KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

TAM OLMAYAN ÇOK DEĞİŞKENLİ BAZI HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE GENİŞLETMELERİ

OĞUZ YAĞCI

Temmuz 2018

Matematik Anabilim Dalında OĞUZ YAĞCI tarafından hazırlanan TAM OLMAYAN ÇOK DEĞİŞKENLİ BAZI HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE GENİŞLETMELERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç.Dr. Recep ŞAHİN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof.Dr. KerimKOCA
Üye (Danışman):Doç.Dr. Recep ŞAHİN
Üye :Doç.Dr. İsmail Onur Kıymaz

…/…/2018

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof.Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

TAM OLMAYAN ÇOK DEĞİŞKENLİ HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR VE GENİŞLETMELERİ

YAĞCI, Oğuz

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yapılan çalışmalar ve tezin genel amacı hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, tam olmayan Gama fonksiyonu, bir, iki ve üç değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar gibi temel ifadeler açıklanmıştır. Üçüncü bölümde tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının tanımları ifade edilmiş ve bazı önemli özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise tam olmayan birinci ve ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonları tanıtılmış ve bazı önemli formülleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, tam olmayan üç değişkenli bazı Srivastava hipergeometrik fonksiyonları ifade edilmiş ve bazı özellikleri sunulmuştur. Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gama fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Pochhammer sembolü, Tam olmayan Gama fonksiyonları, Tam olmayan Pochhammer sembolü, Gauss Hipergeometrik fonksiyonu, Appell Hipergeometrik fonksiyonları, 3 değişkenli Srivastava Hipergeometrik fonksiyonları.

ABSTRACT

CERTAIN INCOMPLETE MULTIVARIABLE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS AND EXTENTIONS

YAĞCI, Oğuz

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Recep ŞAHİN

This thesis consists of six sections. In the first section of the work is given information about purpose of the thesis. In the second section, basic expressions such as Gamma function, Beta function, incomplete Gamma functions, single, double and triple hypergeometric functions are explained. In the third section, the incomplete Gauss hypergeometric functions defined and given some important properties. In the fourth section, the incomplete first and second type Appell hypergeometric functions defined and investigated certain formulas. In the fifth section, the incomplete three variables Srivastava hypergeometric functions identified and presented various properties. The sixth section is reserved for discussion and conclusion part.

Keywords: Gamma function, Beta function, Pochhammer symbol, Incomplete Gamma functions, Incomplete Pochammer symbols, Gauss Hypergeometric function, Appell Hypergeometric functions, Srivastava's triple Hypergeometric functions.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; bilgi, ilgi ve desteğini esirgemeyen, tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Recep ŞAHİN e, çalışmalarım esnasında beni destekleyen Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma ve eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli eşim ve aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gama Fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta Fonksiyonu
$\gamma(s,x),\ \Gamma(s,x)$	Tam olmayan Gama Fonksiyonları
$(\lambda)_r$	Pochhammer sembolü
$(\lambda,x)_r, [\lambda,x]_r$	Tam olmayan Pochammer Sembolleri
${}_2F_1[.]$	Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$F_1,\ F_2,\ F_3,\ F_4$	Appell Hipergeometrik Fonksiyonları
$H_A,\ H_B,\ H_C$	Srivastava Hipergeometrik Fonksiyonları
${}_2\gamma_1[.],\ {}_2\Gamma_1[.]$	Tam olmayan Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu
$\gamma_1,\ \Gamma_1$	Tam olmayan birinci tip Appell Hipergeometrik Fonkiyonları
$\gamma_2,\ \Gamma_2$	Tam olmayan ikinci tip Appell Hipergeometrik Fonksiyonları
$\gamma_A^H,\ \Gamma_A^H$	Tam olmayan Srivastava üçlü Hipergeometrik Fonksiyonları
$\gamma_B^H,\ \Gamma_B^H$	Tam olmayan Srivastava üçlü Hipergeometrik Fonksiyonları
$J_\nu(z)$	Bessel Fonksiyonu
$I_\nu(z)$	Modified Bessel Fonksiyonu
$D_\nu(z)$	Weber Parabolik Silindir Fonksiyonu
$H_\nu(z)$	Hermite Polinomu
$M_{k,m}(z)$	Tek değişkenli Whittaker Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Mühendislik ve fizik uygulamaları, uygulamalı matematik bilgisi ve özel fonksiyonların iyi anlaşılmasını gerektirir. Bu fonksiyonlar diğerlerinin yanı sıra ısı iletimi, iletişim sistemleri, elektro-optik, yaklaşım teorisi ve elektrik devresi teorisi gibi uygulama alanlarında yaygın olarak ortaya çıkmaktadır. Mühendislik ve uygulamalı bilimlerdeki uygulama alanlarında yeni fonksiyonların ortaya çıkmasıyla özel fonksiyonların konusu oldukça önem kazanmıştır [1].

Uygulamalı matematik, astrofizik, nükleer ve modüler fizik, ulaşım teorisi ve akışkanların akışı, difraksiyon ve plazma dalgası problemleri, sayı teorisi ve rastgele yürüyüşler, Lorentz-Doppler çizgi genişlemesi ve tasarımı, parçacıkların hızlanması gibi konular (2.19) ve (2.20) de tanımlanan tam olmayan gama fonksiyonlarıyla ifade edilebilmektedir. Bu nedenle tam olmayan gama fonksiyonlarının ayrışması çeşitli problemlerin kapalı formlarının çözümlerini elde etmekte önemli rol oynamaktadır [4].

Bu tezde, birinci bölümde bazı özel fonksiyonlardan olan, gama fonksiyonu, beta fonksiyonu ve tam olmayan gama fonksiyonları, bir, iki ve üç değişkenli hipergeometrik fonksiyonları ele alınmış ve bazı önemli özellikleri incelenmiştir. İkinci bölümde ise tam olmayan Pochhammer sembolü yardımıyla tanımlanmış olan tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonları incelenmiştir. Üçüncü bölümde iki değişkenli tam olamayan birinci ve ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonlarının bazı özellikleri verilmiştir. Son bölümde ise üç değişkenli tam olmayan Srivastava hipergeometrik fonksiyonları tanımlanmış ve bazı özellikleri, örneğin integral formülleri, türev formülü, Mellin-Barnes integral formülü, rekürans bağıntıları ve indirgenme formülleri verilmiştir.

1.1 Kaynak Özetleri

Bu tez çalışmamızda temel kavramlar için Hari Mohan Srivastava nın “A Treatise on Generating Functions” ve M. Aslam Chaudhry, Syed M. Zubair in “On a Class of Incomplete Gamma Functions with Applications” adlı kitapları temel referanslarımız olmuştur [1, 3]. Ayrıca bu alanda yayınlanmış pek çok makaleden de faydalanılmıştır [4, 9, 10, 11, 12, 13].

1.2 Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonlarından γ_A^H ve Γ_A^H tanımlanmıştır [12]. Bu fonksiyonların bazı önemli özellikleri olan integral formülleri, türev formülü, Mellin-Barnes integral formülleri, rekürrans bağıntıları ve indirgeme formülleri elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileriki bölümde faydalı olacak temel ifadelere yer verilecektir.

2.1 Gama Fonksiyonu

Euler 1729 yılında x in herhangi bir pozitif tamsayı olduğunda $x!$ e bir anlam vermek amacıyla n nin bir pozitif tamsayı değerleri arasında $n!$ interpolasyonu problemini ele almıştır. Böylece özel fonksiyonların incelenmesinde karşımıza çok çıkan ve iyi bilinen Gama fonksiyonuna yönelmiştir [1, syf. 19].

n pozitif tamsayı ve

$$f(n) = \int_0^\infty t^n \exp(-t)dt$$

olsun. Yukarıdaki integrale kısmi integrasyon uygularsak,

$$f(n) = [-t^n \exp(-t)]_0^\infty + n \int_0^\infty t^{n-1} \exp(-t)\, dt$$

$$= nf(n-1), \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

olup, $f(1) = 1$ iken

$$f(n) = n(n-1) \dots 3.2.1 = n!$$

elde edilir. Böylece,

$$n\,! = \int_0^\infty t^n \exp(-t)dt, \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

dir. Aslında n nin $Re\,(n) > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde yukarıdaki integral ifadesi tanımlıdır. Başka bir ifadeyle yakınsaktır. Bu öneriler altında bizde faktöryel fonksiyonunu

$$z! = \int_0^\infty t^z \exp(-t)\, dt = \Gamma(z+1), \qquad (\mathrm{Re(z)} > -1)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Yukarıdaki ifadede z yerine $z-1$ yazılırsa kolaylıkla

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\, dt$$

elde edilir. Şimdi, Euler, Gauss ve Weierstrass tarafından ele alınmış Gama fonksiyonun üç farklı gösterimini verelim.

Tanım 2.1.1 [1, syf. 19]**:**

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \exp(-t)\, dt, \qquad Re(z) > 0 \tag{2.1}$$

Tanım 2.1.2 [1, syf. 20]**:**

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \right\}, \qquad z \neq 0, -1, -2, \dots \tag{2.2}$$

Tanım 2.1.3 [1, syf. 20]**:**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, exp(\delta z) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \right] \tag{2.3}$$

olup Euler-Mascheroni sabiti δ,

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right\} \cong 0{,}5772156649 \dots \tag{2.4}$$

olarak tanımlanmıştır .

(2.1) de verilen ifadede z yerine $z+1$ yazılıp daha sonra kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^{z+1-1} \exp(-t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty t^z \exp(-t)\, dt$$

$$= [-t^z \exp(-t)]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}\exp(-t)\,dt$$

$$= z\Gamma(z)$$

olup,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.5}$$

rekürans bağıntısı elde edilir [1, syf. 20]. (2.5) teki rekürans bağıntısı $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ için (2.2) ve (2.3) kullanılarak kolaylıkla ispatlanabilir. $\Gamma\left({}^{1}/_{\sigma}\right)$ fonksiyonu $\sigma = -1, -\frac{1}{2}, \ldots$, basit kutuplarına sahip olduğu için, $\sigma = 0$ noktası $\Gamma\left({}^{1}/_{\sigma}\right)$ nın kutup yığılma noktasıdır. Ayrıca, (2.2) de $\Gamma\left({}^{1}/_{z}\right)$ nin kutup noktası yoktur ve $\Gamma(z)$ asla sıfır olamaz. Böylece,

$$\Gamma(z) = \begin{cases} \int_0^1 t^{z-1}\exp(-\mathrm{t})\,dt & , Re(z) > 0 \\ \dfrac{\Gamma(z+1)}{z} & , Re(z) < 0\,, z \neq -1, -2, \ldots \end{cases} \tag{2.6}$$

tanımlanır [1, syf.20].

2.2 Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu $B(x,y)$ iki kompleks değişkeni x ve y olan birinci tür Eulerian integrali tarafından

$$B(x,y) = \int_0^\infty t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{2.7}$$

$$(Re(x) > 0\,, Re(y) > 0)$$

olarak tanımlanmıştır [1, syf. 25]. (2.7) ifadesinde sırasıyla $t = sin^2\theta$ ve $t = \frac{u}{u+1}$ alınırsa

$$B(x,y) = \int_0^1 (\sin\theta)^{2a-1} (\cos\theta)^{2b-1} d\theta \tag{2.8}$$

ve

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \tag{2.9}$$

elde edilir. Bunlara ek olarak (2.1) eşitliğinde $t = s^2$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} exp(-t) dt = 2\int_0^\infty s^{2x-1} exp(-s^2) ds \tag{2.10}$$

olup, $\Gamma(x)$ nın bu eşitliğinden dolayı

$$\Gamma(y) = 2\int_0^\infty t^{2y-1} exp(-t^2) dt \tag{2.11}$$

elde edilir. Şimdi, (2.10) ve (2.11) ifadelerini taraf tarafa çarpıp,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty s^{2x-1} t^{2y-1} exp(-s^2 - t^2)\, ds dt$$

$s = rcos\theta$ ve $t = rsin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçiş yapılırsa,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r^{2x+2y-2} (cos\theta)^{2x-1} (sin\theta)^{2y-1} exp(-r^2) r dr d\theta \tag{2.12}$$

$$= \left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^{2x-1} (sin\theta)^{2y-1} d\theta\right]\left[2\int_0^\infty r^{2x+2y-1} exp(-r^2) r dr\right]$$

$$= B(x,y)\Gamma(x+y)$$

eşitliği bulunur. Böylece, $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,.\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ dir. Buradan da kolayca görülmektedir ki

$$B(x,y) = B(y,x) \tag{2.13}$$

sağlanıp, Beta fonksiyonunun simetri özelliğine sahip olduğu gözlenir.

