T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

HERMİTE VE LAGUERRE GENİŞLEMELERİ İÇİN POİSSON İNTEGRALLERİNİN YAKINSAMA HIZI VE VORONOVSKAYA TEOREMİ

CEMAYNUR ÇOBAN

MAYIS 2018

Matematik Anabilim Dalında Cemaynur ÇOBAN tarafından hazırlanan HERMİTE VE LAGUERRE GENİŞLEMELERİ İÇİN POİSSON İNTEGRALLERİNİN YAKINSAMA HIZI VE VORONOVSKAYA TEOREMİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Recep ŞAHİN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Doç Dr. Ali OLGUN
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Recep ŞAHİN
Üye	: Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

……/…../…….

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

HERMİTE VE LAGUERRE GENİŞLEMELERİ İÇİN
POİSSON İNTEGRALLERİNİN YAKINSAMA HIZI
VE VORONOVSKAYA TEOREMİ

ÇOBAN, Cemaynur
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Doç. Dr. Recep ŞAHİN
Mayıs 2018, 100 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; bu konuda yapılan çalışmalar ve tezin genel amacı verilmiştir. İkinci bölümde; temel kavramlar ve teoremler üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde; Hermite ve Laguerre genişlemeleri için Poisson integrallerinin yakınsama hızı ve Voronovskaya teoremi incelenmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar kelimeler: Poisson integrali, Hermite ve Laguerre genişlemeleri, yakınsama hızı, Voronovskaya teoremi, Sınır değer problemleri

ABSTRACT

THE RATE OF CONVERGENCE OF THE POISSON INTEGRALS
FOR HERMITE AND LAGUERRE EXPANSIONS
AND THE VORONOVSKAYA THEOREM

ÇOBAN, Cemaynur
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Recep ŞAHİN

May 2018, 100 pages

This study consists of four parts. In the first section, studies and general purpose of thesis are given. In the second section, some basic concepts and theorems are given. In the third section, the rate of convergence of the Poisson integrals for Hermite and Laguerre expansions and the Voronovskaya theorem are investigated. The fourth chapter is devoted to discussion and conclusion.

Key Words: Poisson integral, Hermite and Laguerre expansions, Rate of convergences, Voronovskaya theorem, Boundary value problems

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı ve ilgisini esirgemeyen, değerli danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Recep ŞAHİN'e, çalışmalarım esnasında beni destekleyen hocam Sayın Doç. Dr. Ali OLGUN'a, desteklerini esirgemeyen sevgili eşime ve hayatımın başlangıcından itibaren olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\Vert . \Vert$	Norm
$\sum$	Toplam sembolü
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$J_k(x)$	Birinci tür Bessel fonksiyonu
$Y_k(x)$	İkinci tür Bessel fonksiyonu
$I_k(x)$	Birinci tür Modifie Bessel fonksiyonu
$K_k(x)$	İkinci tür Modifie Bessel fonksiyonu
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$\mathrm{F(x,t)}$	Doğurucu fonksiyon
${}_rF_s$	Genelleştirilmiş Hipergeometrik fonksiyonlar
$L_n{}^{(\alpha)}(x)$	Genelleştirilmiş Laguerre polinomu
$\mathrm{H_n(x)}$	Hermite polinomu
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyonu
$A(f)$	Laguerre polinomu genişlemeleri için Poisson integrali
$B(f)$	Hermite polinomu genişlemeleri için Poisson integrali
$K(r,x,z)$	Poisson çekirdeği
I_α	Modifie Bessel fonksiyonu

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisindeki asıl amaç keyfi bir fonksiyonun daha basit, daha kullanışlı diğer fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir.

Yaklaşımlar teorisinin bir diğer problemi de operatörlerle birim operatörlere hangi hızla yaklaşıldığının bulunması problemidir. Bu hızı bulmak için de genellikle süreklilik modülü kullanılır.

Bu çalışmada Poisson integrallerinin, Hermite ve Laguerre genişlemeleri için ayrı ayrı yakınsama hızları incelenmiştir.

1.1 Kaynak Özetleri

Bu tez hazırlanırken öncelikle Grażyna Toczek ve Eugeniusz Wachnicki'nin yazmış olduğu "On the rate of Convergence and the Voronovskaya Theorem for the Poisson Integrals for Hermite and Laguerre Expansions" isimli makaleden [1], Prof. Dr. Abdullah Altın'ın "Uygulamalı Matematik" kitabından [9] ve Richard Askey'in Special Functions isimli kitabından [10] faydalanılmıştır. Bununla birlikte daha önce konuya yakın olarak yapılan çalışmalardan ve konu ile ilgili önceden hazırlanmış tezlerden ve kitaplardan yararlanılmıştır. [11-19]

1.2 Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında Hermite ve Laguerre genişlemeleri için Poisson integrallerinin yakınsama hızını incelemek, ayrıca bu integrallerle ilgili sınır değer problemlerini çözmek ve Voronovskaya tipli teoremleri göstermek amaçlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 L_p Uzayları

Tanım 2.1.1 (Lineer Uzay)

N boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N ye $\mathbb{R}$ üzerinden lineer uzay veya vektör uzayı denir.

(i) $N, +$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani,

A1) Her $x, y \in N$ için $x + y \in N$ dir.

A2) Her $x, y, z \in N$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.

A3) Her $x \in N$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in N$ vardır.

A4) Her $x \in N$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in N$ vardır.

A5) Her $x, y \in N$ için $x + y = y + x$ dir.

(ii) $x, y \in N$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

B1) $\alpha x \in N$ dir.

B2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

B3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dir.

B4) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.

B5) $1x = x$ dir. Burada 1, $\mathbb{R}$ nin birim elemanıdır.

Yukarıdaki (B3) şartındaki $+$ sembolü birinci tarafta $\mathbb{R}$ deki toplamayı, ikinci tarafta ise N deki toplamayı belirtmektedir. (B4) deki çarpma işlemleri de aynı anlamdadır.

Tanıma dikkat edilirse lineer uzay, N cümlesi ve sırasıyla (i) ve (ii) şartlarını sağlayan toplama ve skalerle çarpma dönüşümlerinden ibarettir.

Tanım 2.1.2 (Normlu Uzay)

$N,$ bir lineer uzay olsun. $\| \ \|: N \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için;

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N üzerinde norm denir. Eğer bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir.

Bir L_p uzayının elemanları olan ölçülebilir fonksiyonların modülleri; $p \geq 1$ olmak üzere p-yinci mertebeden Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlardır. Eğer integrallenme bölgesi bir (a, b) aralığı olursa (tüm reel eksende olabilir) L_p de olan fonksiyonlar için

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < \infty$$

olur. Bu uzaylarda

$$\|f\|p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şeklinde bir norm tanımlarsak L_p normlu uzay olur [12].

Tanım 2.1.3 (Minkowsky Eşitsizliği)

$f, g \in L_p$ için

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliğine Minkowsky Eşitsizliği adı verilir [12].

Tanım 2.1.4 (Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği)

D_1 ve D_2 tüm reel eksenler veya onların bir alt kümesi olmak üzere

$$\left(\int_{D_1}\left|\int_{D_2} f(y)K(x,y)\,dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_{D_2}\left(\int_{D_1}|f(y)K(x,y)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

$$= \int_{D_2} f(y)\left(\int_{D_1}|K(x,y)|^p\ dx\right)^{\frac{1}{p}} dy$$

eşitsizliğine Genelleştirilmiş Minkowsky Eşitsizliği adı verilir [12].

Tanım 2.1.5 (Hölder Eşitsizliği)

$a_1, \dots, a_n$ ve $b_1, \dots, b_n$ ler herhangi reel sayılar ve

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği adı verilir.

Tanım 2.1.6 (Sınırlı Operatörler)

$L: X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. $D(L) \subset X, L$ nin tanım kümesi olmak üzere $\forall f \in D(L)$ için,

$$\|L(f;x)\|_Y \le M\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $M \in \mathbb{R}^+$ varsa L ye $D(L)$ de sınırlı operatör denir.

$$\|L\|_{X\to Y} = inf\{M: \|L(f;x)\|_Y \le M\|f\|_X\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

Lemma 2.1.1

$L: X \longrightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü için,

$$\|L\|_{X\to Y} = \sup_{\|f\|_{X\neq 0}} \frac{\|L(f;x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır [14].

2.2 Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu durumda X uzayında bir operatör tanımlanmış olur ve

$$g(x) = L\,(f;x)$$

biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x) = g(x)$, Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekilde g fonksiyonları kümesine L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir. Burada $R(L) \subset Y$ dir.

Tanım 2.2.1 (Lineer Operatör)

$L: X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. f_1 ve f_2, X uzayında herhangi iki fonksiyon a ve b keyfi iki reel sayı olmak üzere,

$$L(af_1 + bf_2; x) = aL(f_1;x) + bL(f_2;x)$$

koşulu gerçekleniyorsa L operatörüne lineer operatör denir [12].

Tanım 2.2.2 (Pozitif Operatör)

$X^+ = \{f \in X: f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y: g(x) \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Eğer X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki bir fonksiyona dönüştürüyor ise L operatörüne lineer pozitif operatör denir. L lineer pozitif operatör ise $L(X^{+}) \subset Y^{+}$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur.

Lemma 2.2.1

Lineer pozitif operatörler monotondur [12].

İspat

Her x için $g(x) \geq f(x)$ ise $g(x) - f(x) \geq 0$ dır. L lineer pozitif operatör olduğundan

$$L(g-f;x) \geq 0$$

dır. L lineer olduğundan

$$L(g;x) - L(f;x) \geq 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$L(g;x) \geq L(f;x)$$

dır.

Tanım 2.2.3 (Lineer Fonksiyonel)

$F = \mathbb{R}$ ve $F = \mathbb{C}$ olmak üzere X, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $T: X \to F$ operatörüne fonksiyonel denir. Eğer T lineer ise T ye lineer fonksiyonel adı verilir [11].

Tanım 2.2.4 (Limit)

(S_n) reel terimli bir dizi olsun. (S_n) dizisinin sonlu adetteki terimleri hariç diğer tüm terimleri bir s sayısının keyfi $\varepsilon > 0$ komşuluğunda kalıyorsa (S_n) dizisinin limiti s dir denir ve $(S_n) \to s$ ile veya

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s$$

ile gösterilir [11].

Tanım 2.2.5

$f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve a, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer terimleri $A \backslash \{a\}$ kümesinden seçilen ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ görüntü dizisi aynı L sayısına yakınsıyorsa x değişkeni a noktasına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L dir denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.6 (Sınırlı Fonksiyon)

f nin tanım kümesindeki her x elemanı için $|f(x)| < k$ olacak biçimde bir k pozitif reel sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonuna sınırlı fonksiyon denir.

Tanım 2.2.7

(X, U, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \{f \in \mu(X, U) : |f|^p \in L(X, U, \mu)\}$$

kümesine p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

Tanım 2.2.8 (L_p Yakınsaklık)

f_n ve f fonksiyonları L_p uzayının elemanları olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna p −yinci mertebeden ortalama yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N$ vardır öyleki $\forall\, n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

dur. Bu yakınsaklık çeşidine L_p de yakınsaklık da denir. Burada $p \geq 1$ olup

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_X |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Buna göre (f_n) dizisi f fonksiyonuna L_p de yakınsaktır $\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

Tanım 2.2.9

$f \in L_p$ olmak üzere

$$\omega_{L_p}(\delta, f) = \sup_{|t|\leq\delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

integraline f nin L_p- süreklilik modülü denir [11].

Tanım 2.2.10 (Operatörün Sürekliliği)

X ve Y normlu uzaylar $L: X \longrightarrow Y$ bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir pozitif $\delta(\varepsilon, f_0)$ sayısı bulunabilir ki $\|f - f_0\|_X < \delta$ olduğunda $\|L(f) - L(f_0)\|_Y < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanırsa L operatörü $f_0 \in X$ için süreklidir denir.

Tanım 2.2.11 (Mutlak Süreklilik)

f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall\, \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır öyleki

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

şartını sağlayan her sonlu ve ikişerli ayrık

$$\{(a_{k,}, b_k) \subset [a, b]: k = 1,2, \dots, n\}$$

aralık ailesi için

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

sağlanır. Bu tanıma göre mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir fakat bunun karşıtı doğru değildir.

Tanım 2.2.12 (Düzgün Süreklilik)

$f: X \to Y$ fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık

$$|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde yalnız verilen x_0 noktasına ve ε sayısına bağlı olan bir $\delta > 0$ sayısının var olmasıdır [11].

Tanım 2.2.13 (Süreklilik Modülü)

$x, y \in [a, b]$ olmak üzere $|x - y| \leq \delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ için $|f(x) - f(y)|$ nin en küçük üst sınırına f nin süreklilik modülü denir.

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

veya

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} |f(x + h) - f(x)|$$

sembolleri ile gösterilir.

Süreklilik modülünün bazı özellikleri;

1) ω fonksiyonu monoton artandır. Yani;

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

dir.

2) $m \in N$ ise

$$\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$$

dir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\omega(f;m\delta) &= \sup_{|h| \leq m\delta} |f(x+h) - f(x)| \\
&= \sup_{|mh| \leq m\delta} |f(x+mh) - f(x)| \\
&= \sup_{|h| \leq \delta} \left| \sum_{k=1}^{m} [f(x+kh) - f(x+(k-1)h)] \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{|h| \leq \delta} |f(x+kh) - f(x+(k-1)h)| \\
&= m\, \omega(f;\delta)
\end{aligned}$$

dir.

3) $\lambda > 0$ için

$$\omega(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

dir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\omega(f;\lambda\delta) &\leq \omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta) \\
&\leq ([\![\lambda]\!]+1)\omega(f;\delta) \\
&\leq (1+\lambda)\omega(f;\delta)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

4) $f, [a,b]$ de sürekli ise

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t-x|)$$

olup,

$$\begin{aligned}\omega(f; |t-x|) &= \sup_{|t-x| \leq |t-x|} |f(t) - f(x)| \\ &= \sup_{t,x \in [a,b]} |f(t) - f(x)| \\ &\geq |f(t) - f(x)|\end{aligned}$$

sağlanır.

5) Süreklilik modülünün tanımından

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq \omega(f; |x-y|) \\ &\leq \omega\left(f; \frac{\delta|x-y|}{\delta}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f; \delta)\end{aligned}$$

yazılabilir.

Teorem 2.2.1 (Korovkin Teoremi)

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ için,

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x) \tag{2.1}$$

$$L_n(t; x) = x + \beta_n(x) \tag{2.2}$$

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \gamma_n(x) \tag{2.3}$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f; x)$, $[a,b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada $f, [a,b]$ de sürekli, a da sağdan, b de soldan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı bir fonksiyondur [11].

İspat

Kabul edelim ki $f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulunabilir ki, $|t-x|<\delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ olur.

$|t-x|>\delta$ olduğunda ise f fonksiyonunun sınırlı olmasından ve üçgen eşitsizliğinden;

$$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)+f(x)| \leq 2M_f \tag{2.4}$$

olur.

Ayrıca $|t-x|>\delta$ iken $\frac{|t-x|}{\delta}>1$ olacağından;

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2}>1$$

sağlanır. f fonksiyonunun sınırlılığından ve (2.4) den

$$|f(t)-f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. Bu işlemler sonucunda

$$|t-x|<\delta \quad \text{için} \quad |f(t)-f(x)|<\varepsilon$$

$$|t-x|>\delta \quad \text{için} \quad |f(t)-f(x)|<2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

olur. Yani $\forall\, t \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, x \in [a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.5}$$

dir.

Şimdi teoremin ifadesinde verdiğimiz üç koşulu sağlayan L_n operatör dizisinin,

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f(t);x)-f(x)\|_{C[a,b]}=0 \tag{2.6}$$

eşitliğini sağladığını gösterelim. L_n lineer olduğundan

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| = |L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)|$$

$$= |L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|$$

$$= \left|L_n\left(\left(f(t)-f(x)\right);x\right)+f(x)(L_n(1;x)-1)\right|$$

dir.

Üçgen eşitsizliğinden

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq \left|L_n\left(\left(f(t)-f(x)\right);x\right)\right| + |f(x)||L_n(1;x)-1|$$

yazılabilir. L_n lineer pozitif bir operatör olduğundan ve (2.6) dan

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x) + |f(x)||L_n(1;x)-1|$$

eşitsizliği sağlanır. f fonksiyonunun sınırlılığından

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x) + M_f|(L_n(1;x)-1)|$$

yazılabilir. L_n monoton artan olup, (2.5) kullanılırsa

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq \left|L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\right| + M_f|(L_n(1;x)-1)| \qquad (2.7)$$

elde edilir. Ayrıca L_n nin lineerliğinden

$$L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) = L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n(t^2-2tx+x^2;x)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n[(t^2;x)-x^2-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)]$$

$$= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n[(t^2;x)-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)-x^2]$$

$$= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[(L_n(t^2;x)-x^2)+2x\left(x-L_n(t;x)\right)+x^2(L_n(1;x)-1)\right]$$

yazılabilir. (2.7) nin kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon L_n(1;x) + M_f|(L_n(1;x) - 1)| +$$

$$\frac{2M_f}{\delta^2}\left[(L_n(t^2;x) - x^2) + 2x\big(x - L_n(t;x)\big) + x^2(L_n(1;x) - 1)\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Teoremdeki koşulların kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\leq x\leq b} |L_n(f(t);x) - f(x)| = 0$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $[0,1]$ de düzgün olarak

$$L_n(1;x) \longrightarrow 1$$

$$L_n(t;x) \longrightarrow x$$

$$L_n(t^2;x) \longrightarrow x^2$$

yakınsamasının olmasıdır. Ayrıca burada

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(1;x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t;x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(t^2;x) - x^2\|_{C[0,1]} = 0$$

olur. Burada norm, aralık $[0,1]$ kapalı aralığı olduğu için

$$\|f\|_{C[0,1]} = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$$

olarak tanımlıdır. Yani, $\forall f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

dır.

2.3 L_p Normunda Yaklaşım

D tüm reel eksen veya onun bir alt kümesi olsun. X ise bu D kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlardan oluşan bir lineer normlu uzayı göstersin. $Y \subset X$ olacak şekilde X in bir alt uzayı olsun. Her $f \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x) - \phi_n(x)\|_X = 0$$

olacak şekilde $\phi_n \in Y$ bulunabiliyorsa Y cümlesine X cümlesinin yoğun alt uzayı denir. Yaklaşım teoremlerinde ϕ_n nin yapısını belirlemek bu teorinin esas amaçlarından biridir.

Yaklaşım teorisinin esas problemlerinden ikincisi ise yaklaşım hızının bulunması problemidir.

$$\|f(x) - \phi_n(x)\|_X = \alpha_n \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

ifadeleri $\phi_n(x)$ nin $f(x)$ e yaklaşım hızını belirtir. Bu hızı bulmak için α_n i sıfıra giden başka bir dizi ile karşılaştırmak gerekir. Yani

$$0 \le \alpha_n \le \beta_n \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$

ise α_n nin β_n den daha hızlı sıfıra gittiğini gösterir. Fonksiyon uzaylarında β_n dizisi f fonksiyonunun süreklilik modülü ile bağlantılı olarak incelenebilir. Çünkü f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(\delta, f)$ ifadesi sıfıra yakınsayan bir fonksiyondur.

