T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# İki Katlı Singüler İntegrallerin Yakınsaklığı Üzerine

Barış KULAK

Temmuz 2018

**Matematik Anabilim Dalında** Barış KULAK tarafından hazırlanan İki Katlı Singüler İntegrallerin Yakınsaklığı Üzerine (On The Convergence Of Double Singular Integrals) adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI

Danışman

*Jüri Üyeleri*

| | |
|---|---|
| Başkan | : Dr. Öğr. Üyesi Gümrah UYSAL |
| Üye | : Dr. Öğr. Üyesi Başar YILMAZ |
| Üye (Danışman) | : Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI |

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır

(Unvanı, Adı ve Soyadı, İmzası)

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

# ÖZET

İKİ KATLI SİNGÜLER İNTEGRALLERİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

KULAK, Barış

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI

Temmuz 2018, 51 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın birinci bölümünde giriş kısmı ve tezin genel olarak amacı hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, çalışma için gerekli olan temel kavramlar, integral operatörler ailesi ve yaklaşım teorisi, süreklilik noktası ve bazı özellikleri, karakteristik noktalar genel olarak tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, konvolüsyon tipinde deltasal çekirdekli integral operatörlerin yakınsaklığı ile ilgili literatürde bilinen temel teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde de iki katlı singüler integral operatörler ailesinin dikdörtgensel bir bölgede ve $IR^2$ üzerinde yakınsaklığı ile ilgili Romanovski ve Faddeev tipli teoremler üzerinde durulmuştur. Beşinci bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Lineer integral operatörler ailesi, Süreklilik modülü, Karakteristik noktalar, Deltasal çekirdekli integral operatörler, İki katlı integral operatörlerin noktasal yakınsaklığı, Romanovski ve Faddeev tipli teoremler.

## ABSTRACT

ON THE CONVERGENCE OF DOUBLE SINGULAR INTEGRALS

KULAK, Barış

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Graduate Thesis

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sevgi ESEN ALMALI

July 2018, 51 Pages

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the information about general purpose of this thesis is given. In the second chapter, the definitions which are necessary for this work are given and some concepts related to approximation theory, such as characteristic points, modulus of continuity and its properties are introduced. In the third chapter, basic theorems about convergence of convolution type integral operators with delta-function type kernels in the literature are given. In the fourth chapter, some theorems about the convergence of double singular integrals in a rectangular region and separately in $\mathrm{IR}^2$, which are of type Romanovski and Faddeev are given. The fifth chapter is devoted to the discussion of results.

**Key Words:** Family of linear integral operators, Modulus of continuity, Characteristic points, Integral operators with delta-function type kernels, Pointwise convergence of double integral operators, Romanovski and Faddeev type theorems.

# TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlık ve gelişim aşamalarında her türlü desteği veren çok kıymetli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sevgi ESEN ALMALI ’ya ve eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme yüksek lisans öğrenimim boyunca desteklerini ve fedakarlıklarını esirgemeyen eşim Erengül KULAK ve canım oğlum Ege Başar KULAK’ a ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| D | : Reel eksen veya alt kümesi |
| X | : D de tanımlı Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı |
| <a,b> | : Reel eksende sınırlı ve keyfi açık, yarı açık ya da kapalı bir aralık |
| ‖ ‖ | : X üzerinde norm |
| $L$ | : Lineer operatör |
| $L_1$ | : $L_1$ anlamında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar |
| E | : $L_1$ fonksiyonunun Lebesgue noktalarının kümesi |
| $\omega_{L_1}(f;\delta)$ | : $f$ nin $L_1$ de süreklilik modülü |
| $\sup\limits_{\lvert t\rvert\le\delta} f(x)$ | : [-$\delta,\delta$] ‘da $f(x)$ in supremumu |
| $\delta_n(f;x)$ | : Fejer integrali |
| $K_\lambda(t)$ | : Deltasal çekirdek |
| $A_\lambda(f;x)$ | : İntegral operatör |

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi fonksiyonlar teorisinin en önemli alanlarından birisidir. Bu teorinin amacı, fonksiyonlar uzayını oluşturan elemanlara yada fonksiyonlara herhangi bir yaklaşımın varlığını göstermektir. Yaklaşım teorisinin problemlerinden biri de lineer pozitif operatörlerin özel bir hali olan pozitif çekirdekli integral operatörlerin kendisini oluşturan fonksiyona yakınsaklığı problemidir.

Parabolik ve eliptik diferansiyel denklemler için iyi bilinen sınır değer problemlerin çözümü, pozitif çekirdekli integral operatörler olarak ifade edilebilirler. Bu çözümlere Gauss Weierstrass, Poisson, Abel-Poisson ve Fejer en bilinen integral operatörlerdir. Bu operatörler genellikle deltasal çekirdekli integral operatörler olarak bilinirler. Deltasal çekirdek kavramı İngiliz fizikçi Paul Dirac'ın tanımladığı $\delta$-fonksiyonu (delta-fonksiyonu) ile ilgilidir. $\delta$-fonksiyonu 1924 yılında Dirac'ın fizik problemleri çalışmalarında kullanılmıştır. $\delta$-fonksiyonu

$$\delta(\mathrm{x})=\begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pm(x)dx = 1$$

şeklinde tanımlanmıştır. İlk zamanlar bu tanım matematikçiler tarafından çok fazla değer görmemiştir. Çünkü bir kümedeki bir nokta haricinde özdeş olarak sıfır olan bir fonksiyonun integrali de sıfırdır. Fakat $\delta$-fonksiyonunun yardımı ile Dirac, kuantum mekaniği alanında çok önemli sonuçlar elde ettiğinden dolayı bu tanım oldukça ilgi görmüş ve çaşitli alanlarda kullanımı yaygınlaşmıştır. Sonraları araştırmacılar Dirac' ın bu tanımına anlam vererek $\delta$-fonksiyonunun aslında bir fonksiyonel olduğunu ve iyi diferansiyel özellikleri olan bir э fonksiyonuna, onun sıfır noktasındaki э(0) değerine karşı geldiğini gösterdiler. Tüm bu çalışmalar sonucunda genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi ortaya çıkmıştır. Bu teorinin temelinde $\delta$-fonksiyonu yer almaktadır. Genelleştirilmiş fonksiyonlar da $\delta$-fonksiyonu gibi iyi fonksiyonlar sınıfında tanımlı lineer sürekli fonksiyonellerdir. Deltasal çekirdekli integral operatörler ailesi kavramı ortaya çıkmıştır. Konvolüsyon tipli ve ayrıca konvolüsyon tipli olmayan deltasal çekirdekli integral operatörler ailesinin yakınsaklığı ve yakınsaklık hızları bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bunlardan bazıları [3, 7, 8, 18, 19] olarak verilebilir. Bu çalışmamızda ise $[4-6, 12-17]$ ve bazı temel kitaplardan [1, 2, 9-11] faydalanılmıştır. Daha sonraları çok değişkenli integral operatörleri aileleri için yakınsaklıkları ve yakınsaklık hızları çalışılmıştır. Bu tezin temelini oluşturan iki katlı integral operatörlerin yakınsaklığı $[12-15]$ çalışmaları temel alınarak incelenmiştir.

## 1.1 Kaynak özetleri

Bu çalışmada temel tanım ve kavramlar için NATANSON, I.P., ‘’Constructive Function Theory, Vol. I”, ALTOMARE, F. ve CAMPITI, M., “Korovkin-type approximation theory and its applications”, ROYDEN, H.L. “Real Analysis” ve HACIYEV, A.D. , “Deltasal Çekirdekli integral operatörler ailesi ve yaklaşım teorisi” lisansüstü ders notları kaynaklarından faydalanılmıştır. Ayrıca SIUDUT, S., ”A theorem of the Romanovski type for double singular integrals.” ve SIUDUT, S. ,”On the Convergence of double singular integrals” ve TABERSKİ, R., ‘’ Singular integrals depending on two parameters’’ kaynakları bizim çalışmalarımızın temelini oluşturmuştur.

## 1.2 Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında, integral operatörler ailesinin yakınsaklığı ve yakınsaklık hızları için temel oluşturan süreklilik modülü ve özellikleri, karakteristik noktalar ve bu noktalarda integral operatörler ailelerinin yakınsaklığı temel kaynaklar baz alınarak geniş bir şekilde incelencektir. Ayrıca çalışmamızın temelini oluşturan iki katlı singüler integrallerin dikdörtgensel bir bölgede ve $IR^2$ üzerinde yakınsaklığı ile ilgili Romanovski ve Faddeev tipli teoremler ve ispatları verilecektir.

# 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için temel oluşturan tanımlar verilecektir. Ayrıca bu çalışmada kullanacağımız kavramlar ve integral operatörler ailelerinin karakteristik noktaları, süreklilik modülü ve özellikleri incelecektir. Burada vereceğimiz tanımlar genel halde geçerli olup bilinen tanımlar olduğundan çoğunda kaynak belirtilmemiştir.

## 2.1. Temel Tanımlar

**Tanım 2.1.1. ( Lineer uzay )**

$V \neq \emptyset$ ve K da bir cisim olsun. V de bir iç işlem $\oplus$ : V*V⟶V ve bir dış işlem ʘ :K*V →V şeklinde tanımlansın.

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, bu işlemle birlikte V ye K üzerinden tanımlı lineer uzay veya vektör uzayı denir ve $(V,\oplus, (K,+,\cdot),\odot)$ ile gösterilir.

1) $(V,\oplus)$ değişmeli gruptur. Yani her $x, y, z \in$ V için aşağıdaki şartlar alınır.

$a_1$) $x \oplus y \in V$

$a_2$) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

$a_3$) $x \oplus \theta = \theta \oplus x = x$ olacak şekilde $\theta \in$ V dir.

$a_4$) $x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in$ V dir.

$a_5$) $x \oplus y = y \oplus x$.

2) Her $x, y \in$ V ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

$b_1$) $\alpha \odot x \in V$

$b_2$) $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

$b_3$) $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$

$b_4$) $(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$

$b_5$) $\varepsilon \odot x = x$ dir.

Burada $\varepsilon$ sayısı, K nın birim elemanıdır. Yukarıdaki $b_3$) şartında + işlemi, eşitliğin solunda K' daki toplamayı; eşitliğin sağındaki $\oplus$ işlemi ise V deki toplamayı belirtmektedir. $b_4$) deki çarpma işlemleri de aynı anlamdadır. Tanımdan anlaşıldığı üzerine lineer uzay, V kümesi ve sırasıyla 1) ve 2) şartlarını sağlayan toplama ve skalerle çarpma işlemlerinden ibarettir.