Dolayısıyla, (2.6) ifadesine benzer şekilde

$$B(x,y)=\begin{cases}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, & , \quad Re(x)>0\,, Re(y)>0\\ \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} & , \quad Re(x)>0, Re(y)>0, \quad x,y\neq -1,-2,\ldots\end{cases} \tag{2.14}$$

yazabiliriz [1, syf. 26].

2.3 Pochhammer Sembolü

Bu çalışma boyunca Pochhammer sembolü $(\lambda)_n$

$$(\lambda)_n=\begin{cases}1 & , \quad n=0\\ \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) & , \quad n=1,2,\ldots\end{cases} \tag{2.15}$$

olarak tanımlanmıştır . Özel olarak, $\lambda=1$ alınırsa

$$(1)_n=1(1+1)\ldots(1+n-1)=1.2\ldots n=n!$$

olduğundan dolayı $(\lambda)_n$ sembolü temel faktöryel fonksiyonu olarak da tanımlanır [1, syf. 21].

Şimdi, (2.5) ifadesinde $z+1$ yerine $\lambda+n$ yazılır ve bu işlem n kez tekrar ettirilirse

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda+n)&=(\lambda+n-1)\Gamma(\lambda+n-2)\\&=(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)\ldots(\lambda+1)\Gamma(\lambda)\\&=(\lambda)_n\Gamma(\lambda)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilip,

$$(\lambda)_n=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty t^{\lambda+n-1}\exp(-t)dt\,, \qquad \lambda\neq -1,-2,\ldots \tag{2.16}$$

olur. Böylece, $(\lambda)_n$ Pochhammer sembolünün Gamma fonksiyonu türünden eşitliği elde edilir [1, syf. 22].

Lemma 2.3.1 [1, syf. 22**]:**

$$(\lambda)_{m+n} = (\lambda)_m(\lambda + m)_n \tag{2.17}$$

dir.

İspat: (2.17) ifadesinde (2.16)uygulanırsa istenilen sonuç kolaylıkla elde edilir.■

Lemma 2.3.2 [2, syf. 47**]:**

$$(1-x)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda)_n \frac{x^n}{n!} \qquad , |x| < 1 \tag{2.18}$$

dir.

İspat: $(1-x)^{-\lambda}$ fonksiyonunu $x = 0$ noktası komşuluğunda Taylor serisine açmak yeterlidir. $\lambda \in \mathbb{Z}^-$ olması halinde (2.18) ifadesi sonlu bir binom açılımıdır.■

2.4 Tam olmayan Gama Fonksiyonları

Tam olmayan Gama fonksiyonları $\gamma(z,x)$ ve onun tümleyeni olan $\Gamma(z,x)$ fonksiyonu (aynı zamanda *Prym*' s fonksiyonu olarak da bilinir.),

$$\gamma(z,x) = \int_0^x t^{z-1}\, exp(-t)\, dt \qquad (Re(z) > 0, \qquad |arg(z)| < \pi), \tag{2.19}$$

ve

$$\Gamma(z,x) = \int_x^\infty t^{z-1}\, exp(-t)\, dt \qquad (Re(z) > 0, \qquad |arg(z)| < \pi), \tag{2.20}$$

olarak tanımlanır ve

$$\gamma(z,x) + \Gamma(z,x) = \Gamma(z) \tag{2.21}$$

ayrışma formülünü sağlar [1, syf. 27].

Sabit x için $\Gamma(z,x)$, z nin tam (integral) fonksiyonudur. Ancak $\gamma(z,x)$ fonksiyonu $x=0,-1,-2,\ldots$, noktalarındaki basit kutuplarla z nin bir meromorfik fonksiyonudur.

Şimdi, (2.19) ifadesinde z yerine $z+1$ yazılıp kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\gamma(z+1,x)=\int_0^x t^{z+1-1}\exp(-t)\,dt$$

$$=\int_0^x t^{z}\exp(-t)\,dt$$

$$=\left[-t^{z}\exp(-t)\right]_0^x+z\int_0^x t^{z-1}\exp(-t)\,dt$$

$$=z\gamma(z,x)-x^{z}\exp(-x) \tag{2.22}$$

öz yineleme formülü elde edilir. Benzer işlemler (2.20) ifadesinde uygulanırsa,

$$\Gamma(z+1,x)=z\Gamma(z,x)+x^{z}\exp(-x) \tag{2.23}$$

kolaylıkla elde edilir [3, syf. 37].

2.5 Tam olmayan Pochhammer Sembolü

(2.19) ve (2.20) ile ifade edilmiş olan tam olmayan Gamma fonksiyonları $\gamma(z,x)$ ve $\Gamma(z,x)$ e göre tam olmayan Pochhammer sembolü,

$$(\lambda,x)_n=\frac{\gamma(\lambda+n,x)}{\Gamma(\lambda)}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^x t^{\lambda+n-1}\exp(-t)dt\,,\quad \lambda,n\in\mathbb{C};x\geq 0 \tag{2.24}$$

ve

$$[\lambda,x]_n=\frac{\Gamma(\lambda+n,x)}{\Gamma(\lambda)}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_x^\infty t^{\lambda+n-1}\exp(-t)dt\,,\quad \lambda,n\in\mathbb{C};x\geq 0 \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$(\lambda,x)_n+[\lambda,x]_n=(\lambda)_n \tag{2.26}$$

yineleme formülünü sağlar. $(\lambda)_n$, (2.16) ifadesinde verilen Pochhammer sembolüdür [4, syf. 662].

Lemma 2.5.1 [4, syf. 662**]:**

$$(\lambda, x)_{m+n} = (\lambda)_m(\lambda + m, x)_n \tag{2.27}$$

dir.

İspat: (2.27) ifadesinde (2.25) eşitliğinden faydalanarak istenilen sonucu kolaylıkla elde edilir. ■

2.6 Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu ve Serisi

a, b ve c reel ya da kompleks olsun. İkinci dereceden lineer diferensiyel denklem

$$z(1-z)\frac{d^2\omega}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{d\omega}{dz} - ab\omega = 0 \tag{2.28}$$

ya da

$$\{\delta(\delta + c - 1) - z(\delta + a)(\delta + b)\}\omega = 0 \qquad , \qquad \delta = z\left(\frac{d}{dz}\right) \tag{2.29}$$

hipergeometrik denklem olarak adlandırılır. Burada sadece $z = 0, 1, \infty$ da tekillikler mevcuttur [1, syf. 30].

(2.28) ifadesindeki hipergeometrik denklemin $z = 0, 1, \infty$ daki seri çözümleri doğrudan klasik Frobenius yöntemi kullanılarak elde edilebilir. Fakat, c tam sayı değilse, orijin komşuluğundaki (2.28) ifadesinin genel çözümü

$$\omega = A\ {}_2F_1(a, b; c; z) + Bz^{1-c}\ {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z) \tag{2.30}$$

(2.30) daki ${}_2F_1(a, b; c; z)$ şeklinde bulunabilir, burada A, B sabitlerdir.

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{a.b}{1.c}z + \frac{a(a+1).b(b+1)}{1.2.c(c+1)}z^2 + \cdots$$

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \qquad c \neq 0,-1,-2,\ldots \quad (2.31) $$

olup, (2.31) ifadesi Pochhammer sembolünden faydalanarak tanımlanmıştır [1, syf. 29].

$|z| < 1$ iken (2.31) deki hipergeometrik seriye uygulanan bazı testlerle

i. $Re(c-a-b) > 0$ için mutlak yakınsak,

ii. $-1 < Re(c-a-b) \leq 0$ için şartlı yakınsak,

iii. $Re(c-a-b) \leq -1$ için ıraksak,

olduğu gösterilebilir [1, syf. 30]. Gerçek şu ki; (i) durumunda bize iyi bilinen Gauss toplam formülünün

$$ {}_2F_1(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (2.32) $$

$$ (\mathrm{Re}(\mathrm{c}-\mathrm{a}-\mathrm{b}) > 0\,;\; c \neq 0,-1,-2,\ldots) $$

oluşmasına yol açar [1, syf. 30].

(2.31) ifadesinde z yerine $z/_b$ yazılır ve $|b| \to \infty$ giderken limiti alınırsa

$$ \lim_{|b|\to\infty} {}_2F_1\left(a,b;c;z/_b\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, b^n} \frac{z^n}{n!} $$

$$ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} . \frac{z^n}{n!} \lim_{|b|\to\infty} \left\{(b)_n \frac{1}{b^n}\right\} $$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede $\lim_{|b|\to\infty} \left\{(b)_n \frac{1}{b^n}\right\} = 1$ olduğundan dolayı Kummer fonksiyonu olarak da bilinen bir değişkenli konflüent hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [1, syf. 36].

$$ {}_1F_1(a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n} . \frac{z^n}{n!} \qquad c \neq 0,-1,-2,\ldots \quad (2.33) $$

Şimdi, Gauss hipergeometrik fonksiyonunun Gama fonksiyonu ve Beta fonksiyonunun integral gösterimlerinden faydalanarak yeni eşitlikler elde edilecektir.

Teorem 2.6.1: Gauss hipergeometrik fonksiyonu olan ${}_2F_1(a,b;c;z)$ nin

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) \, . \; {}_1F_1(b;c;zt) dt \tag{2.34} $$

integral gösterimi mevcuttur [4, syf. 665].

İspat: ${}_2F_1(a,b;c;z)$ in (2.31) deki seri gösterimi

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} $$

olup, (2.16) ifadesi ve (2.6) eşitliğindeki integral gösteriminden faydalanarak

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty t^{a+n-1} \exp(-t) \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} dt $$

sağlanıp, seri düzgün yakınsak olduğundan dolayı kolaylıkla toplam ve integral ifadelerinin yerleri değiştirilirse aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n}{(c)_n} \frac{(zt)^n}{n!} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) \quad {}_1F_1(b;c;zt) dt. \end{aligned} $$

Burada, ${}_1F_1(b;c;z)$, (2.33) te verilen Kummer (konflüent) hipergeometrik fonksiyonudur [1, syf. 36]. ■

Teorem 2.6.2: Gauss hipergeometrik fonksiyonu olan ${}_2F_1(a,b;c;z)$ nin

$$ {}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \tag{2.35} $$

bir başka integral gösterimi de mevcuttur [2, syf. 47].

İspat: (2.7) eşitliğinde tanımlanan Beta fonksiyonu ve Pochhammer sembolünün aşağıdaki özelliği kullanılarak

$$\frac{(b)_n}{(c)_n}=\frac{B(b+n,c-b)}{B(b,c-n)}=\frac{1}{B(b,c-n)}\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}dt \tag{2.36}$$

elde edilir [2, syf. 47]. Şimdi, (2.36) daki eşitlik (2.31) de yerine yazılıp, seri düzgün yakınsak olduğundan dolayı gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$_2F_1(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(zt)^n}{n!}dt$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede (2.18) deki eşitlikten faydalanarak istenilen sonucu kolaylıkla elde edilebilir. ■

2.7 Appell Hipergeometrik Fonksiyonları

Tek değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar teorisindeki büyük başarı iki veya daha fazla değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar üzerine çalışmaları yönlendirmiştir. 1880 yılında P. Appell iki tane Gauss hipergeometrik fonksiyonunun çarpımını aşağıdaki şekilde ele almıştır [1, syf. 52].

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(a_1,b_1;c_1;x_1).\ {}_2F_1(a_2,b_2;c_2;x_2) \\ &=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_m(b_1)_m(a_2)_n(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

(2.37) ifadesinde (2.17) özelliği kullanılıp ve a_2, b_2 ve c_2 ifadelerinin yerine $a_2=a_1+m,\ b_2=b_1+m,\ c_2=c_1+m$ yazılırsa,

$$(a_1)_m(a_2)_n, (b_1)_m(b_2)_n, (c_1)_m(c_2)_n$$

çarpım ifadeleri sırasıyla,

$$(a_1)_{m+n}, (b_1)_{m+n}, (c_1)_{m+n}$$

olup

$$ {}_2F_1(a_1,b_1;c_1;x_1).\ {}_2F_1(a_2,b_2;c_2;x_2) \tag{2.38} $$

$$ = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m(a_1+m)_n(b_1)_m(b_1+m)_n}{(c_1)_m(c_1+m)_n} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} $$

$$ = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_{m+n}}{(c_1)_{m+n}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} $$

elde edilir.