Teorem 2.3.1

$f, [a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olduğunda derecesi n den büyük olmayan öyle bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır ki bu aralığın her noktasında

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty} \max_{a\le x\le b} |P_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanması $P_n(x)$ in $f(x)$ e düzgün yakınsaklığını gösterir [12].

Teorem 2.3.2 (Bernstein Operatörü için Voronovskaya Teoremi)

$B_n: C[0,1] \to C[0,1]$, $f \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

biçiminde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun n –inci $(n \in \mathbb{N})$ Bernstein polinomu denir [17,18].

Eğer f, $[0,1]$ aralığı üzerinde ikinci basamaktan türevlenebilir bir fonksiyon ise, o taktirde bir $B_n(f,x)$ Bernstein operatörü için $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} n[f(x) - B_n(f,x)] = -\frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

dir [19].

Teorem 2.3.3 (Ortalama Değer Teoremi)

$[a,b]$ aralığında türevi sınırlı ise yani $x \in [a,b]$ için $|f'(x)| \leq c$ ise bu taktirde

$$f(z) - f(x) = f'(\zeta)(z-x)\,, \qquad a < \zeta < b$$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(x)| &= |f'(\zeta)(z-x)| = |f'(\zeta)|\,.\,|\,z-x| \\ &\leq sup|f'(\zeta)|\,.\,|z-x\,| \\ &\leq c.|z-x\,| \end{aligned}$$

olur.

2.4 Bessel Diferensiyel Denklemi ve Bessel Fonksiyonları

2.4.1 Bessel Diferensiyel Denkleminin Çözümü

k reel bir sabit olmak üzere

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0 \tag{2.8}$$

denklemine k-yıncı basamaktan Bessel diferensiyel denklemi denir. $x = 0$ bu denklemin bir düzgün aykırı noktasıdır. Frobenius yöntemini uygulayarak $x = 0$ noktası komşuluğunda Bessel denkleminin çözümlerini arayalım. $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = Y(x,m) = x^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \tag{2.9}$$

Frobenius serisi ifadesini ve

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2}$$

türev serilerini (2.8) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)(m+n-1)a_n x^{m+n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (m+n)a_n x^{m+n-1}$$
$$+(x^2 - k^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m+n} \equiv 0$$

elde edilir. Gerekli indis kaydırma ve sadeleştirme işlemlerini yaparsak

$$(m^2 - k^2)a_0x^m + [(m+1)^2 - k^2]a_1x^{m+1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{[(m+n)^2 - k^2]a_n + a_{n-2}\}x^{m+n} = 0 \tag{2.10}$$

eşitliğini elde ederiz. $a_0 \neq 0$ olduğundan (2.10) eşitliği

$$m^2 - k^2 = 0 \tag{2.11}$$

alınmasını gerektirir. İndisel denklem olarak bilinen bu denklemin $m = \pm k$ köklerine karşılık a_1 teriminin katsayısı sıfır olmadığından $a_1 = 0$ almamız gerekmektedir. Diğer katsayıları ise x^{m+n} nin katsayısını sıfıra eşitlediğimiz zaman ortaya çıkan

$$[(m+n)^2 - k^2]a_n + a_{n-2} = 0 \quad , \quad n \geq 2 \tag{2.12}$$

indirgeme formülü yardımı ile bulabiliriz. Önce (2.12) bağıntısını aşağıdaki gibi yazalım:

$$a_n = -\frac{1}{(m+n)^2 - k^2}\ a_{n-2} \qquad , \quad n \geq 2 \tag{2.13}$$

$a_1 = 0$ olması (2.13) gereğince tek indisli tüm katsayıların sıfır olduğu sonucunu verir. Yani,

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ \dots\dots\dots = a_{2n+1} = 0 \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots$$

dir. O halde (2.9) Frobenius serisinde sadece çift indisli katsayılar bulunacaktır. (2.13) eşitliğinde n ye sıra ile $2, 4, 6 \dots\dots, 2p$ değerlerini vererek elde ettiğimiz eşitlikleri taraf tarafa çarparsak

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{[(m+2)^2 - k^2]\,[(m+4)^2 - k^2] \dots\dots [(m+2p)^2 - k^2]}\ a_0 \tag{2.14}$$

bağıntısını buluruz. Böylece,

$$Y(x,m) = a_0 x^m \left\{1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{[(m+2)^2 - k^2]\,[(m+4)^2 - k^2] \dots\dots [(m+2p)^2 - k^2]} x^{2p}\right\} \tag{2.15}$$

fonksiyonu

$$x^2 Y'' + xY' + (x^2 - k^2)Y = (m^2 - k^2)\, a_0 x^m$$

denklemini sağlar. Şimdi, indisel denklemin kökleri olan $m_1 = k$ ve $m_2 = -k$ için $Y(x, m_1)$ ve $Y(x, m_2)$ çözüm fonksiyonlarını bulalım.

(2.8) Bessel denkleminde k^2 bulunduğundan $k \geq 0$ kabul edebiliriz. $k > 0$ kabul edelim ve $m_1 = k$ kökünü gözününe alalım. (2.15) de

$$(m + 2p)^2 - k^2 = (m - k + 2p)(m + k + 2p)$$

olduğunu gözönünde tutarak $m = k$ yazarsak

$$Y(x,k) = a_0 x^k \left\{1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p!\,(k+1)(k+2)\dots(k+p)} x^{2p}\right\} \tag{2.16}$$

eşitliğini elde ederiz. Diğer taraftan Gamma fonksiyonunun bilinen özelliklerinden dolayı

$$\Gamma(k+p+1) = (k+p)\Gamma(k+p) = (k+p)(k+p-1)\Gamma(k+p-1)$$

$$= (k+p)(k+p-1)\ldots..(k+1)\Gamma(k+1)$$

olduğundan (2.16) ifadesini biraz daha kısa olarak

$$Y(x,k) = y_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_0 \Gamma(k+1)}{2^{2p} p!\, \Gamma(k+p+1)} x^{2p+k}$$

şeklinde yazılabiliriz. Bessel denkleminin bir çözümü olan bu ifadede a_0 keyfi sabiti yerine

$$a_0 = \frac{1}{2^k \Gamma(k+1)}$$

özel değerini alarak elde ettiğimiz $Y(x,k) = y_1$ fonksiyonuna *k-yıncı basamaktan birinci tür Bessel fonksiyonu* denir ve

$$J_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\, \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2p} \tag{2.17}$$

olarak gösterilir. k nın pozitif tamsayı olması halinde $\Gamma(k+p+1) = (k+p)!$ olduğundan (2.17) ifadesi

$$J_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2p} \tag{2.18}$$

şeklinde olur. (2.17) ve (2.18) serilerinin x in her sonlu değeri için yakınsak oldukları kolayca görülebilir.

Şimdi de indisel denklemin ikinci kökü olan $m_2 = -k$ yı göz önüne alalım ve $J_{-k}(x)$ Bessel fonksiyonunu tanımlayalım. (2.15) de $m = -k$ yazarsak

$$Y(x,-k) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_0}{2^{2p} p!\,(1-k)(2-k)\ldots.(p-k)} x^{-k+2p}$$

olur. Burada yine

$$a_0 = \frac{1}{2^{-k}\Gamma(1-k)}$$

alarak

$$J_{-k}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(-k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-k} \tag{2.19}$$

eşitliğini elde ederiz. k nın negatif bir tamsayı olması halinde

$$\Gamma(-k+p+1) = (p-k)!$$

yazılabildiğinden (2.19) daki $J_{-k}(x)$ fonksiyonlarını

$$J_{-k}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(p-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-k} \tag{2.20}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.17) ve (2.19) serilerinden görüldüğü gibi, k bir tamsayı olmadıkça bu serilerin oluşturduğu $J_k(x)$ ve $J_{-k}(x)$ fonksiyonları $x = 0$ noktası hariç x in her sonlu değeri için yakınsak ve birbirinden bağımsız iki çözüm verirler. Bu durumda A ve B keyfi sabitler olmak üzere, Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_k(x) + BJ_{-k}(x)\,, \qquad k \notin \mathbb{Z}$$

olacaktır [9]. $k = 0$ olması halindeki $J_0(x)$ sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonunun ifadesi

$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \tag{2.21}$$

olur. (2.18) ve (2.20) serilerinden görülyor ki, k nın negatif bir tamsayı olması halinde $J_k(x)$, k nın pozitif bir tamsayı olması halinde ise $J_{-k}(x)$ tanımlı değildir. Çünkü

$$\Gamma(-k+p+1) = (p-k)!$$

ifadesi $p = 0,1,2, \ldots, (k-1)$ için sonsuzdur. Yani, k nın tamsayı olması halinde $J_k(x)$ ve $J_{-k}(x)$ in serileri baştan itibaren $p = 0,1,2, \ldots, (k-1)$ için tanımsız olabilirler. Paydası sonsuz olan bu terimler yerine sıfır alınabileceğinden seri $p = k$ dan başlatılabilir. Örneğin, k nın pozitif bir tamsayı olması halinde

$$J_{-k}(x)=\sum_{p=k}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p!\,(p-k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-k}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^{p+k}}{(p+k)p!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+k}$$

$$=(-1)^k J_k(x)$$

dir. Görüldüğü gibi k nın bir tamsayı olması halinde $J_k(x)$ ve $J_{-k}(x)$ fonksiyonları tanımlı ve yakınsaktır. Ancak lineer bağımsız olmayıp

$$J_{-k}(x)=(-1)^k J_k(x)\,,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

bağıntısı ile birbirine bağlıdırlar [9]. Bu durumda

$$y=AJ_k(x)+BJ_{-k}(x)=[A+(-1)^k B]J_k(x)=CJ_k(x)$$

tek keyfi sabitli çözüm Bessel denkleminin genel çözümü olamaz. Öyle ise $k\in\mathbb{Z}$ için ikinci bir lineer bağımsız çözümün tanımlanmasına ihtiyaç vardır.

2.4.2 İkinci Tür Bessel Fonksiyonu

k nın bir tamsayı olması halinde Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümünün doğrudan doğruya elde edilemeyeceğini gördük. Böyle bir durumda $J_k(x)$ den bağımsız olan başka bir çözüm fonksiyonu tanımlama yoluna gidilmiştir. Bu fonksiyon,

$$Y_k(x)=\frac{\cos(k\pi)J_k(x)-J_{-k}(x)}{\sin(k\pi)}\,,\qquad 0<x<\infty \qquad (2.22)$$

şeklinde tanımlanmış olup, *k-yıncı basamaktan ikinci tür Bessel fonksiyonu* adını alır. k bir tamsayı değilse $Y_k(x)$ in Bessel denkleminin bir çözümü olduğu açıktır. Eğer k bir tamsayı ise $Y_k(x)$ belirsizdir. Bu durumda $Y_k(x)$ fonksiyonu,

$$Y_k(x)=\lim_{\upsilon\to k}\frac{\cos(\upsilon\pi)J_\upsilon(x)-J_{-\upsilon}(x)}{\sin(\upsilon\pi)}\,,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

olarak tanımlanır.

Sonuç olarak, herhangi bir k reel sayısı için Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_k(x) + BY_k(x)$$

dir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

2.4.3 Bazı Özel Bessel Fonksiyonları

$J_0(x)$ ve $J_1(x)$ fonksiyonları uygulamalarda sıkça karşılaşılan iki fonksiyon olup, $J_k(x)$ in tanım bağıntısında $k = 0$ ve $k = 1$ alınarak aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{1}{(2!)^2} \frac{x^4}{2^4} - \frac{1}{(3!)^2} \frac{x^6}{2^6} + \cdots + (-1)^p \frac{1}{(p!)^2} \frac{x^{2p}}{2^{2p}} + \cdots \; .$$

$$J_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}$$

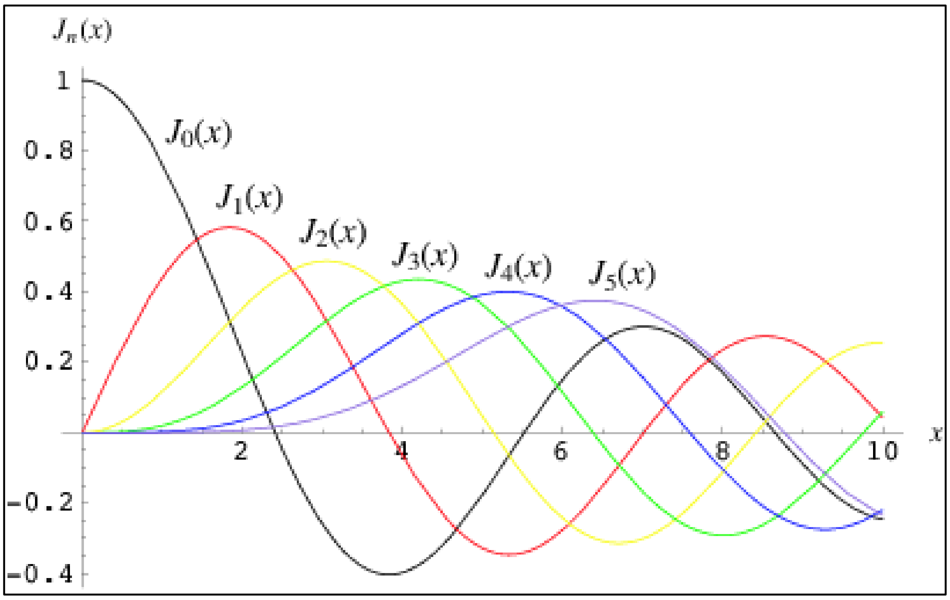
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{1!\,2!} \frac{x^3}{2^3} + \frac{1}{2!\,3!} \frac{x^5}{2^5} - \cdots + \frac{(-1)^p}{p!\,(p+1)!} \frac{x^{2p+1}}{2^{2p+1}} + \cdots \; .$$

Bu iki fonksiyondan birincisinin türevinin ters işaretle ikinciyi verdiğini kolayca görebiliriz. Yani,

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x)$$

dir.

$J_0(x) = 0$ ve $J_1(x) = 0$ denklemlerinin kökleri, bir kuvvet serisinin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen denklemin kökleri olup, bu köklerinin incelenmesi, yani varlığı ya da yokluğu, varsa reel ya da kompleksliği hakkında bilgi edinmek oldukça zor bir problemdir. Böyle olmakla birlikte Sturm teorisi yardımıyla bu denklemlerin kökleri incelenmiş ve her birinin sonsuz sayıda köke sahip oldukları gösterilmiştir.



Şekil 2.1. $J_\nu(x)$ Bessel Fonksiyonları

Şekil 2.4.1 de bu denklemlerin köklerinin dağılımları görülmektedir.

Bu grafiğe göre $J_0(x) = 0$ ve $J_1(x) = 0$ denklemlerinin köklerinin hepsinin reel olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca ispat edilmiştir ki, bu denklemlerden her birinin ardışık iki kökü arasındaki fark, bu kökler büyüdükçe π sayısına yaklaşır. Bu özelliğinden dolayı $J_0(x)$ ve $J_1(x)$ fonksiyonlarına hemen hemen periyodik fonksiyon denilmektedir.

Özel Bessel fonksiyonlarından diğer ikisi de $J_{\frac{1}{2}}(x)$ ve $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ olup, bunlar elemanter fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilirler. Gerçekten, (2.17) eşitliğinde $k = \frac{1}{2}$ ve $k = -\frac{1}{2}$ konulmasıyla,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2^{p+1}}{p!\,1.3.5\ldots(2p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \ \sin x$$

ve

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p 2^p}{p!\,1.3.5 \dots (2p-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \ \cos x$$

olarak elde edilirler. Yukarıdaki işlemler sırasında kullanılan bazı kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

$$1.3.5 \dots (2p+1) = \frac{1.2.3 \dots (2p)(2p+1)}{2.4.6 \dots (2p)} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$$

$$\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right) = \left(p+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(p+\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(p-\frac{3}{2}\right) \dots .. \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(2p+1)(2p-1)(2p-3) \dots ..3.1}{2^{p+1}}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{(2p+1)!}{2^p\, p!\, 2^{p+1}}\sqrt{\pi} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}\, p!}\sqrt{\pi}$$

$J_{\frac{1}{2}}(x)$ ve $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ fonksiyonlarının yukarıdaki ifadelerinden görülmektedir ki, bu fonksiyonlar

$$J^2{}_{\frac{1}{2}}(x) + J^2{}_{-\frac{1}{2}}(x) \equiv \frac{2}{\pi x}$$

bağıntısını sağlar [9].

2.4.4 Rekürans Bağıntıları

Birinci tür Bessel fonksiyonu olarak verdiğimiz ve (2.17) ile gösterdiğimiz

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2n}$$

serisinden hareketle Bessel fonksiyonları arasında çok değişik rekürans bağıntıları elde edilmektedir. Bunlardan önemli bazılarını aşağıdaki teoremlerde verelim:

Teorem 2.4.1

k ve p reel sabitler olmak üzere $J_k(x)$ Bessel fonksiyonu aşağıdaki bağıntıları gerçekler:

a) $\frac{d}{dx}[x^k J_k(px)] = px^k J_{k-1}(px)$, (2.23)

b) $\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(px)] = -px^{-k} J_{k+1}(px)$. (2.24)

İspat

Bessel fonksiyonunun (2.17) ile verdiğimiz serisinde x yerine px alarak elde ettiğimiz

$$J_k(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{px}{2}\right)^{2n+k}$$

serisinden hareket edeceğiz.

a) $$x^k J_k(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{px}{2}\right)^{2n+k} x^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+k} x^{2(n+k)}$$

olup, her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx}[x^k J_k(px)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+k} \; 2(n+k) x^{2(n+k)-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(n+k)}{n!\,(n+k)\Gamma(n+k)} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+k} \; x^{2n+2k-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k)} \left(\frac{px}{2}\right)^{2n+k-1} \; x^k p$$

$$= px^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+(k-1)+1)} \left(\frac{px}{2}\right)^{2n+(k-1)}$$

$$= px^k J_{k-1}(px)$$

elde edilir ki, bu istenilendir.

b) $$x^{-k} J_k(px) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{px}{2}\right)^{2n+k} \; x^{-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+k} \; x^{2n}$$

olup, her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx}[x^{-k} J_k(px)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+k} \; (2n) x^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n p}{(n-1)!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{p}{2}\right)^{2n+k-1} \; x^{2n-1}$$

$$= px^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{px}{2}\right)^{2n+k-1}$$

$$= px^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\,\Gamma(n+k+2)} \left(\frac{px}{2}\right)^{2(n+1)+k-1}$$

$$= px^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+(k+1)+1)}\left(\frac{px}{2}\right)^{2n+(k+1)}$$

$$= -px^{-k}J_{k+1}(px)$$

olur.

Teorem 2.4.2

$J_k(x)$ Bessel fonksiyonu aşağıdaki rekürans bağıntılarını gerçekler:

a) $\frac{d}{dx}[J_k(px)] = pJ_{k-1}(px) - \frac{k}{x}J_k(px)$, (2.25)

b) $\frac{d}{dx}[J_k(px)] = -pJ_{k+1}(px) + \frac{k}{x}J_k(px)$, (2.26)

c) $\frac{d}{dx}[J_k(px)] = \frac{p}{2}[J_{k-1}(px) - J_{k+1}(px)]$, (2.27)

d) $J_k(px) = \frac{px}{2k}[J_{k-1}(px) + J_{k+1}(px)]$. (2.28)

İspat

a) Teorem 2.4.1.(a) dan çarpımın türevini açık yazarsak

$$\frac{d}{dx}[x^kJ_k(px)] = kx^{k-1}J_k(px) + x^k\frac{d}{dx}[J_k(px)]$$

$$= px^kJ_{k-1}(px)$$

olur. Bu eşitliklerin ikinci ve üçüncüsünden

$$\frac{d}{dx}[J_k(px)] = pJ_{k-1}(px) - \frac{k}{x}J_k(px)$$

elde ederiz ki, bu istenilen bağıntıdır.

b) Teorem 2.4.1.(b) den çarpımın türevini açık yazarsak

$$\frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(px)] = -kx^{-k-1}J_k(px) + x^{-k}\frac{d}{dx}[J_k(px)]$$

$$= -px^{-k}J_{k+1}(px)$$

olur.