**Tanım 2.1.2. (Normlu Uzay)**

X bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: X \to IR$ fonksiyonunun $x \epsilon$X deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Eğer bu fonksiyon için

a) $\|x\| \geq 0$

b) $\|x\| = 0 \ \leftrightarrow x = 0$

c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlanıyorsa $\| \quad \|$ fonksiyonuna X üzerinden bir norm denir. Eğer bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmış ise bu uzaya normlu uzay denir. Bu uzay $(X, \| \quad \|)$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.3. (Operatör)**

X ve Y iki lineer uzay olsun.

$$L: X \to Y$$

$$f \to L(f) = g$$

dönüşümüne operatör denir. $L(f(t); x) = g(x)$ veya $L(f; x) = g(x)$ şeklinde gösterilir.

Her $\alpha, \beta$ skalerleri ve her $k, l \in X$ için

$$L(\alpha k + \beta l) = \alpha L(k) + \beta L(l)$$

eşitliği sağlanıyorsa , L operatörüne lineer operatör denir.

**Tanım 2.1.4. ( $L_p(a,b)$ uzayı)**

$-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında ölçülebilir ve

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty$$

1≤ $p < \infty$ olmak üzere, şartını sağlayan fonksiyonlar uzayına $L_p(a,b)$ *uzayı* denir.

Bu uzayda norm;

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve p=∞ iken

$$\|f\|_\infty = \underbrace{essup}_{x} |f(x)|$$

biçiminde tanımlanır.

**Tanım 2.1.5. (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği)**

$f$ iki değişkenli ölçülebilir fonksiyon ve $p \geq 1$ olmak üzere $(-\infty \leq \mathrm{a} < b \leq \infty)$

$$\left( \int_a^b \left| \int_a^b f(x,y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_a^b \left( \int_a^b |f(x,y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy$$

eşitsizliğine genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği veya Minkowski İntegral Eşitsizliği denir.

Bu eşitsizlik, integralin normunun, normun integralinden küçük eşit olduğunu gösterir.

$$\left\| \int f \right\|_{L_p} \leq \int \|f\|_{L_p}$$

**Tanım 2.1.6. (Metrik Uzay)**

X boş olmayan bir küme ve d : X x X→ R bir fonksiyon olsun ,

M-1) $\forall x, y \in$ X için d ( $x,y$ ) ≥ 0 ve d $(x,y) = 0 \Leftrightarrow$ x = y ,

M-2) $\forall x, y \in$ X için d ( $x,y$ ) = d $(y,x)$

M-3 )$\forall x, y, z \in$ X için d ( $x,z$ ) ≤ d $(x,y)$ + d ( $y,z$)

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde metrik ve ( $x$, d ) ikilisine de metrik uzay denir.

Bu durumda d( $x, y$) değerine x noktası ile y noktası arasındaki uzaklık denir.

(M-2) şartına simetri özelliği ve (M-3) şartına da üçgen eşitsizliği denir.

**Tanım 2.1.7. (Ölçülebilir Uzay)**

X bir küme ve A da X üzerinde bir cebir olsun. (X,A) ikilisine ölçülebilir uzay denir.

( X,A) ölçülebilir uzay olsun

$f$: x →R fonksiyonu ölçülebilirdir ⇔ $\forall \alpha \in$ IR için $f^{-1}((\alpha,+\infty))=\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$.

**Tanım 2.1.8. (Yığılma Noktası)**

$\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ n_0 \in N$ için

$$d(X_n, X) < \varepsilon \quad \text{ve} \quad n \geq n_0$$

olacak şekilde bir n∈N varsa $x$∈X noktasına (Xn) dizisinin bir yığılma noktası denir.

**Teorem 2.1.1. (Fubini Teoremi)**

R:= [a,b] x [c,d] iki boyutlu bir dikdörtgen ve $f$:IR→IR bir fonksiyon olsun. Her $x \in$ [a,b] için $f$ $(x,.)$ fonksiyonunun [c,d] üzerinde, her y∈ [c,d] için $f$ (. , $y$) fonksiyonunun [a,b] üzerinde ve $f$ fonksiyonunun R üzerinde integrallenebilir olduğu varsayılsın. Bu durumda,

$$\iint_R f\, dA = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

dir.

**Teorem 2.1.2. ( Lebesgue Teoremi )**

(X, A,$\mu$) bir ölçü uzayı, g:X → $[0, +\infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2$....... de X üzerinde A-ölçülebilir $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar olsun. Eğer hemen hemen her $x$ için

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
b) ∀n∈N için $|f_n(x)| \leq \mathrm{g}(x)$

ise $f$ ve $f_n$ fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim \int_x f_n(x)\, d\mu = \int_x f(x)\ \ d\mu$$

dir.

**2.2. Süreklilik Modülü ve Özellikleri**

Süreklilik modülü tanımını vermeden önce bu çalışmada sıkça kullanılacak olan Lusin teoremini verelim.

**Teorem 2.2.1. (Lusin Teoremi )** $\forall\varepsilon > 0,\ f \in L_p$ ve p≥1 için [a,b] de öyle bir $\varphi$ sürekli fonksiyonu bulanabilir ki

$$\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$$

dır.

**Tanım 2.2.1. (Süreklilik Modülü)** $f \in L_1(-\infty, \infty)$ olmak üzere;

$$\omega_{L_1}(f;\delta) = \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx \qquad (2.2.1)$$

integraline f nin $L_1(-\infty, \infty)$ de süreklilik modülü denir. Süreklilik Modülü $\omega$ ile gösterilir.

Şimdi süreklilik modülünün bazı özelliklerini verelim.

$\delta \leq \delta_1$ olmak üzere

$$\omega_{L_1}(f;\delta) \leq \omega_{L_1}(f;\delta_1)$$

olduğundan $L_1$ deki süreklilik modülü negatif olmayan ve monoton artan bir fonksiyondur.

**Teorem 2.2.2.** $f \in L_1$ ise

$$\lim_{\delta \to 0} \omega_{L_1}(f; \delta) = 0$$

dır.

**İspat:**

$|t| \leq \delta$ olmak üzere (2.2.1) deki integrali ele alalım. $f \in L_1$ olduğundan her $\varepsilon > o$ için öyle bir a sayısı bulunabilir ki

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$$

integrali sonlu olduğundan

$$\int_{-\infty}^{-a} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad ve \quad \int_{a}^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.2.2}$$

yazılabilir ve ayrıca her pozitif $\delta$ için (2.2.2) eşitsizliklerinden

$$\int_{a+\delta}^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4} \quad , \quad \int_{-\infty}^{-a-\delta} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buna göre, $|t| \leq \delta$, yani$-\delta \leq t \leq \delta$, olmak üzere $\delta + t \geq 0$ ve $a + \delta + t > a$

$$\int_{a+\delta}^{\infty} |f(x+t)|\, dx = \int_{a+\delta+t}^{\infty} |f(x)|\, dx < \int_{a}^{\infty} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.2.3}$$

yazılabilir olacağından benzer şekilde $t - \delta \leq 0$ ve $-a - \delta + t \leq a$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{-a-\delta} |f(x+t)|\, dx = \int_{-\infty}^{-a-\delta+t} |f(x)|\, dx < \int_{-\infty}^{-a} |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da , $a + \delta > a$ ve $-a - \delta < -a$ sağlanacağından (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) eşitsizliklerinden

$$\sup_{|t|\le\delta}\left\{\int_{-\infty}^{-a-\delta}|f(x+t)-f(x)|\,dx+\int_{a+\delta}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|\,dx\right\}<\varepsilon$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$\sup_{|t|\le\delta}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|\,dx\le\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-f(x)|\,dx+\varepsilon$$

yazılabilir.

Lusin teoreminden $f\in L_1(a,b)$ ise her pozitif $\varepsilon$ sayısına göre,

$$\|f-\varphi\|_{L_1(a,b)}<\varepsilon$$

sağlanacak şekilde sürekli bir $\varphi$ fonksiyonu bulunur.

Lusin teoreminden, $[-a-2\delta,\ a+2\delta]$ aralığında sürekli $\varphi$ fonksiyonu bulunabilir ve

$$\int_{-a-2\delta}^{a+2\delta}|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda

$$\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-f(x)|\,dx\le\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-\varphi(x+t)|\,dx+\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|\,dx$$
$$+\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x)-f(x)|\,dx$$

elde edilir ve

$$\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-\varphi(x+t)|\,dx\le\int_{-a-2\delta}^{a+2\delta}|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon$$

$$\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x)-f(x)|\,dx\le\int_{-a-2\delta}^{a+2\delta}|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\varepsilon \qquad (2.2.5)$$

olduğundan

$$\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|f(x+t)-f(x)|\,dx\le 2\varepsilon+\sup_{|t|\le\delta}\int_{-a-\delta}^{a+\delta}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|\,dx$$

ifadesi elde edilir.

$\varphi$ sürekli olduğundan öyle bir $\delta_1$ sayısı seçilebilir ki $|t| \leq \delta_1$ olmak üzere

$$|\varphi(x+t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2(a+\delta)}$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre $\delta < \delta_1$ iken

$$\sup_{|t|\leq\delta} \int_{-a-\delta}^{a+\delta} |\varphi(x+t) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon \qquad (2.2.6)$$

Bu ifade (2.2.5) den

$$\sup_{(t)\leq\delta} \int_{-a-b}^{a+b} |f(x+t) - f(x)|\, dx \leq 3\varepsilon$$

bulunur ve (2.2.6), (2.2.4) de yerine yazılırsa teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 2.2.3.** m doğal sayı olmak üzere,

$$\omega_{L_1}(f; m\delta) \leq m\omega_{L_1}(f; \delta)$$

dır.

**İspat:** Süreklilik modülünün tanımından

$$\omega_{L_1}(f; m\delta) = \sup_{|t|\leq m\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx$$

yazılabilir. Burada sup,[-$m\delta, m\delta$] aralığında tanımlanmıştır.$t = my$ için

$$\omega_{L_1}(f; m\delta) = \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+my) - f(x)|\, dx$$

$$= \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+my) - f(x+(m-1)y) + f(x+(m-1)y) - f(x+(m-2)y) + \cdots + f(x+y) - f(x)|\, dx$$

olduğu görülür. Yani

$$\omega_{L_1}(f; m\delta) \leq \sup_{|y|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} |f(x+ky) - f(x+(k-1)y)|\, dx$$

ve burada $x + (k-1)y = z$ dönüşümü yapılırsa ve sonra yeniden z = x ile y = t ile alınırsa,

$$\omega_{L_1}(f; m\delta) \leq \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} |f(x+t) - f(x)|\, dx$$

$$= m\omega_{L_1}(f, \delta)$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.4.** $\lambda > 0$ keyfi sayısı için

$$\omega_{L_1}(f; \lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega_{L_1}(f; \delta)$$

dır.

