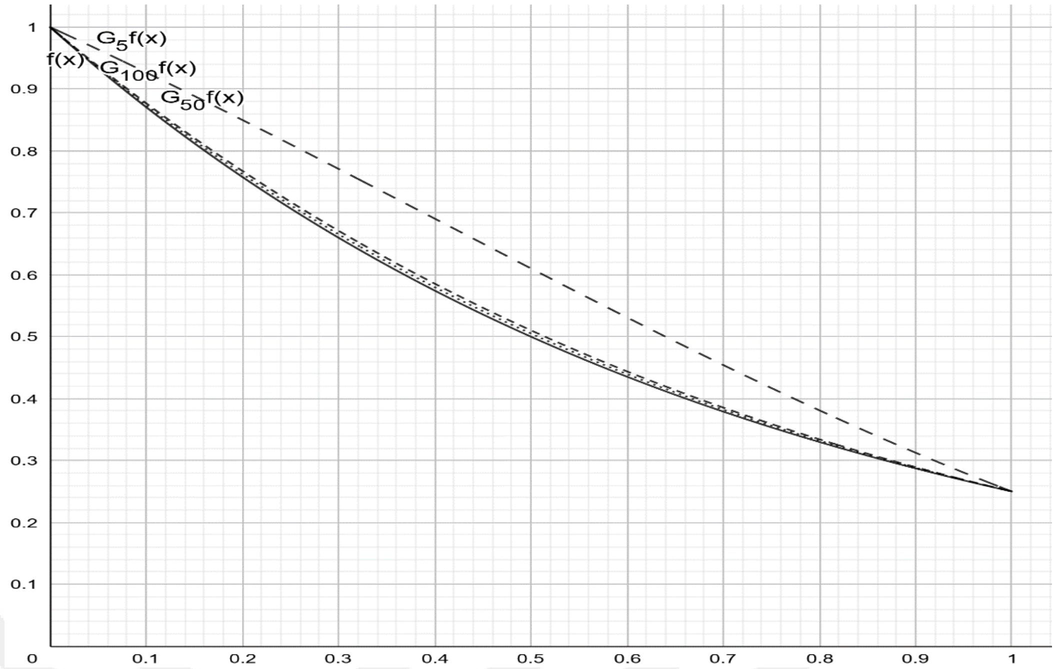
$$G_5 f(x) = e^x \left[a_5(x) \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{1/5} e^{-1/5} - 1 \right) + 1 \right]^5,$$

$$G_{50} f(x) = e^x \left[a_{50}(x) \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{1/50} e^{-1/50} - 1 \right) + 1 \right]^{50}$$

ve

$$G_{100} f(x) = e^x \left[a_{100}(x) \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{100} e^{-1/100} - 1 \right) + 1 \right]^{100}$$

şeklinde hesaplanır. Bu operatörlerin $x \in [0,1]$ aralığında görüntüleri ise aşağıdaki gibidir. Karışıklık olmaması için $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini düz çizgi ile, $G_{100}f(x)$'in grafiğini ($\cdots\cdots\cdots$) ile, $G_{50}f(x)$'in grafiğini (--------) ile ve $G_5 f(x)$' in grafiğini ($---$) ile gösterdik.



Şekil 3.5. [0,1] aralığında $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun G_n operatörü altındaki 5.,50.ve 100. dereceden görüntüleri

Örnek 3.2: $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun G_n operatörü altındaki 3.,5.ve 7. dereceden görüntülerini hesaplayıp grafiklerinin gösterelim.

Öncelikle $\mu = 1$ için $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonunun G_n operatörü altındaki görüntüsünü hesaplayalım.

$$G_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(\pi\, k/n) e^{-k/n} e^x\, G_{n,k}\big(a_n(x)\big)$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} \sin(\pi\, k/n) e^{-k/n} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k [1 - a_n(x)]^{(n-k)}$$

Şimdi ise $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonunun G_n operatörü altındaki 3.,5.ve 7. dereceden görüntülerini hesaplayalım

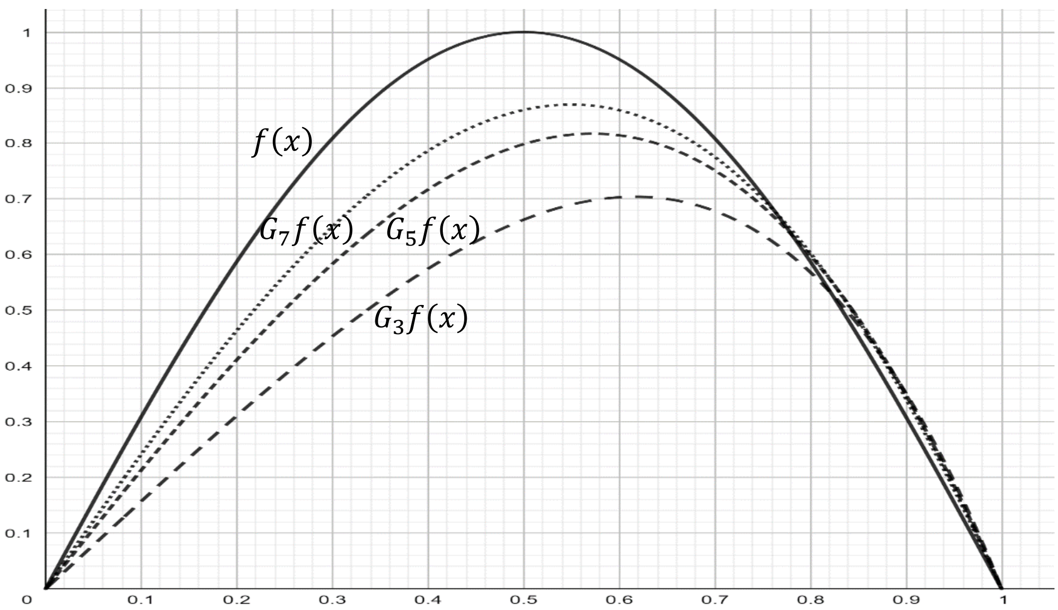
$$G_3 f(x) = e^x \sum_{k=0}^{3} \sin(\pi\, k/3) e^{-k/3} \binom{3}{k} [a_3(x)]^k [1 - a_3(x)]^{3-k},$$

$$G_5f(x) = e^x \sum_{k=0}^{3} \sin(\pi\, k/3)e^{-k/3} \binom{3}{k} [a_3(x)]^k[1 - a_3(x)]^{3-k}$$

ve

$$G_7f(x) = e^x \sum_{k=0}^{3} \sin(\pi\, k/3)e^{-k/3} \binom{3}{k} [a_3(x)]^k[1 - a_3(x)]^{3-k}$$

şeklinde hesaplanır. Bu operatörlerin [0,1] aralığında görüntüleri ise aşağıda ki gibidir.



Şekil 3.6. [0,1] aralığında $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun G_n operatörü altındaki 3.,5.ve 7. dereceden görüntüleri

Şimdi de üstel Bernstein operatörünün klasik Bernstein operatörü ile olan yakın ilişkisini görelim.

Lemma 3.2.1: Her $x \in [0,1]$ ve $n \in$IN için

$$G_n(f;x) = exp_\mu(x)B_n(\frac{f}{exp_\mu}; a_n\,(x))$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Lemmadaki eşitliğin sol tarafını göz önüne alalım.

$$exp_{\mu}(x)B_n(\frac{f}{exp_{\mu}}; an(x)) = e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \frac{f}{exp_{\mu}}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}[a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} \frac{f(k/n)}{e^{\mu k/n}} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$$= e^{\mu x} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\mu k/n} \binom{n}{k} [a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\mu k/n} e^{\mu x}\binom{n}{k}[a_n(x)]^k[1-a_n(x)]^{n-k}$$

$= G_n(f; x)$ elde edilir.

Lemma 3.2.2: (3.1) de tanımlanan üstel Bernstein operatörü lineer pozitif bir operatördür.

İspat: $f \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$G_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\mu k/n} e^{\mu x} G_{n,k}\left(a_n(x)\right) \geq 0$$

olur. Teorem 3.2.2 gereği üstel Bernstein operatörlerinin her biri negatif değildir. O halde $G_n(f; x) \geq 0$ olduğundan dolayı üstel Bernstein operatörü pozitif operatördür.

Şimdi operatörün lineerliğini gösterelim. $a, b \in$ IR için

$$G_n(af + bg\,; x) = \sum_{k=0}^{n} \left[af\left(\frac{k}{n}\right) + bg\left(\frac{k}{n}\right)\right] e^{-\mu k/n} e^{\mu x} G_{n,k}(an(\mathrm{x}))$$

$$= \sum_{k=0}^{n} af\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\mu k/n} e^{\mu x} G_{n,k}\left(a_n(x)\right)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{bg}\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\mu k/n} e^{\mu x} G_{n,k}\left(a_n(x)\right)$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\mu k/n} e^{\mu x} G_{n,k}\left(a_n(x)\right)$$

$$+b\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) e^{-\mu k/n} e^{\mu x} G_{n,k}\left(a_n(x)\right)$$

$$= aG_n(f;x) + \mathrm{b}G_n(g;x)$$

yazılabilir. Buradan da üstel Bernstein operatörünün lineer pozitif operatör olduğu anlaşılır.

Lemma 3.2.3: Her $x \in [0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için $\mu \geq 1$ olduğunda

$e_x^2(t) < exp_{\mu,x}^2(t)$

dir.