Bu eşitliklerin ikinci ve üçüncüsünden

$$\frac{d}{dx}[J_k(px)] = -pJ_{k+1}(px) + \frac{k}{x}J_k(px)$$

elde ederiz.

c) Bu teoremin (a) ve (b) şıklarında verdiğimiz (2.25) ve (2.26) eşitliklerini taraf tarafa toplayıp ikiye bölersek

$$\frac{d}{dx}[J_k(px)] = \frac{p}{2}[J_{k-1}(px) - J_{k+1}(px)]$$

eşitliğini elde ederiz.

d) Bu teoremin (b) ve (c) şıklarında verdiğimiz (2.26) ve (2.27) eşitliklerinin sol tarafları aynı olduğundan, sağ yanlarını eşitlersek,

$$-p\,J_{k+1}(px) + \frac{k}{x}J_k(px) = \frac{p}{2}[J_{k-1}(px) - J_{k+1}(px)]$$

yazabiliriz. Buradan $J_k(px)$ i çözersek

$$J_k(px) = \frac{px}{2k}[J_{k-1}(px) + J_{k+1}(px)]$$

elde ederiz ki, bu istenilendir.

2.4.5 Bessel Fonksiyonlarının Diklik Özelliği ve Normu

Teorem 2.4.3

α reel bir sabit olmak üzere $u = J_k(\alpha x)$ fonksiyonu

$$x^2u'' + xu' + (\alpha^2x^2 - k^2)u = 0$$

denklemini sağlar [9].

İspat

$u = J_k(\alpha x) \Longrightarrow u' = \alpha J_k{}'(\alpha x),\quad u'' = \alpha^2 J_k{}''(\alpha x)$ olacaklarından,

$$x^2u'' + xu' + (\alpha^2x^2 - k^2)u = (\alpha x)^2 J_k{}''(\alpha x) + (\alpha x)J_k{}'(\alpha x) + [(\alpha x)^2 - k^2]\,J_k(\alpha x) = 0$$

elde edilir. J_k fonksiyonu $k-$yıncı basamaktan Bessel fonksiyonu olup, (αx) argümentine göre $k-$yıncı basamaktan Bessel diferensiyel denklemi sağlanmaktadır.

Teorem 2.4.4

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ ler $J_k(\alpha) = 0$ denkleminin pozitif kökleri olmak üzere,

$$f_n(x) = \sqrt{x}\, J_k(\alpha_n x) \quad , \quad n = 1,2, \ldots$$

fonksiyonları $(0,1)$ aralığında dik bir sistem teşkil ederler [9].

İspat

Teoremin ispatı için

$$(f_m, f_n) = \int_0^1 f_m(x) f_n(x) dx = \int_0^1 x J_k(\alpha_m x) J_k(\alpha_n x) dx = 0 \ , \quad m \neq n$$

ortogonallik bağıntısını sağladığını göstermeliyiz. Şimdi bunun sağlandığını görelim.

$u = J_k(\alpha x)$, $v = J_k(\beta x)$ dersek, Teorem 2.4.3 ten dolayı,

$$x^2 u'' + x u' + (\alpha^2 x^2 - k^2) u = 0$$

$$x^2 v'' + x v' + (\beta^2 x^2 - k^2) v = 0$$

ya da tüm terimlerin x ile bölünmesiyle elde edilen

$$x u'' + u' + x\left(\alpha^2 - \frac{k^2}{x^2}\right) u = 0$$

$$x v'' + v' + x\left(\beta^2 - \frac{k^2}{x^2}\right) v = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu iki eşitlikten birincisini v ile ikincisini u ile çarptıktan sonra elde edilenleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$x(uv'' - vu'') + (uv' - vu') + x(\beta^2 - \alpha^2) uv = 0$$

ya da

$$\frac{d}{dx}[x(uv' - vu')] + (\beta^2 - \alpha^2)xuv = 0$$

bulunur. Bu ifadenin $[0,1]$ aralığında integralini alırsak,

$$(\beta^2 - \alpha^2)\int_0^1 xuvdx = -x(uv' - vu')|_0^1$$

$$= x(vu' - uv')|_0^1$$

olur. $u' = \alpha J_k'(\alpha x)$, $v' = \beta J_k'(\beta x)$ olduklarını dikkate aldığımızda yukarıdaki eşitliği

$$(\beta^2 - \alpha^2)\int_0^1 xJ_k(\alpha x)\, J_k(\beta x)dx = \alpha J_k'(\alpha)J_k(\beta) - \beta J_k'(\beta)J_k(\alpha) \qquad (2.29)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu bağıntıda $\alpha = \alpha_m$, $\beta = \alpha_n$ seçip ve $m \neq n$ için ${\alpha_m}^2 - {\alpha_n}^2 \neq 0$ olacağını ve de $J_k(\alpha_m) = 0$, $J_k(\alpha_n) = 0$ olduklarını gözönünde tutarsak istenilen sonucu elde ederiz. Yani,

$$\int_0^1 xJ_k(\alpha_m x)\, J_k(\alpha_n x)dx = \frac{\alpha_m J_k'(\alpha_m)\, J_k(\alpha_n) - \alpha_n J_k'(\alpha_n)\, J_k(\alpha_m)}{{\alpha_n}^2 - {\alpha_m}^2} = 0$$

olur.

Teorem 2.4.5

$J_k(\alpha_n) = 0$ olmak üzere $f_n(x) = \sqrt{x}\, J_k(\alpha_n x)$ lerin normu

$$\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\, J_{k+1}(\alpha_n)$$

ile verilir [9].

İspat

Teorem 2.4.4 de elde ettiğimiz (2.29) bağıntısının her iki tarafının β ya göre türevini alırsak

$$2\beta \int_0^1 xJ_k(\alpha x)\, J_k(\beta x) dx + (\beta^2 - \alpha^2) \frac{d}{d\beta} \int_0^1 xJ_k(\alpha x)\, J_k(\beta x) dx$$

$$= \alpha J_k{}'(\alpha)\, J_k{}'(\beta) - \beta J_k{}''(\beta)\, J_k(\alpha) - J_k{}'(\beta)\, J_k(\alpha)$$

olur. Bu eşitlikte $\beta = \alpha = \alpha_n$ koyup ve $J_k(\alpha_n) = 0$ olduğunu dikkate alırsak

$$\int_0^1 x[J_k(\alpha_n x)]^2 dx = \frac{1}{2\alpha_n} \{\alpha_n [J_k{}'(\alpha_n)]^2 - \alpha_n J_k{}''(\alpha_n)\, J_k(\alpha_n) - J_k{}'(\alpha_n)\, J_k(\alpha_n)\}$$

$$= \frac{1}{2} [J_k{}'(\alpha_n)]^2$$

şeklini alır. Diğer taraftan, (2.26) ile verdiğimiz

$$\frac{d}{dx} [J_k(px)] = -pJ_{k+1}(px) + \frac{k}{x} J_k(px)$$

rekürans bağıntısında $p = 1,\ x = \alpha_n$ alıp ve $J_k(\alpha_n) = 0$ olduğunu gözönünde tutarsak

$$J_k'(\alpha_n) = -J_{k+1}(\alpha_n)$$

olduğunu görürüz. Bu değeri yukarıda yerine koyarsak

$$\int_0^1 x[J_k(\alpha_n x)]^2 dx = \frac{1}{2} [J_{k+1}(\alpha_n)]^2 \tag{2.30}$$

elde ederiz. Buradan görülüyor ki, $f_n(x) = \sqrt{x}\, J_k(\alpha_n x)$ fonksiyonlarının $\|f_n\|$ normu

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 f_n{}^2(x) dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x}\, J_k(\alpha_n x)\right]^2 dx = \int_0^1 x\, [J_k(\alpha_n x)]^2 dx = \frac{1}{2} J_{k+1}{}^2(\alpha_n)$$

den

$$\|f_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}} J_{k+1}(\alpha_n)$$

olarak bulunur.

2.4.6 Bessel Serileri

Belirli koşulları sağlayan bir $f(x)$ fonksiyonu bir Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonları cinsinden seriye açılabilmektedir. $(0,a)$ aralığında Bessel diferensiyel denklemi ile oluşturulan bir aykırı Sturm-Liouville sisteminin özfonksiyonları $J_k(x)$ Bessel fonksiyonları olup, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu bu fonksiyonlar cinsinden seriye açılabilmektedir.

$[0,1]$ aralığında sürekli ve de bu aralıkta sonlu sayıda ekstremuma sahip bulunan bir $f(x)$ fonksiyonu, $k-$ yıncı basamaktan Bessel fonksiyonları cinsinden

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_k(\alpha_n x) \tag{2.31}$$

şeklinde bir seriye açılabilir. Burada α_n ler $J_k(\alpha) = 0$ denkleminin pozitif köklerine karşılık gelmektedir. A_n katsayılarının bulunması için (2.31) eşitliğinde her iki yanı $xJ_k(\alpha_m x)$ ile çarptıktan sonra $[0,1]$ aralığında integral alalım.

$$\int_0^1 f(x)xJ_k(\alpha_m x)dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_k(\alpha_n x)\right] xJ_k(\alpha_m x)dx$$

$$= A_m \int_0^1 xJ_k{}^2(\alpha_m x)dx + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} A_n \int_0^1 xJ_k(\alpha_n x)J_k(\alpha_m x)dx$$

olur. Teorem 2.4.4 ve Teorem 2.4.5 in sonuçlarını kullanırsak,

$$\int_0^1 xf(x)J_k(\alpha_m x)dx = A_m \int_0^1 xJ_k{}^2(\alpha_m x)dx$$

$$= A_m \frac{1}{2} J_{k+1}{}^2(\alpha_m)$$

olur. m yerine n olarak A_n Bessel katsayılarını

$$A_n = \frac{2}{J_{k+1}{}^2(\alpha_n)} \int_0^1 xf(x)J_k(\alpha_n x)dx \tag{2.32}$$

olarak buluruz.

Örnek 2.4.1: α_n ler $J_0(\alpha) = 0$ denkleminin pozitif kökleri olmak üzere $f(x) = 1$ fonksiyonu için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n x)$$

şeklinde bir açılım elde edeniz ve bu açılımdan yararlanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} = \frac{1}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bessel katsayılarının (2.32) formülünden

$$A_n = \frac{2}{{J_1}^2(\alpha_n)} \int_0^1 x J_0(\alpha_n x) dx$$

olur. İkinci yandaki integralin hesabı için, (2.23) deki

$$\frac{d}{dx}[x^k J_k(px)] = p x^k J_{k-1}(px)$$

rekürans bağıntısında $k = 1,\ p = \alpha_n$ alırsak

$$x J_0(\alpha_n x) = \frac{1}{\alpha_n} \frac{d}{dx}[x J_1(\alpha_n x)]$$

olur. O halde

$$A_n = \frac{2}{{J_1}^2(\alpha_n)} \int_0^1 \frac{1}{\alpha_n} \frac{d}{dx}[x J_1(\alpha_n x)] dx$$

$$= \frac{2}{\alpha_n {J_1}^2(\alpha_n)} x J_1(\alpha_n x)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\alpha_n {J_1}^2(\alpha_n)} J_1(\alpha_n) = \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$$

dir.

Böylece istenilen seri

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(\alpha_n x)\,, \qquad 0 \le x \le 1$$

olur. $J_0(0) = 1$ ve $0 \le x \le 1$ için $f(x) = 1$ olduğundan, $x = 0$ için

$$f(0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} J_0(0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}$$

den

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)} = \frac{1}{2}$$

elde ederiz.

Örnek 2.4.2: α_n ler $J_0(\alpha) = 0$ denkleminin pozitif kökleri olduğuna göre, $f(x) = -\frac{1}{2}\ln x$ fonksiyonunu sıfırıncı basamaktan Bessel fonksiyonları cinsinden seriye açınız.

Çözüm:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n x)$$

serisi için A_n Bessel katsayıları

$$A_n = \frac{2}{J_1{}^2(\alpha_n)} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\ln x\right) x J_0(\alpha_n x)\,dx$$

olur. İkinci yandaki integralin hesabı için (2.23) deki

$$\frac{d}{dx}[x^k J_k(px)] = p x^k J_{k-1}(px)$$

rekürans bağıntısında $k = 1,\ p = \alpha_n$ alalım. Bu taktirde

$$x J_0(\alpha_n x) = \frac{1}{\alpha_n} \frac{d}{dx}[x J_1(\alpha_n x)]$$

olur.

Bu değeri yukarıdaki integralde yerine koyup kısmi integrasyon uygularsak

$$A_n = -\frac{1}{{J_1}^2(\alpha_n)}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^1 (\ln x)\frac{d}{dx}[xJ_1(\alpha_n x)]dx$$

$$= -\frac{1}{\alpha_n {J_1}^2(\alpha_n)}\left\{x(\ln x)J_1(\alpha_n x)|_0^1 - \int_0^1 J_1(\alpha_n x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha_n {J_1}^2(\alpha_n)}\int_0^1 J_1(\alpha_n x)dx$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi de (2.23) deki

$$\frac{d}{dx}[x^{-k}J_k(px)] = -px^{-k}J_{k+1}(px)$$

rekürans bağıntısında $k = 0,\ p = \alpha_n$ alalım. Bu taktirde

$$J_1(\alpha_n x) = -\frac{1}{\alpha_n}\frac{d}{dx}[J_0(\alpha_n x)]$$

olacağından

$$A_n = \frac{1}{\alpha_n {J_1}^2(\alpha_n)}\left(-\frac{1}{\alpha_n}\right)\int_0^1 \frac{d}{dx}[J_0(\alpha_n x)]dx$$

$$= -\frac{1}{{\alpha_n}^2 {J_1}^2(\alpha_n)}J_0(\alpha_n x)|_0^1$$

$$= -\frac{1}{{\alpha_n}^2 {J_1}^2(\alpha_n)}\{J_0(\alpha_n) - J_0(0)\}$$

$$= \frac{1}{{\alpha_n}^2 {J_1}^2(\alpha_n)}$$

buluruz. Böylece istenilen seri,

$$-\frac{1}{2}\ln x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_n x)}{{\alpha_n}^2 {J_1}^2(\alpha_n)} \quad , \qquad 0 < x \le 1$$

olur.

2.4.7 Bessel Fonksiyonunun Değişik Tipleri

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$$

Bessel diferensiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümünün

$$J_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2p}$$

$$Y_k(x) = \lim_{\nu \to k} \frac{\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

olduklarını (2.17) ve (2.22) de gördük. $J_k(x)$ ve $Y_k(x)$ ler sırasıyla birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. $Y_k(x)$ lere Weber fonksiyonu da denilmektedir.

Bessel fonksiyonlarının bazı özel tiplerinden biri olan Modifie Bessel fonksiyonlarını inceleyelim.

2.4.7.1 Modifie Bessel Fonksiyonları

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + k^2)y = 0 \tag{2.33}$$

denklemine k-yıncı basamaktan *Modifie Bessel Denklemi* denir. Bu denklemi $x = 0$ düzgün aykırı noktası komşuluğunda Frobenius Yöntemi ile çözdüğümüzde, indisel denklemin kökleri $m_1 = k$, $m_2 = -k$ olup, $m_1 = k$ ya karşılık gelen çözüm,

$$I_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2p} \tag{2.34}$$

olarak elde edilir. $I_k(x)$ fonksiyonuna *birinci tür Modifie Bessel Fonksiyonu* denir.

Modifie Bessel denkleminde

$$t = ix, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

değişken değiştirmesini yaparsak,

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - k^2)y = 0$$

k–yıncı basamaktan Bessel diferensiyel denklemini elde ederiz. Bu özellik bize Bessel fonksiyonları ile modifie Bessel fonksiyonları arasında aşağıdaki eşitliklerin var olduğunu ifade eder.

$$J_k(x) = J_k(ix) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{ix}{2}\right)^{k+2p}$$

$$= i^k \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2p}$$

$$= i^k I_k(x)$$

ya da

$$I_k(x) = i^{-k} J_k(ix) \tag{2.35}$$

dir. k nın bir tamsayı olmaması halinde

$$I_{-k}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,\Gamma(-k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-k} \tag{2.36}$$

fonksiyonu modifie Bessel denkleminin ikinci lineer bağımsız çözümü olur. Bu fonksiyon $x = 0$ için sonsuz olmaktadır. Genel olarak, *k-yıncı basamaktan 2.tür modifie Bessel fonksiyonu*

$$K_k(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-k}(x) - I_k(x)}{\sin k\pi}\ , \quad k \notin \mathbb{Z} \tag{2.37}$$

olarak verilmektedir. k nın bir n tamsayısı olması halinde bu çözüm

$$K_n(x) = \lim_{k \to n} K_k(x)\ , \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.38}$$

olarak tanımlanmaktadır. Modifie Bessel denkleminin genel çözümü, k bir tamsayı olmadığı zaman

$$y = c_1 I_k(x) + c_2 I_{-k}(x)$$

olarak ve k bir tamsayı olduğu zaman da

$$y = c_1 I_k(x) + c_2 K_k(x)$$

olarak verilir.

2.4.8 Doğurucu Fonksiyonlar

$F(x,t)$ iki değişkenli fonksiyonu değişkenlerinden birine göre

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \tag{2.39}$$

şeklinde bir Taylor serisine açılmış olsun. Böyle bir durumda $F(x,t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}, n = 0,1,2. ..$ fonksiyonları için *doğurucu fonksiyon* denir. (2.39) serisinin tüm x ve t ler için yakınsak olması gerekmez. I belirli bir aralık ve r pozitif bir sabit olmak üzere $|t| < r$ ve $x \in I$ için yakınsak olması yeterlidir. Ortogonal (dik) fonksiyon ailelerinin pek çoğunun doğurucu fonksiyonu bilinmektedir. Bu tip ailelerin önemli bazı özelliklerinin ortaya çıkarılmasında doğurucu fonksiyon büyük rol oynar. Böyle özelliklerin varlığını göstermek için aşağıdaki teoremlere ihtiyaç olacaktır.

Teorem 2.4.6

Bir $f(u)$ fonksiyonu $u = 0$ da analitik ve onun kuvvet serisine açılımı

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \ , \ |u| < R \tag{2.40}$$

olsun. $z = 0$ da analitik ve $g(0) = 0$ olan bir fonksiyon da $u = g(z)$ olsun. Kabul edelim ki, $g(z)$ nin açılımı

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \ , \ |z| < r \tag{2.41}$$

dir ve $|z| < r$ için $|g(z)| < R$ sağlanır. Bu takdirde $f(u) = f[g(z)] = F(z)$ fonksiyonu da $z = 0$ da analitik ve

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ , \ |z| < r \tag{2.42}$$

açılımına sahiptir. Ayrıca $F(z)$ serisi, $f(u)$ serisinde u yerine $g(z)$ serisini alarak da elde edilebilir [9].