**İspat:** $[|\lambda|]$ ile $\lambda$ sayısının tam kısmını göstersin. Bu durumda $\lambda < [|\lambda|] + 1$ ve $\omega_{L_1}(f; \delta)$ fonksiyonu monoton artan olduğundan

$$\omega_{L_1}(f; \lambda\delta) \leq \omega_{L_1}(f; ([|\lambda|] + 1)\delta)$$

dır. $[|\lambda|] + 1$ bir tam sayı ve $[|\lambda|] < \lambda$ olduğundan yukarıda ki teoremden

$$\omega_{L_1}(f; \lambda\delta) \leq \omega_{L_1}(f; ([|\lambda|] + 1)\delta)$$

$$\leq ([|\lambda|] + 1)\omega_{L_1}(f; \delta)$$

$$\leq (\lambda + 1)\omega_{L_1}(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

**Lemma 2.2.5.** $\lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\omega_{L_1}(f;\delta)}{\delta} = 0$ ise $f$ hemen hemen her yerde sabittir.

## 2.3. Karakteristik Noktalar

$f \in L_1$ olmak üzere

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

integralin türevi hemen hemen her x için

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

olur. Bu limitte $F(x)$ yerine yazılırsa ve bu eşitlik hemen hemen her yerde

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$$

anlamına gelir yani; $F^{\iota}$ = $f$ ( x ) demektir. Burada h yerine – h yazıldığında

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} f(t)\,dt = f(x)$$

şeklindedir. Yukarıdaki son iki eşitliği taraf tarafa toplanırsa;

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik hemen hemen her yerde mevcuttur.

**Tanım 2.3.1.** Aşağıdaki özellikleri sağlayan x noktasına $L_1$ de olan $f$ fonksiyonunun d-noktası adı verilir.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[f(t)]\,dt = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}[f(t)]\,dt = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}[f(t)]\,dt = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(x+t)-f(x)]\,dt = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(x-t)-f(x)]\,dt = 0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,dt = 0$$

**Tanım 2.3.2. (Lebesgue Noktası )** $L_1$ de olan $f$ fonksiyonu için bir x noktasında;

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa X noktasına Lebesgue noktası denir. Daha genel olarak

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,dt = 0$$

yazılabilir.

**Lemma 2.3.1.** $f \in L_1$ fonksiyonu için $(-\infty, +\infty)$ aralığının hemen hemen her noktası aynı zamanda bir Lebesgue noktasıdır.

**İspat:**$\varphi(x, h)$ fonksiyonu

$$\varphi(x, h) = \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt$$

biçiminde tanımlansın. $\varphi$ fonksiyonunun integrali alınırsa $\varphi$(x,h)∈ $\varphi$ olduğundan Fubini teoremine göre

$$\|\varphi(x,h)\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt\right)dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\,dx\right)dt$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h\left(\sup_{|t|\leq h}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\,dx\right)dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h \omega_{L_1}(f;h)\,dt = \omega_{L_1}(f;h)$$

eşitsizliği bulunur, bu da

$$\|\varphi(x,h)\|_{L_1} \leq \omega_{L_1}(f;h)$$

sağlanıyor demektir. Her iki tarafın h'ye göre limiti alınırsa

$$\lim_{h\to 0}\|\varphi(x,h)\|_{L_1} \leq \lim_{h\to 0}\omega_{L_1}(f;h)$$

yani

$$\lim_{h\to 0}\omega_{L_1}(f;h) = 0$$

süreklilik modünün limit sıfırdır. Sonuç olarak hemen hemen her x için

$$\lim_{h\to 0}\varphi(x,h) = 0$$

dir. Yani hemen hemen her X noktası aynı zamanda bir Lebesgue noktasıdır.

$f \in L_1$fonksiyonunun Lebesgue noktaları kümesi $L(f)$, d noktaları kümesi $D(f)$, süreklilik noktaları kümesi $C(f)$ ile gösterilsin. Bu durumda $L(f) \subset D(f)$ olduğu açıktır. Gerçekten de

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]\, dt\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt$$

eşitsizliği her bir Lebesgue noktasının aynı zamanda bir d noktası olduğunu gösterir. $f$ fonksiyonu x noktasında sürekli olsun yani $\forall\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $|x - t| < \delta$ şartını sağlayan t ler için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. $h \leq \delta$ seçilirse

$$\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} \varepsilon\, dt = \varepsilon$$

elde edilir ve buradan

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$$

yazılabilir. Bu da $L_1$ de olan $f$ fonksiyonunun her bir süreklilik noktasının aynı zamanda bir Lebesgue noktası olduğunu gösterir. Bu takdirde

$$C(f) \subset L(f) \subset D(f)$$

şeklinde bir ilişki vardır.

## 2.4. İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi

Bu kısımda temel olarak [5] ve [3] kaynaklarından yararlanılmıştır. D tüm reel eksen veya onun bir alt kümesi olsun X ile D kümesinde tanımlı fonksiyonlardan oluşturulmuş bir lineer normlu uzay ve Y de bu X uzayının çok iyi özellikleri olan fonksiyonlarından oluşturulmuş bir alt uzay olsun X'de alınan her $f$ fonksiyonuna göre

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathrm{f}(\mathrm{x}) - \varphi_n(x) \| = 0$$

sağlanacak biçimde bir $(\varphi_n) \in$ Y dizisi bulunuyorsa Y kümesine X de yoğun alt küme denir.

Weierstrass, reel sayıların kompakt bir alt aralığında sürekli olan fonksiyona düzgün yakınsayan polinomlar dizisinin varlığını ve C[a,b] uzayında polinomlar kümesinin yoğun olduğunu göstermiştir. Bernstein ise [0,1] aralığında sürekli bir fonksiyon olan $f$ için

$$\mathrm{B_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

polinomların aynı aralıkta n $\rightarrow \infty$ iken $f$ ye düzgün yakınsak olduğunu ispatlamıştır.

Bernstein polinomları keyfi [a,b] aralığında da tanımlanabilir ve istenilen kompakt alt aralıkta yaklaşımlar teorisinin esas problemlerinden birinin tam çözümünü vermektedir.

Yaklaşımlar teorisi integrallenebilir fonksiyonlar sınıflarında da düşünülebilir. Bu durumda Bernstein polinomunda olduğu gibi $f\left(\frac{k}{n}\right)$ şeklindeki değerleri her zaman ulaşmak mümkün olmyabilir. Çünkü Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon, ölçümü sıfır olan kümenin yani fonksiyonun sınırsız olduğu sayılabilir noktalar kümesinin dışında oluşturulmaktadır.

$\mathcal{D}$, tüm reel sayılar veya onun bir alt kümesi olmak üzere X, $\mathcal{D}$ kümesinde tanımlı ve Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı olsun. Bu uzayda dönüşüm yapan bir lineer integral operatör:

$$\int_{\mathcal{D}} f(t)K(t,x)\,dt, \qquad x \in \mathcal{D}$$

şeklinde verilebilir ve burada K $(t,x)$ fonksiyonuna integral operatörünün çekirdeği adı verilir. Bu integral operatörü $\mathcal{D} = (\mathrm{a},\mathrm{b})$ olmak üzere

$$L(f,x) = \int_a^b f(t)K(t,x)\,dt \tag{2.4.1}$$

şeklinde ifade edilebilir.(2.4.1) integralinde K$(t,\ x)$ çekirdeği yerine $K_1(x-t)$ fonksiyonu alınırsa yani;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_1(x-t)\,dt \qquad (2.4.2)$$

veya $K_1$ ve $f$, $2\pi$ periyotlu olduğunda,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_1(x-t)\,dt$$

şeklindeki integral operatörlere, konvolüsyon tipi operatör denir.Eğer K($t$, $x$) türevlenebilir bir çekirdek

$$\int_{\mathcal{D}} f(t)K(t,x)\,dt\ , \qquad\qquad x \in \mathcal{D}$$

integralinin $x$'e göre düzgün yakınsak ise bu takdirde integral altında $x$ 'e göre türev alınabilir. integral operatörler x uzayında olan $f$ fonksiyonunu daha iyi özellikleri olan bir h fonksiyonuna dönüştürebilir. Buna göre Λ bir sayılar kümesi $\lambda_0$ bu kümenin bir limit noktası olmak üzere, $K_\lambda(t,x)$ çekirdekler ailesi ele alınırsa

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathcal{D}} f(t)K_\lambda(t,x)\,dt$$

biçiminde bir fonksiyon ailesi elde edilir.İntegrallenebilir fonksiyonlar sınıfında yaklaşım problemi, belirtilmiş bir $x_0$ noktasında ;

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} h_\lambda(x_0) = f(x_0)$$

veya norma göre,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|h_\lambda(x) - f(x)\|_x = 0$$

şeklinde çözülebilir.

Yaklaşım teorisinin diğer bir problemi ise yaklaşım hızının bulunması problemidir.

$\lambda \to \lambda_0$ için

$$\|h_\lambda(x) - f(x)\|_x \to 0$$

olduğundan $\lambda$ parametresine göre birinci durumda;

$$|h_\lambda(x_0) - f(x_0)|$$

ve ikinci durumda

$$\|h_\lambda(x) - f(x)\|_x$$

limiti sıfır olan bir ifadedir. Örneğin; $\|h_\lambda(x) - f(x)\|_x = \alpha_\lambda$ dır ve $\alpha_\lambda$ sıfır ailesidir. Yani;

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \alpha_\lambda = 0$$

dır. Bu $(\alpha_\lambda)$ ailesinin, $\lambda \to \lambda_0$ iken hangi hızla sıfıra yaklaşması$\big(h_\lambda(x)\big)$ ailesinin $f$ ‘e yaklaşım hızını belirlemektedir.Bunun için $(\alpha_\lambda)$ ailesini başka bir sıfır ailesi ile karşılaştırmak yeterlidir.Her n için $\alpha_n \le \beta_n$ için

$$(\alpha_\lambda) = 0(\beta_\lambda \quad)$$

nın sağlanması, $(\alpha_\lambda)$ ailesinin $(\beta_\lambda)$ ailesinden daha hızlı sıfıra gittiğini göstermektedir. Fonksiyon uzaylarında ($\beta_n$ ) dizisi $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü ile bağlı bir şekilde ele alınabilir.