İspat: Ortalama değer teoreminden

$$\frac{e^{\mu t} - e^{\mu x}}{t - x} = \mu e^{\mu x_0} > 1\,, t < x_0 < x$$

olur. Buradan

$|t - x| < |e^{\mu t} - e^{\mu x}|$

elde edilir. Her iki tarafın karesi alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.5: $f \in C\,[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olsun. Tanım 3.2.1 ile tanımlanan $G_n f(x)$ üstel Bernstein operatörü $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat: Lemma 3.2.2 gereği üstel Bernstein operatörü lineer pozitif operatördür. Korovkin teoreminde $\{1, t, t^2\}$ test fonksiyonları yerine $\{1, e^{\mu t}, e^{2\mu t}\}$ fonksiyonları göz önüne alınabilir. [9]

(3.4) gereği $G_n(e_0;x) = G_n(1;x) = e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$ dir.

$\lim\limits_{n\to\infty}[G_n(e_0;x) - 1]$ limitinin 0 olduğunu göstermeliyiz.

$$\lim_{n\to\infty}[G_n(e_0;x) - 1] = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n - 1\right]$$

$$= e^{\mu(x-1)} \lim_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n - 1$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n$ limitinde 1^∞ belirsizliği olduğu için gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\ln \lim_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n.\ln(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n})$$

$$\ln \lim_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\mu/n}-e^{\mu x/n}}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}}{-1/n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n}\right) = \mu-\mu x$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n = e^{\mu(1-x)}$ elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty}[G_n(e_0;x)-1] = e^{\mu(x-1)}e^{\mu(1-x)}-1$$

$$= e^0-1$$

$$= 0\text{'dır.}$$

(3.5) gereği $G_n\left(exp_\mu;x\right)=e^{\mu x}$ idi. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\left[G_n\left(exp_\mu;x\right)-e^{\mu x}\right] = \lim_{n\to\infty}[e^{\mu x}-e^{\mu x}]$$

$$= 0\text{'dır.}$$

(3.6) gereği $G_n\left(exp_\mu^2;x\right)=e^{2\mu x}$ idi. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\left[G_n\left(exp_\mu^2;x\right)-e^{2\mu x}\right] = \lim_{n\to\infty}[e^{2\mu x}-e^{2\mu x}]$$

$$= 0\text{'dır.}$$

Böylece $G_n(f;x)$ operatörü $f(x)$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. $G_n e_0(x)$ operatörünün $e_0(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ispatlayalım.

$G_n e_0(x) = e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n$ idi.

$G_n e_0(0) = e^{\mu(0-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu.0/n}\right)^n = 1$

ve

$G_n e_0(1) = e^{\mu(1-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu.1/n}\right)^n = 1$

olduğundan ispat $x = 0$ ve $x = 1$ için açıktır.

Şimdi ise $G_n(e_0; x)$ operatör dizisinin [0,1] aralığında alabileceği maksimum değeri bulalım. Bunun için operatörün türevini alalım.

$G_n(e_0; x) = e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$idi.

$$\Rightarrow G_n{}'(e_0; x) = \mu e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$$

$$+e^{\mu(x-1)}.n.\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^{n-1}.(-\mu/n).e^{\mu x/n}$$

$$= \mu e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^{n-1}.\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n} - e^{\mu x/n}\right)$$

$$= \mu e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^{n-1}.\left(e^{\mu/n} + 1 - 2e^{\mu x/n}\right) = 0$$

olur. Bu eşitliğin sıfır olması için $\left(e^{\mu/n} + 1 - 2e^{\mu x/n}\right) = 0$ olması gerekir.

Çünkü $\mu e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^{n-1} \neq 0$ olduğunu biliyoruz.

$e^{\mu/n} + 1 - 2e^{\mu x/n} = 0$ denklemi çözülür.

$$e^{\mu/n} + 1 - 2e^{\mu x/n} = 0 \Rightarrow e^{\mu x/n} = \frac{e^{\mu/n} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{e^{\mu/n} + 1}{2} = \mu x/n$$

$$\Rightarrow x = \frac{n}{\mu}.\ln\frac{e^{\mu/n} + 1}{2}$$

kritik noktası elde edilir.

Bulduğumuz x noktasını G_n operatöründe yerine yazalım,

$$\sup_{x\in[0,1]} G_n(e_0;x) = G_n\left(e_0;\frac{n}{\mu}.\ln\frac{e^{\mu/n}+1}{2}\right)$$

$$= e^{\mu\left(\frac{n}{\mu}.\ln\frac{e^{\mu/n}+1}{2}-1\right)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\ln\frac{e^{\mu/n}+1}{2}}\right)^n$$

$$= \left(\frac{e^{\mu/n}+1}{2}\right)^n.e^{-\mu}.\left(e^{\mu/n}+1-\frac{e^{\mu/n}+1}{2}\right)^n$$

$$= e^{-\mu}\left(\frac{e^{\mu/n}+1}{2}\right)^{2n}$$

$$= e^{-\mu}\left(e^{\mu/n}+1\right)^{2n}4^{-n} \text{ elde edilir.}$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\mu}\left(e^{\mu/n}+1\right)^{2n}4^{-n} = e^{-\mu}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\mu/n}+1}{2}\right)^{2n}$$

$$= e^{-\mu}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{e^{\mu/n}-1}{2}\right)^{2n}$$

$$= 1$$

olduğundan $G_n(e_0;x)$ operatörü e_0 fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu şekilde $G_n f(x)$ üstel Bernstein operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.6: $f \in C\,[0,1]$, $x \in (0,1)$ ve $\delta>0$ olsun. Bu durumda

$$|G_n(f;x)-f(x)| \le |f(x)|.(G_n(e_0;x)-1)$$
$$+\left(G_n(e_0;x)+\frac{e^{2\mu x}(G_n(e_0;x)-1)}{\delta^2}\right)\omega\left(f\circ\log_\mu;\ \delta\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $\mu \ge 1$ ise $\omega\left(f\circ\log_\mu;\ \delta\right)$ yerine $\omega(f,\delta)$ yazılabilir.

İspat: $|f(t)-f(x)| = \left|f\circ\log_\mu(e^{\mu t}) - f\circ\log_\mu(e^{\mu x})\right|$ olduğundan süreklilik modülünün $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f, |t-x|)$ özelliği kullanılırsa,

$$|f(t)-f(x)| = \left|f\circ \log_{\mu}(e^{\mu t}) - f\circ \log_{\mu}(e^{\mu x})\right|$$

$$\leq \omega\left(f\circ \log_{\mu};\ |e^{\mu t}-e^{\mu x}|\right)$$

yazılabilir. Süreklilik modülünün $\omega(f;\ \alpha\delta) \leq (1+\alpha)\omega(f;\ \delta)$ özelliğinden

$$\omega\left(f\circ \log_{\mu};\ |e^{\mu t}-e^{\mu x}|\right) = \omega\left(f\circ \log_{\mu};\ |e^{\mu t}-e^{\mu x}|.\frac{\delta}{\delta}\right)$$

$$\leq \left(1+\frac{|e^{\mu t}-e^{\mu x}|}{\delta}\right).\omega\left(f\circ \log_{\mu};\ \delta\right)$$

elde edilir. Teorem 3.2.7 den yararlanarak

$$\omega\left(f\circ \log_{\mu};\ |e^{\mu t}-e^{\mu x}|\right) \leq \left(1+\frac{(e^{\mu t}-e^{\mu x})^2}{\delta^2}\right).\omega\left(f\circ \log_{\mu};\ \delta\right)$$

elde edilir.

[10] makalesindeki, klasik Shisha ve Mond özelliğinden, (3.10) kullanılarak ve $G_n\left(exp_{\mu}^{0};x\right) \geq 1$ olduğundan,

$$|G_n(f;x)-f(x)| \leq |f(x)|.(\,G_n(e_0;x)-1) + (G_n(e_0;x)+1)\omega(\mu_n\ )$$

$$= |f(x)|.(\,G_n(e_0;x)-1)$$

$$+\left(G_n(e_0;x)+\frac{G_n\left(exp_{\mu,x}^{2};x\right)}{\delta^2}\right)\omega\left(f\circ \log_{\mu};\ \delta\right)$$

$$= |f(x)|.(\,G_n(e_0;x)-1)$$

$$+\left(G_n(e_0;x)+\frac{e^{2\mu x}(G_n(e_0;x)-1)}{\delta^2}\right)\omega\left(f\circ \log_{\mu};\ \delta\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mu \geq 1$ olması durumunda aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

Lemma 3.2.3’deki $e_x^2(t) < exp_{\mu,x}^{2}(t)$ eşitsizliğini kullanarak

$$|f(t)-f(x)| \leq \left(1+\frac{e_x^2(t)}{\delta^2}\right)\omega(f;\delta) < \left(1+\frac{(e^{\mu t}-e^{\mu x})^2}{\delta^2}\right)\omega(f;\delta)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.7: Eğer $f \in C\,[0,1]$ fonksiyonu $x \in (0,1)$ noktasında ikinci türeve sahip ise, o halde

$$\lim_{n\to\infty} 2n[G_n(f(t);x)-f(x)] = x(1-x).[f''(x)-3\mu f'(x)+2\mu^2 f(x)]$$

dir.

İspat: $f(t) = (f \circ \log_\mu)(e^{\mu t})$ fonksiyonunun x noktasındaki Taylor açılımı

$$f(t) = (f \circ \log_\mu)(e^{\mu t})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(f \circ \log_\mu)^{(k)}(e^{\mu x})}{k!}(e^{\mu t}-e^{\mu x})^k$$

$$= (f \circ \log_\mu)(e^{\mu x}) + (f \circ \log_\mu)'(e^{\mu x})(e^{\mu t}-e^{\mu x})$$

$$+\frac{(f \circ \log_\mu)''(e^{\mu x})}{2!}(e^{\mu t}-e^{\mu x})^2$$

$$+(e^{\mu t}-e^{\mu x})^2[h_x(t)]$$

şeklindedir. Burada $h_x(t) = t-x$ şeklinde tanımlayalım. $h_x(t)$ fonksiyonu x noktasında sürekli ve $h_x(x) = 0$'dır.