Şimdi, $x \in I$ için t nin analitik bir $F(x,t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \ , \quad |t| < r \ , \qquad x \in I \tag{2.43}$$

seriye açılımında yakınsaklık aralığı içerisinde kuvvet serisinin türevi geçerli kaldığından

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x)t^{n-1} \ ; \quad |t| < r \ , \qquad x \in I \tag{2.44}$$

yazılabilir. x değişkenine göre türevin varlığını ise Teorem 2.4.7 de vereceğiz.

Teorem 2.4.7

$F(x,t)$ ve $\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$ fonksiyonları $x \in I$ için $t = 0$ da t nin analitik fonksiyonları olsunlar. Yani, bu fonksiyonlar $|t| < r$ ve $x \in I$ için

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n \tag{2.46}$$

açılımlarına sahip olsunlar. Ayrıca, kabul edelim ki, $|t| < r$ ve $x \in I$ için $F(x,t)$ fonksiyonunun her basamaktan kısmi türevleri sürekli olsunlar. O taktirde $f_n{}'(x)$ türevi vardır ve $x \in I$ için $g_n(x) = f_n{}'(x)$, $\quad (n = 0,1,2, \ldots.)$ dir [9].

İspat

$F(x,t)$ nin kısmi türevlerinin sürekliliği

$$\frac{\partial^{i+j} F(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} = \frac{\partial^{i+j} F(x,t)}{\partial t^i \partial x^j} \ ; \quad i,j = 0,1,2, \ldots.$$

karmaşık türevlerinin eşitliğini garanti eder. (2.45) eşitiliğinden

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n F(x,t)}{\partial t^n}\right]_{t=0} \tag{2.47}$$

ve (2.46) eşitliğinden

$$g_n(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^{n+1}F(x,t)}{\partial t^n \partial x}\right]_{t=0} \tag{2.48}$$

yazabiliriz. Böylece (2.47) ve (2.48) den $f_n{}'(x)$ türevi

$$f_n{}'(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^{n}F(x,t)}{\partial t^n}\right]_{t=0} = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^{n+1}F(x,t)}{\partial t^n \partial x}\right]_{t=0} = g_n(x)$$

olarak bulunur.

2.4.9 Bessel Fonksiyonları için Doğurucu Fonksiyon

Teorem 2.4.8

x reel ve pozitif, t kompleks bir değişkeni göstermek üzere,

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \; ; \; x > 0\,, \qquad t \in \mathbb{C} \;, t \neq 0 \tag{2.49}$$

dır. Yani

$$F(x,t) = \; exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

fonksiyonu tam basamaktan Bessel fonksiyonları için doğurucu fonksiyondur [9].

İspat

$$F(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{\frac{xt}{2}}e^{-\frac{x}{2t}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{xt}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{2t}\right)^k$$

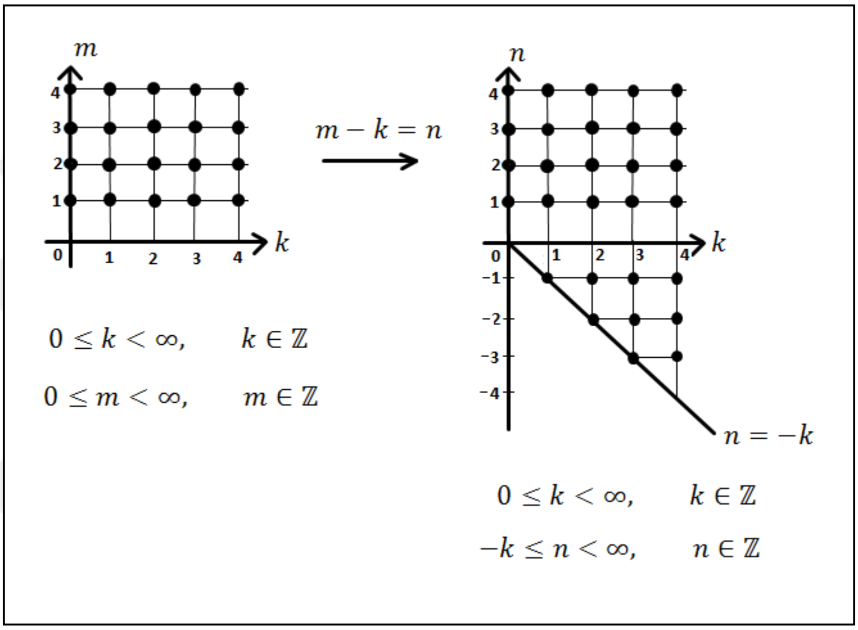
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{m-k}$$

yazabiliriz.

Bu eşitlikte $m-k=n$ alarak, $F(x,t)$ fonksiyonunu

$$F(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=-k}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}t^n$$

şeklinde ifade edebiliriz. (k,m) indis çiftlerinin $m-k=n$ dönüşümü ile (k,n) indis çiftlerine nasıl dönüştüğü Şekil 2.4.2 de görülmektedir.



Şekil 2.2. İndis çiftlerinin dönüşümü

Bu dönüşüm yardımıyla yukarıdaki $F(x,t)$ eşitliğini

$$F(x,t)=e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \tag{2.50}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-k}^{-1}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}t^n+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}t^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{k=-n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}t^n+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}t^n$$

şeklinde yazabiliriz. $n\ge 0$ için t^n nin katsayıları

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = J_n(x) \ , \ \ n = 0,1,2,\dots$$

olmaktadır.

$n \in \mathbb{Z}^-$ ise o takdirde $m = -n$ konumu ile t^n nin katsayısı yine,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m} \\
&= (-1)^m J_m(x) \\
&= (-1)^{-n} J_{-n}(x) \\
&= J_n(x)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Bulunan bu eşitlikleri (2.50) te yerine yazarsak

$$F(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

bulunur.

2.5 $\mathbf{L_n}^{(\alpha)}(x)$ Genelleştirilmiş Laguerre Polinomları ve Özellikleri

$\alpha > -1$ olmak üzere $(0,\infty)$ aralığında $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $L_n{}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$\Phi_n(x) = L_n{}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} \ , \quad (n = 0,1,2,3,\dots) \ . \qquad (2.51)$$

${L_n}^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının ilk birkaçı;

$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$,

$L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$,

$$L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{x^2}{2} - (\alpha + 2)x + \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 1)}{2} ,$$

$$L_3^{(\alpha)}(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{(\alpha + 3)x^2}{2} - \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 3)x}{2} + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{6} ,$$

$$L_4^{(\alpha)}(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3(\alpha + 4)}{6} + \frac{(\alpha + 3)(\alpha + 4)x^2}{4} - \frac{(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)}{6} + \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)(\alpha + 4)}{24}$$

dir.

${L_n}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının başlangıç teriminin katsayısı

$$\frac{(-1)^n}{n!}$$

dir.

${L_n}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının sabit terimi 0 olduğunda,

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n + \alpha}{n} \approx \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

dir.

$\alpha = 0$ özel halindeki ${L_n}^{(\alpha)}(x) = L_n(x)$ Laguerrre polinomlarının ilk birkaçının açık ifadesi aşağıdaki gibidir;

$L_0(x) = 1$,

$L_1(x) = 1 - x$,

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 ,$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 ,$$

$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4 .$$

Kapalı şekli ise

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(-1)^i}{i!} x^i$$

dir.

Bunu kullanarak her bir $k \geq 1$ için aşağıdaki eşitlik gösterilebilir:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}\big((2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)\big) \ .$$

2.5.1 Laguerre Diferensiyel Denklemi

Teorem 2.5.1

${L_n}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları,

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0 \qquad (2.52)$$

Laguerre diferensiyel denklemini sağlar [15].

İspat

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}{L_n}^{(\alpha)}(x)\right] \qquad (2.53)$$

(2.53) ifadesinin türevini alıp açık olarak yazarsak,

$$(\alpha+1)x^{\alpha}e^{-x}\frac{d}{dx}{L_n}^{(\alpha)}(x) - x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}{L_n}^{(\alpha)}(x) + x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d^2}{dx^2}{L_n}^{(\alpha)}(x)$$

$$= x^{\alpha}e^{-x}\left[(\alpha+1-x)\frac{d}{dx}{L_n}^{(\alpha)}(x) + x\frac{d^2}{dx^2}{L_n}^{(\alpha)}(x)\right] \qquad (2.54)$$

elde ederiz. Köşeli parantez içindeki ifade n. dereceden bir polinom olduğundan,

$$(\alpha+1-x)\frac{d}{dx}{L_n}^{(\alpha)}(x) + x\frac{d^2}{dx^2}{L_n}^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i {L_i}^{(\alpha)}(x) \qquad (2.55)$$

olarak yazılabilir.

(2.55) eşitliğini (2.54) de yerine yazarsak (2.54) eşitliği

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n{}^{(\alpha)}(x)\right] = x^{\alpha}e^{-x}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L_i{}^{(\alpha)}(x) \qquad (2.56)$$

halini alır. Burada α_i leri elde etmek için (2.56) eşitliğinin her iki tarafını $L_j{}^{(\alpha)}(x)$ ile çarpıp ve $(0,\infty)$ aralığında integralini alırsak

$$\int_0^\infty L_j{}^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n{}^{(\alpha)}(x)\right]dx$$

$$= \alpha_j\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}\left[L_j{}^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\alpha_i\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}L_j{}^{(\alpha)}(x)L_i{}^{(\alpha)}(x)dx$$

olarak bulunur. Sağ taraftaki eşitliğin ikinci tarafı, $L_n{}^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomları ortogonal olduğundan 0 dır. Buradan da

$$\int_0^\infty L_j{}^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n{}^{(\alpha)}(x)\right]dx = \alpha_j\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}\left[L_j{}^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx \qquad (2.57)$$

elde edilir. (2.57) eşitliğinde j yerine i yazıp ve α_i yi yalnız bırakıp denklemi düzenlersek

$$\alpha_i = \frac{\int_0^\infty L_i{}^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n{}^{(\alpha)}(x)\right]dx}{\int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}\left[L_i{}^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx} \qquad (2.58)$$

olur. (2.58) eşitliğinin payını I olarak gösterirsek

$$I = \int_0^\infty L_i{}^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n{}^{(\alpha)}(x)\right]dx \qquad (2.59)$$

olarak yazılacaktır. (2.59) da $u = L_i{}^{(\alpha)}(x)$ ve

$$\mathrm{dv} = \int_0^\infty L_i{}^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_n{}^{(\alpha)}(x)\right]dx$$

olarak iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\frac{d}{dx}L_i^{(\alpha)}(x)\right]dx \tag{2.60}$$

ele edilir. (2.60) eşitliğinde parantez içerisindeki ifadenin türevini alıp düzenlersek

$$I = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\left[(\alpha+1-x)\frac{d}{dx}L_i^{(\alpha)}(x) + x\frac{d^2}{dx^2}L_i^{(\alpha)}(x)\right]dx \tag{2.61}$$

olur. (2.61) eşitliğinde parantez içindeki ifade i. dereceden bir polinom olup,

$$(\alpha+1-x)\frac{d}{dx}L_i^{(\alpha)}(x) + x\frac{d^2}{dx^2}L_i^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{i}\alpha_k L_k^{(\alpha)}(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu polinomlar $i < n$ için $L_n^{(\alpha)}(x)$ ler ile ortogonaldir. Yani $i = 0,1,2,3,\ldots,n-1$ için $I = 0$ dır. Böylece (2.58) den dolayı $i = 0,1,2,3,\ldots,n-1$ için $\alpha_i = 0$ dır. Buradan da

$$(\alpha+1-x)\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) + x\frac{d^2}{dx^2}L_n^{(\alpha)}(x) = \alpha_n L_n^{(\alpha)}(x) \tag{2.62}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $L_n^{(\alpha)}(x) = y$ olarak gösterirsek

$$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = y'$$

ve

$$\frac{d^2}{dx^2}L_n^{(\alpha)}(x) = y''$$

olur. Bunları da (2.62) de yerlerine yazarsak

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' = \alpha_n y \tag{2.63}$$

denklemi sağlanır. α_n yi bulmak için, $L_n^{(\alpha)}(x)$ in n - yinci dereceden bir polinom olduğu ve (2.62) nin her iki yanındaki polinomlarda aynı dereceli terimlerin katsayılarının eşit olması gerektiği gerçeğinden hareket eder ve en yüksek dereceli terimleri, yani x^n lerin katsayılarını eşitlersek $\alpha_n = -n$ buluruz.

Böylece (2.63) den ${L_n}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının sağlandığı,

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$$

Laguerre diferensiyel denklemi elde edilir.

2.5.2 $\boldsymbol{{L_n}^{(\alpha)}(x)}$ Genelleştirilmiş Laguerre Polinomlarının Dikliği

Teorem 2.5.2

${L_n}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları, $\alpha > -1$ olmak üzere $I = [0,\infty)$ aralığında $\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$ ağırlıklı fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem oluştururlar. Yani,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} {L_i}^{(\alpha)}(x) {L_j}^{(\alpha)}(x) dx = 0, \qquad i \neq j \tag{2.64}$$

ortogonallik özelliği sağlanmaktadır [15].

İspat

${L_n}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının sağladığı diferensiyel denklem,

$$xD^2 {L_n}^{(\alpha)}(x) + (\alpha + 1 - x) D {L_n}^{(\alpha)}(x) + n {L_n}^{(\alpha)}(x) = 0 \tag{2.65}$$

şeklindedir. ${L_m}^{(\alpha)}(x)$ ler de bu denklemi sağlayacağından,

$$xD^2 {L_m}^{(\alpha)}(x) + (\alpha + 1 - x) D {L_m}^{(\alpha)}(x) + n {L_m}^{(\alpha)}(x) = 0 \tag{2.66}$$

yazılabilir. (2.65) ve (2.66) eşitliklerinin her iki yanları $x^{\alpha} e^{-x}$ ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$D\left[x^{\alpha+1} e^{-x} D {L_n}^{(\alpha)}(x)\right] + n x^{\alpha} e^{-x} {L_n}^{(\alpha)}(x) = 0 \ , \tag{2.67}$$

$$D\left[x^{\alpha+1} e^{-x} D {L_m}^{(\alpha)}(x)\right] + m x^{\alpha} e^{-x} {L_m}^{(\alpha)}(x) = 0 \tag{2.68}$$

denklemleri elde edilir. (2.67) eşitliğini $L_m^{(\alpha)}(x)$ ile (2.68) eşitliğini de $L_n^{(\alpha)}(x)$ ile çarpıp bulunan eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak,

$$
\begin{aligned}
&(m-n)x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x) \\
&\qquad = L_m^{(\alpha)}(x)D\left[x^{\alpha+1}e^{-x}DL_n^{(\alpha)}(x)\right] - L_n^{(\alpha)}(x)D\left[x^{\alpha+1}e^{-x}DL_m^{(\alpha)}(x)\right] \\
&\qquad = D\left[x^{\alpha+1}e^{-x}\left\{L_m^{(\alpha)}(x)DL_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)DL_m^{(\alpha)}(x)\right\}\right] \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanını $(0,\infty)$ aralığında integre edersek,

$$
\begin{aligned}
(m-n) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx \\
&= \left[x^{\alpha+1}e^{-x}\left\{L_m^{(\alpha)}(x)DL_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)DL_m^{(\alpha)}(x)\right\}\right]_0^{\infty} \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı 0 olacağından $m \neq n$ için,

$$
\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = 0 \qquad (2.71)
$$

bulunur. Buradan görülüyor ki $L_n^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları $(0,\infty)$ da $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$ ağırlıklı fonksiyonuna göre dik bir sistem teşkil eder.

2.5.3 $L_n^{(\alpha)}(x)$ Genelleştirilmiş Laguerre Polinomları için Rekürans Formülleri

$L_n^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları için bir rekürans bağıntısı elde etmek için öncelikle aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.5.3

$[a,b]$ aralığında $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $N.$ dereceden ortogonal polinomlarının her Φ_N ailesi

$$
\Phi_{N+1}(x) - (xA_N + B_N)\Phi_N(x) + C_N\Phi_{N-1}(x) = 0
$$

tipinde bir rekürans bağıntısını sağlar (A_N, B_N ve C_N sabitlerdir) .

Teorem 2.5.4

$[0,\infty)$ aralığında $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre $L_n{}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları için bir rekürans bağıntısı,

$$xL_n{}^{(\alpha)}(x) = -(n+1)L_{n+1}{}^{(\alpha)}(x) + (2n+1+\alpha)L_n{}^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}{}^{(\alpha)}(x)$$

şeklindedir [15].

İspat

$L_n{}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları,

$$L_n{}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+\alpha}{k+\alpha}\frac{x^k}{k!} \tag{2.72}$$

şeklinde ifade edilir ve $0 < x < \infty$ aralığında $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir polinom ailesidir. Bu polinomlar Teorem 2.5.3 gereğince,

$$L_{n+1}{}^{(\alpha)}(x) - (A_n x + B_n)L_n{}^{(\alpha)}(x) + C_n L_{n-1}{}^{(\alpha)}(x) = 0 \tag{2.73}$$

$n \geq -1$ için (2.73) formunda bir rekürans bağıntısını sağlamalıdır. Burada A_n, B_n ve C_n ler n ye bağlı olarak belirlenecek sabitlerdir. (2.72) ve (2.73) den

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k \binom{n+1+\alpha}{k+\alpha}\frac{x^k}{k!} - A_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+\alpha}{k+\alpha}\frac{x^{k+1}}{k!} - B_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+\alpha}{k+\alpha}\frac{x^k}{k!}$$
$$+ C_n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1+\alpha}{k+\alpha}\frac{x^k}{k!} = 0 \tag{2.74}$$

yazılabilir. Bu eşitlik her x için doğru olacağından x in her bir kuvvetinin katsayısı 0 olmalıdır. O halde yukarıdaki eşitlikte x^{n+1}, x^n ve x^{n-1} lerin katsayılarını düzenleyip sıfıra eşitlersek aşağıdakiler elde edilecektir;

$$\left\{(-1)^{n+1}\binom{n+\alpha+1}{n+\alpha+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}-A_n(-1)^n\binom{n+\alpha}{n+\alpha}\frac{x^{n+1}}{n!}\right\}$$

$$+\left\{(-1)^n\binom{n+1+\alpha}{n+\alpha}\frac{x^n}{n!}-A_n(-1)^{n-1}\binom{n+\alpha}{n+\alpha-1}\frac{x^n}{(n-1)!}\right.$$

$$\left.-B_n(-1)^n\binom{n+\alpha}{n+\alpha}\frac{x^n}{n!}\right\}$$

$$+\left\{(-1)^{n-1}\binom{n+\alpha+1}{n+\alpha-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\quad-A_n(-1)^{n-2}\binom{n+\alpha}{n+\alpha-2}\frac{x^{n-1}}{(n-2)!}\right.$$

$$\left.-B_n(-1)^{n-1}\binom{n+\alpha}{n+\alpha-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+C_n(-1)^n\binom{n+\alpha-1}{n+\alpha-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$$

$$+\cdots=0\quad. \tag{2.75}$$

Bu eşitlikte x^{n+1} lerin katsayılarını sıfıra eşitlersek

$$(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(n+1)!}+A_n\frac{1}{n!}\right]x^{n+1}=0$$

olur. Buradan,

$$A_n=-\frac{n!}{(n+1)!}=-\frac{1}{n+1} \tag{2.76}$$

olarak bulunur. (2.75) den x^n lerin katsayılarını sıfıra eşitlersek

$$(-1)^n\left[(n+\alpha+1)\frac{1}{n!}-\frac{n+\alpha}{n+1}\frac{1}{(n-1)!}-B_n\frac{1}{n!}\right]x^n=0$$

olarak bulunur. Böylece

$$B_n=n!\left[\frac{n+\alpha+1}{n!}-\frac{n+\alpha}{n+1}\frac{1}{(n-1)!}\right]=\ n+\alpha+1-\frac{n(n+\alpha)}{n+1}=\frac{2n+\alpha+1}{n+1} \tag{2.77}$$

olur.