Örneğin; $(\alpha_\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ ve $\left(\beta_\lambda \quad\right) = \frac{1}{\lambda^2}$ olsun

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\alpha_\lambda}{\beta_\lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda^2}} = \infty$$

veya

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\beta_\lambda}{\alpha_\lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda}} = 0$$

dır. Buradan $\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ dizisinden daha hızlı sıfıra yakınsadığı söylenebilir.

$$A_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t) K_\lambda(x-t)\, dt \qquad (2.4.3)$$

şeklindeki konvolüsyon tipi integral operatörler ailesi matematiğin bir çok dalında önemli bir yer tutmaktadır. Birçok diferansiyel denklem için sınır-değer problemlerinin çözümü bu tip integrallerle verilmektedir. Bunlara örnek olarak, birim dairede Dirichlet probleminin çözümünü veren;

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+2r\cos(t-\theta)+r^2} f(t)\, dt$$

Poisson integrali, ısı denklemi için Cauchy probleminin çözümünü veren;

$$W(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{\frac{-(y-x)^2}{4a^2 t}}\, dy$$

Gauss-Weierstrass integrali, yine Dirichlet probleminin üst yarı düzlem için çözümünü veren;

$$\alpha(x,y) = \frac{\epsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\epsilon^2 + (t-x)^2}\,dt$$

Abel-Poisson integrali verilebilir. Ayrıca Fourier serisi için kullanılan bazı toplama yöntemlerinin incelenmesi de bu tür integral operatörler ile ilgilidir. $2\pi$ periyotlu bir $f$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamı;

$$\delta_n(f;x) = \frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olsun. Burada $a_k$ ve $b_k$ Fourier katsayıları,

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\ , \qquad\qquad k = 0,1,2,3\ldots$$

ve

$$b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\ , \qquad\qquad k = 1,2,3\ldots$$

İfadeleri  kısmi toplamında yerine yazılarak ;

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}\,dt \qquad\qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Fejer integrali elde edilir.

Birçok problemde daha genel olan $(-\infty \le a < b \le \infty)$

$$L_\lambda(f;x) = \int_a^b f(t)K_\lambda(t,x)\,dt \qquad\qquad (2.4.4)$$

tipindeki integrallere rastlanır.

## 2.5. Konvolüsyon Tipli İntegral Operatörler

**Tanım 2.5.1.** $\Lambda$ sayılar kümesi, $\lambda_0$ bu kümenin yığılma noktası olsun. $K_\lambda(t)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa *K* fonksiyonuna deltasal çekirdek denir.

***a***) $K_\lambda(t)$ negatif olmayan ve çift bir fonksiyondur. $\forall\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(0)$ sonludur ve

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$$

dur.

**b)** $\forall\lambda \in \Lambda$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)\, dt = 1$$

dir.

**c)** Her belirlenmiş $\delta$ için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t)\right) = 0$$

ve

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)\, dt = 0$$

dır.

$K_\lambda(t)$, deltasal çekirdek olmak üzere, lineer $A_\lambda$ integral operatörü

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(x-t)\, dt$$

şeklinde tanımlansın.

**Lemma 2.5.1.** $A_\lambda$ operatörü $L_1(-\infty,+\infty)$ uzayından $L_1(-\infty,+\infty)$ uzayına dönüşüm yapan sürekli bir operatördür.

**Tanım 2.5.2.** $\Lambda$ sayılar kümesi, $\lambda_0$ bu kümenin yığılma noktası olsun. $\lambda \in \Lambda$ parametresine bağlı, $2\pi$ periyotlu $K_\lambda(t)$ çekirdeği aşağıdaki koşulları sağlarsa, $2\pi$ periyotlu deltasal çekirdek denir.

**a)** $K_\lambda(t)$ negatif olmayan ve çift fonksiyondur. $\forall\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(0)$ sonludur ve

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$$

dur.

**b)** $\forall\lambda \in \Lambda$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_\lambda(t)\,dt = 1$$

dir.

**c)** Önceden belirlenmiş $\delta$ sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t)\right) = 0$$

dır.

# 3. DELTASAL ÇEKİRDEKLİ KONVOLÜSYON TİPLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLESİNİN YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde konvolüsyon tipli deltasal çekirdekli integral operatör ailelerinin $L_1(-\infty,\infty)$ ve $L_1(-\pi,\pi)$ uzaylarında yakınsaklığı ile ilgili temel teoremler verilmiştir. Bu bölümde kullanılan temel kaynaklar [4], [5] ve [17] olacaktır.

## 3.1 Deltasal Çekirdekli Konvolüsyon Tipli İntegral Operatörler Ailesinin Yakınsaklığı

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(x-t)\,dt, \qquad -\infty < x < \infty$$

operatörünü göz önüne alalım. Bu operatör için aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 3.1.1.** Kabul edelim ki $K_\lambda(t)$ operatörü [0,+∞) aralığında monoton azalan ve deltasal çekirdek olsun. Bu durumda $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ fonksiyonu için her d noktasında

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} A_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir ([17] ve [4]).

**İspat:** $K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)K_\lambda(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x+t)K_\lambda(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(x+t)K_\lambda(t)\,dt$$

eşitliğinin solundaki integralde t yerine –t yazılırsa

$$\int_{0}^{+\infty} [f(x+t)+f(x-t)]K_\lambda(t)\,dt$$

elde edilir. Deltasal çekirdeğin tanımına göre b) özelliğinden

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_\lambda(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} K_\lambda(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} K_\lambda(t)\,dt$$

yazabiliriz. Bu son eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarpılırsa

$$f(x) = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)K_\lambda(t)\,dt$$

olur. Buna göre

$$A_\lambda(f;x) - f(x) = \int_{0}^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)]K_\lambda(t)\,dt - 2\int_{0}^{+\infty} f(x)K_\lambda(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]K_\lambda(t)\,dt$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$F(t) = \int_{0}^{t} [f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)]\,du$$

alınırsa d noktası tanımından yani

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\,dt = 0$$

eşitliğene göre $t < \delta$ olduğunda $F(t) \leq \varepsilon t$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta$ sayısı vardır.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{0}^{h} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\,dt = 0$$

ayrıca $F(t)$ nin tanımından, $F(t)$ diferansiyeli;

$$dF(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

şeklindedir. Buradan,

$$A_\lambda(f;x) - f(x)$$

$$= \int_{0}^{\delta} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]K_\lambda(t)\,dt$$

$$+\int_{\delta}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]K_\lambda(t)\,dt$$

$$=I_1(\lambda)+I_2(\lambda)$$

her iki integralin sıfıra yakınsadığı gösterilirse ispat tamamlanmış olur. İlk olarak $I_1(\lambda)$ integralini ele alalım. Kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_1(\lambda)=\int_0^{\delta}K_\lambda(t)\,dF(t)$$

$$I_1(\lambda)=K_\lambda(t)\,F(t)\Big|_0^{\delta}+\int_0^{\delta}F(t)d[-K_\lambda(t)]\le K_\lambda(\delta)F(\delta)+\varepsilon\int_0^{\delta}td[-K_\lambda(t)]$$

elde edilir. Son integrale tekrar kısmi integrasyon uygulandığında

$$I_1(\lambda)\le K_\lambda(\delta)F(\delta)+\varepsilon\left(-tK_\lambda(t)\Bigg|_0^{\delta}+\int_0^{\delta}K_\lambda(t)\,dt\right)$$

$$\le \varepsilon\delta K_\lambda(\delta)-\varepsilon\delta K_\lambda(\delta)+\varepsilon\int_0^{\delta}K_\lambda(t)\,dt\le\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}K_\lambda(t)\,dt=\varepsilon$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla $I_1(\lambda)$ nın limiti sıfırdır. Şimdi $I_2(\lambda)$ integralini göz önüne alalım.

$$|I_2(\lambda)|\le\int_{\delta}^{+\infty}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|K_\lambda(t)\,dt$$

$$\le K_\lambda(\delta)\int_{\delta}^{+\infty}|f(x+t)+f(x-t)|\,dt+2|f(x)|\int_{\delta}^{\infty}K_\lambda(t)\,dt$$

$$\le K_\lambda(\delta)\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)+f(x-t)|\,dt+2|f(x)|\int_{\delta}^{\infty}K_\lambda(t)\,dt$$

$$\le 2\|f\|_{L_1}K_\lambda(\delta)+2|f(x)|\int_{\delta}^{\infty}K_\lambda(t)\,dt$$

dir. Burada $K_\lambda$ deltasal çekirdek olduğundan $\lambda\to\lambda_0$ ‘a giderken eşitsizliğin sağ tarafında ki ifadelerin limiti sıfırdır. Bu da ispatı tamamlar. Benzer şekilde $L_1$(-$\pi$, $\pi$) uzayında $2\pi$ periyotta ki fonksiyonlar uzayında dönüşüm yapan deltasal çekirdekli integral operatörler

$$B_\lambda(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_\lambda(t)\,dt$$

şeklindedir. Operatörün yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

**Teorem 3.1.2.** Kabul edelim ki $K_\lambda(t)$ operatörü $[0,\pi]$ aralığında monoton azalan ve deltasal çekirdek olsun. Bu durumda $f \in L_1(-\pi,+\pi)$ fonksiyonu için her d- noktasında

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} B_\lambda(f;x) = f(x)$$

dir.

**Teorem 3.1.3.** $A_\lambda(f;x)$ integralinde $K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek ve $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ olsun. Eğer $x = x_0$ $f$ nin süreklilik noktası ise

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} A_\lambda(f;x_0) = f(x)$$

dir.