Üstel Bernstein operatörü yukarıdaki eşitliğe uygulanırsa

$$G_n((f \circ \log_\mu)(e^{\mu t});x) = (f \circ \log_\mu)(e^{\mu x})G_n(e_0;x)$$

$$+(f \circ \log_\mu)'(e^{\mu x})G_n\big((exp_{\mu,x}(t);x\big)$$

$$+\frac{(f \circ \log_\mu)''(e^{\mu x})}{2!}G_n\big(exp_{\mu,x}^2(t);x\big)$$

$$+G_n\big(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\big)$$

yazılabilir.

$$(f\circ T^{-1})'T(t)=\frac{f'(t)}{T'(t)}$$

ve

$$(f\circ T^{-1})''T(t)=\frac{f''(t)}{(T'(t))^2}-f'(t)\frac{T''(t)}{(T'(t))^3}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\left(f\circ \log_{\mu}\right)'(e^{\mu x})=\frac{f'(x)}{(e^{\mu x})'}=\frac{f'(x)}{\mu e^{\mu x}}=e^{\mu x}\mu^{-1}f'(x) \tag{3.13}$$

ve

$$\left(f\circ \log_{\mu}\right)''(e^{\mu x})=\frac{f''(x)}{\mu^2 e^{2\mu x}}-f'(x)\frac{\mu^2 e^{\mu x}}{\mu^3 e^{3\mu x}}=e^{-2\mu x}(\mu^{-2}f''(x)-\mu^{-1}f'(x)) \tag{3.14}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.6), (3.7), (3.10) ve (3.11) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}G_n(f(t);x)&=f(x)G_n(e_0;x)+e^{-\mu x}\mu^{-1}f'(x)e^{\mu x}[1-G_n(e_0;x)]\\&\quad+\frac{e^{-2\mu x}\left(\mu^{-2}f''(x)-\mu^{-1}f'(x)\right)}{2}e^{2\mu x}[G_n(e_0;x)-1]\\&\quad+G_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right)\\&=f(x)G_n(e_0;x)+\mu^{-1}f'(x)[1-G_n(e_0;x)]\\&\quad+\frac{\left(\mu^{-2}f''(x)-\mu^{-1}f'(x)\right)}{2}[G_n(e_0;x)-1]\ +G_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right)\end{aligned}$$

elde edilir. İki taraftan $f(x)$ çıkaralım ve $(G_n(e_0;x)-1\ )$ parantezine alalım.

$$\begin{aligned}G_n(f(t);x)-f(x)&=f(x)[G_n(e_0;x)-1]+\mu^{-1}f'(x)[1-G_n(e_0;x)]\\&\quad+\frac{\left(\mu^{-2}f''(x)-\mu^{-1}f'(x)\right)}{2}[G_n(e_0;x)-1]\\&\quad+G_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right)\end{aligned}$$

$$= [G_n(e_0;x) - 1]\left(f(x) - \frac{3}{2\mu}f'(x) + \frac{1}{2\mu^2}f''(x)\right)$$

$$+G_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right)$$

elde edilir. Her iki tarafı n ile çarpıp, $n \to \infty$ limitini alalım.

$$\lim_{n\to\infty} n[G_n(f(t);x) - f(x)] = \lim_{n\to\infty} n.[G_n(e_0;x) - 1]\left(f(x) - \frac{3}{2\mu}f'(x) + \frac{1}{2\mu^2}f''(x)\right)$$

$$+\lim_{n\to\infty} nG_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right) \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15) limitinin içinde yer alan ifadelerin ayrı ayrı limitlerini araştıralım.

$\lim_{n\to\infty} n[G_n(e_0;x) - 1]$ limitini hesaplayalım.

$$\lim_{n\to\infty} n[G_n(e_0;x) - 1] = \lim_{n\to\infty} n\left[e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\mu(x-1)}\, n\left[\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n - e^{\mu(1-x)}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\mu(x-1)}\, \frac{\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n - e^{\mu(1-x)}}{1/n}$$

L'Hospital kuralı gereğince

$$\lim_{n\to\infty} n[G_n(e_0;x) - 1] = \lim_{n\to\infty} e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$$

$$.\frac{ln\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right) + n.\dfrac{-\frac{\mu}{n^2}e^{\mu/n} + \frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}}}{-1/n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$$

$$.\left[-n^2 ln\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right) + n.\frac{\mu e^{\mu/n} - \mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n\right]$$

$$. \lim_{n\to\infty}\left[-n^2 ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+n.\frac{\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]$$

olur. $\lim_{n\to\infty}\left[e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n\right]=1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} n[G_n(e_0;x)-1]=\lim_{n\to\infty}\left[-n^2 ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+n.\frac{\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[-n ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+\frac{\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+\dfrac{\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)-n.\frac{\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\frac{-\mu^2}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{\mu^2x^2}{n^2}e^{\mu x/n}\right)\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)-\left(\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n}\right)\left(\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}\right)}{\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^2}\right\}/(-1/n^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n^2 ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)-n.\frac{\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]$$

$$+\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(\mu^2 e^{\mu/n}-\mu^2x^2e^{\mu x/n})(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n})-(\mu e^{\mu/n}-\mu x e^{\mu x/n})^2}{(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n})^2}\right]$$

elde edilir. Son durumda,

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n[G_n(e_0;x)-1]=-\lim_{n\to\infty} n[G_n(e_0;x)-1]+2\mu^2x(1-x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n[G_n(e_0;x)-1]=\mu^2x(1-x) \tag{3.16}$$

eşitliği elde edilir. İspatın tamamlanabilmesi için $\lim_{n\to\infty} nG_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right)$ limitinin 0'a eşit olduğunu göstermeliyiz.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$n\left|G_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right)\right| \leq \sqrt{n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)}.\sqrt{G_n(h_x^2(t);x)} \tag{3.17}$$

yazılabilir.

Teorem 3.2.5'e göre $\lim_{n\to\infty} G_n(h_x^2(t);x) = h_x^2(x) = 0$'dır.

$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)$ ifadesinin limitini hesaplamalıyız. Bunun için önce

$G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)$ ifadesinin limitini araştıralım.

(3.12)'deki eşitlikten yararlanırsak

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right) = \lim_{n\to\infty} e^{\mu x}[&2e^{3\mu x} + e^{\mu(4x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n \\ &-4e^{\mu x}(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n})^n \\ &+\left(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n}\right)^n]\end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin içinde yer alan $\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$, $(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n})^n$, $(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n})^n$ ifadelerin limitlerini ayrı ayrı hesaplayalım.

$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$ ifadesinin limitini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\mu/n} - e^{\mu x/n}}{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n} + \frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}}{-1/n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\mu e^{\mu/n} - \mu x e^{\mu x/n}\right) = \mu - \mu x\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n = e^{\mu(1-x)} \tag{3.19}$$

elde edilir.

$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^n$ ifedesinin limitini hesaplayalım.

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}).n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{\mu(x+1)}{n^2}e^{\mu(x+1)/n}-\dfrac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}+\dfrac{\mu}{n^2}e^{\mu/n}}{-1/n^2}=\mu(x+1)+\mu x-\mu=2\mu x$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^n=e^{2\mu x} \tag{3.20}$$

elde edilir.

$\lim\limits_{n\to\infty}(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})^n$ limitini hesaplayalım.

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1+e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}).n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{\mu(x+2)}{n^2}e^{\mu(x+2)/n}-\dfrac{\mu(x+1)}{n^2}e^{\mu(x+1)/n}-\dfrac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}+\dfrac{\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\dfrac{2\mu}{n^2}e^{2\mu/n}}{-1/n^2}$$

$=\mu(x+2)+\mu(x+1)+\mu x-3\mu=3\mu x$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})^n=e^{3\mu x} \tag{3.21}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri (3.18)'de yerine koyarsak

$$\lim_{n\to\infty}G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)=e^{\mu x}\left[2e^{3\mu x}+e^{\mu(4x-1)}e^{\mu(1-x)}-4e^{\mu x}e^{2\mu x}+e^{3\mu x}\right]$$

$$=e^{\mu x}[2e^{3\mu x}+e^{3\mu x}-4e^{3\mu x}+e^{3\mu x}]$$

$$= 0$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t); x\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 e^{\mu x}[2e^{3\mu x} + e^{\mu(4x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n$$

$$-4e^{\mu x}(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n})^n$$

$$+\left(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n}\right)^n]$$

limitinde $\infty.0$ belirsizliği vardır. Öncelikle bu limitin kolay hesaplanabilmesi için köşeli parantez içini $e^{3\mu x}$'e bölüp parantez dışını $e^{3\mu x}$ ile çarpalım.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t); x\right) = e^{4\mu x} \lim_{n\to\infty} n^2 [e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n - 1$$

$$-4[e^{-2\mu x}(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n})^n - 1]$$

$$+e^{-3\mu x}\left(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n}\right)^n - 1]$$

elde edilir. $\infty.0$ belirsizliği olduğu için 0/0 haline getirip L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t); x\right)$$

$$= e^{4\mu x} \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^n\right] \left[\left[\ln(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}) + n \frac{\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n} + \frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}} \right] \right.$$

$$-4e^{-2\mu x}(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n})^n$$

$$.\left[\ln(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}) + n \frac{-\frac{\mu(x+1)}{n^2} e^{\mu(x+1)/n} - \frac{\mu x}{n^2} e^{\mu x/n} + \frac{\mu}{n^2} e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}} \right]$$

$$+e^{-3\mu x}(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n})^n$$

$$.\left[\ln(e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n}) + n \frac{-\frac{\mu(x+2)}{n^2}e^{\mu(x+2)/n} - \frac{\mu(x+1)}{n^2}e^{\mu(x+1)/n} - \frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n} + \frac{\mu}{n^2}e^{\mu/n} + \frac{2\mu}{n^2}e^{2\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n} + e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n} - e^{2\mu/n}} \right] \right\}$$

$$/\left(^{-2}/_{n^3}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)$$

$$=-\frac{e^{4\mu x}}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{ne^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n]n\left[n\ln(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n})+\frac{-\mu e^{\mu/n}+\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]\right.$$

$$-4ne^{-2\mu x}(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^n$$

$$.n\left[n\ln(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})+\frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}\right]$$

$$+ne^{-3\mu x}(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})^n$$

$$\left..n\left[n\ln(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})+\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}\right]\right\}$$

elde edilir. Bu limitin içinde yer alan

$$n\left[n\ln(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n})+\frac{-\mu e^{\mu/n}+\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right],$$

$$n\left[n\ln(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})+\frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}\right],$$

ve

$$n\left[n\ln(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})+\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}\right]\}$$