Son olarak da x^{n-1} lerin katsayılarını sıfıra eşitlersek

$$(-1)^{n-1}\left[\frac{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}{2}\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n+1}\frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}{2(n-1)!}\right.$$
$$\left.-\frac{2n+\alpha+1}{n+1}\frac{n+\alpha}{(n-1)!}+C_n\frac{1}{(n-1)!}\right]x^{n-1}=0$$

olacaktır.

Buradan da gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$C_n = \frac{n+\alpha}{n+1} \tag{2.78}$$

olarak elde edilir. A_n, B_n ve C_n nin bulunan değerlerini (2.73) de yerine yazarsak,

$$L_{n+1}{}^{(\alpha)}(x) - \left(-\frac{1}{n+1}x + \frac{2n+1+\alpha}{n+1}\right)L_n{}^{(\alpha)}(x) + \frac{(n+\alpha)}{n+1}L_{n-1}{}^{(\alpha)}(x) = 0$$

olacaktır. Bu ifadeyi de düzenlersek istenilen

$$(n+1)L_{n+1}{}^{(\alpha)}(x) - (x-2n-\alpha-1)L_n{}^{(\alpha)}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}{}^{(\alpha)}(x) = 0, \qquad n \geq 1 \tag{2.79}$$

rekürans bağıntısı elde edilir. Bu rekürans bağıntısı yalın (üç terimli) rekürans bağıntısı olarak bilinmektedir.

2.5.4 $L_n{}^{(\alpha)}(x)$ Genelleştirilmiş Laguerre Polinomları İçin Doğurucu Fonksiyon

$L_n{}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları için bir doğurucu fonksiyon elde etmek için öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.5.1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k\,,n+k) \qquad \text{dır.}$$

İspat

Düzlemde (k,n) doğal sayı çiftlerinin oluşturduğu bir nokta cümlesi,

$$D = \{(k,n){:}\, 0 \leq k < \infty\,,\;\; 0 \leq n < \infty\,;\;\; n,k \in N_0\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada yeni indisler $k = j,\; n = m - j$ olarak tanımlanırsa D cümlesi,

$$D^* = \{(k,n){:}\, 0 \leq j < m\,,\;\; 0 \leq m < \infty\,;\;\; j,m \in N_0\}$$

cümlesine dönüşür. Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,n) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} B(j\,,m-j)$$

olur.

m, j indisleri yerine sırasıyla n, k konulursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} B(n\,,n-k)$$

bulunur. Bu eşitlikte $B(n\,,n-k) = A(k,n)$ alınırsa ispat tamamlanır.

Lemma 2.5.2

${L_n}^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomları için bir doğurucu fonksiyon

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} {L_n}^{(\alpha)}(x)\, t^n$$

şeklindedir. Burada $|t| < 1$ dir [6].

İspat

Şimdi ${L_n}^{(\alpha)}(x)$ Laguerre polinomlarının doğurucu fonksiyonunu elde etmek için (2.51) eşitliğinin her iki yanını $\frac{1}{(1+\alpha)_n}$ ile çarpıp ve her iki tarafta sonsuz toplam alıp Lemma 2.5.1 i dikkate alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{L_n}^{(\alpha)}(x) t^n}{(1+\alpha)_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k t^n}{k!\,(n-k)!\,(1+\alpha)_k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n t^n}{n!\,(1+\alpha)_n}\right) \tag{2.80}$$

elde ederiz. Eşitliğin sol tarafı ${}_0F_1$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden

$$e^t\ {}_0F_1(-;1+\alpha;-xt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{L_n}^{(\alpha)}(x) t^n}{(1+\alpha)_n} \tag{2.81}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$${}_0F_1(-;1+\alpha;-xt) = e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{L_n}^{(\alpha)}(x) t^n}{(1+\alpha)_n}$$

dir [8].

Ayrıca bulduğumuz (2.81) ifadesini Bessel fonksiyonu yardımıyla

$$\Gamma(1+\alpha)(xt)^{-\frac{\alpha}{2}}e^{t}J\left(2\sqrt{xt}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n}{}^{(\alpha)}(x)t^{n}}{(1+\alpha)_{n}} \tag{2.82}$$

şeklinde de yazabiliriz [13]. Şimdi de (2.51) ifadesinin her iki yanını $\frac{c_n}{(1+\alpha)_n}$ ile çarpıp, her iki tarafın da sonsuz toplamını aldıktan sonra (2.81) eşitliğini göz önüne alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_{n}L_{n}{}^{(\alpha)}(x)t^{n}}{(1+\alpha)_{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(c)_{n}(-x)^{k}t^{n}}{k!\,(n-k)!\,(1+\alpha)_{k}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_{n+k}(-x)^{k}t^{n+k}}{k!\,(n)!\,(1+\alpha)_{k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c+k)_{n}t^{n}}{n!}\frac{(c)_{k}(-xt)^{k}}{k!\,(1+\alpha)_{k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}{}_{1}F_{0}(c+k;-;t)\,\frac{(c)_{k}(-xt)^{k}}{k!\,(1+\alpha)_{k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_{k}(-xt)^{k}}{k!\,(1+\alpha)_{k}(1-t)^{c+k}} \tag{2.83}$$

elde edilir. Burada hipergeometrik fonksiyonların tanımını göz önüne alırsak,

$$\frac{1}{(1-t)^{c}}\;{}_{1}F_{1}\left[\begin{matrix}c\,; & -\dfrac{xt}{1-t}\\ 1+\alpha & \end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_{n}\,L_{n}{}^{(\alpha)}(x)t^{n}}{(1+\alpha)_{n}} \tag{2.84}$$

elde ederiz. Özel olarak eğer $c=1+\alpha$ seçilirse

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_{n}{}^{(\alpha)}(x)\,t^{n} \tag{2.85}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

2.5.5 $L_n^{(\alpha)}(x)$ Genelleştirilmiş Laguerre Polinomlarının Normu

Teorem 2.5.5

$L_n^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının $\left\|L_n^{(\alpha)}\right\|$ normu,

$$\left\|L_n^{(\alpha)}\right\|^2 = \int_0^\infty x^\alpha\, e^{-x}\left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \tag{2.86}$$

dir [15].

İspat

Teoremin ispatı için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \tag{2.87}$$

şeklinde ifade edilen Laguerre polinomlarının doğurucu fonksiyonundan yararlanabiliriz. Yukarıdaki eşitliğin her iki yanını Laguerre polinomlarının ağırlık fonksiyonu olan $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ ile çarparsak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^\alpha e^{-x} L_m^{(\alpha)}(x)\, t^m = x^\alpha e^{-x} \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} \tag{2.88}$$

elde edilir. (2.87) ve (2.88) eşitliklerini taraf tarafa çarpıp, $(0,\infty)$ aralığında integral alırsak,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x)\, dx\right] t^{m+n} = \frac{1}{(1-t)^{2\alpha+2}} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x\left(\frac{1+t}{1-t}\right)} dx \tag{2.89}$$

bulunur. Sol tarafı $m=n$ ve $m \neq n$ durumu için iki toplam olarak yazıp ve $|t| < 1$ için $\frac{1+t}{1-t} > 0$ olduğunu ve Gamma fonksiyonunun tanımını dikkate alarak, sağ taraftaki integrali hesapladığımızda,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx\right] t^{2n} + \sum_{\substack{m,n=0\\ m\neq n}}^{\infty}\left[\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x)\, dx\right] t^{m+n}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^{2\alpha+2}} \left(\frac{1-t}{1+t} \right)^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) = \frac{1}{(1-t^2)^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) \tag{2.90}$$

elde edilir. $m \neq n$ için polinomların ortogonalliğinden dolayı sol yandaki ikinci integral sıfıra eşit olup, sağdaki ifade Taylor serisine açılarak yazıldığında ve t^{2n} lerin katsayıları eşitlendiğinde istenilen elde edilir.

2.5.6 Laguerre Polinomları Cinsinden Seri Açılımları

$f(x)$ fonksiyonunun Laguerre polinomları cinsinden seri açılımı

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i^{(\alpha)} L_i^{(\alpha)}(x)$$

olsun. O halde;

$$f_i^{(\alpha)} = \int_0^{\infty} \frac{L_i^{(\alpha)}(x)}{\binom{i+\alpha}{i}} \frac{x^{\alpha} e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)} f(x)\, dx$$

dir.

2.6 Hermite Polinomları

$-\infty < x < \infty$ ve $n \in N_0$ olmak üzere

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \tag{2.91}$$

denkleminin çözümlerinden biri

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!\,(2x)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} \quad ; \quad n = 0,1,\ldots. \tag{2.92}$$

ile gösterilen $H_n(x)$ Hermite polinomlarıdır.

Hermite polinomlarının ilk birkaçının açık ifadesi aşağıdaki gibidir :

$H_0(x) = 1\,,$

$H_1(x) = 2x\,,$

$H_2(x) = 4x^2 - 2\,,$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x\,,$

$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

dir.

Hermite polinomları $\mathrm{I} = (-\infty, \infty)$ aralığında

$$\rho(x) = e^{-x^2}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olup,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \quad ; \qquad m \neq n \qquad m, n \in N_0$$

bağıntısını gerçekler. Öte yandan

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} {H_n}^2(x) dx = 2^{\,n}\, n! \sqrt{\pi}$$

dir. Hermite polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!} = exp(2xt - t^2) \qquad (2.93)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısına ve

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Rodrigues formülüne sahiptir. Hermite polinomları için üç terimli rekürans bağıntısı

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,; \qquad n = 1,2, \ldots.$$

şeklindedir [7,8]. Ayrıca, Hermite polinomları ile P_n Jacobi polinomları arasında

$$H_n(x) = n! \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \frac{\nu^{-\frac{n}{2}} (2\nu)_n}{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)_n} \; P_n^{\left(\nu - \frac{1}{2}, \nu - \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{\sqrt{\nu}} \right) \right\} \tag{2.94}$$

formunda bir limit gösterimi vardır. Bunun bir sonucu olarak, ${C_n}^{\nu}$ Gegenbauer polinomları ile Hermite polinomları arasında da

$$H_n(x) = n! \lim_{\nu \to \infty} \left\{ \nu^{-\frac{n}{2}} \, {C_n}^{\nu} \left(\frac{x}{\sqrt{\nu}} \right) \right\} \tag{2.95}$$

eşitliği gerçeklenir [7].

$H_n(x)$ Hermite polinomlarına benzer olarak $He_n(x)$ ifadesi de olasılık teorisinde sıkça kullanılan Hermite polinomudur. Bu $He_n(x)$ Hermite polinomları da $\mathrm{I} = (-\infty, \infty)$ aralığında

$$\rho(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldirler. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} He_n(x) He_m(x) dx = \sqrt{2\pi} n! \, \delta_{nm}$$

bağıntısını gerçekler. Bu polinomlar

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

formunda bir Rodrigues formülüne sahip olup, ikinci basamaktan

$$y'' - xy' + ny = 0 \tag{2.96}$$

diferensiyel denklemini sağlar.

2.6.1 Hermite Polinomları ile Laguerre Polinomlarının İlişkileri

Hermite polinomları, Laguerre polinomlarının özel bir durumu olarak

$$H_{2n}(x) = (-4)^n \, n! \, L_n^{(-1/2)}(x^2) = 4^n \, n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n-\frac{1}{2}}{n-i} \frac{x^{2i}}{i!} \tag{2.97}$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-4)^n n! \, x L_n^{(1/2)}(x^2) = 2.4^n n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n+\frac{1}{2}}{n-i} \frac{x^{2i+1}}{i!} \tag{2.98}$$

şeklinde ifade edilebilir.

3. HERMİTE VE LAGUERRE GENİŞLEMELERİ İÇİN POİSSON İNTEGRALLERİNİN YAKINSAMA HIZI VE VORONOVSKAYA TEOREMİ

$\alpha > -1$ için $f \in L^p(z^\alpha e^{-z})$ nin bir fonksiyonu olarak Laguerre polinomu genişlemeleri için Poisson integralini $A(f)(r,x)$ olarak

$$A(f)(r,x) = A(f;r,x) = \int_0^\infty K(r,x,z) f(z) z^\alpha e^{-z} dz, \qquad 0 < r < 1 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

$L_n^{(\alpha)}$ $n.$ dereceden genelleştirilmiş Laguerre polinomu ve I_α Modifie Bessel fonksiyonu olmak üzere Poisson çekirdeği

$$K(r,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n{}^{\alpha}(x) L_n{}^{\alpha}(z)$$

$$= \frac{(rxz)^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-r} \exp\left(\frac{-r(x+z)}{1-r}\right) I_\alpha \left(\frac{2(rxz)^{1/2}}{1-r}\right)$$

şeklinde ifade edilir.

$A(f)$ operatörü için aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir [5]:

a) $1 \le p \le \infty$ için $\|A(f;r,.)\|_p \quad \le \|f(.)\|_p$,

b) $r \to 1^-$ iken $\quad 1 \le p < \infty$ için $\|A(f;r,.) - f(.)\|_p \to 0$,

c) $[0,\infty)$ aralığında hemen hemen her yerde $1 \le p \le \infty$ için $\lim_{r\to 1^-} A(f;r,x) = f(x)$ dir.

Burada $\|f\|_p$ sembolü, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ da tanımlanan bir f fonksiyonunun p −yinci normunun $z^\alpha e^{-z}dz$ ölçüsüne göre belirlenmesi için kullanılır.

Bir $f \in L^p(\exp(-z^2))$ fonksiyonunun Hermite polinom genişlemeleri için Poisson integrali

$$B(f)(r,x) = B(f;r,x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)f(z)\exp(-z^2)\,dz, \quad 0 < r < 1 \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır.
Burada

$$P(r,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n H_n(x)H_n(z)}{\sqrt{\pi}2^n n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}}\exp\left(\frac{-r^2x^2 + 2rxz - r^2z^2}{1-r^2}\right)$$

dir ve H_n , n. dereceden Hermite polinomudur. $f \in L^p(\exp(-z^2))$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir [5]:

a) $1 \le p \le \infty$ için $\|B(f;r,.)\|_p \le \|f(.)\|_p$,

b) $r \to 1^-$ iken $\quad 1 \le p < \infty$ için $\|B(f;r,.) - f(.)\|_p \to 0$,

c) $1 \le p \le \infty$ için hemen hemen her yerde $\lim_{r\to 1^-} B(f;r,x) = f(x)$ dir .

Burada $\|f\|_p$, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan bir fonksiyonun $L^p(\exp(-z^2))$ deki normu gösterir.

3.1 Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde $A(f)$ ve $B(f)$ operatörlerinin bazı özelliklerini elde edeceğiz. Bu özellikleri de ilerideki teoremlerin ispatlarında kullanacağız.

Lemma 3.1.1

Herbir $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$A(1;r,x) = 1\,, \tag{3.3}$$

$$A(z;r,x) = (\alpha+1)(1-r) + rx\,, \tag{3.4}$$

$$A(z^2;r,x) = r^2x^2 + (\alpha+2)(r-1)\big((\alpha+1)(r-1) - 2rx\big)\,, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} A(z^3;r,x) = {} & r^3x^3 - 3(\alpha+3)r^3x^2 + 3(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x \\ & -(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3 + 3(\alpha+3)r^2x^2 \\ & -6(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x + 3(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2 \\ & +3(\alpha+3)(\alpha+2)rx - 3(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r \\ & +(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} A(z^4;r,x) = {} & r^4x^4 - 4(\alpha+4)r^4x^3 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^4x^2 \\ & -4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^4x + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^4 \\ & +4(\alpha+4)r^3x^3 - 12(\alpha+4)(\alpha+3)r^3x^2 \\ & +12(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3 \\ & +6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2 - 12(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x \\ & +6(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2 + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1) \\ & +4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)rx \\ & -4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilebilir.

İspat

(2.51) de gösterdiğimiz $L_n^{(\alpha)}$ tanımını kullanarak

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k L_k^{(\alpha)}(z) \tag{3.8}$$

eşitliğini yazabiliriz [8].

$$\int_0^\infty K(r,x,z) L_n^{(\alpha)}(z) z^\alpha e^{-z} dz = r^n L_n^{(\alpha)}(x) \tag{3.9}$$

eşitliğinin var olduğunu biliyoruz [5]. Şimdi bu eşitliği ispatlayalım;

$$K(r,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(z)$$

ifadesini (3.9) eşitliğinin sol kısmında yerine yazalım.

$$\int_0^\infty K(r,x,z) L_n^{(\alpha)}(z) z^\alpha e^{-z} dz = \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(z) L_n^{(\alpha)}(z) z^\alpha e^{-z} dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) \int_0^\infty \left(L_n^{(\alpha)}(z)\right)^2 z^\alpha e^{-z} dz$$

[8] den

$$\int_0^\infty \left(L_n^{(\alpha)}(z)\right)^2 z^\alpha e^{-z} dz = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

olduğu bilinmektedir. Bu ifade son eşitlikte kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) \int_0^\infty \left(L_n^{(\alpha)}(z)\right)^2 z^\alpha e^{-z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n L_n^{(\alpha)}(x)$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanır. (3.9) eşitliğinde $n = 0$ alırsak,

$$\int_0^\infty K(r,x,z)L_0^{(\alpha)}(z)z^\alpha e^{-z}dz = L_0^{(\alpha)}(x)$$

elde ederiz. Burada $L_0^{(\alpha)}(z) = L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ olduğundan

$$\int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}dz = 1 \tag{3.10}$$

dir. Bu da

$$A(1;r,x) = 1$$

olduğunu ispatlar.

(3.9) eşitliğinde $n = 1$ alırsak

$$\int_0^\infty K(r,x,z){L_1}^\alpha(z)z^\alpha e^{-z}dz = r{L_1}^\alpha(x)$$

olur. ${L_1}^\alpha(z) = -z+\alpha+1$, ${L_1}^\alpha(x) = -x+\alpha+1$ olduğundan

$$\int_0^\infty K(r,x,z)(-z+\alpha+1)z^\alpha e^{-z}dz = r(-x+\alpha+1)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A(z;r,x) = (\alpha+1)(1-r)+rx$$

elde edilir.

(3.9) eşitliğinde $n = 2$ alırsak

$$\int_0^\infty K(r,x,z){L_2}^\alpha(z)z^\alpha e^{-z}dz = r^2{L_2}^\alpha(x)$$

olur.

$${L_2}^\alpha(z) = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2} - (\alpha+2)z + \frac{z^2}{2}$$

ya da

$${L_2}^\alpha(x) = \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2} - (\alpha+2)x + \frac{x^2}{2}$$

olduğundan

$$\int_0^\infty K(r,x,z)\left(\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2}-(\alpha+2)z+\frac{z^2}{2}\right)z^\alpha e^{-z}dz=r^2\left(\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2}-(\alpha+2)x+\frac{x^2}{2}\right)$$

dir.

Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A(z^2;r,x)=r^2x^2+(\alpha+2)(r-1)\big((\alpha+1)(r-1)-2rx\big)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.9) eşitliğinde $n=3$ ve $n=4$ alarak $A(z^3;r,x)$ ve $A(z^4;r,x)$ açılımlarını da kolayca görebiliriz.

(2.92) de verdiğimiz H_n tanımından

$$z^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\binom{n}{k}\frac{1}{2^{2k}}H_{2k}(z) \tag{3.11}$$

ve

$$z^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\binom{n}{k}\frac{1}{2^{2k+1}}H_{2k+1}(z) \tag{3.12}$$

olur.

Şimdi bu eşitliklerin doğruluğunu gösterelim.

z^{2n} in ispatı için (3.8) deki z^n eşitliğinde α yerine $-\frac{1}{2}$, z yerine z^2 alınırsa

$$z^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{n!}{(n-k)!}(-1)^k L_k^{-\frac{1}{2}}(z^2) \tag{3.13}$$

olur. (2.97) deki

$$H_{2n}(x)=(-4)^n n!\,L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2)$$

eşitliğinde n yerine k, x yerine z yazarsak

$$H_{2k}(z)=(-4)^k k!\,L_k^{-\frac{1}{2}}(z^2)$$

elde edilir. Burada

$$L_k^{-\frac{1}{2}}(z^2) = \frac{H_{2k}(z)}{(-4)^k k!}$$

olur. Bu ifadeyi (3.13) de yerine yazalım.

$$z^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k \frac{H_{2k}(z)}{(-4)^k k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k \frac{H_{2k}(z)}{(-1)^k 4^k k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \frac{1}{2^{2k}} H_{2k}(z)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{2k}} H_{2k}(z)$$

olur. Bu ise (3.11) ispatını tamamlar.

Şimdi z^{2n+1} in ispatını yapalım. Bunun için (3.8) deki z^n eşitliğinde α yerine $\frac{1}{2}$, z yerine z^2 alınırsa

$$z^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k L_k^{\frac{1}{2}}(z^2) \tag{3.14}$$

olur. (2.98) deki

$$H_{2n+1}(x) = 2.(-4)^n n!\, x L_n^{\frac{1}{2}}(x^2)$$

eşitliğinde n yerine k, x yerine z yazarsak;

$$H_{2k+1}(z) = 2(-4)^k k!\, z\, L_k^{\frac{1}{2}}(z^2)$$

elde edilir. Burada

$$L_k^{\frac{1}{2}}(z^2) = \frac{H_{2k+1}(z)}{2(-4)^k k!\, z}$$

dir. Bu değer (3.14) de yerine yazılırsa

$$z^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k \frac{H_{2k+1}(z)}{2(-4)^k k!\, z}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k \frac{H_{2k+1}(z)}{2(-1)^k 4^k k!\, z}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \frac{n!}{(n-k)!\, k!} (-1)^k \frac{H_{2k+1}(z)}{2(-1)^k 2^{2k} z} \tag{3.15}$$

olur. (3.15) eşitliğinin her iki tarafını z ile çarpalım

$$z^{2n}.z = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \binom{n}{k} \frac{H_{2k+1}(z)}{2^{2k+1} z}.z$$

$$z^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{2k+1}} H_{2k+1}(z)$$

olur. Bu ispatı tamamlar. [5] den

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z) H_n(z) \exp(-z^2) dz = r^n H_n(x) \tag{3.16}$$

eşitliğini yazabiliriz. Şimdi bu eşitliği ispatlayalım;

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n H_n(x) H_n(z)}{\sqrt{\pi} 2^n n!}$$

ifadesini (3.16) eşitliğinin sol kısmında yerine yazalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z) H_n(z) \exp(-z^2) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n H_n(x) H_n(z)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(z) \exp(-z^2) dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n H_n(x)}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} (H_n(z))^2 \exp(-z^2) dz$$

$\int_{-\infty}^{\infty} (H_n(z))^2 \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi} 2^n n!$ dir [8]. Bu durumda;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^nH_n(x)}{\sqrt{\pi}2^nn!}\int_{-\infty}^{\infty}\left(H_n(z)\right)^2\exp(-z^2)\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^nH_n(x)}{\sqrt{\pi}2^nn!}\sqrt{\pi}2^nn!$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}r^nH_n(x)$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanır. (3.16) eşitliğinde $n=0$ alırsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(r,x,z)\exp(-z^2)dz=1 \tag{3.17}$$

olur. Bu ise Lemma 3.1.2 nin ispatında kullanılacaktır.

Lemma 3.1.2

Her bir $x\in\mathbb{R}$ için

$$B(1;r,x)=1\,, \tag{3.18}$$

$$B(z;r,x)=rx\,, \tag{3.19}$$

$$B(z^2;r,x)=r^2x^2+\frac{1}{2}(1-r^2)\,, \tag{3.20}$$

$$B(z^3;r,x)=-\frac{3}{2}r^3x+r^3x^3+\frac{3}{2}rx\,, \tag{3.21}$$

$$B(z^4;r,x)=r^4x^4-3r^4x^2+\frac{3}{4}r^4+3x^2r^2-\frac{3}{2}r^2+\frac{3}{4} \tag{3.22}$$

dir.

İspat

(3.16) eşitliğinde $n=0$ alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty}P(r,x,z)H_0(z)\mathrm{e}^{-z^2}\,dz=H_0(x)$$

elde edilir. Burada $H_0(z)=H_0(x)=1$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\mathrm{e}^{-z^2}\,dz = 1 \tag{3.23}$$

olur. Bu da $B(1;r,x) = 1$ olduğunu ispatlar.

(3.16) eşitliğinde $n = 1$ alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,H_1(z)e^{-z^2}dz = r\,H_1(x)$$

elde edilir.

$H_1(z) = 2z$ veya $H_1(x) = 2x$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,2z\,e^{-z^2}dz = 2rx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,z\,e^{-z^2}dz = rx$$

olur. Bu da $B(z;r,x) = rx$ olduğunu ispatlar.

(3.16) eşitliğinde $n = 2$ alalım. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,H_2(z)e^{-z^2}dz = r^2H_2(x)$$

elde edilir.

$H_2(z) = 4z^2 - 2$ veya $H_2(x) = 4x^2 - 2$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,(4z^2-2)e^{-z^2}dz = r^2(4x^2-2)$$

$$4\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,z^2e^{-z^2}dz - 2\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,e^{-z^2}dz = 4x^2r^2 - 2r^2$$

dir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, z^2 e^{-z^2} dz = B(z^2;r,x) \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, e^{-z^2} dz = B(1;r,x) = 1$$

olduğundan

$$4B(z^2;r,x) - 2 = 4x^2r^2 - 2r^2$$

$$B(z^2;r,x) = x^2r^2 + \frac{1}{2}(1 - r^2)$$

olur. (3.16) eşitliğinde $n = 3$ alalım

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, H_3(z) e^{-z^2} dz = r^3 H_3(x)$$

elde edilir. $H_3(z) = 8z^3 - 12z$ veya $H_3(x) = 8x^3 - 12x$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, (8z^3 - 12z) e^{-z^2} dz = r^3(8x^3 - 12x)$$

$$8 \int_{-\infty}^{-\infty} P(r,x,z)\, z^3 e^{-z^2} dz - 12 \int_{-\infty} P(r,x,z)\, z\, e^{-z^2} dz = 8r^3x^3 - 12r^3x$$

olur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, z^3 e^{-z^2} dz = B(z^3;r,x) \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z) z\, e^{-z^2} dz = B(z;r,x) = rx$$

olduğundan

$$8\, B(z^3;r,x) - 12rx = 8r^3x^3 - 12r^3x$$

$$B(z^3;r,x) = \frac{8r^3x^3 - 12r^3x + 12rx}{8}$$

$$B(z^3;r,x) = -\frac{3}{2}r^3x + r^3x^3 + \frac{3}{2}rx$$

olur.

(3.16) eşitliğinde $n = 4$ alalım

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, H_4(z) e^{-z^2} dz = r^4 H_4(x)$$

elde edilir.

$H_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$ veya $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\,(16z^4 - 48z^2 + 12) e^{-z^2} dz = r^4(16x^4 - 48x^2 + 12)$$

$$16 \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, z^4 e^{-z^2} dz - 48 \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, z^2 e^{-z^2} dz + 12 \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)\, e^{-z^2} dz$$
$$= 16r^4x^4 - 48r^4x^2 + 12r^4$$

dir.

$$16B(z^4; r, x) - 48B(z^2; r, x) + 12B(1; r, x) = 16r^4x^4 - 48r^4x^2 + 12r^4$$

$B(z^2; r, x) = x^2r^2 + \frac{1}{2}(1 - r^2)$ ve $B(1; r, x) = 1$

olduğundan

$$16B(z^4; r, x) - 48\left(x^2r^2 + \frac{1}{2}(1 - r^2)\right) + 12 = 16r^4x^4 - 48r^4x^2 + 12r^4$$

$$16B(z^4; r, x) - 48x^2r^2 - 24 + 24r^2 + 12 = 16r^4x^4 - 48r^4x^2 + 12r^4$$

$$16B(z^4; r, x) - 48x^2r^2 + 24r^2 - 12 = 16r^4x^4 - 48r^4x^2 + 12r^4$$

$$B(z^4; r, x) = \frac{16r^4x^4 - 48r^4x^2 + 12r^4 + 48x^2r^2 - 24r^2 + 12}{16}$$

$$B(z^4; r, x) = r^4x^4 - 3r^4x^2 + \frac{3}{4}r^4 + 3x^2r^2 - \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{4}$$

olur.

Lemma 3.1.3

Her bir $x \in \mathbb{R}$ için

$$A(z-x;r,x) = (1-r)(1+\alpha-x) \ , \tag{3.24}$$

$$A((z-x)^2;r,x)$$

$$= (1-r)\{x^2(1-r) + 2(\alpha+2)rx - 2(\alpha+1)x + (\alpha+2)(\alpha+1)(1-r)\} \ , \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} A((z-x)^4;r,x) = (1-r)^2\{ & x^4(1-r)^2 + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2 \\ & -4\alpha(1-r)^2x^3 + 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(1-r)x \\ & -4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r(1-r)x \\ & +6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2 - 12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2 \\ & +6(\alpha+2)(\alpha+1)x^2 - 4(4r^2-5r+1)x^3\} \end{aligned} \tag{3.26}$$

dir.

İspat

$A(f)$ operatörü lineer olduğundan $A(z-x;r,x) = A(z;r,x) - xA(1;r,x)$ şeklinde yazılabilir.

$A(z;r,x) = (\alpha+1)(1-r) + rx$ ve $A(1;r,x) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} A(z-x;r,x) &= (\alpha+1)(1-r) + rx - x \\ &= (1-r)(1+\alpha-x) \end{aligned}$$

olur.

Yine $A(f)$ operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned} A((z-x)^2;r,x) &= A(z^2 - 2zx + x^2;r,x) \\ &= A(z^2;r,x) - 2x\,A(z;r,x) + x^2A(1;r,x) \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$A(z^2;r,x) = r^2x^2 + (\alpha+2)(r-1)\big((\alpha+1)(r-1) - 2rx\big),$$

$A(z;r,x) = (\alpha+1)(1-r) + rx$ ve $A(1;r,x) = 1$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
A((z-x)^2;r,x) &= r^2x^2 + (\alpha+2)(r-1)\big((\alpha+1)(r-1) - 2rx\big) \\
&\quad -2x(\alpha+1)(1-r) - 2rx^2 + x^2 \\
&= r^2x^2 + (\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2 - 2(\alpha+2)(r-1)rx \\
&\quad +2(\alpha+1)(r-1)x - 2rx^2 + x^2 \\
&= r^2x^2 - 2rx^2 + x^2 + (\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2 \\
&\quad +2(\alpha+2)(1-r)rx - 2(\alpha+1)(1-r)x \\
&= x^2(r^2 - 2r + 1) + (\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2 \\
&\quad +2(\alpha+2)(1-r)rx - 2(\alpha+1)(1-r)x \\
&= x^2(1-r)^2 + (\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2 \\
&\quad +2(\alpha+2)(1-r)rx - 2(\alpha+1)(1-r)x
\end{aligned}$$

$$= (1-r)\{x^2(1-r) + (\alpha+2)(\alpha+1)(1-r) + 2(\alpha+2)rx - 2(\alpha+1)x\}$$

olur.

Böylece (3.25) ispatlanmış olur.

$$A((z-x)^4;r,x) = A(z^4 - 4z^3x + 6z^2x^2 - 4zx^3 + x^4;r,x)$$

$$= A(z^4;r,x) - 4xA(z^3;r,x) + 6x^2A(z^2;r,x) - 4x^3A(z;r,x) + x^4A(1;r,x)$$

$$= r^4x^4 - 4(\alpha+4)r^4x^3 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^4x^2 - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^4x$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^4 + 4(\alpha+4)r^3x^3 - 12(\alpha+4)(\alpha+3)r^3x^2$$

$$+12(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3$$

$$+6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2 - 12(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x$$

$$+6(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2 + 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)rx$$

$$-4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)$$

$$-4x[r^3x^3 - 3(\alpha+3)r^3x^2 + 3(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x - (\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3$$

$$+3(\alpha+3)r^2x^2 - 6(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x + 3(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2$$

$$+3(\alpha+3)(\alpha+2)rx - 3(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r + (\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)]$$

$$+6x^2\left[r^2x^2 + (\alpha+2)(r-1)\big((\alpha+1)(r-1) - 2rx\big)\right]$$

$$-4x^3[(\alpha+1)(1-r) + rx] + x^4$$

$$= r^4x^4 - 4(\alpha+4)r^4x^3 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^4x^2 - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^4x$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^4 + 4(\alpha+4)r^3x^3 - 12(\alpha+4)(\alpha+3)r^3x^2$$

$$+12(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3$$

$$+6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2 - 12(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x$$

$$+6(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2 + 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)rx$$

$$-4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1) - 4r^3x^4$$

$$+12(\alpha+3)r^3x^3 - 12(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x^2 + 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3x$$

$$-12(\alpha+3)r^2x^3 + 24(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x^2 - 12(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2x$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2 + 12(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)rx$$

$$-4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x + 6r^2x^4 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-12rx^3(\alpha+2)(r-1) - 4x^3(\alpha+1)(1-r) + 4rx^4 + x^4$$

$$= r^4x^4 - 4(\alpha+4)r^4x^3 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^4x^2 - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^4x$$

$$+8(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x + 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x$$

$$-8(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x$$

$$+4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)rx + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^4 + 4(\alpha+4)r^3x^3$$

$$-12(\alpha+4)(\alpha+3)r^3x^2 - 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3$$

$$+6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2$$

$$-4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1) - 4r^3x^4$$

$$+12(\alpha+3)r^3x^3 - 12(\alpha+3)(\alpha+2)r^3x^2 + 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^3x$$

$$-8(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2x - 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2x$$

$$+8(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)rx + 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)rx$$

$$-4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x - 12(\alpha+3)r^2x^3 + 24(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x^2$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2 + 6r^2x^4 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-12rx^3(\alpha+2)(r-1) - 4x^3(\alpha+1)(1-r) + 4rx^4 + x^4$$

$$= r^4x^4 - 4(\alpha+4)r^4x^3 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r^2-2r+1)$$

$$-4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x(r^2-2r+1) +$$

$$(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r^2(r^2-2r+1) - 4r^3x^4 + 4(\alpha+4)r^3x^3$$

$$-2(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)r(r^2-2r+1)$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r^2-2r+1) + 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)rx(r^2$$

$$-2r+1) + 12(\alpha+3)r^3x^3 + 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)rx(r^2-2r+1)$$

$$-12(\alpha+3)r^2x^3 - 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x(r^2-2r+1)$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r^2-2r+1) + 6r^2x^4 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-12rx^3(\alpha+2)(r-1) - 4x^3(\alpha+1)(1-r) + 4rx^4 + x^4$$

$$= x^4(r^4 - 4r^3 + 6r^2 + 4r + 1) + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r-1)^2$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2(r^2-2r+1)$$

$$-4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r^2x(r-1)^2 + 4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)rx(r-1)^2$$

$$+4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)rx(r-1)^2 - 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)x(r-1)^2$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r-1)^2 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2 + 4(\alpha+4)r^3x^3(1-r)$$

$$-12(\alpha+3)r^2x^3(1-r) - 12rx^3(\alpha+2)(r-1) - 4x^3(\alpha+1)(1-r)$$

$$= x^4(r-1)^4 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r-1)^2$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2(r-1)^2$$

$$-4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(r-1)^2rx(r-1)$$

$$+4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2x(r-1) - 12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r-1)^2$$

$$+6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-4x^3(r-1)\big((\alpha+4)r^3 - 3(\alpha+3)r^2 + 3(\alpha+2)r - (\alpha+1)\big)$$

$$= x^4(r-1)^4 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r-1)^2$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2(r-1)^2$$

$$+4(\alpha+3)(\alpha+2)(r-1)^3x\big((\alpha+1) - (\alpha+4)r\big)$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r-1)^2 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-4x^3(r-1)\big((4r^3 - 9r^2 + 6r - 1) + \alpha(r^3 - 3r^2 + 3r - 1)\big)$$

$$= x^4(r-1)^4 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r-1)^2$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2(r-1)^2$$

$$+4(\alpha+3)(\alpha+2)(r-1)^3x\big((\alpha+1) - (\alpha+4)r\big)$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r-1)^2 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-4x^3(r-1)(3r^3 - 6r^2 + 3r + (r-1)^3 + \alpha(r-1)^3)$$

$$= x^4(r-1)^4 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r-1)^2$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2(r-1)^2$$

$$+4(\alpha+3)(\alpha+2)(r-1)^3x\big((\alpha+1)-(\alpha+4)r\big)$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r-1)^2 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-4x^3(r-1)((r-1)^3 + 3r(r^2-2r+1)+\alpha(r-1)^3)$$

$$= x^4(r-1)^4 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r-1)^2$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2(r-1)^2$$

$$+4(\alpha+3)(\alpha+2)(r-1)^3x\big((\alpha+1)-(\alpha+4)r\big)$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r-1)^2 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-4x^3(r-1)((r-1)^3 + 3r(r-1)^2+\alpha(r-1)^3)$$

$$= x^4(r-1)^4 + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2(r-1)^2$$

$$+(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2(r-1)^2$$

$$+4(\alpha+3)(\alpha+2)(r-1)^3x\big((\alpha+1)-(\alpha+4)r\big)$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2(r-1)^2 + 6x^2(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-4x^3(r-1)^2((4r^2-5r+1)+\alpha(r-1)^2)$$

dir. Buradan düzenleme yapılırsa

$$A((z-x)^4;r,x) = (1-r)^2\{x^4(1-r)^2 + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2$$

$$-4\alpha(1-r)^2x^3 + 4(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(1-r)x$$

$$-4(\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)r(1-r)x \quad + 6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2 + 6(\alpha+2)(\alpha+1)x^2 - 4(4r^2-5r+1)x^3\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.4

Her bir $x \in \mathbb{R}$ için

$$B(z-x;r,x) = -x(1-r) \quad , \tag{3.27}$$

$$B((z-x)^2;r,x) = (1-r)\left\{x^2(1-r) + \frac{1}{2}(r+1)\right\} \quad , \tag{3.28}$$

$$B((z-x)^4;r,x) = (1-r)^2\left\{(1-r)^2x^4 - 3(r^2-1)x^2 + \frac{3}{4}(r+1)^2\right\} \tag{3.29}$$

vardır.