**İspat:**

$$|A_\lambda(f;x_0) - f(x_0)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0+t) - f(x_0)| K_\lambda(t)\,dt$$

$x = x_0$ bir süreklilik noktası için keyfi $\varepsilon$ verildiğinde $|t| < \delta$ şartını sağlayan t ler için

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Bu fonksiyon $x_0$ noktasında süreklidir. Buna göre

$$\begin{aligned}|A_\lambda(f;x_0) - f(x_0)| &\le \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{+\delta}^{\infty} \right\} |f(x_0+t) - f(x_0)| K_\lambda(t)\,dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{-\delta}^{\delta} |f(x_0+t) - f(x_0)| K_\lambda(t)\,dt \le \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)\,dt = \varepsilon.$$

$K_\lambda(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$I_1 + I_3 = \int_{\delta}^{\infty} |f(x_0+t) - f(x_0)| K_\lambda(t)\,dt + \int_{-\infty}^{-\delta} |f(x_0+t) - f(x_0)| K_\lambda(t)\,dt$$

eşitliğin sağındaki ikinci integralde $t \to -t$ değişken değişmesi yapılırsa

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_3 &= \int_{\delta}^{\infty} |f(x_0+t) - f(x_0)| K_\lambda(t)\, dt + \int_{\delta}^{\infty} |f(x_0-t) - f(x_0)| K_\lambda(t)\, dt \\
&\leq \sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0+t)|\, dt + 2|f(x_0)| \int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)\, dt \\
&+ \sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0-t)|\, dt
\end{aligned}
$$

$K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olduğundan $\lambda \to \lambda_0$ için $I_1 + I_3$ ün limiti sıfırdır. Bu da ispatı tamamlar.

**NOT**: Aynı teorem süreklilik noktasında $B_\lambda(f;x)$, $2\pi$ periyotlu fonksiyonlar için de geçerlidir.

### 3.2. $L_1$ Uzayının Normunda Yakınsaklık

$$A_\lambda(f;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)K_\lambda(x-t)\,dt$$

şeklindeki deltasal çekirdekli integral operatörünün $L_1$ normunda yakınsaklığını inceleyelim.

**Teorem 3.2.1.** Farz ederim ki $A_\lambda(f;x)$ integralinde $f \in L_1(-\infty,\infty)$ ve $K_\lambda$ deltasal çekirdek olsun. Bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_{L_1} = 0$$

dir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} A_\lambda(f;x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_\lambda(t)\,dt - f(x)\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+t) - f(x)]K_\lambda(t)\,dt \end{aligned}$$

$$|A_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|K_\lambda(t)\,dt$$

olur.

$$|A_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \int_{0}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|K_\lambda(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} |f(x+t) - f(x)|K_\lambda(t)\,dt$$

eşitliğinin sağındaki ikinci integralde $t \to -t$ değişken değişmesi yapılırsa, $K_\lambda$(t) çift fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |A_\lambda(f;x) - f(x)| &\leq \int_{0}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|K_\lambda(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} |f(x-t) - f(x)|K_\lambda(t)\,dt \\ &= \int_{0}^{\infty} [|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|]K_\lambda(t)\,dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıda ki eşitsizliğin her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_\lambda(f;x) - f(x)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{0}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|\, K_\lambda(t)\, dt \right) dx$$

$$\leq \int_{0}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|\, dx \right) K_\lambda(t)\, dt$$

ifadesi elde edilir. Keyfi bir $\delta > 0$ sayısı için integrali iki kısma ayıralım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A_\lambda(f;x) - f(x)|\, dx$$

$$\leq \int_{0}^{\delta} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|\, dx \right) K_\lambda(t)\, dt$$

$$+ \int_{\delta}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|\, dx \right) K_\lambda(t)\, dt$$

her iki integralin de ayrı ayrı sıfıra gittiğini gösterelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x \pm t) - f(x)|\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x \pm t)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \leq 3\|f\|_{L_1}$$

Yukarıdaki eşitsizlik ve süreklilik modülünün özellikleri göz önüne alınırsa

$$\|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_{L_1} \leq \int_{0}^{\delta} \left( \sup_{|t|\leq\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x \pm t) - f(x)|\, dx \right) K_\lambda(t)\, dt + 3\|f\|_{L_1} \int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)\, dt$$

$$= 2\omega_{L_1}(f;\delta) \int_{0}^{\delta} K_\lambda(t)\, dt + 3\|f\|_{L_1} \int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)\, dt$$

bulunur. $K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olduğundan ve süreklilik modülünün özelliğinden

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|A_\lambda(f;x) - f(x)\|_{L_1} = 0$$

elde edilir. $f \in L_1(-\pi,\pi)$ için benzer teorem aşağıda verilmiştir.

**Teorem 3.2.2.** Kabul edelim ki $f \in L_1(-\pi,\pi)$ ve $K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek olsun. Bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|B_\lambda(f;x) - f(x)\|_{L_1} = 0$$

dir.

**İspat:** $K_\lambda(t)$, $\lambda \in \Lambda$, $2\pi$ periyotlu deltasal çekirdek ve $f \in L\quad(-\pi,\pi)$ olsun

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|B_\lambda(f;x) - f(x)\| \quad = 0$$

$$|B_\lambda(f;x) - f(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_\lambda(t)\,dt$$

$$\|B_\lambda(f;x) - f(x)\| \quad \leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_\lambda(t)\,dt \right) \; dx \right)$$

$$\leq \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p\,dx \right) \; K_\lambda(t)\,dt \right)$$

süreklilik modülünün tanımından

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} \omega_{L_1}(f,|t|) K_\lambda(t)\,dt$$

eşitsizliği elde edilir. Keyfi $\delta_\lambda$ dizisi için

$$\omega_{L_1}(f,|t|) = \omega_{L_1}\left(f, \frac{|t|\delta_\lambda}{\delta_\lambda}\right) \leq \left(\frac{|t|}{\delta_\lambda} + 1\right) \omega_{L_1}(f,\delta_\lambda)$$

ifadesi yazılabilir. Buna göre

$$\|B_\lambda(f;x) - f(x)\|_p \leq \omega_{L_p}(f,\delta) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|t|}{\delta_\lambda} + 1\right) K_\lambda(t)\,dt$$

$$\leq \omega_{L_p}(f,\delta_\lambda) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|}{\delta_\lambda} K_\lambda(t)\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} K_\lambda(t)\,dt \right)$$

$$\leq \omega_{L_p}(f,\delta) \left( \frac{1}{\delta_\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} |t|\, K_\lambda(t) + 1 \right).$$

Burada

$$\delta_\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_\lambda(t)\, dt$$

alınırsa.

$$\|B_\lambda(f;x) - f(x)\| \le 2\omega_{L_p}(f,t)$$

elde edilir. Keyfi bir $\beta$ pozitif sayısı için

$$\delta_\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_\lambda(t)\, dt = 2\int_{0}^{\pi} tK_\lambda(t)\, dt$$

$$2\left(\int_{0}^{\beta} t \cdot K_\lambda(t)\, dt + \int_{\beta}^{\pi} t \cdot K_\lambda(t)\, dt\right) \le 2\beta \int_{-\pi}^{\pi} K_\lambda(t)\, dt + 2\sup_{|t|\ge\beta} K_\lambda(t)(\pi^2 - \beta^2)$$
$$\le 2\beta + \pi^2 \sup_{|t|\ge\beta} K_\lambda(t)\, dt$$

$K_\lambda(t)$ deltasal çekirdek özelliğinden

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sup_{|t|\ge\beta} K_\lambda(t)\right) = 0$$

olduğundan

$$\beta \to 0 \qquad \lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta_\lambda \le 2\beta$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \delta_\lambda = 0$$

$$\|B_\lambda(f;x) - f(x)\|_1 \le 2\omega_{L_1}(f,\delta_\lambda)$$

Bu da

$$;\ \delta_\lambda \to 0 \qquad \omega_{L_p}(f,\delta_\lambda) = 0$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \|B_\lambda(f;x) - f(x)\| = 0$$

olduğunu gösterir.

**Tanım 3.2.1.** $\Lambda$ bir indis kümesi ve $\lambda_0$ bu kümenin yığılma noktası olsun. $K(t,\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa A sınıfındandır denir.

**a)** $K(t,\lambda)$ fonksiyonu, her bir $\lambda \in \Lambda$ için $t$ nin bir fonksiyonu olara tüm reel eksende tanımlıdır.

**b)** Her bir $\lambda \in \Lambda$ için

$$\|K(t,\lambda)\|_{L_1} \leq M < \infty$$

olacak şekilde bir $M$ sayısı vardır.

**c)** Her bir $\lambda \in \Lambda$ için $K(0,\lambda)$ sonludur.

**d)** $< a,b >$ reel eksenin herhangi bir alt aralığını göstermek üzere

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} \int_a^b K(t-x,\lambda)\,dt = 1 \qquad x \in < a,b >.$$

**e)** Belirlenmiş her $\gamma > 0$ sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left[\sup_{\gamma\leq|t|} |K(t,\lambda)|\right] = 0$$

dir.

$$L(f;x,\lambda) = \int_a^b f(t)K(t-x,\lambda)\,dt$$

Operatörünün (a,b) aralığında süreklilik noktasında yakınsaklığına ilişkin sonuç bir sonraki teoremde verilmiştir.

**Teorem 3.2.3.** $K(t,\lambda)$ fonksiyonu A sınıfından ve $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için t ye göre [a,$x_0$] aralığında azalmayan, $[x_0,b]$ aralığından artmayan olsun.Bu durumda, $x_0$ noktası $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun süreklilik noktası ise,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda) = f(x_0)$$

dır.

**İspat:**

$$x_0+\delta<b\ , \qquad x_0-\delta>a \qquad \text{ve} \qquad 0\le x_0-x<\frac{\delta}{2} \qquad \text{olsun.}$$

$f$ fonksiyonu $x_0$ noktasında sürekli olduğundan, $\forall\varepsilon>0$ için en az bir $\delta>0$ sayısı vardır öyle ki $|t-x_0|<\delta$ için $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$ sağlanır.

Diğer taraftan

$$|L(f;x,\lambda)-f(x_0)| = \left|\int_a^b f(t)K(t-x,\lambda)\,dt - f(x_0)\right|$$

$$\le \int_a^b |f(t)-f(x_0)||K(t-x,\lambda)|\,dt + |f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)\,dt - 1\right|$$

yazılabilir.

$x_0$ noktası $f$ in süreklilik noktası olduğundan,

$$\begin{aligned}
&|L(f;x,\lambda)-f(x_0)| \\
&\qquad \le \left\{\int_a^{x_0-\delta} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-f(x_0)||K(t-x,\lambda)\,dt|\right\} \\
&\qquad + |f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)\,dt-1\right| \\
&= I_1(x,\lambda)+I_2(x,\lambda)+I_3(x,\lambda)+I_4(x,\lambda) \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitsizliğin sağındaki integralin sıfıra gittiğini göstermek yeterlidir.