(2.38) eşitliğinde $\sigma = m+n$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ {}_2F_1(a_1,b_1;c_1;x_1).\ {}_2F_1(a_2,b_2;c_2;x_2) $$

$$ = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\sigma} \frac{(a_1)_\sigma(b_1)_\sigma}{(c_1)_\sigma} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^{\sigma-m}}{(\sigma-m)!} $$

$$ = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(a_1)_\sigma(b_1)_\sigma}{(c_1)_\sigma \sigma!} \left(\sum_{m=0}^{\sigma} \frac{\sigma!}{(\sigma-m)!\,m!} {x_1}^m {x_2}^{\sigma-m} \right) $$

$$ = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(a_1)_\sigma(b_1)_\sigma}{(c_1)_\sigma} \frac{(x_1+x_2)^\sigma}{\sigma!} $$

$$ = {}_2F_1(a_1,b_1;c_1;x_1+x_2) $$

sağlanır [1, syf. 52].

(2.37) ifadesinde $a_2 = a_1 + m$ ve $c_2 = c_1 + m$ yerlerine yazılırsa ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra meydana gelen iki değişkenli hipergeometrik fonksiyona birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu adı verilir.Böylece aşağıdaki serisel gösterimi mevcuttur [5, syf. 73].

$$ F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_{m+n}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{2.39} $$

$$ \{(x_1,x_2): |x_1| < 1, |x_2| < 1\}. $$

Benzer şekilde (2.37) ifadesinde $a_2 = a_1 + m$ alınırsa ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu, tekrar (2.37) de $c_2 = c_1 + m$ koyulursa üçüncü tip Appell hipergeometrik fonksiyonu ve en son olarak (2.37) da $a_2 = a_1 + m,\ b_2 = b_1 + m$ alınırsa dördüncü tip Appell hipergeometrik fonksiyonu elde edilir. Bu ifadelerin serisel gösterimleri aşağıda sırasıyla verilmiştir [5, syf. 73].

$$F_2[a_1, b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{2.40}$$

$$\{(x_1, x_2): |x_1| + |x_2| < 1\},$$

$$F_3[a_1, a_2, b_1, b_2; c_1; x_1, x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m(a_2)_n(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_{m+n}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{2.41}$$

$$\{(x_1, x_2): |x_1| < 1, |x_2| < 1\}.$$

ve

$$F_4[a_1, b_1; c_1, c_2; x_1, x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}(b_1)_{m+n}}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{2.42}$$

$$\left\{(x_1, x_2): \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} < 1\right\}.$$

Burada yukarıdaki şartlar altında seriler yakınsaktır.

Şimdi, birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu F_1 in (2.39) ifadesinde yer alan ${x_1}^m {x_2}^n$ teriminin önündeki katsayı $\Lambda_{m,n}$ olsun.

$$\omega = F_1[a_1, b_1, b_2; c_1; x_1, x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Lambda_{m,n} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{2.43}$$

burada

$$\Lambda_{m+1,n} = \frac{(a_1 + m + n)(b_1 + m)}{(m + 1)(c_1 + m + n)} \Lambda_{m,n}$$

ve

$$\Lambda_{m,n+1} = \frac{(a_1+m+n)(b_2+n)}{(n+1)(c_1+m+n)}\Lambda_{m,n}$$

dir.

$\kappa = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ ve $\lambda = x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ alınırsa Appell hipergeometrik fonksiyonu F_1 için aşağıdaki kısmi diferensiyel denklemler

$$\left\{(\kappa+\lambda+a_1)(\kappa+b_1)-\frac{1}{x_1}\kappa(\kappa+\lambda+c_1-1)\right\}\omega = 0$$

$$\left\{(\kappa+\lambda+a_1)(\kappa+b_2)-\frac{1}{x_1}\kappa(\kappa+\lambda+c_1-1)\right\}\omega = 0$$

sağlanır [5, syf. 76]. Birinci ve ikinci dereceden kısmi türevler için $\mu = \frac{\partial}{\partial x_1}, \nu = \frac{\partial}{\partial x_1}, \rho = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \xi = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}, \zeta = \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$ gösterimlerinden faydalanarak F_1 in sağladığı kısmi türevli denklem sistemi

$$F_1:\begin{cases} x_1(1-x_1)\xi + x_2(1-x_1)\rho + [c_1-(a_1+b_1+1)x_1]\mu - b_1x_2\nu - a_1b_1\omega = 0 \\ x_2(1-x_2)\zeta + x_1(1-x_2)\rho + [c_1-(a_1+b_2+1)x_2]\nu - b_2x_1\mu - a_1b_2\omega = 0 \end{cases} \tag{2.44}$$

elde edilir. Diğer Appell fonksiyonları için aşağıdaki kısmi türevli denklemler benzer biçimde sağlanır.

$$F_2:\begin{cases} x_1(1-x_1)\xi - x_1x_2\rho + [c_1-(a_1+b_1+1)x_1]\mu - b_1x_2\nu - a_1b_1\omega = 0 \\ x_2(1-x_2)\zeta - x_1x_2\rho + [c_2-(a_1+b_2+1)x_2]\nu - b_2x_1\mu - a_1b_2\omega = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

$$F_3:\begin{cases} x_1(1-x_1)\xi + x_2\rho + [c_1-(a_1+b_1+1)x_1]\mu - a_1b_1\omega = 0 \\ x_2(1-x_2)\zeta + x_1\rho + [c_1-(a_1+b_2+1)x_2]\nu - a_1b_2\omega = 0 \end{cases} \tag{2.46}$$

ve

$$F_4:\begin{cases} x_1(1-x_1)\xi - {x_2}^2\zeta - 2x_1x_2\rho + [c_1-(a_1+b_1+1)x_1]\mu \\ \qquad -(a_1+b_1+1)x_2\nu - a_1b_1\omega = 0 \\ x_2(1-x_2)\zeta - {x_1}^2\xi - 2x_1x_2\rho + [c_1-(a_1+b_1+1)x_2]\nu \\ \qquad -(a_1+b_1+1)x_1\mu - a_1b_2\omega = 0 \end{cases} \tag{2.47}$$

dır [5, syf. 76].

Teorem 2.7.1: Appell hipergeometrik fonksiyonları F_1, F_2 ve F_3 ün integral gösterimleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir [5, syf. 76].

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2] = \frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1-b_2)} \tag{2.48}$$

$$.\int_0^1\int_0^{1-\nu} \mu^{b_1-1}\,\nu^{b_2-1}(1-\mu-\nu)^{c_1-b_1-b_2-1}(1-\mu x_1-\nu x_2)^{-a_1}d\mu d\nu,$$

$$F_2[a_1,b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] = \frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1)\Gamma(c_2-b_2)} \tag{2.49}$$

$$.\int_0^1\int_0^1 \mu^{b_1-1}\,\nu^{b_2-1}(1-\mu)^{c_1-b_1-1}(1-\nu)^{c_2-b_2-1}(1-\mu x_1-\nu x_2)^{-a_1}d\mu d\nu,$$

$$F_3[a_1,a_2,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2] = \frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)\Gamma(c_1-b_1-b_2)} \tag{2.50}$$

$$.\int_0^1\int_0^{1-\nu} \mu^{b_1-1}\,\nu^{b_2-1}(1-\mu-\nu)^{c_1-b_1-b_2-1}(1-\mu x_1)^{-a_1}(1-\nu x_2)^{-a_2}d\mu d\nu$$

$$(\mu\geq 0,\nu\geq 0,\mu+\nu\leq 1).$$

İspat: F_1 in (2.39) daki serisel gösteriminde Beta fonksiyonunun integral formülü

$$\frac{(b_1)_m}{(c_1)_m} = \frac{1}{B(b_1,c_1-b_1)}\int_0^1 \mu^{b_1-1}\,(1-\mu)^{c_1-b_1-1}d\mu,$$

kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, (2.48) deki eşitlik kolaylıkla elde edilir. Aynı yöntemler (2.40) ve (2.41) deki serisel gösterimlerde uygulanırsa, (2.49) ve (2.50) integral ifadeleri sağlanır. ∎

Teorem 2.7.2: Appell hipergeometrik fonksiyonu F_1 in dönüşüm formülleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir [5, syf. 77].

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2] = (1-x_1)^{-b_1}(1-x_2)^{-b_2} \tag{2.51}$$

$$.F_1\left[c_1-a_1,b_1,b_2;c_1;-\frac{x_1}{1-x_1},-\frac{x_2}{1-x_2}\right]$$

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2]=(1-x_1)^{-a_1} \tag{2.52}$$

$$.F_1\left[a_1,c_1-b_1-b_2,b_2;c_1;-\frac{x_1}{1-x_1},\frac{x_2-x_1}{1-x_1}\right]$$

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2]=(1-x_2)^{-a_1} \tag{2.53}$$

$$.F_1\left[a_1,b_1,c_1-b_1-b_2;c_1;\frac{x_1-x_2}{1-x_2},-\frac{x_2}{1-x_2}\right]$$

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2]=(1-x_1)^{c_1-b_1-a_1}(1-x_2)^{-b_2} \tag{2.54}$$

$$.F_1\left[c_1-a_1,c_1-b_1-b_2,b_2;c_1;x_1,\frac{x_1-x_2}{1-x_2}\right]$$

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2]=(1-x_1)^{-b_1}(1-x_2)^{c_1-b_2-a_1} \tag{2.55}$$

$$.F_1\left[c_1-a_1,b_1,c_1-b_1-b_2;c_1;\frac{x_2-x_1}{1-x_1},x_2\right].$$

İspat: F_1 in aşağıda verilen

$$F_1[a_1,b_1,b_2;c_1;x_1,x_2]=\frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c_1-a_1)}$$

$$.\int_0^1 \mu^{a_1-1}(1-\mu)^{c_1-a_1-1}(1-\mu x_1)^{-b_1}(1-\mu x_2)^{-b_2}d\mu,$$

integral gösteriminde sırasıyla $\mu=1-\nu,\ \mu=\frac{\nu}{1-x_1+\nu x_1},\ \mu=\frac{\nu}{1-x_2+\nu x_1},\ \mu=\frac{1-\nu}{1-\nu x_1}$ ve $\mu=\frac{1-\nu}{1-\nu x_2}$ dönüşümleri yerlerine konulursa, istenilen sonuçlar kolaylıkla elde edilir.■

Teorem 2.7.3: Appell hipergeometrik fonksiyonu F_2 nin dönüşüm formülleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir [5, syf. 77].

$$F_2[a_1,b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]=(1-x_1)^{-a_1} \tag{2.56}$$

$$.F_2\left[a_1,c_1-b_1,b_2;c_1,c_2;-\frac{x_1}{1-x_1},\frac{x_2}{1-x_1}\right]$$

$$F_2[a_1, b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2] = (1 - x_2)^{-a_2} \tag{2.57}$$

$$.\,F_2\left[a_1, b_1, c_2 - b_2; c_1, c_2; \frac{x_1}{1 - x_2}, -\frac{x_2}{1 - x_2}\right]$$

$$F_2[a_1, b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2] = (1 - x_1 - x_2)^{-a_1} \tag{2.58}$$

$$.\,F_2\left[a_1, c_1 - b_1, c_2 - b_2; c_1, c_2; -\frac{x_1}{1 - x_1 - x_2}, -\frac{x_2}{1 - x_1 - x_2}\right].$$

İspat: (2.49) eşitliğinde sırasıyla,

$$\mu = 1 - \mu', \nu = \nu'$$

$$\mu = \mu', \nu = 1 - \nu'$$

$$\mu = 1 - \mu', \nu = 1 - \nu'$$

dönüşümleri uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa istediğimiz sonuçlara kolaylıkla ulaşılabilir.■

2.8 Srivastava Üç Değişkenli Hipergeometrik Fonksiyonları

1893 yılında Lauricella tarafından 14 tane üç değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar oluşturuldu [1, syf. 68]. Lauricella nın üç değişkene sahip olan 14 hipergeometrik fonksiyonu üzerine yapılan çalışmalar sonucunda Srivastava tarafından üç tane üç değişkenli hipergeometrik fonksiyon elde etmiştir. Bu fonksiyonlar aşağıda sırasıyla verilmiştir [7, 8].