İfadelerin limitlerini araştıralım.

$$\lim_{n\to\infty} n\left[nln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+\frac{-\mu e^{\mu/n}+\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+\frac{-\mu e^{\mu/n}+\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+n.\frac{\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right.$$

$$\left.+\frac{(\frac{+\mu^2}{n^2}e^{\mu/n}-\frac{\mu^2x^2}{n^2}e^{\mu x/n})(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n})-(-\mu e^{\mu/n}+\mu x e^{\mu x/n})(\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n})}{\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^2}\right\}/(-1/n^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ -n^2 ln\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right) - n.\frac{-\mu e^{\mu/n} + \mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}} \right.$$

$$\left. - \frac{(+\mu^2 e^{\mu/n} - \mu^2 x^2 e^{\mu x/n})\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right) - (-\mu e^{\mu/n} + \mu x e^{\mu x/n})(-\mu e^{\mu/n} + \mu x e^{\mu x/n})}{(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n})^2} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-n^2 ln\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right) - n.\frac{-\mu e^{\mu/n} + \mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}} \right]$$

$$-\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(+\mu^2 e^{\mu/n} - \mu^2 x^2 e^{\mu x/n})(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}) - (-\mu e^{\mu/n} + \mu x e^{\mu x/n})^2}{\left(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}\right)^2} \right]$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} n \left[n\ln(e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}) + \frac{-\mu e^{\mu/n} + \mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n} + 1 - e^{\mu x/n}} \right] = -\mu^2 x \qquad (3.22)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} n \left[nln(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}) + \frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n} - \mu x e^{\mu x/n} + \mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{nln(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}) + \dfrac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n} - \mu x e^{\mu x/n} + \mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}}}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ ln\left(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right) + n.\frac{-\dfrac{\mu(x+1)}{n^2} e^{\mu(x+1)/n} - \dfrac{\mu x}{n^2} e^{\mu x/n} + \dfrac{\mu}{n^2} e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}} \right.$$

$$\left. + \frac{(+\frac{\mu^2(x+1)^2}{n^2} e^{\mu(x+1)/n} + \frac{\mu^2 x^2}{n^2} e^{\mu x/n} - \frac{\mu^2}{n^2} e^{\mu/n})\left(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right) - \left(-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n} - \mu x e^{\mu x/n} + \mu e^{\mu/n}\right)(-\frac{\mu(x+1)}{n^2} e^{\mu(x+1)/n} - \frac{\mu x}{n^2} e^{\mu x/n} + \frac{\mu}{n^2} e^{\mu/n})}{(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n})^2} \right\}$$

$/ (-1/n^2)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ -n^2 ln\left(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right) - n.\frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n} - \mu x e^{\mu x/n} + \mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}} \right.$$

$$\left. - \frac{(\mu^2(x+1)^2 e^{\mu(x+1)/n} + \mu^2 x^2 e^{\mu x/n} - \mu^2 e^{\mu/n})\left(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right) - (-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n} - \mu x e^{\mu x/n} + \mu e^{\mu/n})(-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n} - \mu x e^{\mu x/n} + \mu e^{\mu/n})}{\left(e^{\mu(x+1)/n} + e^{\mu x/n} - e^{\mu/n}\right)^2} \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[-n^2 ln\left(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}\right)-n.\frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}\right]$$

$$-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(\mu^2(x+1)^2 e^{\mu(x+1)/n}+\mu^2x^2e^{\mu x/n}-\mu^2 e^{\mu/n})(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})-(-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n})^2}{(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^2}\right]$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n\ln(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})+\frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}\right]=-\mu^2x(1-x)$$

(3.23)

elde edilir. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} n\left[nln(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})+\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nln(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})+\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big\{ln\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)$$

$$+n.\frac{-\frac{\mu(x+2)}{n^2}e^{\mu(x+2)/n}-\frac{\mu(x+1)}{n^2}e^{\mu(x+1)/n}-\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}+\frac{\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{2\mu}{n^2}e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}$$

$$+\Big[\left(\frac{\mu^2(x+2)^2}{n^2}e^{\mu(x+2)/n}+\frac{\mu^2(x+1)^2}{n^2}e^{\mu(x+1)/n}+\frac{\mu^2x^2}{n^2}e^{\mu x/n}-\frac{\mu^2}{n^2}e^{\mu/n}\right)\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)$$

$$-\left(-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}\right)$$

$$\left(-\frac{\mu(x+2)}{n^2}e^{\mu(x+2)/n}-\frac{\mu(x+1)}{n^2}e^{\mu(x+1)/n}-\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}+\frac{\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{2\mu}{n^2}e^{\mu/n}\right)\Big]$$

$$/\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)^2\Big\}/(-1/n^2)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big\{-n^2 ln\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)$$

$$-n.\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}$$

$$-\Big[\Big(\mu^2(x+2)^2e^{\mu(x+2)/n}+\mu^2(x+1)^2e^{\mu(x+1)/n}+\mu^2x^2e^{\mu x/n}-\mu^2e^{\mu/n}\Big)\Big(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\Big)$$

$$-\big(-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu xe^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}\big)$$

$$\big(-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu xe^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}\big)\Big]$$

$$/\big(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\big)^2\Big]\Big\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big[-n^2ln\big(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\big)$$

$$-n.\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu xe^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}\Big]$$

$$-\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Big(\mu^2(x+2)^2e^{\mu(x+2)/n}+\mu^2(x+1)^2e^{\mu(x+1)/n}+\mu^2x^2e^{\mu x/n}-\mu^2e^{\mu/n}\Big)\big(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\big)-\big(-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu xe^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}\big)^2}{\big(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\big)^2}\right]$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}n\big[n\ln(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})\big]$$

$$+\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu xe^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}$$

$$=-3\mu^2x(1-x) \tag{3.24}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2G_n\big(exp_{\mu,x}^4(t);x\big)$ limitini tekrar düzenlersek

$$\lim_{n\to\infty}n^2G_n\big(exp_{\mu,x}^4(t);x\big)=-\frac{e^{4\mu x}}{2}\lim_{n\to\infty}\Big\{ne^{\mu(x-1)}\big(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\big)^n]\big[-\mu^2x(1-x)\big]$$

$$-4ne^{-2\mu x}(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^n.\big[-\mu^2x(1-x)\big]$$

$$+ne^{-3\mu x}(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})^n$$

$$.\big[-3\mu^2x(1-x)\big]\Big\}$$

elde edilir. O halde $-\mu^2x(1-x)n$ ortak parantezine alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}n^2G_n\big(exp_{\mu,x}^4(t);x\big)=\frac{e^{4\mu x}\mu^2x(1-x)}{2}\lim_{n\to\infty}n\big\{e^{\mu(x-1)}\big(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\big)^n$$

$$-4e^{-2\mu x}\left(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}\right)^{n}$$

$$+3e^{-3\mu x}\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)^{n}\Big\}$$

yazılabilir. (3.19), (3.20) ve (3.21) deki eşitlikler dikkate alınırsa yukarıdaki eşitliğin içindeki limitte de $\infty.0$ belirsizliği görülür bu limiti 0/0 haline getirip L'Hospital kuralını uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^{4}(t);x\right)$$

$$=\frac{e^{4\mu x}\mu^2 x(1-x)}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^{n}\right]\left[\left[\ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+n\frac{\frac{-\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]\right.$$

$$-4e^{-2\mu x}\left(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}\right)^{n}$$

$$.\left[\ln\left(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}\right)+n\frac{-\frac{\mu(x+1)}{n^2}e^{\mu(x+1)/n}-\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}+\frac{\mu}{n^2}e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}\right]$$

$$+3e^{-3\mu x}\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)^{n}$$

$$.\left[\ln\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)+n\frac{-\frac{\mu(x+2)}{n^2}e^{\mu(x+2)/n}-\frac{\mu(x+1)}{n^2}e^{\mu(x+1)/n}-\frac{\mu x}{n^2}e^{\mu x/n}+\frac{\mu}{n^2}e^{\mu/n}+\frac{2\mu}{n^2}e^{2\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}\right]\Bigg\}$$

$$/\left(-1/_{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^{4}(t);x\right)$$

$$=-\frac{e^{4\mu x}\mu^2 x(1-x)}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^{n}\right]n\left[n\ln\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)+\frac{-\mu e^{\mu/n}+\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]$$

$$-4e^{-2\mu x}\left(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}\right)^{n}$$

$$.n\left[n\ln\left(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}\right)+\frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}\right]$$

$$+3e^{-3\mu x}\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)^{n}$$

$$.n\left[n\ln\left(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}\right)+\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}\right]\Big\}$$