Öncelikle $I_1(x,\lambda)$ ve $I_3(x,\lambda)$ integralini ele alalım.

$$I_1(x,\lambda) = \int_a^{x_0-\delta} |f(t)-f(x_0)||K(t-x,\lambda)\,dt|$$

$|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için $t$ye göre [a,$x_0$] aralığında azalmayan olduğundan,

$$I_1(x,\lambda) \leq |K(x_0 - x - \delta, \lambda)| \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

elde edilir. Ayrıca $0 \leq x_0 - x \leq \frac{\delta}{2}$ olduğundan

$$I_1(x,\lambda) \leq \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \int_a^{x_0-\delta} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

$$\leq \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\int_a^b |f(t)|\, dt + \int_a^b |f(x_0)|\, dt\right\}$$

$$= \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer biçimde, $|K(t-x,\lambda)|$ fonksiyonu her bir $\lambda \in \Lambda$ için $t$ ye göre $[x_0, b]$ de artmayan olduğundan,

$$I_3(x,\lambda) \leq |K(x_0 - x + \delta, \lambda)| \int_{x+\delta}^{b} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

$$\leq \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \int_{x+\delta}^{b} |f(t) - f(x_0)|\, dt$$

$$\leq \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\int_a^b |f(t)|\, dt + \int_a^b |f(x_0)|\, dt\right\}$$

$$= \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right| \left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}} + |f(x_0)|(b-a)\right\}$$

bulunur. Şimdi ise $I_2(x,\lambda)$ yi göz önüne alalım.

$$I_2(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t) - f(x_0)||K(t-x,\lambda)|\, dt$$

$x_0$ noktası $f$ fonksiyonunun süreklilik noktası olduğundan ve A sınıfının b) şartından,

$$I_2(x,\lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |K(t-x,\lambda)|\, dt \leq \varepsilon \int_a^b |K(t-x,\lambda)|\, dt \leq \varepsilon M < \infty$$

yazılabilir. Son olarak elde edilen ifadeler (3.2.1) yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&|L(f;x,\lambda)-f(x_0)| \\
&\qquad \le \left|K\left(-\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}}+|f(x_0)|(b-a)\right\} \\
&\qquad + \left|K\left(\frac{\delta}{2},\lambda\right)\right|\left\{\|f\|_{L_{1(a,b)}}+|f(x_0)|(b-a)\right\}+\varepsilon M \\
&\qquad + |f(x_0)|\left|\int_a^b K(t-x,\lambda)\,dt-1\right|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. $K(t,\lambda)$nın özelliklerinden,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} L(f;x,\lambda)=f(x_0)$$

sağlanır. $0\le x-x_0<\frac{\delta}{2}$ olması durumunda da ispat benzer şekilde yapılarak ispat tamamlanmış olur.

# 4. İKİ KATLI SİNGÜLER İNTEGRALLER

Bu kısımda iki katlı singüler integrallerin dikdörtgensel bir bölgede ve tüm $\mathrm{IR}^2$ üzerinde yakınsaklığı ile ilgili teoremler verilecektir. Bu bölümde temel olarak [13], [14] ve [17] kaynaklarından yararlanılmıştır.

## 4.1. Romanovsky Tipli Bir Teorem

Şimdi Siudut [13] tarafından verilen Romanovski tipli bir teoremi ifade ve ispat edelim. Ön şartlar aşağıdaki şekilde verilmiştir:

a ve b pozitif reel sayılar ve $x_0$, $y_0$ reel olsun $P =< -a, a > x < -b, b >$ olduğunu kabul edelim. X metrik uzay ve E de X' in bir alt kümesi olsun.

Farz edelim ki $\xi_0$, E nin bir yığılma noktası olsun. $K, R^2 \mathrm{x} E$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın;

**1)** $K \geq 0$ ve $K(\cdot,\cdot,\xi)$ her $\xi \in E$, için ölçülebilirdir.

**2)** $K(\cdot, s, \xi)$ çift; 2a- periyotlu ve her $\xi \in E$, $s \in< 0, b >$ için $< 0, a >$ aralığında artmayandır.

**3)** $K(t,\cdot,\xi)$ çift, 2b- periyotlu ve her $\xi \in E$, $t \in< 0, a >$ için $< 0, b >$ aralığında artmayandır.

**4)**

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} K(t, s, \xi) \, ds \, dt = 1$$

**5 )** Her $\delta \in (0, \min(a, b))$ için $\lim_{\xi \to \xi_0} K(\delta, 0, \xi) = \lim_{\xi \to \xi_0} K(0, \delta, \xi) = 0$, $f, R^2$ üzerinde reel değerli bir fonksiyonu göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlasın.

**6)** $f$; $P$ dikdörtgensel bölge üzerinde Lebesgue integrallenebilir.

**7)** Her bir $s \in \langle -b, b \rangle$ için $f(\cdot, s)$ 2a- periyotlu.

**8)** Her bir $t \in \langle -a, a \rangle$ için $f(t,\cdot)$ 2b- periyotlu.

**9)**

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t,s)\, dt = f(x_0, s)$$

eşitliği hemen hemen her $s \in \langle -b, b \rangle$ için sağlanır ve bu ifade $s = y_0$ için de gerçekleşir.

**10)**

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int_{y_0}^{y_0+\tau} f(t,s)\, ds = f(t, y_0)$$

ifadesi hemen hemen her $t \in \langle -a, a \rangle$ ve $t = x_0$ için sağlanır.

$C > 0$ için $Z_c$

$$\{(x, y, \xi) \in R^2 \text{x} E \colon |y_0 - y| \int_{-a}^{a} K(t, 0, \xi)\, dt < C$$

kümesi ile gösterilsin .ve

$$\{|x_0 - x| \int_{-b}^{b} K(0, s, \xi)\, ds < C\}$$

olur. Teoremden önce bu bölümde kullanacağımız Taberski [17] çalışmasında yer alan lemmayı ve ispatını verelim.

**Lemma 4.1.1. Natanson'un Lemmasının Bir Genellemesi :**

.

$$q(t) = \int_a^b v(s)\,ds < \infty$$

olacak şekilde her $\langle a - r, b\rangle$ aralığında sınırlı salınımlı bir fonksiyon olsun.$(0 < \eta < b - a)$, burada

$$v(s) = \underset{s \le t \le b}{\operatorname{var}}\, q(t) \quad (a \le s < b) \quad v(b) = 0$$

dır. Bu takdirde, eğer

$$M = \sup_{0 \le h \le b-a} \left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t)\,dt \right| < \infty \qquad (f \in L\langle a, b\rangle)$$

ise

$$I = \int_a^b f(t)q(t)\,dt$$

Lebesgue integrali mevcut ve

$$|I| \le M \int_a^b [v(s) + |q(b)|]\,ds$$

dir.

**İspat:**

$$F(t) = \int_a^t f(u)\,du \qquad (a \le t \le b)$$

olarak tanımlansın. Buna göre, kısmi integrasyondan

$$I_{a,\beta} = \int_a^\beta q(t)dF(t) = q(t)F(t)\Big|_a^\beta - \int_a^\beta F(t)dq(t)$$

elde edilebilir.

$$\left|\int_a^\beta F(t)dq(t)\right| \leq M\int_a^\beta (t-a)d[-v(t)] = M\left[(a-t)v(t)\,\Big|_a^\beta + \int_a^\beta v(t)\,dt\right]$$

$$(a-a)|q(a)-q(b)| < (a-a)v(a) \leq \int_a^\beta v(t)\,dt$$

olduğundan

$$\int_a^b F(t)dY(t)|$$

integrali mevcuttur.

$$\left|\int_a^b F(t)dY(t)\right| \leq M\int_a^b v(t)\,dt$$

dir. Eğer

$$\int_a^b w(s)\,ds < \infty$$

olacak şekilde $\Psi(t)$ mevcut ise (burada; $w(s) = \underset{a\leq t\leq s}{\operatorname{var}} \Psi(t)$ (a<s≤b), w(a) = 0 ), bu takdirde

$$N = \sup_{0\leq h\leq b-a}\left|\frac{1}{h}\int_{b-h}^b F(t)\,dt\right| < \infty$$

olmak üzere

$$\left|\int_a^b F(t)\Psi(t)\,dt\right| \leq N\int_a^b [w(s)+|\Psi(a)|]\,ds$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.2.** Kabul edelim ki $K$ ve $f$ fonksiyonları yukarıdaki şartları sağlasın.

$$\lim \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} f(t,s)K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt = f(x_0, y_0)$$

Bu takdirde herhangi C > 0 ve $(x, y, \xi) \to (x_0, y_0, \xi_0)$ ve $(x, y, \xi) \in Z_c$ için sağlanır.

**İspat: S**abit $C > 0$ ve $g(t,s) = f(t,s) - f(x_0, y_0)$ için

$$W\,(x, y, \xi) = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} g(t,s)\, K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt$$

yazılabilir. Burada $(x, y, \xi) \to (x_0, y_0, \xi_0)$ ve $(x, y, \xi) \in z_c$ için $W(x, y, \xi) \to 0$ gittiğini göstermek yeterlidir.

$$-a < x_0 \le 0, \qquad -b < y_0 \le 0, \qquad 0 < \delta < min(a + x_0, b + y_0),$$

$$0 < |x_0 - x| < \tfrac{1}{2}\delta \qquad\qquad 0 < |y_0 - y| < \tfrac{1}{2}\delta \qquad\qquad (4.1.1)$$

olduğunu kabul edelim.

P, dikdörtgensel bölgeyi $1 \le i \le 3$ ve $1 \le j \le 3$ için bu bölgeyi

$$P_{ij} = \langle c_i, c_{i+1} \rangle \mathrm{x} \langle d_j, d_{j+1} \rangle$$

biçiminde bölelim.

Burada

$$c_1 = -a \;\;,\;\; c_2 = x_0 - \delta \;\;,\;\; c_3 = x_0 + \delta \;\;,\;\; c_4 = a$$

ve

$$d_1 = -b \;\;,\;\; d_2 = y_0 - \delta \;\;,\;\; d_3 = y_0 + \delta \;\;,\;\; d_4 = b$$

dır. Eğer,

$$I_{ij} = \iint_{P_{ij}} g(t,s)\, K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt$$

ise bu takdirde

$$W(x,y,\xi)=\sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}$$

$(x,y,\xi)\to(x_0,y_0,\xi_0)$ ve $(x,y,\xi)\in Z_c$ ve $1\le i\le 3$ ve $1\le j\le 3$ için

$$I_{ij}\to 0 \tag{4.1.2}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $I_{13}$, $I_{12}$, $I_{22}$ integralleri için (4.1.2) yi ispat edelim.