$H_A[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x_1, x_2, x_3]$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+p}(a_2)_{m+n}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_m(b_2)_{n+p}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!} \tag{2.59}$$

$$(|x_1| < r, |x_2| < s, |x_3| < t, r + s + t = 1 + st),$$

$H_B[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; x_1, x_2, x_3]$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+p}(a_2)_{m+n}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_m(b_2)_n(b_3)_p} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!} \tag{2.60}$$

$$\left(|x_1| < r, |x_2| < s, |x_3| < t, r + s + t + 2\sqrt{rst} = 1\right),$$

$H_C[a_1, a_2, a_3; b_1; x_1, x_2, x_3]$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+p}(a_2)_{m+n}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_{m+n+p}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!} \tag{2.61}$$

$$\left(|x_1| < r, |x_2| < s, |x_3| < t, r + s + t - 2\sqrt{(1-r)(1-s)(1-t)} < 2\right).$$

Açık şekilde, H_C hipergeometrik fonksiyonu birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonunun, H_B hipergeometrik fonksiyonu ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonunun ve H_A hipergeometrik fonksiyonu hem birinci tip hemde ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonlarının genelleştirilmeleridir [1, syf. 69].

Teorem 2.8.1: Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu H_A aşağıdaki kısmi diferensiyel denklemlerini sağlar [8, syf. 106].

$$\begin{cases} [\theta(\theta + b_1 - 1) - x_1(\theta + \Phi + a_1)(\theta + \Psi + a_2)]H_A = 0 \\ [\Psi(\Psi + \Phi + b_2 - 1) - x_2(\theta + \Psi + a_2)(\Psi + \Phi + a_3)]H_A = 0 \\ [\Phi(\Psi + \Phi + b_2 - 1) - x_3(\theta + \Phi + a_1)(\Psi + \Phi + a_3)]H_A = 0. \end{cases} \tag{2.62}$$

Burada, $\theta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \Psi = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ve $\Phi = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ dür.

İspat: (2.62) ifadesinde

$\theta(\theta + b_1 - 1)H_A$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{m(m + b_1 - 1)(a_1)_{m+p}(a_2)_{m+n}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_m(b_2)_{n+p}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!}$$

$$= \sum_{m=1,n,p=0}^{\infty} \frac{(m + b_1 - 1)(a_1)_{m+p}(a_2)_{m+n}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_m(b_2)_{n+p}} \frac{{x_1}^m}{(m-1)!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte m yerine $m + 1$ yazılıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$\theta(\theta+b_1-1)H_A$

$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(m+b_1)(a_1)_{m+p+1}(a_2)_{m+n+1}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_{m+1}(b_2)_{n+p}}\frac{{x_1}^{m+1}}{m!}\frac{{x_2}^{n}}{n!}\frac{{x_3}^{p}}{p!}$$

$$=x_1\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(m+b_1)(a_1)_{m+p}(a_1+m+p)(a_2)_{m+n}(a_2+m+n)(a_3)_{n+p}}{(b_1+m)(b_1)_m(b_2)_{n+p}}\frac{{x_1}^{m}}{m!}\frac{{x_2}^{n}}{n!}\frac{{x_3}^{p}}{p!}$$

sağlanır. Böylece,

$$[\theta(\theta+b_1-1)-x_1(\theta+\Phi+a_1)(\theta+\Psi+a_2)]H_A=0$$

elde edilir. Diğer eşitliklerde benzer şekilde sağlanır. ■

Teorem 2.8.2: Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu H_B aşağıdaki kısmi diferensiyel denklemlerini sağlar [8, syf. 106].

$$\begin{cases}[\theta(\theta+b_1-1)-x_1(\theta+\Phi+a_1)(\theta+\Psi+a_2)]H_B=0\\ [\Psi(\Psi+b_2-1)-x_2(\theta+\Psi+a_2)(\Psi+\Phi+a_3)]H_B=0\\ [\Phi(\Phi+b_3-1)-x_3(\theta+\Phi+a_1)(\Psi+\Phi+a_3)]H_B=0.\end{cases}\tag{2.63}$$

Burada, $\theta=x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\Psi=x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ ve $\Phi=x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$ dür.

İspat: Teorem 2.8.1 in ispatındaki işlemleri Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu H_B ye benzer şekilde uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 2.8.3: Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu H_C aşağıdaki kısmi diferensiyel denklemlerini sağlar [8, syf. 107].

$$\begin{cases}[\theta(\theta+\Psi+\Phi+b_1-1)-x_1(\theta+\Phi+a_1)(\theta+\Psi+a_2)]H_C=0\\ [\Psi(\theta+\Psi+\Phi+b_1-1)-x_2(\theta+\Psi+a_2)(\Psi+\Phi+a_3)]H_C=0\\ [\Phi(\theta+\Psi+\Phi+b_1-1)-x_3(\theta+\Phi+a_1)(\Psi+\Phi+a_3)]H_C=0.\end{cases}\tag{2.64}$$

Burada, $\theta=x_1\frac{\partial}{\partial x_1},\Psi=x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ ve $\Phi=x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$dür.

İspat: Teorem 2.8.1 in ispatındaki işlemleri Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu H_C ye benzer şekilde uygulanırsa istenilen sonuç elde edilir. ■

Teorem 2.8.4: Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonları H_A, H_B ve H_c nin integral gösterimleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir.

$$H_A[a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-\mu\ -\nu)$$

$$.\mu^{a_1-1}\nu^{a_2-1}\ {}_0F_1(-;b_1;x_1\mu\nu)\ {}_1F_1(a_3;b_2;x_2\nu+x_3\mu)d\mu d\nu \qquad (2.65)$$

$$(Re(x_2)<1, Re(x_3)<1, Re(a_1)>0\ ve\ Re(a_2)>0),$$

$$H_B[a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-\mu\ -\nu)$$

$$.\mu^{a_1-1}\nu^{a_2-1}\ {}_0F_1(-;b_1;x_1\mu\nu)\Psi_2(a_3;b_2,b_3;x_2\nu,x_3\mu)d\mu d\nu \qquad (2.66)$$

$$(Re(x_2)<1, Re(x_3)<1, Re(a_1)>0\ ve\ Re(a_2)>0),$$

$$H_C[a_1,a_2,a_3;b_1;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-\mu\ -\nu)$$

$$.\mu^{a_1-1}\nu^{a_2-1}.\Phi_3(a_3;b_1;x_2\nu+x_3\mu,x_1\mu\nu)d\mu d\nu \qquad (2.67)$$

$$(Re(x_2)<1, Re(x_3)<1, Re(a_1)>0\ ve\ Re(a_2)>0).$$

Burada, $\Psi_2$ve Φ_3 iki değişkenli Humbert fonksiyonları olup,

$$\Psi_2[a;b,c;x,y]=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+l}}{(b)_k(c)_l}\frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!}$$

$$(|x|<\infty, \qquad |y|<\infty)$$

ve

$$\Phi_3[a;b;x,y]=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(b)_{k+l}}\frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!}$$

$$(|x|<\infty, \qquad |y|<\infty)$$

dir [6, syf. 26]. Yukarıdaki şartlar altında seriler yakınsaktır.

İspat: (2.59) eşitliğinin sol tarafındaki $(a_1)_{m+p}$ ve $(a_2)_{m+n}$ terimlerine (2.16) özelliğini uygularsak,

$$H_A[a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp(-\mu-\nu)$$

$$.\,\mu^{a_1+m+p-1}\nu^{a_2+m+n-1}\frac{(a_2)_{n+p}}{(b_1)_m(b_2)_{n+p}}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!}d\mu d\nu,$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede gerekli düzenlemeler yapılıp ve toplam sembolüyle integralin yerleri değiştirilirse,

$$H_A[a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp(-\mu-\nu)$$

$$.\,\mu^{a_1-1}\nu^{a_2-1}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_2)_{n+p}}{(b_1)_m(b_2)_{n+p}}\frac{(x_1\mu\nu)^m}{m!}\frac{(x_2\nu)^n}{n!}\frac{(x_3\mu)^p}{p!}d\mu d\nu,$$

eşitliği sağlanır. Böylece, (2.65) eşitliğini kolaylıkla elde edilir. (2.66) ve (2.67) ifadelerini, (2.60) ve (2.61) eşitliklerinde benzer işlemler yapılarak kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 2.8.2: Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonları H_A, H_B ve H_c nin integral gösterimleri aşağıdaki şekilde sırasıyla verilmiştir.

$$H_A[a_1,a_2,a_3;b_1,b_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_3)\Gamma(b_2-a_3)}\int_0^1\delta^{a_3-1}(1-\delta)^{b_2-a_3-1}$$

$$.\,(1-x_2\delta)^{-a_2}(1-x_3\delta)^{-a_1}\,{}_2F_1\left(a_1,a_2;b_1;\frac{x_1}{(1-x_2\delta)(1-x_3\delta)}\right)d\delta \qquad (2.68)$$

$$(Re(b_2)>\ Re(a_3)>0\,),$$

$$H_B[a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;x_1,x_2,x_3]=\frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\int_0^1\delta^{a_1-1}(1-\delta)^{a_2-1}$$

$$.\,X_4[a_1+a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;;x_1\delta(1-\delta),x_2(1-\delta),x_3\delta]d\delta \qquad (2.69)$$

$$(Re(a_1) > \ Re(a_2) > 0)\,,$$

$$H_C[a_1, a_2, a_3; b_1; x_1, x_2, x_3] = \frac{\Gamma(b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1 - a_1)} \int_0^1 \delta^{a_1-1}\,(1-\delta)^{b_1-a_1-1}$$

$$.\,(1 - x_1\delta)^{-a_2}(1 - x_3\delta)^{-a_3}\ {}_2F_1\left(a_2, a_3; b_1 - a_1; \frac{x_2(1-\delta)}{(1 - x_1\delta)(1 - x_3\delta)}\right) d\delta \quad (2.70)$$

$$(Re(b_1) > \ Re(a_1) > 0).$$

Burada X_4, [6, syf. 84] te verilen Exton un tanımlamış olduğu yirmi hipergeometrik fonksiyondan biri olup,

$$X_4[a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; ; x_1, x_2, x_3] = \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2m+n+p}(a_2)_{n+p}}{(b_1)_m(b_2)_n(b_3)_p} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!}$$

$$\left(r = |x_1|, s = |x_2|, t = |x_3|, 2\sqrt{r} + \left(\sqrt{s} + \sqrt{t}\right)^2 < 1\right)$$

dir.

İspat: Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu H_A nın bir diğer serisel göstremi olan

$H_A[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x_1, x_2, x_3]$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a_1)_m(a_2)_m}{(b_1)_m} F_1[a_3, a_2 + m, a_1 + m; b_2; x_2, x_3] \frac{{x_1}^m}{m!} \quad (2.71)$$

ifadesine [5, sy.77] de Picard tarafından verilen integral formülü

$$F_1[a_1, b_1, b_2; c_1; x_1, x_2] = \frac{\Gamma(c_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(c_1 - a_1)} \quad (2.72)$$

$$.\int_0^1 \sigma^{a_1-1}\,(1-\sigma)^{c_1-a_1-1}(1 - x_1\sigma)^{-b_1}(1 - x_2\sigma)^{-b_2} d\sigma$$

uygulanırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$H_A[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x_1, x_2, x_3]$

$$= \frac{\Gamma(b_2)}{\Gamma(a_3)\Gamma(b_2-a_3)} . \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 \delta^{a_3-1} (1-\delta)^{b_2-a_3-1} \frac{(a_1)_m (a_2)_m}{(b_1)_m}$$

$$. (1-x_2\delta)^{-a_2-m}(1-x_3\delta)^{-a_1-m} \frac{{x_1}^m}{m!} \, d\delta \tag{2.73}$$

elde edilir. (2.73) te (2.35) ifadesinden yararlanarak (2.68) eşitliği sağlanır.