Bu ifadenin ayrı ayrı limitlerini alalım.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)$$

$$= -\frac{e^{4\mu x}\mu^2 x(1-x)}{2}\left\{\lim_{n\to\infty} e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n . \lim_{n\to\infty} n\left[n\ln(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n})+\frac{-\mu e^{\mu/n}+\mu x e^{\mu x/n}}{e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}}\right]\right.$$

$$-\lim_{n\to\infty} 4e^{-2\mu x}(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^n$$

$$. \lim_{n\to\infty} n\left[n\ln(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})+\frac{-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}}\right]$$

$$+3\lim_{n\to\infty} e^{-3\mu x}(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})^n$$

$$. \lim_{n\to\infty} n\left[n\ln(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})\right.$$

$$\left.\left.+\frac{-\mu(x+2)e^{\mu(x+2)/n}-\mu(x+1)e^{\mu(x+1)/n}-\mu x e^{\mu x/n}+\mu e^{\mu/n}+2\mu e^{\mu/n}}{e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n}}\right]\right\}$$

(3.22), (3.23) ve (3.24) eşitlikleri kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right) = -\frac{e^{4\mu x}\mu^2 x(1-x)}{2}\left\{\lim_{n\to\infty} e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n .[-\mu^2 x(1-x)]\right.$$

$$-\lim_{n\to\infty} 4e^{-2\mu x}(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^n.[-\mu^2 x(1-x)]$$

$$\left.+3\lim_{n\to\infty} e^{-3\mu x}(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})^n.[-3\mu^2 x(1-x)\right\}$$

elde edilir. $-\mu^2 x(1-x)$ ortak parantezine alıp $\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)$ limitini tekrar düzenlersek;

$$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right) = \frac{e^{4\mu x}\mu^4 x^2(1-x)^2}{2}\left\{\lim_{n\to\infty} e^{\mu(x-1)}\left(e^{\mu/n}+1-e^{\mu x/n}\right)^n\right.$$

$$-4\lim_{n\to\infty} e^{-2\mu x}(e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n})^n$$

$$\left.+9\lim_{n\to\infty} e^{-3\mu x}(e^{\mu(x+2)/n}+e^{\mu(x+1)/n}+e^{\mu x/n}-e^{\mu/n}-e^{2\mu/n})^n\right\}$$

eşitliği elde edilir. (3.19), (3.20) ve (3.21)'de ki eşitliklerinden yararlanarak,

$\lim_{n\to\infty} n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right) = 3e^{4\mu x}\mu^4 x^2(1-x)^2$ elde edilir.

(3.15) ifadesi tekrar düzenlenirse;

$$\lim_{n\to\infty} n\left|G_n\left(exp_{\mu,x}^2(t)h_x(t);x\right)\right| \le \lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2 G_n\left(exp_{\mu,x}^4(t);x\right)}.\lim_{n\to\infty}\sqrt{G_n(h_x^2(t);x)}$$

$$= \sqrt{3}e^{2\mu x}.\mu^2 x(1-x).0$$

$$= 0$$

elde edilir. O halde bulduğumuz eşitlikleri (3.13) denkleminde yerine koyarsak

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2n[G_n(f(t);x)-f(x)] = x(1-x)\left(f''(x)-3\mu f'(x)+2\mu^2 f(x)\right)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.8: $f \in C\,[0,1]$ ve $0 < a < b < 1$ olsun. Her bir $x \in (a,b)$ için

$2n[G_n f(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f,\ f'' - 3\mu f' + 2\mu^2 f = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

İspat: Kabul edelim ki $2n[G_n f(x) - f(x)] = 0$ olsun. Teorem 3.2.7 gereğince

$$2n[G_n f(x) - f(x)] = 0 \Rightarrow x(1-x).[\,f''(x) - 3\mu f'(x) + 2\mu^2 f(x)] = 0$$

$$\Rightarrow f'' - 3\mu f' + 2\mu^2 f = 0\text{'dır.}$$

Kabul edelim ki $f,\ f'' - 3\mu f' + 2\mu^2 f = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. O halde Teorem 3.2.7 gereği

$$x(1-x).[\,f''(x) - 3\mu f'(x) + 2\mu^2 f(x)] = 0$$

$\Rightarrow 2n[G_n f(x) - f(x)] = 0$ elde edilir.

Teorem 3.2.9: $f \in C\,[0,1]$ ve $0 < a < b < 1$ olsun ve $M \geq 0$ olsun.

Her bir $x \in (a,b)$ için

$2n|G_n f(x) - f(x)| \le M \Leftrightarrow$ Hemen hemen her $t \in (a,b)$ için

$|f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t)| \leq M$'dir.

İspat: Kabul edelim ki her bir $x \in (a, b)$ için

$2n|G_n f(x) - f(x)| \leq M$ olsun.

$\Rightarrow x(1-x).|f''(x) - 3\mu f'(x) + 2\mu^2 f(x)| \leq M$

$\Rightarrow |f''(x) - 3\mu f'(x) + 2\mu^2 f(x)| \leq M$'dir.

$\Rightarrow$ Hemen hemen her $t \in (a, b)$ için $|f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t)| \leq M$'dir.

Kabul edelim ki hemen hemen her $t \in (a, b)$ için

$|f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t)| \leq M$ olsun

$\Rightarrow t(1-t)\ |f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t)| \leq M$

$\Rightarrow$ Her bir $x \in (a, b)$ için $x(1-x).|f''(x) - 3\mu f'(x) + 2\mu^2 f(x)| \leq M$'dir.

3.2.4. Üstel Bernstein Operatörünün Şekil Koruma Özellikleri

Her bir $n \in (a, b)$ için Teorem 3.2.6'da G_n operatörünün pozitif olduğu ve (3.2), (3.3) eşitliklerinde exp_μ ve exp_μ^2 fonksiyonlarını sabit tuttuğu gösterilmişti. Yine her bir $n \in (a, b)$ için G_n operatörü, [0,1] aralığının uç noktalarında $G_n(f; 0) = f(0)\ ve$ $G_n(f; 1) = f(1)$ eşitliklerini sağlar.

Şimdi daha fazla şekil koruma özelliklerini bulmak adına $\left(\frac{G_n f}{exp_\mu}\right)$ 'nün ilk iki türevini hesaplayalım.

$$\left(\frac{G_n f}{exp_\mu}\right)'(x) = n a_n'(x) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{f}{exp_\mu}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{f}{exp_\mu}\left(\frac{k}{n}\right)\right] G_{n-1,k}\big(a_n(x)\big) \tag{3.25}$$

ve

$$\left(\frac{G_nf}{exp_\mu}\right)''(x) = na_n''(x)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{f}{exp_\mu}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{f}{exp_\mu}\left(\frac{k}{n}\right)\right] G_{n-1,k}\big(a_n(x)\big)$$

$$+n(n-1)a_n'(x)^2.\sum_{k=0}^{n-2}\left[\frac{f}{exp_\mu}\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2\frac{f}{exp_\mu}\left(\frac{k+1}{n}\right) + \frac{f}{exp_\mu}\left(\frac{k}{n}\right)\right] G_{n-2,k}\big(a_n(x)\big)$$

(3.26)

elde edilir.

3.2.1'de $a_n(x)$ fonksiyonunun artan ve konveks olduğu gösterilmişti.

$f \in \mathrm{C}\,[0,1]$ için $\frac{f}{exp_\mu}$ artan ise $\frac{G_nf}{exp_\mu}$ artandır, $\frac{f}{exp_\mu}$ artan ve konveks ise $\frac{G_nf}{exp_\mu}$ konvekstir. Ancak $\frac{f}{exp_\mu}$'nün yalnızca konveksliği, $\frac{G_nf}{exp_\mu}'$nün konveksliği için yeterli değildir.

Bir tane karşıt örnek verelim. $f(x) = 1$ olduğunda; $\frac{f}{exp_\mu} = \frac{1}{exp_\mu} = \frac{1}{e^{\mu x}} = e^{-\mu x}$, $\left(\frac{f}{exp_\mu}\right)''(x) = \mu^2 e^{-\mu x} \geq 0$ olduğundan konvekstir.

Halbuki (3.11) eşitliğinde $n = 1$ alınır ise $\left(\frac{G_1f}{exp_\mu}\right)''(x) = -\mu^2 e^{\mu(x-1)} < 0$ olduğu için konveks değildir. O halde $\frac{f}{exp_\mu}$'nün yalnızca konveksliği, $\frac{G_nf}{exp_\mu}'$nün konveksliği için yeterli değildir. [11] nolu kaynaktan aşağıdaki tanımları ve sonucu verebiliriz.

Tanım 3.2.3. $\begin{vmatrix} e^{\mu t_0} & e^{\mu t_1} \\ f(t_0) & f(t_1) \end{vmatrix} \geq 0 \quad (0 < t_0 < t_1 < 1)$ ise, $f \in \mathrm{C}\,[0,1]$ fonksiyonuna $\{exp_\mu\}$'ye göre konvekstir, denir ve $f \in \mathrm{C}(exp_\mu)$ ile gösterilir.