İlk olarak $I_{13}$ integralini göz önüne alalım. (2), (3), (4.1.1) den

$$|I_{13}|\le\int_{-a}^{x_0-\delta}\int_{y_0+\delta}^{b}|g(t,s)|\,ds\,dt\,K\left(\frac{1}{2}\delta,\frac{1}{2}\delta,\xi\right)\le\|g\|K\left(\frac{1}{2}\delta,0,\xi\right)$$

eşitsizliği yazılabilir, burada

$$\|g\|=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}|g(t,s)|\,ds\,dt$$

dir. Böylece (5) den görülür ki $(x,y,\xi)\to(x_0,y_0,\xi_0)$ için $I_{13}\to 0$ elde edilir.

Benzer olarak $I_{11}$, $I_{31}$, $I_{33}$ nin de $(x,y,\xi)\to(x_0,y_0,\xi_0)$ için sıfıra gittiği görülür.

Şimdi $I_{12}$ integrali için (4.1.2) nin sağlandığını ispat edelim.

$$\begin{aligned}|I_{12}|&=\left|\int_{-a}^{x_0-\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\{f(t,s)-f(x_0,y_0)\}K(t-x,s-y,\xi)\,ds\,dt\right|\\&\le\left|\int_{-a}^{x_0-\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\{f(t,s)-f(t,y_0)\}K(t-x,s-y,\xi)\,ds\,dt\right|\\&+\int_{-a}^{x_0-\delta}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}|f(t,y_0)-f(x_0,y_0)|K(t-x,s-y,\xi)\,ds\,dt=A+B\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

yazılabilir.

(2) ve (3) şartları uygulanırsa

$$B \leq 2\delta \int_{-a}^{x_0-\delta} |f(t,y_0) - f(x_0,y_0)|\, K(t-x,0,\xi)\, dt$$

$$\leq 2\delta \left( \int_{-a}^{x_0-\delta} (|f(t,y_0)| + |f(x_0,y_0)|)\, dt \right) K\left(\frac{1}{2}\delta,0,\xi\right)$$

$$\leq 2\delta \left( \int_{-a}^{a} |f(t,y_0)|\, dt + 2a\,|f(x_0,y_0)| \right) K\left(\frac{1}{2}\delta,0,\xi\right) \tag{4.1.4}$$

eşitsizliği bulunur.

(10) dan hemen hemen her $t \in \langle -a,a \rangle$ için

$$\left| \frac{1}{\tau_0} \int_{y_0}^{y_0+\tau_0} f(t,s)\, ds \right| + 1 \geq |f(t,y_0)|$$

olacak şekilde $\tau_0 > 0$ $(\tau_0 < b)$ mevcuttur. Böylece (4.1.4) den

$$B \leq 2\delta \left( \frac{1}{\tau_0} \|f\| + 2a + 2a|f(x_0,y_0)| \right) K\left(\frac{1}{2}\delta,0,\xi\right)$$

elde edilir. Buradan da$(x,y,\xi) \to (x_0,y_0,\xi_0)$ için

$$B \to 0 \tag{4.1.5}$$

olduğu görülür. (10) ifadesinden her $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ sayısı hemen hemen her $t \in \langle -a,a \rangle$, $0 < \tau \leq \delta$ olduğundan

$$\left| \frac{1}{\tau} \int_{y_0}^{y_0 \pm \tau} \{f(t,s) - f(t,y_0)\}\, ds \right| \leq \varepsilon$$

dır. Böylece Lemma 4.1.1 den

$$A \leq \int_{-a}^{x_0-\delta} \varepsilon \left\{ \int_{-b}^{b} K(t-x,s,\xi)\, ds + 2|y_0 - y|\, K(t-x,0,\xi) \right\} dt$$

$$\leq \varepsilon \left\{ \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} K(t-x,s,\xi)\, ds\, dt + 2|y_0 - y| \int_{-a}^{a} K(t-x,0,\xi) dt \right\}$$

eşitsizliği bulunur. Bununla birlikte $(x,y,\xi) \in Z_c$ noktaları $(x_0,y_0,\xi_0)$ yeterince yakın ise,(4) ve Z nin tanımından

$$A \leq 2\varepsilon(1 + C)$$

elde edilir. (4.1.3), (4.1.5) dan $\mathrm{I}_{12}$ integrali için (4.1.2) bulunur. $I_{21}$ ,$I_{23}$, $I_{32}$ integralleri için (4.1.2) nin ispatı yukarıdakine benzer şekilde yapılabilir

$I_{22}$ integrali için

$$I_{22} \leq \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \{f(t,s) - f(t,y_0)\} K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt \right|$$
$$+ \left| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \{f(t,y_0) - f(x_0,y_0)\} K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt \right|$$
$$= A_1 + A_2$$

yazılabilir. $A_1$ ve $A_2$ integrallerinin de sıfıra gittiği görülür. Böylece (4.1.2) $I_{22}$ integrali için doğrulanır. Lemma 4.1 den A integraline benzer şekilde $\mathrm{A}_1$ ve $\mathrm{A}_2$ integrallerinin de sıfıra gittiği kolaylıkla gösterilebilir. Böylece (4.1.2), $I_{22}$ integrali için de doğrulanır. Buradan da teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**ÖRNEK** : Bu örnekte [13] kaynağından yararlanılmıştır.

a = b = 1, E = (0,1), $\xi_0 = 0$ , $X_0 = Y_0 = 0$ olsun t, s ∊<-1,1> için K(.,,$\xi$) ($\xi$∊ E ) ve f fonksiyonları $t^2 + s^2 > 0$, f (0,0)= 0 olmak üzere

$$F(t,s) = \frac{|t.s|}{t^2+s^2}$$

$$K(t, s, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{4\xi^2} & \text{ise } (t,s) \in <-\xi, \xi>^2 \\ 0 & \text{ise } (t,s) \in <-1,1>^2 \setminus <-\xi, \xi>^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her *k,l* tamsayıları için *f (t+k.2, s + l.2) = f (t, s),*
K(t +k.2, s + *l*.2, $\xi$) = K( t,s, $\xi$) olsun. K fonksiyonu teoremdeki bütün şartları sağlasın. f fonksiyonu (6),(7),(8) şartlarını sağlar fakat (9) ve (10) u sağlamaz . Çünkü

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f\,(t,s)dt = 0 = f\,(0,s)$$

ve

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f\,(t,s)ds = 0 = f\,(t,0)$$

eşitlikleri <-1,1> üzerinde düzgün yakınsak değillerdir.

Buradan kolaylıkla görülebilir ki

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\,(t,s)K(\,t-x_0, s-y_0,\,\xi)\,dsdt = \frac{1}{2}\,ln2$$

ifadesi sağlanır. Böylece (x,y, $\xi$) → ($x_0$,$y_0$, $\xi_0$) ve (x, y, $\xi$) ve ( x,y, $\xi$ ) ∊$Z_c$ için,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\,(t,s)K(\,t-x, S-y,\,\xi)\,dsdt \to f(0,0) = 0$$

teoremin iddiası gerçeklenmez.

### 4.2. İki Katlı İntegrallerin $\mathrm{IR}^2$ de Yakınsaklığı

Bu kısımda [14] kaynağından yararlanılmış olup buradaki sonuçlar detaylı şekilde incelenmiştir. X bir metrik uzay ve E de X in verilmiş alt kümesi olsun. Kabul edelim ki $\xi_0$ E nin bir yığılma noktası olsun. $K$ reel değerli fonksiyonu $\mathrm{IR}^2 \mathrm{x} E$ üzerinde tanımlı olsun ve aşağıdaki şartları sağlasın:

**(1)** $K \geq 0$ ve $K(\cdot,\cdot,\xi)$ her $\xi \in E$, için ölçülebilir.

**(2)** $K(\cdot, s, \xi)$ çift ve $s \in< 0, \infty)$ her $\xi \in E$ için $< 0, \infty)$ üzerinde artmayandır.

**(3)** $K(t,\cdot, \xi)$ çift ve $t \in< 0, \infty)$ her $\xi \in E$ için $< 0, \infty)$ üzerinde artmayandır.

**(4)**

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t, s, \xi)\, ds\, dt = 1 \qquad (\xi \in E).$$

**(5)** Her $\delta > 0$ için

$$\lim_{\xi \to \xi_0} K(\delta, 0, \xi) = \lim_{\xi \to \xi_0} K(0, \delta, \xi) = 0.$$

her $\delta > 0$ için

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \iint\limits_{\mathrm{IR}^2 \setminus \langle -\delta, \delta \rangle^2} K(t, s, \xi)\, ds\, dt = 0.$$

Ayrıca $\mathrm{IR}^2$ üzerinde tanımlı $f$ reel değerli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar :

**(6)** $f$, $\mathrm{IR}^2$ üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir.

**(7)**

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t, s)\, dt = f(x_0, y_0)$$

dır.

**(8)** Hemen hemen her t ∈ IR

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{y_0}^{y_0+\tau} f(t,s)\,ds = f(x_0,y_0)$$

ve diğer tarafdan verilen herhangi bir $C > 0$ sayısı için $\tau_c$

$$\left\{(x,y,\xi) \in R^2\text{x}E\colon |y_0 - y| \int_{-\infty}^{\infty} K(t,0,\xi)\,dt < C \quad \text{ve} \quad |x_0 - x| \int_{-\infty}^{\infty} K(0,s,\xi)\,ds < C\right\}$$

kümesi verilsin. ($0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ olarak tanımlanır.)

**Teorem 4.2.1.** $K$ ve $f$ fonksiyonları yukarıdaki şartları sağlasın. Bu takdirde herhangi $C > 0$ için $(x,y,\xi) \to (x_0,y_0,\xi_0)$ ve $(x,y,\xi) \in \tau_c$ için sağlanır.

$$\lim \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,s)\,K(t-x,s-y,\xi)\,ds\,dt = f(x_0,y_0) \tag{4.2.1}$$

**İspat:** Sabit $c > 0, \varepsilon > 0$ için

$$W(x,y,\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f(t,s) - f(x_0,y_0)]\,K(t-x,s-y,\xi)\,ds\,dt$$

yazılabilir.