İspat

$B(f)$ operatörünün lineerliğinden ve $B(z;r,x) = rx$ ve $B(1;r,x) = 1$ olduğundan

$$B(z-x;r,x) = B(z;r,x) - xB(1;r,x)$$

$$= rx - x = -x(1-r)$$

olur.

$B(z^2;r,x) = x^2r^2 + \frac{1}{2}(1-r^2)$ ve $B(z;r,x) = rx$ ve $B(1;r,x) = 1$ olduğundan

$$B((z-x)^2;r,x) = B(z^2 - 2zx + x^2;r,x)$$

$$= B(z^2;r,x) - 2xB(z;r,x) + x^2B(1;r,x)$$

$$= x^2r^2 + \frac{1}{2}(1-r^2) - 2x.rx + x^2$$

$$= r^2x^2 + \frac{1}{2}(1-r)(1+r) - 2rx^2 + x^2$$

$$= x^2(r^2 - 2r + 1) + \frac{1}{2}(1-r)(1+r)$$

$$= x^2(r-1)^2 + \frac{1}{2}(1-r)(1+r)$$

$$= (1-r)\left\{x^2(1-r) + \frac{1}{2}(1+r)\right\}$$

olur.

$$B(z^4;r,x)=r^4x^4-3r^4x^2+\frac{3}{4}r^4+3x^2r^2-\frac{3}{2}r^2+\frac{3}{4}$$

$$B(z^3;r,x)=-\frac{3}{2}r^3x+r^3x^3+\frac{3}{2}rx$$

$$B(z^2;r,x)=x^2r^2+\tfrac{1}{2}(1-r^2)$$

$B(z;r,x)=rx$ ve $B(1;r,x)=1$

olduğundan

$$B((z-x)^4;r,x)=B(z^4-4z^3x+6z^2x^2-4zx^3+x^4;r,x)$$

$$=B(z^4;r,x)-4xB(z^3;r,x)+6x^2B(z^2;r,x)-4x^3B(z;r,x)+x^4B(1;r,x)$$

$$=r^4x^4-3r^4x^2+\frac{3}{4}r^4+3x^2r^2-\frac{3}{2}r^2+\frac{3}{4}-4x\left(-\frac{3}{2}r^3x+r^3x^3+\frac{3}{2}rx\right)$$

$$+6x^2\left(x^2r^2+\frac{1}{2}(1-r^2)\right)-4x^4r+x^4$$

$$=r^4x^4-3r^4x^2+\frac{3}{4}r^4+3x^2r^2-\frac{3}{2}r^2+\frac{3}{4}+6r^3x^2-4r^3x^4-6rx^2+6x^4r^2$$

$$+3x^2(1-r^2)-4x^4r+x^4$$

$$=x^4(r^4-4r^3+6r^2-4r+1)+x^2\left(-3r^4+3r^2+6r^3-6r+3(1-r^2)\right)$$

$$+\frac{3}{4}(r^4-2r^2+1)$$

$$=x^4(r-1)^4+x^2(-3r^4+3r^2+6r^3-6r+3-3r^2)+\frac{3}{4}(r^2-1)^2$$

$$=x^4(r-1)^4-3x^2(r^4-2r^3+2r-1)+\frac{3}{4}(r^2-1)^2$$

$$=x^4(r-1)^4-3x^2(r^2-1)(r-1)^2+\frac{3}{4}(r^2-1)^2$$

$$=(1-r)^2\left\{(1-r)^2x^4-3(r^2-1)x^2+\frac{3}{4}(r+1)^2\right\}$$

dir.

Lemma 3.1.5

Her sabit $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} A(z-x;r,x) = 1+\alpha-x \ ,$$

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} A((z-x)^2;r,x) = 2x \ ,$$

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{(1-r)^2} A((z-x)^4;r,x) = 12x^2$$

dir.

İspat

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} A(z-x;r,x) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} [(1-r)(1+\alpha-x)] = 1+\alpha-x$$

olur.

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} A((z-x)^2;r,x) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} (1-r)[x^2(1-r) + 2(\alpha+2)rx$$

$$-2(\alpha+1)x + (\alpha+2)(\alpha+1)(1-r)$$

$$= 2(\alpha+2)x - 2(\alpha+1)x = 2x(\alpha+2-\alpha-1) = 2x$$

dir. Ayrıca

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{(1-r)^2} A((z-x)^4;r,x)$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{(1-r)^2} [(1-r)^2\{x^4(r-1)^2 - 4\alpha(r-1)^2x^3 - 4(4r^2-5r+1)$$

$$+6(\alpha+4)(\alpha+3)r^2x^2 - 12(\alpha+3)(\alpha+2)rx^2 + 6(\alpha+2)(\alpha+1)x^2$$

$$-12(\alpha+3)(\alpha+2)(r-1)x + (\alpha+4)(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)(r-1)^2\}]$$

$$= 6(\alpha+4)(\alpha+3)x^2 - 12(\alpha+3)(\alpha+2)x^2 + 6(\alpha+2)(\alpha+1)x^2$$

$$= 6(\alpha+3)x^2\big(\alpha+4-2(\alpha+2)\big) + 6(\alpha+2)(\alpha+1)x^2$$

$$= -6(\alpha+3)x^2\alpha + 6(\alpha+2)(\alpha+1)x^2 = 6x^2\big(-(\alpha+3)\alpha + (\alpha+2)(\alpha+1)\big)$$

$$= 6x^2(-\alpha^2 - 3\alpha + \alpha^2 + 3\alpha + 2) = 6x^2.2 = 12x^2$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.6

Her sabit $x \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{1-r} B(z-x; r, x) = -x \ ,$$

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{1-r} B((z-x)^2; r, x) = 1 \ ,$$

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{(1-r)^2} B((z-x)^4; r, x) = 3$$

İspat

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{1-r} B(z-x; r, x) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{1-r} (-x(1-r)) = -x \ ,$$

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{1-r} B((z-x)^2; r, x) = \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{1-r} (1-r) \left(x^2(1-r) + \frac{1}{2}(r+1) \right) = \frac{1}{2}.2 = 1 \ ,$$

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1}{(1-r)^2} B((z-x)^4; r, x)$$

$$= \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{(1-r)^2} (1-r)^2 \left\{ (r-1)^2 x^4 - 3(r^2-1)x^2 + \frac{3}{4}(r+1)^2 \right\} = 3 \ .$$

3.2 Yakınsama Hızı

Bu bölümde, $A(f)$ ve $B(f)$ operatörlerinin yakınsama oranına ilişkin bazı tahminleri açıklayacağız. Burada $Q = \mathbb{R}_+$ veya $Q = \mathbb{R}$ olan ve

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{0 \le t \le \delta \\ x \in Q}} |f(x+t) - f(x)| \tag{3.30}$$

ile tanımlanan klasik süreklilik modülünü kullanacağız. Ayrıca [2,3] numaralı referanslarda kullanılan yöntemleri uygulayacağız.

Teorem 3.2.1

$0 < r < 1$ ve $x \geq 0$ için

$f \in C(\mathbb{R}_+) \cap L^p(z^\alpha e^{-z})$

$$|A(f;r,x) - f(x)| \leq 3\omega\left(f, \sqrt{(1-r)\big((x^2+\alpha^2+3\alpha+2)(1-r)+2x((\alpha+2)r-\alpha-1)\big)}\right)$$

dir.

İspat

Önce f nin $[0,+\infty)$ aralığında sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım.

$$f(z) = f(x) + \int_x^z f'(\tau)d\tau$$

şeklinde yazabiliriz. Lineerlik ve $A(f;r,x)$ tanımını kullanırsak

$$\begin{aligned}|A(f;r,x) - f(x)| &= |A(f(z);r,x) - f(x)| = |A(f(z);r,x) - A(f(x);r,x)| \\ &= |A(f(z)-f(x);r,x)| \\ &= \left|\int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}(f(z)-f(x))dz\right|\end{aligned}$$

olur. Mutlak değer özelliğinden ve Ortalama Değer Teoreminden

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}(f(z)-f(x))dz\right| &\leq \int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}\,|f(z)-f(x)|dz \\ &\leq \int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}\left[\sup_{x\in[0,+\infty)}|f'(z)||z-x|\right]dz \\ &\leq \sup_{x\in[0,+\infty)}|f'(z)|\int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}|z-x|\,dz\end{aligned}$$

dir.

Hölder eşitsizliği ve (3.10) eşitliği kullanılırsa

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f'(z)| \int_0^\infty K(r,x,z) z^\alpha e^{-z} |z-x|\, dz$$

$$\leq \sup_{x\in[0,+\infty)} |f'(z)| \sqrt{\int_0^\infty K(r,x,z) z^\alpha e^{-z}\, dz} \sqrt{\int_0^\infty K(r,x,z) z^\alpha e^{-z} |z-x|^2\, dz}$$

olur.

$$\int_0^\infty K(r,x,z) z^\alpha e^{-z}\, dz = A(1;r,x) = 1$$

ve

$$\int_0^\infty K(r,x,z) z^\alpha e^{-z} |z-x|^2\, dz = A((z-x)^2;r,x)$$

olduğundan

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f'(z)| \sqrt{\int_0^\infty K(r,x,z) z^\alpha e^{-z}\, dz} \sqrt{\int_0^\infty K(r,x,z) z^\alpha e^{-z} |z-x|^2\, dz}$$

$$= \sup_{x\in[0,+\infty)} |f'(z)| \big(A(1;r,x)\big)^{1/2} \big(A((z-x)^2;r,x)\big)^{1/2}$$

olur. Lemma 3.1.3 den

$$A((z-x)^2;r,x) = (1-r)\Big((x^2+\alpha^2+3\alpha+2)(1-r) + 2x\big((\alpha+2)r-\alpha-1\big)\Big)$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f'(z)| \big(A(1;r,x)\big)^{1/2} \big(A((z-x)^2;r,x)\big)^{1/2}$$

$$= \sup_{x\in[0,+\infty)} |f'(z)| \sqrt{(1-r)\Big((x^2+\alpha^2+3\alpha+2)(1-r) + 2x\big((\alpha+2)r-\alpha-1\big)\Big)}$$

elde edilir.

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta f(x+\tau)d\tau$$ olmak üzere

$$f(x) - f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \big(f(x) - f(x+\tau)\big)d\tau$$

dur. Mutlak değer özelliğinden

$$|f(x) - f_\delta(x)| = \frac{1}{\delta}\left|\int_0^\delta \big(f(x) - f(x+\tau)\big)d\tau\right| \le \frac{1}{\delta}\int_0^\delta |f(x) - f(x+\tau)|d\tau$$

olur.

$$sup|f(x) - f_\delta(x)| \le sup\frac{1}{\delta}\int_0^\delta |f(x) - f(x+\tau)|d\tau \ = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta sup|f(x) - f(x+\tau)|d\tau$$

dur. (3.30) dan

$$sup|f(x) - f(x+\tau)| = \omega(f;\delta)$$

dır.

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta sup|f(x) - f(x+\tau)|d\tau = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \omega(f;\delta)d\tau$$

$$= \frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\int_0^\delta d\tau$$

$$= \frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\delta$$

$$= \omega(f;\delta)$$

olur. Buradan

$$sup|f(x) - f_\delta(x)| \le \omega(f;\delta)$$

olduğu görülür.

Bu da bize

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leq \omega(f;\delta) \tag{3.31}$$

eşitsizliğinin varlığını gösterir.

$$|A(f;r,x) - f(x)| = \left|\int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}[f(z) - f_\delta(z)]\,dz\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}[f_\delta(z) - f_\delta(x)]\,dz + \int_0^\infty K(r,x,z)z^\alpha e^{-z}[f_\delta(x) - f(x)]\,dz\right|$$

$$= |A([f - f_\delta];r,x) + A(f_\delta;r,x) - f_\delta(x) + f_\delta(x) - f(x)|$$

$$\leq |A([f - f_\delta];r,x)| + |A(f_\delta;r,x) - f_\delta(x)| + |A(f_\delta(x) - f(x);r,x)|$$

$$= |A([f - f_\delta];r,x)| + |A(f_\delta;r,x) - f_\delta(x)| + |f_\delta(x) - f(x)|A(1;r,x)$$

$$= |A([f - f_\delta];r,x)| + |A(f_\delta;r,x) - f_\delta(x)| + |f_\delta(x) - f(x)|$$

olur.

$$|A(f;r,x) - f(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in[0,+\infty)} |f'(z)| \sqrt{(1-r)\Big((x^2+\alpha^2+3\alpha+2)(1-r) + 2x\big((\alpha+2)r - \alpha - 1\big)\Big)}$$

eşitsizliğinde f yerine f_δ alırsak

$$|A(f_\delta;r,x) - f_\delta(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in[0,+\infty)} |f_\delta{}'(z)| \sqrt{(1-r)\Big((x^2+\alpha^2+3\alpha+2)(1-r) + 2x\big((\alpha+2)r - \alpha - 1\big)\Big)}$$

elde edilir.

$$f_\delta{}'(x) = \frac{1}{\delta}[f(x+\delta) - f(x)]$$

eşitliğini kullanırsak

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_\delta{}'(z)| \leq \frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)$$

olur.

$$\sqrt{(1-r)\Big((x^2+\alpha^2+3\alpha+2)(1-r)+2x\big((\alpha+2)r-\alpha-1\big)\Big)}=\delta$$

dersek

$$|A(f_\delta;r,x)-f_\delta(x)|\le\frac{1}{\delta}\omega(f;\delta)\delta=\omega(f;\delta) \tag{3.32}$$

dır.

$$|A([f-f_\delta];r,x)|\le A(|f-f_\delta|;r,x)$$

$$\begin{aligned}A(|f-f_\delta|;r,x)&=\int_0^\infty K(r,x,z)|(f-f_\delta)(z)|\,z^\alpha e^{-z}\,dz\\&=\int_0^\infty K(r,x,z)|f(z)-f_\delta(z)|\,z^\alpha e^{-z}\,dz\\&\le\int_0^\infty K(r,x,z)sup|f(z)-f_\delta(z)|\,z^\alpha e^{-z}\,dz\\&\le sup|f(z)-f_\delta(z)|\int_0^\infty K(r,x,z)\,z^\alpha e^{-z}\,dz\le\omega(f;\delta)\end{aligned}$$

olduğu için

$$|A([f-f_\delta];r,x)|\le\omega(f;\delta) \tag{3.33}$$

olur.

$$|A(f;r,x)-f(x)|\le|A([f-f_\delta];r,x)|+|A(f_\delta;r,x)-f_\delta(x)|+|f_\delta(x)-f(x)|$$

şeklinde yazabiliriz.

$$|A([f-f_\delta];r,x)|\le\omega(f;\delta),\ \ |A(f_\delta;r,x)-f_\delta(x)|\le\omega(f;\delta)$$

ve

$$|f_\delta(x)-f(x)|\le\omega(f;\delta)$$

olduğundan

$|A(f;r,x)-f(x)| \leq 3\omega(f;\delta)$

$$= 3\omega\left(f; \sqrt{(1-r)\left((x^2+\alpha^2+3\alpha+2)(1-r)+2x\big((\alpha+2)r-\alpha-1\big)\right)}\right)$$

dir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur. Benzer şekilde $B(f)$ operatörü için aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.2.2

$0<r<1$ ve $x\in\mathbb{R}$ için $f\in C(\mathbb{R})\cap L^p(\exp(-z^2)$ olmak üzere

$$|B(f;r,x)-f(x)| \leq 3\omega\left(f, \sqrt{(1-r)\left(\frac{1}{2}(r+1)+x^2(1-r)\right)}\right)$$

dir.

İspat

$|B(f;r,x)-f(x)| = |B(f;r,x)-f(x).B(1;r,x)|$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)f(z)e^{-z^2}dz - f(x)\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}dz\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)f(z)e^{-z^2}dz - \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)f(x)e^{-z^2}dz\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)[f(z)-f(x)]e^{-z^2}dz\right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)|f(z)-f(x)|e^{-z^2}dz$$

dir.

Ortalama Değer Teoremi gereğince

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)|f(z)-f(x)|e^{-z^2}dz \leq \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}\sup_{x\in(-\infty,\infty)}|f'(z)||z-x|\,dz$$

$$= \sup_{x\in(-\infty,\infty)}|f'(z)|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}|z-x|dz$$

olur. Hölder eşitsizliğinden

$$\sup_{x\in(-\infty,\infty)} |f'(z)| \int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}|z-x|dz$$

$$\leq \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |f'(z)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}(z-x)^2dz\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}dz\right)^{1/2}$$

$$= \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |f'(z)| \left(B((z-x)^2;r,x)\right)^{1/2}\left(B(1;r,x)\right)^{1/2}$$

$$= \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |f'(z)| \sqrt{(1-r)\left\{x^2(1-r)+\frac{1}{2}(r+1)\right\}}$$

dir. Buradan

$$|B(f;r,x)-f(x)| \leq sup|f'(z)| \sqrt{(1-r)\left\{x^2(1-r)+\frac{1}{2}(r+1)\right\}} \qquad (3.34)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$|B(f;r,x)-f(x)| = |B(f;r,x)-f(x)B(1;r,x)| = |B(f;r,x)-f(x)|$$

$$= |B([f(z)-f(x)];r,x)|$$

şeklinde yazılabilir.

$$|B([f(z)-f(x)];r,x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}[f(z)-f(x)]dz\right|$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}[f(z)-f_\delta(z)+f_\delta(z)-f_\delta(x)+f_\delta(x)-f(x)]dz\right|$$

$$\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}[f(z)-f_\delta(z)]dz\right| + \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}[f_\delta(z)-f_\delta(x)]dz\right|$$

$$+ \left|\int_{-\infty}^{\infty} P(r,x,z)e^{-z^2}[f_\delta(x)-f(x)]dz\right|$$

$$= |B(f - f_\delta; r, x)| + |B(f_\delta; r, x) - f_\delta(x)| + |B(f_\delta(x) - f(x); r, x)|$$

$$= |B(f - f_\delta; r, x)| + |B(f_\delta; r, x) - f_\delta(x)| + |f_\delta(x) - f(x)|B(1; r, x)$$

$$= |B(f - f_\delta; r, x)| + |B(f_\delta; r, x) - f_\delta(x)| + |f_\delta(x) - f(x)|$$

olur.

(3.34) eşitsizliğinde f yerine f_δ alırsak

$$|B(f_\delta; r, x) - f_\delta(x)| \leq sup|f_\delta{}'(z)| \sqrt{(1-r)\left\{x^2(1-r) + \frac{1}{2}(r+1)\right\}}$$

$$= \delta^{-1}\omega(f; \delta)\delta$$

$$= \omega(f; \delta)$$

dir. Böylece

$$|B(f_\delta; r, x) - f_\delta(x)| \leq \omega(f; \delta) \qquad (3.35)$$

olur.

$$\left|B\left((f - f_\delta); r, x\right)\right| \leq B(|f - f_\delta|; r, x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(r, x, z)|f(z) - f_\delta(z)|e^{-z^2}dz$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} P(r, x, z)sup|f(z) - f_\delta(z)|e^{-z^2}dz$$

$$\leq sup|f(z) - f_\delta(z)| \int_{-\infty}^{\infty} P(r, x, z)e^{-z^2}dz$$

dir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(r, x, z)e^{-z^2}dz = B(1; r, x) = 1$$

olduğundan

$$sup|f(z) - f_\delta(z)| \int_{-\infty}^{\infty} P(r, x, z)e^{-z^2}dz = sup|f(z) - f_\delta(z)| \leq \omega(f; \delta)$$

olur. Yani;

$$\left|B\left((f - f_\delta); r, x\right)\right| \leq \omega(f; \delta) \qquad (3.36)$$

dır. (3.31) den

$$|B(f; r, x) - f(x)| \leq \left|B\left((f - f_\delta); r, x\right)\right| + |B(f_\delta; r, x) - f_\delta(x)| + |f_\delta(x) - f(x)|$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$\left|B\big((f-f_\delta);r,x\big)\right| \leq \omega(f;\delta)$

$|B(f_\delta;r,x)-f_\delta(x)| \leq \omega(f;\delta)$

$|f_\delta(x)-f(x)| \leq \omega(f;\delta)$

olduğundan

$$|B(f;r,x)-f(x)| \leq 3\omega(f;\delta)$$

olur. Burada

$$\delta = \sqrt{(1-r)\left(x^2(1-r)+\frac{1}{2}(r+1)\right)}$$

dir.