Eğer $\begin{vmatrix} e^{\mu t_0} & e^{\mu t_1} & e^{\mu t_2} \\ e^{2\mu t_0} & e^{2\mu t_1} & e^{2\mu t_2} \\ f(t_0) & f(t_1) & f(t_2) \end{vmatrix} \geq 0 \quad (0 < t_0 < t_1 < t_2 < 1)$ ise, $f \in \mathrm{C}\,[0,1]$ fonksiyonuna $\{exp_\mu, exp_\mu^2\}$'ye göre konvekstir, denir ve $f \in \mathrm{C}(exp_\mu, exp_\mu^2)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.10: $f \in C^1[0,1]$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:

(1) $f \in \mathrm{C}(exp_\mu)$,

(2) $\frac{f}{exp_{\mu}}$ monoton artan,

(3) $t \in [0,1]$ için $f'(t) \geq \mu\, f(t)$'dir.

İspat: . $f \in \mathrm{C}(exp_{\mu})$ olsun.

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} e^{\mu t_0} & e^{\mu t_1} \\ f(t_0) & f(t_1) \end{vmatrix} \geq 0\,, \quad 0 < t_0 < t_1 < 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\mu t_0} f(t_1) - e^{\mu t_1} f(t_0) \geq 0\,, 0 < t_0 < t_1 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(t_1)}{e^{\mu t_1}} \geq \frac{f(t_0)}{e^{\mu t_0}}\,, 0 < t_0 < t_1 < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{f}{exp_{\mu}}(t_1) \geq \frac{f}{exp_{\mu}}(t_0), 0 < t_0 < t_1 < 1$$

olduğundan $\frac{f}{exp_{\mu}}$ monoton artandır.

$\frac{f}{exp_{\mu}}$ monoton artan olduğundan

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f}{exp_{\mu}}\right)'(t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f'(t)e^{-\mu t} - \mu f(t)e^{-\mu t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (f'(t) - \mu\, f(t))e^{-\mu t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(t) - \mu f(t)}{e^{\mu t}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f'(t) - \mu f(t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f'(t) \geq \mu f(t)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.11: $f \in C^2[0,1]$ olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:

(1) $f \in \mathrm{C}\left(exp_{\mu}, exp_{\mu}^{2}\right)$,

(2) $t \in [0,1]$ için $\left(\frac{f}{exp_{\mu}}\right)''(t) \geq \mu\left(\frac{f}{exp_{\mu}}\right)'(t)$,

(3) $t \in [0,1]$ için $f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t) \geq 0$'dır.

İspat: $(1) \Leftrightarrow (2)$, [12] nolu kaynakta ispatlanmıştır.

$(2) \Leftrightarrow (3)$ olduğunu gösterelim.

$t \in [0,1]$ için $\left(\frac{f}{exp_{\mu}}\right)''(t) \geq \mu\left(\frac{f}{exp_{\mu}}\right)'(t)$

$\Leftrightarrow f''(t)e^{-\mu t} - 2\mu f'(t)e^{-\mu t} + \mu^2 f(t)e^{-\mu t} \geq \mu f'(t)e^{-\mu t} - \mu^2 f(t)e^{-\mu t}$

$\Leftrightarrow f''(t) - 2\mu f'(t) + \mu^2 f(t) \geq \mu f'(t) - \mu^2 f(t)$

$\Leftrightarrow f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t) \geq 0$'dır.

Teorem 3.2.12: $f \in C^1[0,1]$ olsun:

$f \in \mathrm{C}\left(exp_{\mu}\right) \Rightarrow G_n f \in \mathrm{C}\left(exp_{\mu}\right)$'dir.

İspat: $f \in \mathrm{C}\left(exp_{\mu}\right)$ olsun. Teorem 3.2.10'dan $\frac{f}{exp_{\mu}}$ monoton artandır. (3.25) eşitliği kullanılarak $\frac{G_n f}{exp_{\mu}} \geq 0$ elde edilir. Yani $\frac{G_n f}{exp_{\mu}}$ monoton artandır.Tekrar Teorem 3.2.10 kullanılırsa sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.13: $f \in C^2[0,1]$ olsun:

$f \in \mathrm{C}\left(exp_{\mu}, exp_{\mu}^{2}\right) \Rightarrow G_n f(t) \geq f(t)$, $0 \leq t \leq 1$'dir.

İspat: Teorem 3.2.11 gereğince

$f \in \mathrm{C}\left(exp_{\mu}, exp_{\mu}^{2}\right) \Rightarrow f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t) \geq 0$ olur.

Teorem 3.2.7 gereğince

$f \in \mathrm{C}\left(exp_{\mu}, exp_{\mu}^{2}\right) \Rightarrow G_n f(t) - f(t) \geq 0,\ 0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow G_n f(t) \geq f(t), 0 \leq t \leq 1$

elde edilir.

Teorem 3.2.14: $f \in C^2[0,1]$ olsun:

$\left.\begin{matrix} -f \in \mathrm{C}(exp_\mu) \\ \frac{f}{exp_\mu}\ convex \end{matrix}\right\} \Rightarrow G_n f \in \mathrm{C}(exp_\mu, exp_\mu^2)$'dir.

İspat: Teorem 3.2.10 gereğince

$-f \in \mathrm{C}(exp_\mu) \Rightarrow \frac{f}{exp_\mu}$ monoton azalandır.

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{exp_\mu}\right)'(t) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(t)e^{-\mu t} - \mu f(t)e^{-\mu t} \leq 0$$

$$\Rightarrow (f'(t) - \mu f(t))e^{-\mu t} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(t) - \mu f(t)}{e^{\mu t}} \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(t) \leq \mu f(t) \qquad \text{(a)}$$

elde edilir.

$\frac{f}{exp_\mu}$ konveks olduğundan

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{exp_\mu}\right)'' \geq 0$$

$$\Rightarrow f''(t)e^{-\mu t} - 2\mu f'(t)e^{-\mu t} + \mu^2 f(t)e^{-\mu t} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{f''(t) - 2\mu f'(t) + \mu^2 f(t)}{e^{\mu t}} \geq 0$$

$$\Rightarrow f''(t) - 2\mu f'(t) + \mu^2 f(t) \geq 0 \qquad \text{(b)}$$

elde edilir.

(a) ile (b) eşitlikleri alt alta toplanırsa,

$\Rightarrow f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t) \geq 0$ bulunur, bu ise Teorem 3.2.11 gereği

$G_n f \in C(exp_\mu, exp_\mu^2)$ ile denktir.

4. ÜSTEL BERNSTEIN OPERATÖRLERİ İLE KLASİK BERNSTEIN OPERTÖRÜNÜN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümün amacı hangi durumlarda üstel Bernstein operatörlerinin klasik Bernstein operatörlerinden daha iyidir sorusunun cevabını bulmaya çalışmaktır. Öncelikle (3.5) ve (3.6) eşitlikleri incelenirse
$G_n\left(exp_{\mu}; x\right) = e^{\mu x}$ ve $G_n\left(exp_{\mu}^2; x\right) = e^{2\mu x}$ eşitliklerinden anlaşılacağı üzere almış olduğumuz üstel fonksiyonun kuvvetinin katsayısı μ sabit reel parametresine eşit veya iki katı ise G_n operatörü altında görüntüsü hangi dereceden olursa olsun farketmez yine kendisine eşit çıkmaktadır. Örneğin e^{10t} üstel fonksiyonunun G_n operatörü altındaki görüntüleri $\mu = 10$ ve $\mu = 5$ için kendisine eşit çıkmaktadır. Yani $G_n(e^{10t}; x) = G_n(exp_{10}(t); x) = e^{10x}$ $(\mu = 10 için)$,
$G_n(e^{10t}; x) = G_n(exp_5^2(t); x) = e^{10x}$ $(\mu = 5 için)$' dir.

Bu ince ayrıntıyı fark ettikten sonra şimdi inceleyeceğimiz teorem, B_n ve G_n operatörleri tarafından ifade edilen asimptotik formülleri kullanarak üstel Bernstein operatörünün klasik Bernstein operatöründen hangi durumlarda daha iyi olduğunu gösteren bir fonksiyon ailesi bulmaktır.

Teorem 4.1.1: Varsayalım ki her $n \geq n_0$, $t \in (0,1)$ için

$$f(t) \leq G_n f(t) \leq B_n f(t) \tag{4.1}$$

olacak şekilde $n_0 \in$ IN var olsun. O halde

$$f''(t) \geq 3\mu f'(t) - 2\mu^2 f(t) \geq 0 \text{ , } t \in (0,1) \tag{4.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak $f''(x) \geq 0$'dır.

Diğer taraftan eğer (4.2) eşitsizliği $x \in (0,1)$ için sağlanırsa $n \geq n_0$ için

$f(x) \leq G_n f(x) \leq B_n f(x)$ olacak şekilde $n_0 \in$ IN vardır.

İspat: $f(t) \leq G_n f(t) \leq B_n f(t)$ olsun. Buradan

0≤ $2n\left(G_nf(t)-f(t)\right)\leq 2n\left(B_nf(t)-f(t)\right), n\geq n_0$, t∈ (0,1) olduğundan

Teorem 2.3.2 ve Teorem 3.2.7'i kullanarak

$\Leftrightarrow$ 0≤ $t(1-t)\left(f''(t)-3\mu f'(t)+2\mu^2 f(t)\right)\leq t(1-t)f''(t)$

$\Leftrightarrow$ 0≤ $f''(t)-3\mu f'(t)+2\mu^2 f(t)\leq f''(t)$

$\Leftrightarrow -f''(t)\leq -3\mu f'(t)+2\mu^2 f(t)\leq 0$

$\Leftrightarrow 0\leq 3\mu f'(t)-2\mu^2 f(t)\leq f''(t)$, t∈ (0,1)

dir. Böylece (4.2) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Diğer taraftan eğer (4.2) eşitsizliği $x\in(0,1)$ için sağlanırsa

$f''(x)\geq 3\mu f'(x)-2\mu^2 f(x)\geq 0$

$\Leftrightarrow -f''(x)\leq -3\mu f'(x)+2\mu^2 f(x)\leq 0$

$\Leftrightarrow$ 0≤ $f''(x)-3\mu f'(x)+2\mu^2 f(x)\leq f''(x)$

$\Leftrightarrow$ 0≤ $x(1-x)\left(f''(x)-3\mu f'(x)+2\mu^2 f(x)\right)\leq x(1-x)f''(x)$

dir. Böylece (4.1) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 2.3.2 ve Teorem 3.2.7'i kullanarak

$\Leftrightarrow$ 0≤ $2n\left(G_nf(x)-f(x)\right)\leq 2n\left(B_nf(x)-f(x)\right), n\geq n_0$, $x\in(0,1)$.