Şimdi, Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu H_B nin serisel gösterimi olan (2.60) un sağ tarafını $(a_1+a_2)_{2m+n+p}$ ile çarpıp bölersek, aşağıdaki serisel ifade

$$H_B[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; x_1, x_2, x_3]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1+a_2)_{2m+n+p}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_m (b_2)_n (b_3)_p} \frac{(a_1)_{m+p}(a_2)_{m+n}}{(a_1+a_2)_{2m+n+p}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!} \tag{2.74}$$

$$= \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a_1+a_2)_{2m+n+p}(a_3)_{n+p}}{(b_1)_m (b_2)_n (b_3)_p} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!}$$

$$. B(a_1+m+p, a_2+m+n)$$

sağlanır. Daha sonra, (2.74) eşitliğinde (2.7) özelliğinden faydalanıp ve gerekli işlemler yapılarak istenilen sonuç (2.69) elde edilir.

Son olarak, (2.61) eşitliğinde (2.68) ifadesinin ispatı için kullandığımız benzer yöntemler uygulanırsa, (2.70) eşitliği kolaylıkla sağlanır. ■

3. TAM OLMAYAN GAUSS HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Bu bölümde, [4] te H.M. Srivastava, M.A. Chaudhry ve R.P. Agarwal tarafından ifade edilmiş olan ${}_2\gamma_1(z)$ ve ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonları ve bu fonksiyonların bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1: Tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonları

$$ {}_2\gamma_1[(a,x),b;c;z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,x)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad , \qquad c \neq 0,-1,-2,\dots \tag{3.1} $$

ve

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad , \ c \neq 0,-1,-2,\dots \tag{3.2} $$

olarak ifade edilmiştir. (3.1) ve (3.2) ifadelerinde (2.26) özelliğini kullanarak aşağıdaki ayrışma formülü

$$ {}_2\gamma_1[(a,x),b;c;z] + {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] $$
$$ = {}_2F_1(a,b;c;z) \tag{3.3} $$

sağlanır [4, syf.664].

Teorem 3.1: Tam olmayan hipergeometrik fonksiyonları ${}_2\gamma_1(z)$ ve ${}_2\Gamma_1(z)$ için aşağıdaki diferensiyel denklem sağlanır.

$$ z(1-z)\frac{d^2\omega}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{d\omega}{dz} - ab\omega = 0 \tag{3.4} $$

burada

$$ \omega = \omega(z) = {}_2\gamma_1[(a,x),b;c;z] + {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] $$

dir [4, syf.665].

İspat: (3.4) deki denklem, (3.3) ilişkisinden dolayı (2.28) de verilen Gauss hipergeometrik fonksiyonunun denkleminin bir sonucudur. ■

3.1 Tam Olmayan Gauss Hipergeometrik Fonksiyonlarının İntegral Gösterimleri

Bu bölümde (3.2) ile ifade edilmiş tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bazı integral gösterimlerini ele alacağız.

Teorem 3.1.1: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonu için aşağıdaki integral gösterimi mevcuttur [4, syf. 665].

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}\exp(-t)\,.\ {}_1F_1(b;c;zt)dt \tag{3.5} $$

$$ (x \geq 0;\ x = 0 \ iken \ Re(a) > 0\,) $$

dır.

İspat: Tam olmayan Pochhammer sembolünün integral gösterimi olan (2.25) i (3.2) ifadesinde yerine koyarsak,

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\int_x^\infty t^{a+n-1}\exp(-t)dt, \tag{3.6} $$

elde edilir. (3.6) eşitliğinin sağ tarafında mutlak yakınsaklıktan dolayı seri ve integral sembollerinin yerleri değiştirilirse,

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}\exp(-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(b)_n}{(c)_n}\frac{(zt)^n}{n!}dt $$

sağlanır. Böylece, bizden istenilen (3.5) ifadesi kolaylıkla elde edilir. ■

Hatırlatma 3.1.1: Özel olarak (3.5) ifadesinde $x = 0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonunun (2.33) deki integral gösterimi elde edilir [4, syf. 665].

Teorem 3.1.2: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonu için aşağıdaki integral gösterimi mevcuttur [4, syf. 673].

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{1}{B(b,c-b)} $$

$$.\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\ {}_0\Gamma_1[(a,x);-;zt]dt \qquad (3.7)$$

$$(x \geq 0;\ Re(c) > Re(b) > 0\ )$$

dır.

İspat: (2.7) eşitliğinde tanımlanan Beta fonksiyonu ve Pochhammer sembolünün aşağıda verilen özelliği

$$\frac{(b)_n}{(c)_n} = \frac{B(b+n,c-b)}{B(b,c-n)} = \frac{1}{B(b,c-n)}\int_0^1 t^{b+n-1}\,(1-t)^{c-b-1}dt$$

$$(Re(c) > Re(b) > 0; n \in N_0\ )$$

(3.2) de yerlerine konulursa ve seri düzgün yakınsak olduğundan dolayı gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$${}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{1}{B(b,c-b)}$$

$$.\int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a,x]_n(zt)^n}{n!}dt$$

sağlanır. Böylece istenilen sonuç(3.7) kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 3.1.3: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun $\gamma(s,x)$ tam olmayan Gamma fonksiyonu ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir [4, syf. 671].

$${}_2\Gamma_1[(a,x),b;b+1;-z] = \frac{bz^{-b}}{\Gamma(a)}\int_x^{\infty} t^{a-b-1}\exp(-t)\,.\,\gamma(b,zt)dt \qquad (3.8)$$

$$(x \geq 0;\ x = 0\ iken\ Re(a) > 0\,)$$

dır.

İspat: (3.5) eşitliğinde $c\ =\ b+1$ alınıp, z yerine $-z$ yazılısa

$${}_2\Gamma_1[(a,x),b;b+1;-z] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^{\infty} t^{a-1}\exp(-t)\,.\ {}_1F_1(b;b+1;-zt)dt \qquad (3.9)$$

sağlanır. (3.9) ifadesinde [2, syf. 127] de ifade edilen

$$ {}_1F_1(b; b+1; -z) = bz^{-b}\gamma(b, z) $$

özelliği kullanılarak, (3.8) eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 3.1.1: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun $erf(z)$ hata fonksiyonu ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir [4, syf. 672].

$$ {}_2\Gamma_1\left[(a, x), \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z\right] = \frac{1}{2\Gamma(a)}\sqrt{\frac{\pi}{z}}\int_x^\infty t^{a-\frac{3}{2}}\exp(-t) . erf\left(\sqrt{zt}\right)dt \qquad (3.10) $$

$$ (x \geq 0;\ x = 0\ iken\ Re(a) > 0\ ) $$

dır.

İspat: (3.8) de $b = \frac{1}{2}$ yazılıp ve [4, syf. 660] da verilen

$$ \gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) = \sqrt{\pi}\, erf\left(\sqrt{x}\right) $$

özelliği kullanılarak, (3.10) ifadesi elde edilir.

Teorem 3.1.3: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun $\Gamma(s, x)$ tam olmayan Gamma fonksiyonu ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir [4, syf. 672].

$$ {}_2\Gamma_1[(a, x), b; b; z] = {}_1\Gamma_0[(a, x), -; z] = \frac{(1-z)^{-a}}{\Gamma(a)}\Gamma(a, x(1-z)) \qquad (3.11) $$

$$ (x \geq 0;\ |z| < 1) $$

dir.

İspat: (3.5) eşitliğinde $c = b$ alınırsa,

$$ {}_2\Gamma_1[(a, x), b; b; z] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}\exp(-(1-z)t)\, dt \qquad (3.12) $$

$$ (Re(z) < 1; x \geq 0; x = 0\ iken\ Re(a) > 0) $$

sağlanır. (3.12) ifadesinde $t = \frac{\rho}{1-z}$ ve $dt = \frac{d\rho}{1-z}$ alınırsa

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;b;z] = \frac{(1-z)^{-a}}{\Gamma(a)} \int_{x(1-z)}^{\infty} \rho^{a-1} \exp(-\rho)\, d\rho $$

elde edilir. Böylece, (3.11) sonucu kolaylıkla sağlanır. ■

Sonuç 3.1.2: (3.10) eşitliğinde z yerine $1-z$ ve $a=\frac{1}{2}$ alınırsa, ${}_2\Gamma_1(z)$ nin $erfc(z)$ tamamlayıcı hata fonksiyonu ile olan ilişkisi aşağıdaki gibi mevcuttur [4, syf. 673].

$$ {}_2\Gamma_1\left[\left(\frac{1}{2},x\right),b;b;1-z\right] = {}_1\Gamma_0\left[\left(\frac{1}{2},x\right),-;1-z\right] = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2},xz\right) $$

$$ = \frac{1}{\sqrt{z}} erfc\left(\sqrt{xz}\right) \tag{3.13} $$

$$ (x \geq 0;\ |z| < 1,) $$

burada

$$ \Gamma\left(\frac{1}{2},x\right) = \sqrt{\pi} erfc\left(\sqrt{x}\right) $$

dir [4, syf. 660].

3.2 Tam Olmayan Gauss Hipergeometrik Fonksiyonlarının Türev Formülü

Bu bölümde (3.2) ile ifade edilmiş tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonunun türev formülü elde edilecektir.

Teorem 3.2.1: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun türev formülü aşağıdaki gibi mevcuttur [4, syf. 666].

$$ D_z^k\{{}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z]\} = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\ {}_2\Gamma_1[(a+k,x),b+k;c+k;z] \tag{3.14} $$

$$ (k \in \mathbb{N}_0). $$

Burada $D_z\ f = {}^{df}/_{dz}$ dir.

İspat: (3.2) ifadesinde z ye göre k kez türev alınırsa,

$$D_z^k\{\,_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z]\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a,x]_n(b)_n}{(c)_n}D_z^k\left\{\frac{z^n}{n!}\right\}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{[a,x]_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^{n-k}}{(n-k)!}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede n yerine $n+k$ yazılırsa,

$$D_z^k\{\,_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z]\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{n+k}(b)_{n+k}}{(c)_{n+k}}\frac{z^n}{n!} \tag{3.15}$$

(3.15) eşitliğinde (2.17) ve (2.27) özelliklerinden faydalanarak

$$D_z^k\{\,_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z]\} = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a+k,x]_n(b+k)_n}{(c+k)_n}\frac{z^n}{n!}$$

sağlanır. ■

Sonuç 3.2.1: Özel olarak (3.14) eşitliğinde $x=0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonu için türev formülü elde edilir [4, syf. 666].

3.3 Tam Olmayan Gauss Hipergeometrik Fonksiyonlarının Dönüşüm ve Rekürens Bağıntıları

Bu bölümde (3.2) ile ifade edilmiş tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonunun dönüşüm ve yineleme bağıntılarını vereceğiz.

Teorem 3.3.1: $_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun dönüşüm formülü aşağıdaki gibi sağlanır [4, syf. 666].

$$_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = (1-z)^{-a}\,_2\Gamma_1\left[\big(a,x(1-z)\big),c-b;c;-\frac{z}{1-z}\right] \tag{3.16}$$

İspat: (3.5) ifadesinde [2, syf.125] de ifade edilmiş olan Kummer fonksiyonunun birinci formülü

$$ {}_1F_1(b;c;z) = exp(z).\ {}_1F_1(c-b;c;-z) $$

yi kullanırsak,

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} \exp(-(1-z)t).\ {}_1F_1(c-b;c;-zt)dt \quad (3.17) $$

olur.(3.17) eşitliğinde $\delta = (1-z)t$ dönüşümü yapılırsa

$$ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{(1-z)^{-a}}{\Gamma(a)} $$

$$.\int_{x(1-z)}^\infty \delta^{a-1} \exp(-\delta).\ {}_1F_1\left(c-b;c;-\left(\frac{z}{1-z}\right)\delta\right)d\delta \quad (3.18) $$

elde edilir. Bu da bize (3.16) ifadesinin ispatını göstermektedir. ■

Sonuç 3.3.1: Özel olarak (3.16) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonu için dönüşüm formülünü sağlanır [2, syf.60].

Teorem 3.3.2: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun yineleme bağıntısı aşağıdaki gibi sağlanır [4, syf. 669].

$$ [b-(c-1)].\ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = b.\ {}_2\Gamma_1[(a,x),b+1;c;z] $$

$$ -(c-1).\ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c-1;z] \quad (3.19) $$

dir.