$(x,y,\xi) \in \tau_c$ ve $(x,y,\xi) \to (x_0,y_0,\xi_0)$ için w(x,y,$\xi$) →0 gittiğini göstermek yeterlidir. (7) ve (8) kullanılarak her ∈> 0 ve d>0 sayıları için

$$\left|\frac{1}{\tau}\int_{y_0}^{y_0\pm\tau}[f(t,s) - f(t,y_0)]\,ds\right|$$

(hemen hemen her $t \in$ IR için) ve

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0\pm h}[f(t,y_0) - f(x_0,y_0)]\,dt\right| \le \varepsilon \tag{4.2.3}$$

$0 < \tau \le \delta,\ 0 < h \le \delta$ için sağlanır.

$$x_0 \le 0, \qquad y_0 \le 0, \qquad 0 < x_0 - x < \tfrac{1}{2}\delta, \qquad 0 < y_0 - y < \tfrac{1}{2}\delta \tag{4.2.4}$$

olduğu varsayılırsa, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ için $P_{ij} = (c_i, c_{i+1})\mathrm{x}\big(d_j, d_{j+1}\big)$ kümeleri şeklinde $R^2$ yi bölelim. Burada $c_1 = -\infty$, $c_2 = x_0 - \delta$, $c_3 = x_0 + \delta$, $c_4 = \infty$ ve $d_1 = -\infty$, $d_2 = y_0 - \delta$, $d_3 = y_0 + \delta$, $d_4 = \infty$ dir. Eğer,

$$I_{ij} = \int\limits_{P_{ij}}\int [f(t,s) - f(x_0,y_0)]\, K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt$$

şeklinde yazabilirse bu durumda

$$W(x,y,\xi) = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}$$

ve $(x,y,\xi) \to (x_0,y_0,\xi_0)$ ve $(x,y,\xi) \in \tau_c$ olmak üzere

$$I_{ij} \to 0 \tag{4.2.5}$$

($1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$ olduğunda).

$I_{12}$ ve $I_{22}$ integralleri için. (4.2.5) yi ispat edelim. İlk olarak $I_{12}$ integralini ele alalım;

$$\begin{aligned}
|I_{12}| &= \left| \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [f(t,s) - f(x_0,y_0)] K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt \right| \\
&\leq \left| \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} f(t,s) K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt \right| \\
&\quad + |f(x_0,y_0)| \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt = A + B
\end{aligned}$$

(2), (3) ve (4.2.4) şartları kullanılırsa.

$$A \leq \|f\|_{L(R)^2} K\left(\frac{1}{2}\delta, 0, \xi\right) \to 0 \;\; ; \;\; (\xi \to \xi_0) \tag{4.2.6}$$

elde ederiz. (4.2.4) ve (5) den

$$B \leq |f(x_0,y_0)| \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s,\xi)\, ds\, dt \to 0, \quad (\xi \to \xi_0) \tag{4.2.7}$$

olduğu görülür. (4.2.6) ve (4.2.7) den $I_{12}$ integrali için (4.2.5) elde edilir.

$I_{11}$, $I_{13}$, $I_{21}$, $I_{23}$, $I_{32}$, $I_{33}$ integralleri için (4.2.5) nin ispatı yukarıdakine benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi $I_{22}$ integraline geçelim.

$$I_{22} = \left| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [f(t,s) - f(t,y_0)] K(t-x, s-y, \xi)\, ds\, dt \right|$$
$$+ \left| \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [f(t,y_0) - f(x_0,y_0)] K(t-x, s-y, \xi)\, dt\, ds \right| = A_1 + A_2$$

yazılabilir. (4.2.2) ifadesinden Lemma 4.1.1 den ( [17] TABERSKİ, R., p.174)

$$A_1 \leq \int_{-\infty}^{x_0+\delta} \varepsilon \left[ \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x, s, \xi)\, ds + 2(y_0 - y) K(t-x, 0, \xi) \right] dt$$
$$\leq \varepsilon \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x, s, \xi)\, ds\, dt + 2(y_0 - y) \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x, 0, \xi) dt \right]$$

elde edilir.

$(x_0, y_0, \xi_0)$' a yeterince yakın $(x, y, \xi) \in \tau_c$ noktaları için (4) ve $\tau_c$ nin tanımından

$$A_1 \leq \varepsilon(2 + c) \quad . \tag{4.2.8}$$

Sonuç olarak. $(x, y, \xi) \to (x_0, y_0, \xi_0)$ ve $(x, y, \xi) \in \tau_c$ için $A_1 \to 0$ olduğunu görülür.

Benzer olarak $(x, y, \xi) \in \tau_c$ ve $(x, y, \xi) \to (x_0, y_0, \xi_0)$ için $A_2 \to 0$ kolaylıkla gösterilebilir. Böylece (4.2.5), $I_{22}$ için doğrulanmış olur. Buradan da teoremin ispatı tamamlanır.

**ÖRNEK**: Bu örnekte [14] kaynağından yararlanılmıştır.

$E = (0, \infty)$, $\xi_0 = 0$

$$K(x, y, \xi) = \frac{1}{4\pi\xi} e\,\mathrm{x}\,p \frac{-(x^2+y^2)}{4\xi}$$

K' nın (1), (2), (3), (4) şartlarını sağladığı kolaylıkla görülür.

$$\tau_c = \left\{(x, y, \xi) \in IR^2 \mathrm{x} E : \frac{|y_0 - y|}{\sqrt{\xi}} < 2\sqrt{\pi}c, \frac{|x_0 - x|}{\sqrt{\xi}} < 2\sqrt{\pi}c\right\} \cdot \left|\frac{1}{\xi} e\,\mathrm{x}\,p \frac{-t^2}{4\xi}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\left(t^2/_4\right)} \cdot e\,\mathrm{x}\,p \frac{-t^2}{4\left(t^2/_4\right)} = 4e^{-1} \cdot \frac{1}{t^2} \qquad (t > 0)$$

ve her $t \in (\delta, \infty)$ için 0 dır.

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} e\,\mathrm{x}\,p \frac{-t^2}{4\xi} = 0$$

olduğundan Lebesgue teoremine göre

$$\lim_{\xi \to 0^+} \int_\delta^\infty \frac{1}{\xi} e\,\mathrm{x}\,p \left(\frac{-t^2}{4\xi}\right) dt = 0$$

sağlanır. Bu ise (5)' i gösterir.

Bununla birlikte $f$ fonksiyonu, (6), (7), (8) şartlarını sağlarsa, bu takdirde;

için

$$\frac{1}{4\pi\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x, s + y) e\,\mathrm{x}\,p \frac{-(x^2+y^2)}{4\xi} ds\, dt \to f(x_0, y_0)$$

dır, burada $(x, y, \xi) \to (x_0, y_0, \xi_0)$ ve $(x, y, \xi) \in \tau_c$ dir.

# 5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın birinci bölümünde, yapılan çalışmalar ve tez hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümünde gerekli tanımlar yapılmış ve ilgili teoremler verilmiştir. Ayrıca süreklilik modülünün bazı önemli özellikleri üzerinde durulmuş ve karakteristik noktalar, integral operatör ailesi yaklaşım teorisi ve yaklaşım problemlerine değinilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Deltasal çekirdekli integral operatörler ailesinin $L_1(-\infty,+\infty)$ uzayında yakınsaklığı üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde iki katlı singüler integrallerin dikdörtgensel bölgede ve $\mathrm{IR}^2$ de yakınsaklığı ile ilgili Romanovski ve Faddeev tipli teoremler incelenmiştir.

Beşinci ve son bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

# KAYNAKLAR

[1] ALTOMARE, F. and CAMPITI, M., “Korovkin-Type Approximation Theory And Its Applications”, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[2] BUTZER, P.L. and NESSEL, R.J., ”Fourier Analysis And Approximation“, Academic Press, New York and London, 1971.

[3] ESEN, S., ‘’Approximation of Functions by the Family of Integral Operators with Positive Kernels’’, Transastion of NAS Azerbaijan 2002.

[4] HACIYEV, A.D. and HACISALİHOĞLU, H.H.’’ Lineer Poztif Operatörler Dizisinin Yakınsaklığı’’.A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletme Yayınları, Ankara, 1995.

[5] HACIYEV, A.D., “Deltasal Çekirdekli İntegral Operatörler Ailesi ve Yaklaşım Teorisi”, lisansüstü ders notları, Ankara Üni. , Ankara, 1999.

[6] IBRAGIMOV, I.A. and GADJIEV, A.D. , ”On the order of convergence of singular integrals of Cauchy-Stieltjes type”, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 212, 23-26, 1973.

[7] KARSLI, H. , ‘’On approximation properties of non-convolution type nonlinear integral operators’’, Anal. Theory Appl. 26(2), 140-152, 2010.

[8] KARSLI, H. , ‘’İki Parametreye Bağlı Konvolüsyon Tipi Singuler İntegral Operatörler Ailesinin $L_1$(a, b) Karakteristik Noktalardaki Yakınsaklığı ve Yakınsaklık Hızı ‘’ Doktora Tezi 2006.

[9] KOROVKIN, P.P., ”Linear Operators and Approximation Theory”, Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 1960.

[10] NATANSON, I.P., ‘’Constructive Function Theory”, Vol.I, Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1964.

[11] ROYDEN, H.L., ”Real Analysis”, Macmillan Co., New York, 1963.

[12] SIUDUT, S., ” Some remarks on the singular integrals depending on two parameters, Comment. Math. Prace Mat. 26(1), 133-140, 1986.

[13] SIUDUT, S., ”A theorem of the Romanovski type for double singular integrals. Comment. Math. Prace Mat. 28(2), 355-359, 1989.

[14] SIUDUT, S., ”On the Convergence of double singular integrals”, Comment. Math. Prace Mat. 28(1), 143-146, 1989.

[15] SIUDUT, S., ”Fatou Type convergence of abstract singular integrals.” Comment Math. Press Mat. 30(1), 171-176, 1990.

[16] STEIN, E.M. and WEISS, G.,”Fourier analysis on Euclidean Spaces”, Princeton, New Jersey, 1971.

[17] TABERSKİ, R. , ‘’Singular integrals depending on two parameters’’, Prace Mat. 7, 173-179, 1962.

[18] UYSAL, G. and IBIKLI, E., “Weighted approximation by double singular integral operators with radially defined kernels”, Math. Sci. 10(4), 149-157, 2016.

[19] ZYGMUND, A. and CALDERON, A.P. ,”On the existence of certain singular integrals”, Acta Math., 88, 85–139, 1952.