3.3 Voronovskaya Tipli Teoremler

Teorem 3.3.1

$x \in [0,+\infty)$ olsun $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}_+) \cap L^p(z^\alpha e^{-z})$, f, x noktasının belirli bir komşuluğunda C^1 sınıfındaysa ve $f''(x)$ varsa,

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r}[A(f;r,x)-f(x)] = (1+\alpha-x)f'(x)+xf''(x) \tag{3.37}$$

olur.

İspat

$$\psi(z,x) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(x)-(z-x)f'(x)-\frac{1}{2}f''(x)(z-x)^2}{(z-x)^2} & ; z \neq x \\ 0 & ; z = x \end{cases} \tag{3.38}$$

olsun. Bu durumda

$$\lim_{z\to x} \psi(z,x) = 0$$

olur. Sadece z nin fonksiyonu olarak ψ fonksiyonu $[0,+\infty)$ aralığında süreklidir.

(3.1), (3.38) eşitliklerinden ve Lemma 3.1.1 den

$A(f(z);r,x)-f(x)$

$$=f'(x)A(z-x;r,x)+\frac{1}{2}f''(x)A((z-x)^2;r,x)+A(\psi(z,x)(z-x)^2;r,x) \qquad (3.39)$$

eşitliğini elde ederiz.

Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$|A(\psi(z,x)(z-x)^2;r,x)| \le \left(A(\psi^2(z,x);r,x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(A((z-x)^4;r,x)\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.40)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Ayrıca, öyle bir $\varphi(z,x)$ fonksiyonu vardır ki, bazı $s \ge 1$ için

$\varphi(z,x) := \psi^2(z,x)$, $\quad z \ge 0$

$\lim_{z\to x} \varphi(z,x) = 0$, $\quad \varphi \in L^s(z^\alpha e^{-z})$

dir.

Buradan ve Teorem 3.2.1 den

$$\lim_{r\to 1^-} A(\psi^2(z,x);r,x) = \lim_{r\to 1^-} A(\varphi(z,x);r,x) = \varphi(x,x) = 0 \qquad (3.41)$$

yazabiliriz.

(3.41), Lemma 3.1.5 ve (3.40) ın kullanılmasıyla

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} A(\psi(z,x)(z-x)^2;r,x) = 0 \qquad (3.42)$$

elde ederiz.

Şimdi (3.39), (3.42) ve Lemma 3.1.5 i kullanırsak;

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r}[A(f;r,x)-f(x)]$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r}\left[A(\psi(z,x)(z-x)^2;r,x) + f'(x)A\big((z-x);r,x\big) + \frac{1}{2}f''(x)A((z-x)^2;r,x)\right]$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} A(\psi(z,x)(z-x)^2; r, x) + \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} f'(x) A\big((z-x); r, x\big)$$
$$+ \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} \frac{1}{2} f''(x) A((z-x)^2; r, x)$$

$$= 0 + f'(x)(1+\alpha - x) + \frac{1}{2} f''(x)\, 2x$$

$$= (1+\alpha - x) f'(x) + x\, f''(x)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde, Teorem 3.2.2 yi kullanarak aşağıdaki Voronovskaya teoremini $B(f)$ operatörü için kanıtlayabiliriz.

Teorem 3.3.2

$x \in \mathbb{R}$ olsun $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}) \cap L^p(\exp(-z^2))$, f, x noktasının belirli bir komşuluğunda C^1 sınıfındaysa ve $f''(x)$ mevcutsa,

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} [B(f; r, x) - f(x)] = -x f'(x) + \frac{1}{2} f''(x) \tag{3.43}$$

olur.

İspat

Teorem 3.3.1 in ispatı ile benzer şekilde;

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} [B(f; r, x) - f(x)]$$
$$= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} \Big[B(\psi(z,x)(z-x)^2; r, x) + f'(x) B\big((z-x); r, x\big)$$
$$+ \frac{1}{2} f''(x) B((z-x)^2; r, x) \Big]$$

$$= \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} B(\psi(z,x)(z-x)^2; r, x) + \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} f'(x) B\big((z-x); r, x\big)$$
$$+ \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{1-r} \frac{1}{2} f''(x) B((z-x)^2; r, x)$$

$$= f'(x)(-x) + \frac{1}{2} f''(x)$$

olur. Böylece (3.43) eşitliği ispatlanmış olur.

3.4 Sınır Değer Problemleri

Bu bölümde $A(f)$ ve $B(f)$ operatörleri ile ilgili sınır değer problemlerini göreceğiz.

Teorem 3.4.1

$f \in L^p(z^\alpha \exp(-z))$ olsun. $A(f)$, $D = \{(r,x): 0 < r < 1, x \geq 0\}$ kümesindeki C^∞ sınıfındadır ve $A(f)$, D de ısı difüzyon denklemi

$$r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} + (1+\alpha - x)\frac{\partial u(r,x)}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u(r,x)}{\partial x^2} = 0 \tag{3.44}$$

ın bir çözümüdür.

İspat

$0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$ ve $0 \leq C_1 < C_2$

$$D(\rho_1, \rho_2, C_1, C_2) = \{(r,x): \rho_1 < r < \rho_2, C_1 < x < C_2\}$$

olsun. $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-v} I_v(z)\right) = z^{-v} I_{v+1}(z)$$

eşitliğini ve tümevarım yöntemini uygularsak

$$\int_0^\infty \frac{\partial^{n+m}}{\partial r^n \partial x^m} K(r,x,z) f(z) z^\alpha e^{-z} dz \tag{3.45}$$

integral, $\tau \geq \alpha$, $\beta \geq 0$, $\gamma, \mu, v \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki formun bir lineer kombinasyonu olur:

$$\int_0^\infty z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) f(z) z^\alpha e^{-z} dz\,.$$

Tümevarım yöntemiyle $k \in \mathbb{N}$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$ için

$$2^{2k} k!\, \Gamma(\nu + k + 1) \geq \Gamma(\nu + 1)(2k)! \tag{3.46}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği kullanırsak $\nu \geq -\frac{1}{2}$ ve $z \geq 0$ için

$$|I_\nu(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} e^{z} \tag{3.47}$$

olur. Bunu görelim;

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{v+2n}}{2^{v+2n} n!\,\Gamma(v+n+1)}$$

$$|I_\nu(z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{v+2n}}{2^{v+2n} n!\,\Gamma(v+n+1)}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{v} z^{2n}}{2^{v} 2^{2n} n!\,\Gamma(v+n+1)}\right|$$

dir.

(3.46) eşitsizliğinde k yerine n yazarsak

$$2^{2n} n!\,\Gamma(v+n+1) \geq \Gamma(v+1)(2n)!$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{2^{2n} n!\,\Gamma(v+n+1)} \leq \frac{1}{\Gamma(v+1)(2n)!}$$

olduğu kolayca görülür. Bu eşitsizliği $|I_\nu(z)|$ de kullanalım. Böylece

$$|I_\nu(z)| \leq \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{v} z^{2n}}{2^{v}\Gamma(v+1)(2n)!}\right|$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^{v} \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right|$$

olur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!} = e^{z}$$

olduğundan,

$$|I_\nu(z)| \leq \left(\frac{z}{2}\right)^{v} \frac{1}{\Gamma(v+1)} e^{z}$$

olur.

her bir $\tau \geq \alpha > -1$, $z \geq 0$ için [4] de verilen

$$I_\tau (z) = \frac{2(\tau+1)}{z} I_{\tau+1} (z) + I_{\tau+2} (z) \tag{3.48}$$

eşitliğini kullanarak K_1 pozitif sabit olduğunda

$$|I_\tau (z)| \leq K_1 \left(\frac{z}{2}\right)^\tau e^{2z} \tag{3.49}$$

eşitsizliği yazabiliriz.

Bunun için;

$$|I_v (z)| \leq \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^v e^z$$

eşitsizliğini ele alalım. Böylece;

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n!}$$

$$e^z \leq e^{2z}$$

dir.

v yerine τ alalım. Bu durumda;

$$|I_\tau (z)| \leq \frac{1}{\Gamma(\tau+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\tau e^{2z} \tag{3.50}$$

olur. $\dfrac{1}{\Gamma(\tau+1)}$ sabit olduğu için K_1 diyelim

$$|I_\tau (z)| \leq K_1 \left(\frac{z}{2}\right)^\tau e^{2z}$$

olur. (3.49) eşitsizliğini kullanarak $a = \frac{r}{1-r}$, $b = \frac{4\sqrt{rx}}{1-r}$,

$K_2 = |r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma| e^{\left(-\frac{rx}{1-r}\right)} 2^{-\tau} K_1$ özel pozitif sabitler olduğunda

$(r,x) \in D(\rho_1, \rho_2, C_1, C_2)$ için

$$\left| \int_0^\infty z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) f(z) z^\alpha e^{-z} dz \right|$$

$$\leq K_2 \int_0^\infty \exp\left(-az + b\sqrt{z}\right) z^\beta |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz \qquad (3.51)$$

eşitsizliği elde ederiz.

Şimdi buradan

$$\left| \int_0^\infty z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) f(z) z^\alpha e^{-z} dz \right|$$

$$\leq \int_0^\infty \left| z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} \right| \left| I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) \right| |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

$\left| I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) \right| \leq K_1 \left(\frac{\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^\tau exp\left(\frac{4\sqrt{rxz}}{1-r}\right)$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_0^\infty \left| z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} \right| \left| I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) \right| |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

$$\leq \int_0^\infty \left| z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma \exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} \right| K_1 \left(\frac{\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^\tau \exp\left(\frac{4\sqrt{rxz}}{1-r}\right) |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

$$= \int_0^\infty z^\beta |r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma| e^{-\frac{rx}{1-r}} e^{-\frac{rz}{1-r}} \left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} K_1 \left(\frac{\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^\tau e^{\frac{4\sqrt{rx}\sqrt{z}}{1-r}} |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

$$= |r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma|\, e^{-\frac{rx}{1-r}} 2^{-\tau} K_1 \int_0^\infty z^\beta e^{-\frac{rz}{1-r}} \left(\frac{\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} \left(\frac{\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^\tau e^{\frac{4\sqrt{rx}\sqrt{z}}{1-r}} |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

dir. Burada $\frac{r}{1-r} = a$ ve $\frac{4\sqrt{rx}}{1-r} = b$ diyelim

$$|r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma|\, e^{-\frac{rx}{1-r}} 2^{-\tau} K_1 \int_0^\infty z^\beta e^{-\frac{rz}{1-r}} \left(\frac{\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} \left(\frac{\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^\tau e^{\frac{4\sqrt{rx}\sqrt{z}}{1-r}} |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

$$= K_2 \int_0^\infty \exp(-az + b\sqrt{z}) z^\beta |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

olur. Yani

$$\left| \int_0^\infty z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\gamma exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) f(z) z^\alpha e^{-z} dz \right|$$

$$\leq K_2 \int_0^\infty \exp(-az + b\sqrt{z}) z^\beta |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz$$

ispatlanmış oldu.

Eşitsizliğin sağ tarafındaki integralde Hölder eşitsizliğini kullanırsak;

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{olduğunda}$$

$$\int_0^\infty z^\beta \exp(-az + b\sqrt{z}) |f(z)| z^\alpha e^{-z} dz \leq \left(\int_0^\infty z^{q\beta+\alpha} \exp(-aqz + bq\sqrt{z} - z) dz \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p$$

elde edilir. Bunu da (3.51) eşitsizliğinde yerine yazarsak;

$(r, x) \in D(\rho_1, \rho_2, C_1, C_2)$ için

$$\left| \int_0^\infty z^\beta r^\gamma x^\mu (1-r)^\nu exp\left(-\frac{r(x+z)}{1-r}\right)\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right)^{-\tau} I_\tau\left(\frac{2\sqrt{rxz}}{1-r}\right) f(z) z^\alpha e^{-z} dz \right|$$

$$\leq K_2 \left(\int_0^\infty z^{q\beta+\alpha} \exp\left(-aqz + bq\sqrt{z} - z\right) dz \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \qquad (3.52)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\int_0^\infty z^{q\beta+\alpha} \exp\left(-aqz + bq\sqrt{z} - z\right) dz$$

integralini incelersek yakınsak olduğunu görürüz.

Bundan dolayı (3.45) ile gösterdiğimiz integral $D(\rho_1, \rho_2, C_1, C_2)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Bundan dolayı

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial r^n \partial x^m}\int_0^\infty K(r,x,z)f(z)\, z^\alpha e^{-z}\, dz = \int_0^\infty \frac{\partial^{n+m}}{\partial r^n \partial x^m} K(r,x,z)f(z)\, z^\alpha e^{-z}\, dz$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak $A(f)$ fonksiyonu D deki C^∞ sınıfındadır. D deki her $z \in (0,+\infty)$ için

$$r\frac{\partial K(r,x,z)}{\partial r} + (1+\alpha-x)\frac{\partial K(r,x,z)}{\partial x} + x\frac{\partial^2 K(r,x,z)}{\partial x^2} = 0$$

eşitliğini kolaylıkla doğrulayabiliriz. Bu da Teorem 3.4.1 in ispatını tamamlar.

Sonuç 3.4.1

$f \in L^p(z^\alpha \exp(-z))$ ise $A(f)$;

$$r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} + (1+\alpha-x)\frac{\partial u(r,x)}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u(r,x)}{\partial x^2} = 0 \qquad D \text{ de,}$$

$$\lim_{r\to 1^-} u(r,x) = f(x) \qquad [0,+\infty) \text{ aralığında hemen hemen her yerde}$$

sınır değer probleminin çözümüdür [1].

Sonuç 3.4.2

$f \in C(\mathbb{R}_+) \cap L^p(z^\alpha \exp(-z))$ ise $A(f)$;

$$r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} + (1+\alpha-x)\frac{\partial u(r,x)}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u(r,x)}{\partial x^2} = 0 \quad D \text{ de,}$$

$$\lim_{r\to 1^-} u(r,x) = f(x), \qquad x \in [0,+\infty)$$

sınır değer probleminin çözümüdür [1].

$B(f)$ için de benzer sonuçları aşağıdaki gibi elde ederiz.

Teorem 3.4.2

$f \in L^p(\exp(-z^2))$ ise $B(f), D = \{(r,x): 0 < r < 1, x \in \mathbb{R}\}$ kümesindeki C^∞ sınıfındadır ve $B(f)$;

$$2r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} - 2x\frac{\partial u(r,x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(r,x)}{\partial x^2} = 0 \quad D \text{ de}$$

eşitliğinin çözümüdür [1].

Sonuç 3.4.3

$f \in L^p(\exp(-z^2))$ ise $B(f)$;

$$2r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} - 2x\frac{\partial u(r,x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(r,x)}{\partial x^2} = 0 \quad D \text{ de,}$$

$$\lim_{r\to 1^-} u(r,x) = f(x) \quad \text{hemen hemen her yerde}$$

sınır değer probleminin çözümüdür [1].

Sonuç 3.4.4

$f \in C(\mathbb{R}) \cap L^p(\exp(-z^2))$ ise $B(f)$;

$$2r\frac{\partial u(r,x)}{\partial r} - 2x\frac{\partial u(r,x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(r,x)}{\partial x^2} = 0 \quad D \text{ de,}$$

$$\lim_{r\to 1^-} u(r,x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

sınır değer probleminin çözümüdür [1].

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin başlangıcında bize yardımcı olacak temel kavram ve teoremleri ele alındı. Daha sonra bu temel kavram ve teoremleri kullanarak Laguerre ve Hermite polinom genişlemelerinin Poisson integralleri olan $A(f)$ ve $B(f)$ operatörleri için bazı özellikler gösterildi. Bu özellikler makalenin ilerleyen kısımlarındaki teoremlerin ispatlarında kullanıldı. Daha sonra $A(f)$ ve $B(f)$ operatörleri için ayrı ayrı yakınsama hızını ve Voronovskaya teoremini gösterildi. Son olarak da bu operatörler için bazı sonuçlar elde edildi.

KAYNAKLAR

[1] G. Toczek and E. Wachnicki, On the rate of Convergence and the Voronovskaya Theorem for the Poisson Integrals for Hermite and Laguerre Expansions, Journal of Approximation Theory 116, 113-125 (2002).

[2] A. Attolienti, Generalized Bernstein-Durrmeyer operators and the associated limit-group, J. Approx. Theory 99, 289-309 (1999).

[3] M. Lesniewicz and L.Rempulsko, Approximation by some operators of the Szosz-Mirakjan type in exponential weight spaces, Glas. Math. 32, 57-69 (1997).

[4] W. Magnus and F.Oberhettinger, “Formelen und Sötze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik”, Springer-Vertog, Berlin (1948).

[5] B. Muckenhoupt, Poisson integrals for Hermite and Laguerre expansions, Trans. Amer. Math. Soc. 139, 231-242 (1969).

[6] M. Rassias and M. Srivastava, Some Recent Advances in the Theory of the Zeros and Critical Points of a Polynomial, Topics in Polynomials of One and Several Variables and Their Applications, 463-481 (1993).

[7] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Rhode Island (1939).

[8] D. Rainville, Special Functions, The Macmillan Company, New York (1960).

[9] Prof. Dr. A. Altın, Uygulamalı Matematik, Gazi Kitabevi, Ankara (2011).

[10] E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special Functions, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[11] Gülsüm Ulusoy, Durrmeyer tipli operatörlerin yakınsaklık özellikleri, Yüksek Lisans tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2012).

[12] Başar Yılmaz, Hölder Uzayında yakınsaklık özellikleri, Yüksek Lisans tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2006).

[13] Orkun Dikmen, Laguerre ve q-Laguerre polinomları, Yüksek Lisans tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2010).

[14] M. Bayraktar, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ekim, 2006.

[15] Rabia Aktaş, Çok değişkenli ortogonal polinomların özelliklerinde bazı genişletmeler, Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2012).

[16] Hacer Ağbulut, Kompleks Kantorovich-Schurer polinomları ile kompakt disklerde yaklaşım, Yüksek Lisans tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2012).

[17] F. Altomare, M. Campiti, "Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications", Walter de Gryter, Berlin, Newyork, 265-373 (1994).

[18] K. Weierstrass, "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen", Sitzungsberichte der Königlich Preuischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 633-639 and 89-805 (1885).

[19] E. Voronovskaja, "Determination de la forme asymplotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M.Bernstein".C. R. Acad. Sci. URSS, 79-85 (1932).