$\Leftrightarrow f(x)\leq G_nf(x)\leq B_nf(x)$

olacak şekilde $n_0\in$ IN vardır.

Dikkat edilmelidir ki Teorem 3.2.10 ve Teorem 3.2.11' e göre

$f''(t)\geq 3\mu f'(t)-2\mu^2 f(t)\geq 0$ eşitsizliği ancak $\{exp_\mu\}$ ve $\{exp_\mu, exp_\mu^2\}$'ye göre konveks olması durumunda sağlanır.

Şöyle ki Teorem 3.2.13'e göre

$f \in C(exp_{\mu}) \Leftrightarrow f'(t) \geq \mu f(t)$

$\Leftrightarrow 2\mu f'(t) \geq 2\mu^2 f(t)$

$\Leftrightarrow 3\mu f'(t) \geq 2\mu^2 f(t)$

$\Leftrightarrow 3\mu f'(t) - 2\mu^2 f(t) \geq 0$' dır. (a)

Yine Teorem 3.2.11'e göre

$f \in C(exp_{\mu}, exp_{\mu}^2) \Leftrightarrow f''(t) - 3\mu f'(t) + 2\mu^2 f(t) \geq 0$

$\Leftrightarrow f''(t) \geq 3\mu f'(t) - 2\mu^2 f(t)$' dir. (b)

(a) ve (b) eşitsizliklerinden $f''(t) \geq 3\mu f'(t) - 2\mu^2 f(t) \geq 0$ eşitsizliği elde edilir.

4.1 Üstel Bernstein operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna klasik Bernstein operatöründen daha yakın olduğunu ve üstel Bernstein operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna klasik Bernstein operatöründen daha hızlı yaklaştığını gösteren fonksiyon aileleri

Şimdi ise bulduğumuz bu eşitsizliği kullanarak tezimizi destekleyen bir fonksiyon ailesi bulalım.

Kabul edelim ki $f(t) = exp(qt)$ olsun. O halde

$f''(t) \geq 3\mu f'(t) - 2\mu^2 f(t) \geq 0$ eşitsizliğinde yerine koyarsak

$q^2 e^{qt} \geq 3\mu q e^{qt} - 2\mu^2 e^{qt} \geq 0$

$\Leftrightarrow q^2 \geq 3\mu q - 2\mu^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow q^2 - 3\mu q + 2\mu^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (q - 2\mu)(q - \mu) \geq 0$, $f'(t) \geq \mu f(t)$ olduğundan dolayı $q \geq \mu$ idi.

$\Leftrightarrow q \geq 2\mu$ olması durumunda geçerlidir.

O zaman üstel Bernstein operatörünün $f(t) = exp(qt)$ fonksiyonuna klasik Bernstein operatöründen daha yakın olduğunu ve üstel Bernstein operatörünün

$f(t) = exp(qt)$ fonksiyonuna klasik Bernstein operatöründen daha hızlı yaklaştığını gösteren fonksiyon ailesi $q \geq 2\mu$'dir.

Kabul edelim ki $f(t) = t^p$ olsun. O halde

$p.(p-1)\, t^{p-2} \geq 3\, \mu.p.t^{p-1} - 2\mu^2 t^p \geq 0$

$p.(p-1)\, t^{p-2} - 3\, \mu.p.t^{p-1} + 2\mu^2 t^p \geq 0$

$p.(p-1) - 3\, \mu.p.t + 2\mu^2 t^2 \geq 0$

$p^2 - p + (-3\, \mu.p + 2\mu^2.t).t \geq 0,\; t \in (0,1)$

$p^2 - p - 3\, \mu.p + 2\mu^2.t \geq 0,\; t \in (0,1)$

$p^2 - p - 3\, \mu.p + 2\mu^2 \geq 0$

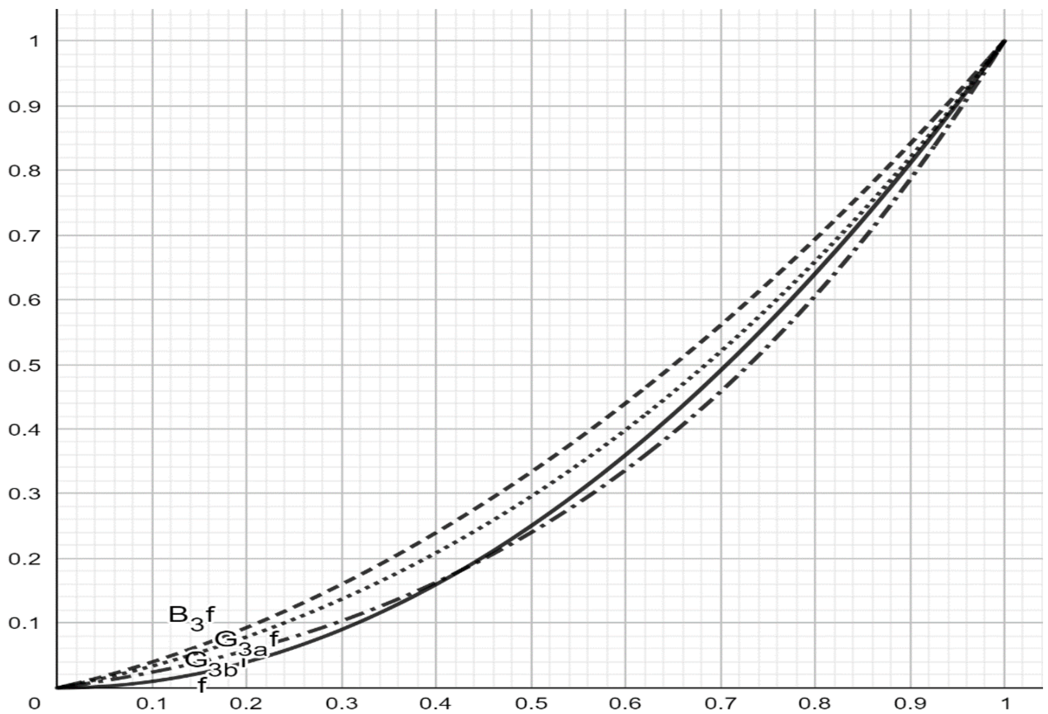
$p^2 - (3\mu + 1)p + 2\mu^2 \geq 0$ olur. Bu eşitsizliği çözdüğümüzde ve $f'(t) \geq \mu\, f(t)$ olduğundan dolayı $p \geq \mu t$ idi, bu eşitsizliği de dikkate alarak

$p \geq \frac{3\mu+1+\sqrt{\mu^2+6\mu+1}}{2}$ olduğunda geçerli olduğu anlaşılır.

O zaman üstel Bernstein operatörünün $f(t) = t^p$ fonksiyonuna klasik Bernstein operatöründen daha yakın olduğunu ve üstel Bernstein operatörünün $f(t) = t^p$ fonksiyonuna klasik Bernstein operatöründen daha hızlı yaklaştığını gösteren fonksiyon ailesi $p \geq \frac{3\mu+1+\sqrt{\mu^2+6\mu+1}}{2}$'dir.

Örnek 4.1: $f(x) = x^2$ fonksiyonunun B_n operatörü altında 3. dereceden görüntüsü ile aynı fonksiyonun μ=1/3 ve μ=1 için G_n operatörü altında 3. dereceden görüntülerinin grafiklerini karşılaştıralım.

Karışıklık olmaması için $f(x)$ fonksiyonunu düz çizgi ile gösterdik, şartı sağlayan μ değeri için oluşturduğumuz operatörü $G_{3a}f$ olarak adlandırdık ve grafiğini ise (⋯ ⋯) olarak gösterdik , şartı sağlamayan μ değeri için oluşturduğumuz operatörü ise $G_{3b}f$ olarak adlandırdık ve grafiğini ise (-.-.-.-.-.) olarak gösterdik. $B_3 f(x)$ fonksiyonunu ise (-----) ile gösterdik.



Şekil 4.1. [0,1] aralığında $f(x)$=x^2 fonksiyonunun görüntüsü ve $f(x)$ fonksiyonunun B_n ve G_n operatörü altındaki 3. dereceden görüntüleri (μ=1/3 ve μ=1 için)

Grafık incelendiğinde şartı sağlayan μ değeri için $f(x) \leq G_n f(x) \leq B_n f(x)$ sıralamasının sağlandığı görülür. Şartı sağlamayan μ değeri için ise $f(x) \leq G_n f(x) \leq B_n f(x)$ sıralaması sağlanmaz.

Örnek 4.2: $f(x)$= e^x fonksiyonunun B_n operatörü altında 2. dereceden görüntüsü ile aynı fonksiyonun μ=2 ve μ=1/3 için G_n operatörü altındaki 2. dereceden görüntülerinin grafiklerini karşılaştıralım.