İspat: (3.5) ifadesinde [2, syf.124] de verilen ${}_1F_1$ konflüent hipergeometrik fonksiyonunun bir özelliği olan

$$ (c-b-1).\ {}_1F_1(b;c;z) = (c-1).\ {}_1F_1(b;c-1;z) - b.\ {}_1F_1(b+1;c;z) $$

yi uygularsak,

$$ (c-b-1).\ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} \exp(-t) $$

$$.\{(c-1).\ {}_1F_1(b;c-1;zt) - b.\ {}_1F_1(b+1;c;zt)\}dt \quad (3.20) $$

sağlanır. Böylece,(3.19) ifadesi kolaylıkla elde edilir. ■

Sonuç 3.3.2: Özel olarak (3.19) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonu için yineleme bağıntısına ulaşılır [4, syf. 670].

Teorem 3.3.3: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun bir diğer yineleme bağıntısı aşağıdaki gibi sağlanır [4, syf. 670].

$$\frac{az}{c}.\ {}_2\Gamma_1[(a+1,x),b+1;c+1;z] = {}_2\Gamma_1[(a,x),b+1;c;z] - {}_2\Gamma_1[(a,x),b;c;z] \quad (3.21)$$

dir.

İspat: Aşağıdaki eşitliği dikkate alırsak,

$$az.\ {}_2\Gamma_1[(a+1,x),b+1;c+1;z] = \frac{a}{\Gamma(a+1)}\int_x^\infty t^{a-1}\exp(-t)\left\{zt.\ {}_1F_1(b+1;c+1;zt)\right\}dt \quad (3.22)$$

dir. Şimdi, (3.22) eşitliğinde [4, syf.670] de verilen ${}_1F_1$ in aşağıda verilen özelliği

$$c.\ {}_1F_1(b;c;z) - c.\ {}_1F_1(b-1;c;z) = z.\ {}_1F_1(b;c+1;z)$$

kullanılırsa,

$$az.\ {}_2\Gamma_1[(a+1,x),b+1;c+1;z] = \frac{c}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}\exp(-t) .\left\{{}_1F_1(b+1;c;z) - {}_1F_1(b;c;z)\right\}dt \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) ifadesinin her iki tarafını c ile bölersek, (3.21) eşitliğinin sağlandığını görebiliriz. ■

Sonuç 3.3.2: Özel olarak (3.21) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonu için yineleme bağıntısı elde edilir [4, syf.671].

3.4 Tam Olmayan Gauss Hipergeometrik Fonksiyonlarının Doğurucu Fonksiyonları

Bu bölümde (3.2) ile ifade edilmiş tam olmayan Gauss hipergeometrik fonksiyonunun doğurucu fonksiyonlarını vereceğiz.

Teorem 3.4.1: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun doğurucu fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır [9, syf. 164].

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_m}{m!}.\ {}_2\Gamma_1[(a,x),\lambda+m;c;z]t^m = (1-t)^{-\lambda}.\ {}_2\Gamma_1\left[(a,x),\lambda;c;\frac{z}{1-t}\right] \quad (3.24)$$

$$(x \geq 0;\ |t| < 1, \lambda \in \mathbb{C})$$

dir.

İspat: (3.24) ifadesinin sol tarafını L ile sembolize edelim. (3.2) ifadesinde $b = \lambda + m$ alınıp, L ifadesinde yerine yazılırsa

$$L = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_m}{m!}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_n(\lambda+m)_n}{(c)_n}.\frac{z^n}{n!}\right]t^m \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) eşitliğinde (2.17) ve (2.18) özellikleri sırasıyla uygulanırsa

$$L = (1-t)^{-\lambda}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_n(\lambda)_n}{(c)_n\, n!}.\left(\frac{z}{1-t}\right)^n\right]$$

sağlanır. Böylece, bizden istenilen sonuç olan (3.24) ü kolaylıkla elde ederiz. ■

Sonuç 3.4.1: Özel olarak (3.24) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonu için verilen doğurucu fonksiyona ulaşılır [9, syf. 164].

Teorem 3.4.2: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun doğurucu fonksiyonu aşağıdaki gibi sağlanır [9, syf. 164].

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_m}{m!}.\ {}_2\Gamma_1[(a,x),-m;c;z]t^m = (1-t)^{-\lambda}.\ {}_2\Gamma_1\left[(a,x),\lambda;c;-\frac{zt}{1-t}\right] \quad (3.26)$$

dir.

İspat: Teorem 3.4.1 in ispatındaki gibi benzer işlemler sonucunda (3.26) ifadesi kolaylıkla sağlanır. ■

Sonuç 3.4.2: Özel olarak (3.26) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonu için verilen doğurucu fonksiyon elde edilir [9, syf. 164].

Teorem 3.4.3: ${}_2\Gamma_1(z)$ tam olmayan hipergeometrik fonksiyonunun doğurucu fonksiyonu aşağıdaki gibi sağlanır [9, syf. 165].

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+m-1}{m} .\ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;1-\alpha-m;z]t^m$$

$$= (1-t)^{-\alpha} .\ {}_2\Gamma_1[(a,x),b;1-\alpha;z(1-t)] \tag{3.27}$$

dır.

İspat: (3.27) ifadesinin sol tarafını M ile sembolize edelim. (3.2) ifadesinde $c = 1 - \alpha - m$ alınıp, M ifadesinde yerine yazılırsa

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+m-1}{m} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_n (b)_n}{(1-\alpha-m)_n} . \frac{z^n}{n!} \right] t^m \tag{3.28}$$

elde edilir. Şimdi, [1, 2] de verilen Pochhammer sembolünün özelliklerinden biri olan

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\ \Gamma(\alpha-k+1)} \quad ve \quad \frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^k}{(1-\alpha)_k}$$

kullanılarak,

$$(1-\alpha-m)_n = (1-\alpha)_n \binom{\alpha+m-1}{m} \binom{\alpha-n+m-1}{m}^{-1} \tag{3.29}$$

yazılabilir. (3.29) eşitliği (3.28) ifadesinde yerine konulursa

$$M = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_n (b)_n}{(1-\alpha)_n} . \frac{z^n}{n!} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha-n+m-1}{m} t^m \tag{3.30}$$

olur. (3.30) da aşağıdaki binom açılımı formülünü

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha - n + m - 1}{m} t^{\,m} = (1 - t)^{-\alpha + n}$$

uygularsak, (3.27) eşitliği sağlanır. ■

Sonuç 3.4.3: Özel olarak (3.27) eşitliğinde $x = 0$ alınırsa Gauss hipergeometrik fonksiyonu için verilen doğurucu fonksiyonelde edilir [9, syf. 165].

4. TAM OLMAYAN APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Bu bölümde (2.24) ve (2.25) ile ifade edilmiş olan tam olmayan Pochhammer sembolü $(\lambda, x)_n$ ve $[\lambda, x]_n$ yardımıyla oluşturulmuş tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonları ve bu fonksiyonların bazı özellikleri verilecektir.

4.1 Tam Olmayan Birinci Tip Appell Hipergeometrik Fonksiyonları

Bu kısımda, [10] da J. Choi, R.K. Parmar ve P. Chopra tarafından ifade edilmiş olan γ_1 ve Γ_1 tam olmayan birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonlarının bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.1.1: Tam olmayan birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$\gamma_1[(a,x), b_1, b_2; c; x_1, x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a,x)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{4.1}$$

ve

$$\Gamma_1[(a,x), b_1, b_2; c; x_1, x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{4.2}$$

olarak ifade edilmiştir [10, syf. 535]. (4.1) ve (4.2) ifadelerinde (2.26) özelliğini kullanarak aşağıdaki ayrışma formülü

$$\gamma_1[(a,x), b_1, b_2; c; x_1, x_2] + \Gamma_1[(a,x), b_1, b_2; c; x_1, x_2] = F_1[a, b_1, b_2; c; x_1, x_2] \tag{4.3}$$

elde edilir [10, syf. 535].

Teorem 4.1.1: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonları γ_1 ve Γ_1 in kısmi diferensiyel denklemleri aşağıdaki gibidir [10, syf. 534].

$$\begin{cases} x_1(1-x_1)\xi + x_2(1-x_1)\rho + [c_1-(a_1+b_1+1)x_1]\mu - b_1x_2\nu - a_1b_1\omega = 0 \\ x_2(1-x_2)\zeta + x_1(1-x_2)\rho + [c_1-(a_1+b_2+1)x_2]\nu - b_2x_1\mu - a_1b_2\omega = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Burada, $\mu = \frac{\partial}{\partial x_1}, \nu = \frac{\partial}{\partial x_2}, \rho = \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \xi = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}, \zeta = \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$ dir.

İspat:(4.4) denklemi, (4.3) ayrışma ilişkisinden dolayı (2.43) te verilen Appell hipergeometrik fonksiyonunun denkleminin bir sonucudur. ■

Teorem 4.1.2: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_1 in integral gösterimi aşağıdaki gibidir [10, syf. 535].

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2] = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}exp(-t)\,\boldsymbol{\Phi_2}[b_1,b_2;c;x_1t,x_2t]dt \tag{4.5}$$

$$(x \geq 0; max\{Re(x_1),Re(x_2)\} < 1; x = 0 \ iken \ Re(a) > 0.)$$

Burada, $\boldsymbol{\Phi_2}$ konflüent iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonu olup aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [1, 5, 6]

$$\boldsymbol{\Phi_2}[b_1,b_2;c;x_1t,x_2t] = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}$$

$$(x_1 < \infty, \qquad x_2 < \infty).$$

İspat: Tam olmayan Pochhammer sembolü $[a,x]_{m+n}$ nin (2.25) deki tanımı (4.2) ifadesinde yerine yazılırsa

$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\int_x^\infty t^{a+m+n-1}\exp(-t)\frac{(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}}.\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}dt \tag{4.6}$$

olur. (4.6) da mutlak yakınsaklıktan dolayı toplam ve integral ifadelerinin yerleri değiştirilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]$

$$=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^\infty t^{a-1}\exp(-t)\sum_{m,n=0}^\infty\frac{(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}}.\frac{(x_1t)^m}{m!}\frac{(x_2t)^n}{n!}dt$$

sağlanır. Yukarıdaki integral gösteriminden de görülmektedir ki, (4.5) in ispatını kolaylıkla elde edilir. ■

Sonuç 4.1.1: Özel olarak (4.5) eşitliğinde $x=0$ alınırsa birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu için verilen integral gösterimine ulaşılır [5, syf. 76].

Teorem 4.1.3: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_1 in integral gösterimi aşağıdaki gibi mevcuttur [10, syf. 537].

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]=\frac{1}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}$$

$$.\int_0^\infty\int_0^\infty u^{b_1-1}v^{b_2-1}\,exp(-u-v).\;{}_1\Gamma_1[(a,x);c;x_1u+x_2v]dudv \qquad (4.7)$$

$$(x\geq 0;\; x=0\; iken\; Re(b_1),Re(b_2)>0.)$$

dir.

İspat: (4.2) eşitliğindeki $(b_1)_n$ ve $(b_2)_n$ Pochhammer sembolleri için (2.16) daki gösterimden faydalanarak

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]=\frac{1}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}$$

$$.\sum_{m,n=0}^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty u^{b_1+m-1}v^{b_2+n-1}\,exp(-u-v)\frac{[a,x]_{m+n}}{(c)_{m+n}}.\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}dudv \qquad (4.8)$$

olur. (4.8) de mutlak yakınsaklıktan dolayı toplam ve integral ifadelerinin yerleri değiştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]=\frac{1}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}$$

$$.\int_0^\infty\int_0^\infty u^{b_1-1}v^{b_2-1}\,exp(-u-v)\sum_{N=0}^{\infty}\frac{[a,x]_N}{(c)_N}.\frac{(x_1u+x_2v)^N}{N!}dudv$$

elde edilir. Böylece, (4.7) ifadesi sağlanır. ■

Sonuç 4.1.2: Özel olarak (4.7) eşitliğinde $x=0$ alınırsa birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu için verilen integral gösterimine elde edilir [5, syf. 77].

Teorem 4.1.4: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_1 in integral gösterimi aşağıdaki gibi mevcuttur [10, syf. 538].

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2] = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\int_x^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-1}u^{b_1-1}v^{b_2-1}$$

$$.\,exp(-t-u-v).\;{}_0F_1[-;c;x_1ut+x_2vt]dtdudv \quad (4.9)$$

$$(x\geq 0;\; x=0\; iken\; Re(a)>0, Re(b_1), Re(b_2)>0.)$$

dir.