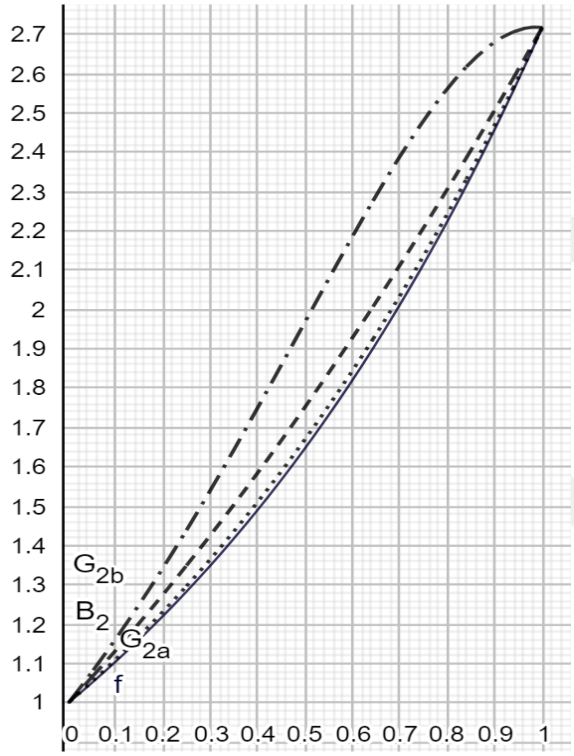
Gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra;

$$B_2(f;x) = \left(\left(e^{1/2} - 1\right)x + 1\right)^2$$

μ=1/3 için $G_2(f;x) = e^{x/3}\left(\left(e^{1/6} + 1\right)\left(e^{x/6} - 1\right) + 1\right)^2 = G_{2a}$

μ=2 için $G_2(f;x) = e^{2x}\left(\left(e^{-1/2} - 1\right)\frac{e^x - 1}{e - 1} + 1\right)^2 = G_{2b}$

Karışıklık olmaması için $f(x)$ fonksiyonunu düz çizgi ile gösterdik şartı sağlayan μ değeri için oluşturduğumuz operatörü G_{2a} olarak adlandırdık ve grafiğini ise ($\cdots\cdots$) ile gösterdik , şartı sağlamayan μ değeri için oluşturduğumuz operatörü ise G_{2b} olarak adlandırdık ve grafiğini ise (-.-.-.-.-.) ile gösterdik. $B_2 f(x)$ fonksiyonunu ise (-----) ile gösterdik.



Şekil 4.2. [0,1] aralığında $f(x)$= e^x fonksiyonunun görüntüsü ve $f(x)$ fonksiyonunun B_n ve G_n operatörü altındaki 2.dereceden görüntüleri (μ=2 ve μ=1/3 için)

Grafik incelendiğinde şartı sağlayan μ değeri için (μ $= 1/3$ için) $f(x) \leq G_n f(x) \leq B_n f(x)$ sıralamasının sağlandığı görülür. Şartı sağlamayan μ değeri için ise (μ $=$ 2için) $f(x) \leq G_n f(x) \leq B_n f(x)$ sıralaması sağlanmaz.

Şimdi de $f(x)$= e^{5x} fonksiyonunun bazı n ve x değerleri için B_n ve G_n operatörü altındaki görüntülerinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik tablosunu çizelge halinde gösterelim. (μ=2 için)

Çizelge incelendiğinde hangi x değerini alırsak alalım derece arttıkça hem G_n için hem de B_n için aradaki fark 0'a yaklaşmaktadır. Bu şekilde sonsuza gidildiğinde aralarında hemen hemen hiç fark kalmamaktadır.

Burada asıl vurgulamak istediğimiz nokta; uygun fonksiyon ailesinden aldığımız (μ=2) değeri için hangi dereceyi alırsak alalım $f(x)$ fonksiyonuna G_n operatörü B_n operatöründen daha yakındır ve derece büyüdükçe G_n operatörü B_n operatöründen daha hızlı yaklaşmaktadır

Çizelge .4.1. $f(x)= e^{5x}$ fonksiyonunun bazı n ve x değerleri için B_n ve G_n operatörü altındaki görüntülerinin $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımının nümerik tablosu (μ=2 için)

x \ n	n=5		n=50		n=100		n=500	
	$\lvert G_nf(x)-f(x)\rvert$	$\lvert B_nf(x)-f(x)\rvert$	$\lvert G_nf(x)-f(x)\rvert$	$\lvert B_nf(x)-f(x)\rvert$	$\lvert G_nf(x)-f(x)\rvert$	$\lvert B_nf(x)-f(x)\rvert$	$\lvert G_nf(x)-f(x)\rvert$	$\lvert B_nf(x)-f(x)\rvert$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.0501	0.5609	0.0045	0.0385	0.0022	0.0189	0.0004	0.0037
0.2	0.1442	1.6613	0.0131	0.1132	0.0065	0.0554	0.0013	0.0109
0.3	0.3056	3.5121	0.0284	0.2448	0.0141	0.1200	0.0028	0.0236
0.4	0.5623	6.2875	0.0535	0.4598	0.0266	0.2257	0.0053	0.0444
0.5	0.9407	10.0281	0.0917	0.7853	0.0457	0.3866	0.0091	0.0763
0.6	1.4470	14.4699	0.1447	1.2330	0.0723	0.6095	0.0144	0.1207
0.7	2.0247	18.7493	0.2081	1.7602	0.1041	0.8747	0.0208	0.1740
0.8	2.4623	20.9068	0.2605	2.1828	0.1306	1.0918	0.0261	0.2183
0.9	2.2069	17.0555	0.2407	1.9939	0.1209	1.0048	0.0242	0.2022

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$f(x)$ fonksiyonunun üstel Bernstein operatörü ve klasik Bernstein operatörü altındaki görüntülerinin her ikisinin de *n* sonsuza giderken limitleri $f(x)$ fonksiyonuna eşit çıkmaktadır. Burada bizim dikkatinizi çekmek istediğimiz nokta, " Hangi derece olursa olsun fark etmez $f(x)$ fonksiyonuna, hangi μ değerleri için $f(x)$ fonksiyonunun üstel Bernstein operatörü altındaki görüntüsü, klasik Bernstein operatörü altındaki görüntüsünden daha yakındır?" ve " Hangi μ değerleri için derece arttıkça $f(x)$ fonksiyonunun üstel Bernstein operatörü altındaki görüntüsü, klasik Bernstein operatörü altındaki görüntüsünden daha hızlı bir şekilde $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşır? " sorularının cevabını bulmaktır.

Bu soruların cevabı için 4.1 başlığı altında yapılan işlemler ve 4. bölümdeki nümerik tablo ve grafikler incelendiğinde uygun fonksiyon ailesinden aldığımız her μ değeri için hangi dereceyi alırsak alalım farketmez $f(x)$ fonksiyonuna, üstel Bernstein operatörü altındaki görüntüsünün klasik Bernstein operatörü altındaki görüntüsünden daha yakın olduğu anlaşılmaktadır.

Diğer taraftan uygun fonksiyon ailesinden aldığımız her μ değeri için derece arttıkça $f(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ fonksiyonunun üstel Bernstein operatörü altındaki görüntüsü klasik Bernstein operatörü altındaki görüntüsünden daha hızlı yaklaşmaktadır.

Yine uygun fonksiyon ailesinden aldığımız her μ değeri için oluşturduğumuz operatörün [0,1] aralığında alınan her *x* değeri için $f(x) \leq G_n f(x) \leq B_n f(x)$ eşitsizliği sağlanmaktadır. Uygun fonksiyon ailesinden almadığımız her μ değeri için oluşturduğumuz operatörün [0,1] aralığında alınan her *x* değeri için ise $f(x) \leq G_n f(x) \leq B_n f(x)$ eşitsizliği sağlanmadığı görülmüştür.

Sonuç olarak; uygun fonksiyon ailesinden aldığımız μ değerleri için incelemiş olduğumuz üstel Bernstein operatörü klasik Bernstein operatöründen daha iyi özelliktedir.

KAYNAKLAR

[1] K. I. Joy. Bernstein Polinamials, On-Line Geometric Modeling Notes. University of California University of California.s.1,https://scholar.google.com, (Erişim tarihi: 11.09.2018)

[2] G. G. Lorentz, Approximation Functions. Holt, Rinehart and Winston. Inc., Newyork,U.S.A. s.187, 1966

[3] H. Hacısalihoğlu ve A. Hacıyev, Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı. Ankara.s.17,18, 1995

[4] M. Balcı., Matematik Analiz 1. Ankara, 165-168 7. Basım, Balcı Yayınları, 2008

[5] T. Acar., Genelleştirilmiş Bernstein Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 2015.

[6] Z, Walczak, Bernstein-Durmayer type operators. Acta Mathematica Unıversitatis Ostraviensis,12: 65-72, 2004

[7] S.Morigi and Neamtu, Some results for a class of genaralized polynomials. Adv. Comput. Math. s.133-149, 2000

[8] A. Aral, D. Cardenas-Morales and P. Garrancho, Bernstein-type operators that reproduce exponential functions, https://www.researchgate.net
(Erişim tarihi:17.09.2018)

[9] F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type Aproxiation Theory and its Aplications, Walter de Gruyter, Berlin-New York,1994

[10] O. Shisha and B. Mond , The degree of convergence of sequences of lineer positive operators. Proc. Nat. Acat. Sci. U.S.A. 60, s 1196-1200, 1968

[11] S. Karlin and W. Studden, Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics, Interscience, New York, 1966

[12] Z. Ziegler, Lineer approximation and generalized convexity, J. Approximation Theory 1, S. 420-443, 1968