İspat: (4.7) deki gösterimde tam olmayan bir değişkenli konflüent hipergeometrik fonksiyonunun yerine [4, syf. 678] deki integral gösterimi

$${}_1\Gamma_1[(a,x);c;z] = \int_x^\infty t^{a-1}\exp(-t).\;{}_0F_1[-;c;zt]dt$$

yerine yazılırsa, bizden istenilen sonuç olan (4.9) u kolaylıkla elde ederiz. ■

Sonuç 4.1.3: Özel olarak (4.9) eşitliğinde $x=0$ alınırsa birinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonu için verilen integral gösterimi ile çakışır [5, 6].

[1, 2] den bilinmektedir ki Bessel fonksiyonu $\boldsymbol{J_\nu}(z)$ ve modifie Bessel fonksiyonu $\boldsymbol{I_\nu}(z)$ nin ${}_0F_1$ hipergeometrik fonksiyonu cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir

$$\boldsymbol{J_\nu}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\;{}_0F_1\left[-;\nu+1;-\frac{1}{4}z^2\right] \qquad (4.10)$$

ve

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\nu}}(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}\ {}_0F_1\left[-;\nu+1;\frac{1}{4}z^2\right]. \tag{4.11}$$

$$(\nu\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-)$$

Şimdi, (4.10) ve (4.11) ifadeleri (4.9) daki integral gösteriminde yerlerine yazılırsa **Sonuç 4.1.4** elde edilir.

Sonuç 4.1.4: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu $\Gamma_1(z)$ nin integral gösterimleri aşağıdaki gibi mevcuttur.

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c+1;-x_1,-x_2]\ =\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\int_x^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}t^{a-\frac{c}{2}-1}u^{b_1-1}v^{b_2-1}$$

$$.\,exp(-t-u-v)(x_1u+x_2v)^{-\frac{c}{2}}\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{c}}\left(2\sqrt{x_1ut+x_2vt}\right)dtdudv \tag{4.12}$$

ve

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c+1;x_1,x_2]\ =\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\int_x^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}t^{a-\frac{c}{2}-1}u^{b_1-1}v^{b_2-1}$$

$$.\,exp(-t-u-v)(x_1u+x_2v)^{-\frac{c}{2}}\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{c}}\left(2\sqrt{x_1ut+x_2vt}\right)dtdudv \tag{4.13}$$

dir [10, syf. 538].

Teorem 4.1.5: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_1 in türev formülü aşağıdaki gibidir [10, syf. 539].

$$D_{x_1,x_2}^{k+l}\{\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]\}=\frac{(a)_{k+l}(b_1)_k(b_2)_l}{(c)_{k+l}}$$

$$.\,\Gamma_1[(a+k+l,x),b_1+k,b_2+l;c+k+l;x_1,x_2] \tag{4.14}$$

$$(k,l\in\mathbb{N}_0).$$

Burada, $D_{x_1,x_2}f=\partial f/_{\partial x_1\partial x_2}$ dir.

İspat: (4.2) ifadesinde sırasıyla x_1 ve x_2 ye göre k kez ve l kez türev alınırsa,

$D_{x_1,x_2}^{k+l}\{\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]\}$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}}D_{x_1,x_2}^{k+l}\left\{\frac{x_1{}^m}{(m)!}\frac{x_2{}^n}{(n)!}\right\}$$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{n=l}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}}\frac{x_1{}^{m-k}}{(m-k)!}\frac{x_2{}^{n-l}}{(n-l)!}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede m yerine $m+k$ ve n yerine $n+l$ yazılırsa

$D_{x_1,x_2}^{k+l}\{\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]\}$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+n+k+l}(b_1)_{m+k}(b_2)_{n+l}}{(c)_{m+n+k+l}}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!} \tag{4.15}$$

sağlanır. (4.15) ifadesinde (2.17) ve (2.27) özelliklerinden faydalanarak

$$D_{x_1,x_2}^{k+l}\{\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]\}=\frac{(a)_{k+l}(b_1)_k(b_2)_l}{(c)_{k+l}}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a+k+l,x]_{m+n}(b_1+k)_m(b_2+l)_n}{(c+k+l)_{m+n}}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.1.6: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_1 in rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi mevcuttur [10, syf. 540].

$$\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c;x_1,x_2]=\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;c-1;x_1,x_2]$$

$$+\frac{ab_1x_1}{c(1-c)}\Gamma_1[(a+1,x),b_1+1,b_2;c+1;x_1,x_2]$$

$$+\frac{ab_2x_2}{c(1-c)}\Gamma_1[(a+1,x),b_1,b_2+1;c+1;x_1,x_2] \tag{4.16}$$

dir.

İspat: (4.9) da verilen integral gösteriminde [13, syf. 1786] da ifade edilmiş ve ${}_0F_1$ fonksiyonunun bir özelliği olan aşağıdaki eşitlik

$${}_0F_1[-;c-1;x]-{}_0F_1[-;c;x]-\frac{x}{c(1-c)}\cdot{}_0F_1[-;c+1;x]=0$$

kullanılırsa, bizden istenilen sonucu (4.16) kolaylıkla elde edilir.■

Teorem 4.1.7: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_1 in doğurucu fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{\lambda+p-1}{p} \Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;1-\lambda-p;x_1,x_2]t^p = (1-t)^{-\lambda}$$

$$.\,\Gamma_1[(a,x),b_1,b_2;1-\lambda;x_1(1-t),x_2(1-t)] \qquad (4.17)$$

$$(|t|<1).$$

İspat: (4.17) ifadesinin sol tarafını L harfi ile sembolize edelim. (4.2) ifadesinde $c = 1-\lambda-p$ alınıp, L ifadesinde yerine yazılırsa

$$L = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{\lambda+p-1}{p} \left[\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(1-\lambda-p)_{m+n}} . \frac{x_1{}^m}{m!} \frac{x_2{}^n}{n!} \right] t^p \qquad (4.18)$$

elde edilir. Şimdi, [1, 2] de verilen

$$\binom{\lambda}{k} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{k!\ \Gamma(\lambda-k+1)} \quad ve \quad \frac{\Gamma(\lambda-k)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{(-1)^k}{(1-\lambda)_k}$$

ifadeleri kullanılarak,

$$(1-\lambda-p)_n = (1-\lambda)_n \binom{\lambda+p-1}{p} \binom{\lambda-n+p-1}{p}^{-1} \qquad (4.19)$$

sağlanır. (4.19) eşitliği (4.18) ifadesinde yerine konulursa

$$L = \left[\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(1-\lambda)_{m+n}} . \frac{x_1{}^m}{m!} \frac{x_2{}^n}{n!} \right] \sum_{p=0}^{\infty} \binom{\lambda-m-n+p-1}{p} t^{\,p} \qquad (4.20)$$

olur. (4.20) de [1, syf.100] de ifade edilmiş olan binom açılımının aşağıdaki eşitliği kullanılırsa,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{\alpha-n-m+p-1}{p} t^{\,p} = (1-t)^{-\lambda+m+n}$$

olur. Böylece, (4.17) eşitliği elde edilir. ■

4.2 Tam Olmayan İkinci Tip Appell Hipergeometrik Fonksiyonları

Bu kısımda, [11] de A. Çetinkaya tarafından tanımlanmış γ_2 ve Γ_2 tam olmayan ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonlarının bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.2.1: Tam olmayan ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$\gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a,x)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{4.21}$$

ve

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \tag{4.22}$$

şeklinde ifade edilmiştir [11, syf. 8333]. (4.21) ve (4.22) ifadelerinde (2.26) özelliğini kullanarak aşağıdaki ayrışma formülü

$$\gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] + \Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] = F_2[a,b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] \tag{4.23}$$

elde edilir [11, syf. 8333].

Teorem 4.2.1: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonları γ_2 ve Γ_2 nin kısmi diferensiyel denklemleri aşağıdaki gibi mevcuttur [11, syf. 8333].

$$\begin{cases} x_1(1-x_1)\xi - x_1x_2\rho + [c_1-(a_1+b_1+1)x_1]\mu - b_1x_2\nu - a_1b_1\omega = 0 \\ x_2(1-x_2)\zeta - x_1x_2\rho + [c_2-(a_1+b_2+1)x_2]\nu - b_2x_1\mu - a_1b_2\omega = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Burada, $\mu = \frac{\partial}{\partial x_1}, \nu = \frac{\partial}{\partial x_2}, \rho = \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2}, \ \xi = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}, \zeta = \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}$ dir.

İspat: (4.24) denklemi, (4.23) deki ayrışma ilişkisinden dolayı (2.44) de verilen Appell hipergeometrik fonksiyonunun denkleminin bir sonucudur. ■

Teorem 4.2.2: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_2 nin integral gösterimi aşağıdaki gibidir [11, syf. 8333].

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]=\frac{1}{\Gamma(a)}$$

$$.\int_x^{\infty} t^{a-1}\exp(-t)\ {}_1F_1[b_1;c_1;x_1t]\ {}_1F_1[b_2;c_2;x_2t]dt \qquad (4.25)$$

$$(x\geq 0; x=0\ iken\ Re(a)>0).$$

İspat: Tam olmayan Pochhammer sembolü $[a,x]_{m+n}$ nin (2.25) deki integral gösterimini (4.22) de yerine yazılırsa,

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] \quad =\frac{1}{\Gamma(a)}$$

$$.\sum_{m,n=0}^{\infty}\int_x^{\infty} t^{a+m+n-1}\exp(-t)\frac{(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}.\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}dt \qquad (4.26)$$

olur. (4.26) da mutlak yakınsaklıktan dolayı toplam ve integral ifadelerinin yerleri değiştirilir ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2] \quad =\frac{1}{\Gamma(a)}$$

$$.\int_x^{\infty} t^{a-1}\exp(-t)\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}.\frac{(x_1t)^m}{m!}\frac{(x_2t)^n}{n!}dt$$

sağlanır. Yukarıdaki integral gösteriminden de görülmektedir ki (4.25) in ispatı kolaylıkla elde edilebilir. ■

Teorem 4.2.3: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_2 nin bir diğer integral gösterimi aşağıdaki gibidir [11, syf. 8335].

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]=\frac{1}{B(b_1,c_1-b_1)B(b_2,c_2-b_2)}$$

$$.\int_0^1\int_0^1 t^{b_1-1}u^{b_2-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}(1-u)^{c_2-b_2-1}$$

$$.(1-x_1t-x_2u)^{-a}\frac{\Gamma\big(a,x(1-x_1t-x_2u)\big)}{\Gamma(a)}dtdu \qquad (4.27)$$

$$\big(Re(c_j)>Re(b_j)>0, j=1,2\big)$$

dur.

İspat: (2.35) özelliğini (4.22) deki tanımda uygularsak

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]=\frac{1}{B(b_1,c_1-b_1)B(b_2,c_2-b_2)}$$

$$.\int_0^1\int_0^1 t^{b_1-1}u^{b_2-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}(1-u)^{c_2-b_2-1}$$

$$.\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;b_1,b_2;x_1t,x_2u]dtdu \qquad (4.28)$$

elde edilir. Sonra [11, syf. 8334] te verilen aşağıdaki formül

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;b_1,b_2;x_1,x_2]=(1-x_1-x_2)^{-a}\frac{\Gamma\big(a,x(1-x_1-x_2)\big)}{\Gamma(a)}$$

(4.28) de yerine yazılırsa, (4.27) ifadesi elde edilir. ■

Teorem 4.2.4: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_2 nin dönüşüm formülleri aşağıdaki gibi sağlanır [11, syf. 8334].

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]=(1-x_1)^{-a}$$

$$.\Gamma_2\left[\big(a,x(1-x_1)\big),c_1-b_1,b_2;c_1,c_2;-\frac{x_1}{1-x_1},\frac{x_2}{1-x_1}\right], \qquad (4.29)$$

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]=(1-x_2)^{-a}$$

$$.\Gamma_2\left[\big(a,x(1-x_2)\big),b_1,c_2-b_2;c_1,c_2;\frac{x_1}{1-x_2},-\frac{x_2}{1-x_2}\right], \qquad (4.30)$$

ve

$$\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]=(1-x_1-x_2)^{-a} \qquad (4.31)$$

$$. \Gamma_2 \left[\left(a, x(1-x_1-x_2)\right), c_1-b_1, c_2-b_2; c_1, c_2; -\frac{x_1}{1-x_1-x_2}, -\frac{x_2}{1-x_1-x_2} \right]$$

dir.

İspat: [2, syf. 125] te ifade edilmiş olan aşağıdaki eşitlik

$${}_1F_1[b;c;x] = \exp(x)\ {}_1F_1[c-b;c;-x]$$

(4.25) te yerine yazılırsa

$$\Gamma_2[(a,x), b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2] = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} \exp(-(1-x_1)t)$$

$$.\ {}_1F_1[c_1-b_1; c_1; -x_1 t]\ {}_1F_1[b_2; c_2; x_2 t] dt \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.32) de $(1-x_1)t$ yerine μ konulursa, bizden istenilen sonuç (4.29) sağlanır. (4.30) ve (4.31) ifadelerine, yukarıdaki gibi benzer işlemler uygulanması sonucunda bizden istenilen sonuçlar kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 4.2.5: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_2 nin türev formülü aşağıdaki gibidir.

$$D_{x_1, x_2}^{k+l} \{\Gamma_2[(a,x), b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2]\} = \frac{(a)_{k+l}(b_1)_k(b_2)_l}{(c_1)_k(c_2)_l}$$

$$. \Gamma_2[(a+k+l, x), b_1+k, b_2+l; c_1+k, c_2+l; x_1, x_2] \tag{4.33}$$

$$(k, l \in \mathbb{N}_0).$$

Burada, $D_{x_1, x_2} f = {}^{\partial f}/_{\partial x_1 \partial x_2}$ dir.

İspat: (4.22) de x_1 ve x_2 ye göre sırasıyla k kez ve l kez türev alınırsa,

$$D_{x_1, x_2}^{k+l} \{\Gamma_2[(a,x), b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2]\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} D_{x_1, x_2}^{k+l} \left\{ \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \right\}$$

$$= \sum_{m=k}^{\infty} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n} \frac{{x_1}^{m-k}}{(m-k)!} \frac{{x_2}^{n-l}}{(n-l)!}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede m yerine $m+k$ ve n yerine $n+l$ yazılırsa

$$D_{x_1,x_2}^{k+l}\{\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]\}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+n+k+l}(b_1)_{m+k}(b_2)_{n+l}}{(c_1)_{m+k}(c_2)_{n+l}}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!} \tag{4.34}$$

sağlanır. (4.34) ifadesinde (2.17) ve (2.27) özelliklerinden faydalanarak

$$D_{x_1,x_2}^{k+l}\{\Gamma_2[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2]\}=\frac{(a)_{k+l}(b_1)_k(b_2)_l}{(c_1)_k(c_2)_l}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[a+k+l,x]_{m+n}(b_1+k)_m(b_2+l)_n}{(c_1+k)_m(c_2+l)_n}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.6: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_2 nin sonlu toplam formülü aşağıdaki gibi sağlanır [11, syf. 8335].

$$\sum_{k=0}^{n}\Gamma_2[(a,x),-k,k+n;1,1;x_1,x_2]=(n+1).\ {}_2\Gamma_1[(a,x),-n;2;x_1+x_2] \tag{4.35}$$

dir.

İspat: Laguerre polinomları için [2, syf. 209] da verilen aşağıdaki ilişkiler

$$L_n^{\alpha}(x)=\binom{n+\alpha}{n}\Phi(-n,\alpha+1;x)=\frac{(-1)^n}{n!}\Psi(-n-\alpha;1-\alpha;x) \tag{4.36}$$

ve

$$\sum_{m=0}^{n}L_m^{\alpha}(x)\,L_{n-m}^{\beta}(y)=L_n^{\alpha+\beta+1}(x+y) \tag{4.37}$$

ele alınıp, (4.35) te yerine konulursa

$$\sum_{k=0}^{n}\Gamma_2[(a,x),-k,k+n;1,1;x_1,x_2]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{n} \int_{x}^{\infty} t^{a-1} \exp(-t).\ {}_1F_1[-k;1;x_1 t].\ {}_1F_1[k+n;1;x_2 t]dt \tag{4.38}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{x}^{\infty} t^{a-1} \exp(-t) \left\{ \sum_{k=0}^{n} L_k^0(x_1 t)\, L_{n-k}^0(x_2 t) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{x}^{\infty} t^{a-1} \exp(-t) \left\{ \sum_{k=0}^{n} L_n^1\big((x_1 + x_2)t\big) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_{x}^{\infty} t^{a-1} \exp(-t)\, .\ {}_1F_1[-n;2;x_1 + x_2]dt$$

olur. Son olarak (4.38) deki eşitikte (3.5) integral gösterimi göz önüne alınarak, (4.35) kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 4.2.7: Tam olmayan Appell hipergeometrik fonksiyonu Γ_2 nin bir diğer sonlu toplam formülü aşağıdaki gibidir [11, syf. 8336].

$$\sum_{k=0}^{n} \Gamma_2 \left[(a,x), -k, k+n; 1,1; \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$= (n+1) \left\{ \frac{\Gamma(2-a+n)}{\Gamma(2-a)\Gamma(2+n)} - \frac{x^a}{\Gamma(a+1)}.\ {}_2F_2[2+n, a; 2, a+1; -x] \right\} \tag{4.39}$$

dir.

İspat: (4.25) eşitliğinde $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ alınır ve [4, syf. 667] deki

$${}_2\Gamma_1[(a,x), b; c; 1] = \left\{ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} - \frac{x^a}{\Gamma(a+1)}.\ {}_2F_2[c-b, a; c, a+1; -x] \right\}$$

ifade göz önüne alınırsa, (4.39) sağlanır.

5. TAM OLMAYAN SRİVASTAVA HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI

Bu bölümde (2.24) ve (2.25) ile ifade edilmiş tam olmayan Pochhammer sembolü $(\lambda, x)_n$ ve $[\lambda, x]_n$ yardımıyla oluşturulmuş tam olmayan Srivastava hipergeometrik fonksiyonları ve bu fonksiyonların bazı özellikleri verilecektir.

5.1. γ_A^H ve Γ_A^H Tam Olmayan Srivastava Üçlü Hipergeometrik Fonksiyonları

Bu kısımda, [12] de J. Choi ve R.K. Parmar tarafından ifade edilmiş olan γ_A^H ve Γ_A^H tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonlarının birtakım özellikleri verilmiştir.

Tanım 5.1.1: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonları

$$\gamma_A^H[(a,x), b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2, x_3]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a,x)_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!} \qquad (5.1)$$

ve

$$\Gamma_A^H[(a,x), b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2, x_3]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!} \qquad (5.2)$$

olarak tanımlanmıştır [12, syf. 194]. (5.1) ve (5.2) ifadelerinde (2.26) özelliğini kullanarak aşağıdaki ayrışma formülü

$$\gamma_A^H[(a,x), b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2, x_3] + \Gamma_A^H[(a,x), b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2, x_3]$$

$$= H_A\ [a, b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2, x_3] \qquad (5.3)$$

elde edilir [12, syf. 194].

Teorem 5.1.1: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonları γ_A^H ve Γ_A^H nın kısmi diferensiyel denklemleri aşağıdaki gibi mevcuttur [12, syf. 194].

$$\begin{cases} [\theta(\theta+b_1-1)-x_1(\theta+\Phi+a_1)(\theta+\Psi+a_2)]u=0 \\ [\Psi(\Psi+\Phi+b_2-1)-x_2(\theta+\Psi+a_2)(\Psi+\Phi+a_3)]u=0 \\ [\Phi(\Psi+\Phi+b_2-1)-x_3(\theta+\Phi+a_1)(\Psi+\Phi+a_3)]u=0. \end{cases} \tag{5.4}$$

Burada, $\theta=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \Psi=x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \Phi=x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$ ve $u=\gamma_A^H+\Gamma_A^H=H_A$ dır.

İspat: (5.4) diferensiyel denklemi, (5.3) ayrışma ilişkisinden dolayı (2.61) de verilen Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonunun denkleminin bir sonucudur. ■

Teorem 5.1.2: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın integral gösterimi aşağıdaki gibi sağlanır [12, syf. 195].

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)}\int_x^\infty\int_0^\infty t^{a-1}s^{b_1-1}e^{-t-s} \tag{5.5}$$

$$\cdot\ {}_0F_1[-;c_1;tsx_1].\ {}_1F_1[b_2;c_2;sx_2+tx_3]dtds$$

$$(x\geq 0;\ x=0\ iken\ max\{Re(x_2),Re(x_3)\}<1, min\{Re(a),Re(b_1)\}>0\ ).$$

Burada, ${}_1F_1$ (2.33) te ifade edilen konflüent hipergeometrik fonksiyondur [1, syf. 36].

İspat: (2.25) te tanımlı olan tam olmayan Pochhammer sembolü ve (2.21) de ifade edilen Pochhammer sembolünün özellikleri (5.2) de yerlerine yazılırsa,

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)}$$

$$\cdot\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\int_0^x\int_0^\infty t^{a+m+p-1}s^{b_1+m+n-1}e^{-t}\frac{(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!}dtds$$

olur. Yukarıdaki ifadede yakınsaklıktan dolayı toplam ve integral sembollerinin yerleri değiştirilirse, (5.5) ifadesi kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 5.1.3: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın integral gösterimi aşağıdaki gibi sağlanır [12, syf. 195].

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \tag{5.6}$$

$$\int_x^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty t^{a-1}\, s^{b_1-1} u^{b_2-1} e^{-t-s}$$

$$\cdot\ {}_0F_1[-;c_1;tsx_1].\ {}_0F_1[-;c_2;sux_2+tux_3]dtdsdu$$

$$(x \geq 0;\ x = 0\ iken\ \ min\{Re(a), Re(b_1), Re(b_2)\} > 0\ ).$$

İspat: [2, syf. 678] de verilen aşağıdaki formülü

$${}_1F_1[b;c;z] = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty t^{b-1}e^{-t}\ {}_0F_1[-;c;zt]dt$$

(5.5) teki integral gösteriminde yerine yazılırsa, bizden istenilen sonuç olan (5.6) kolaylıkla sağlanır. ■

Teorem 5.1.4: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın türev formülü aşağıdaki gibi sağlanır [12, syf. 198].

$$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]\} \tag{5.7}$$

$$= \frac{(a)_{r+t}(b_1)_{r+s}(b_2)_{s+t}}{(c_1)_r(c_2)_{s+t}}$$

$$.\,\Gamma_A^H[(a+r+t,x),b_1+r+s,b_2+s+t;c_1+r,c_2+s+t;x_1,x_2,x_3].$$

$$(r,s,t \in \mathbb{N}_0).$$

Burada, $D_{x_1,x_2,x_3}f = {}^{\partial f}\!/_{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$ dür.

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonunun (5.2) deki tanımında sırasıyla x_1, x_2 ve x_3 e göre r, s ve t kez türevi alınırsa

$$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]\}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}} D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\left\{\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!}\right\}$$

$$= \sum_{m=r}^{\infty}\sum_{n=s}^{\infty}\sum_{p=t}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}}\frac{{x_1}^{m-r}}{(m-r)!}\frac{{x_2}^{n-s}}{(n-s)!}\frac{{x_3}^{p-t}}{(p-t)!} \quad (5.8)$$

olur. (5.8) de m yerine $m+r$, n yerine $n+s$ ve p yerine $p+t$ yazılırsa

$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]\}$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p+r+t}(b_1)_{m+n+r+s}(b_2)_{n+p+s+t}}{(c_1)_{m+r}(c_2)_{n+p+s+t}}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!} \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.9) da Pochammer sembolünün (2.17) ve (2.27) de verilen özelliğinden faydalanarak

$$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]\} = \frac{(a)_{r+t}(b_1)_{r+s}(b_2)_{s+t}}{(c_1)_r(c_2)_{s+t}}$$

$$.\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[a+r+t,x]_{m+p}(b_1+r+s)_{m+n}(b_2+s+t)_{n+p}}{(c_1+r)_m(c_2+s+t)_{n+p}}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!}$$

sağlanır. ■

Teorem 5.1.5: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın yineleme formülü aşağıdaki gibi mevcuttur [12, syf. 198].

$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]$ (5.10)

$$= \Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1-1,c_2;x_1,x_2,x_3]$$

$$+\frac{ab_1x_1}{c_1(1-c_1)}\Gamma_A^H[(a+1,x),b_1+1,b_2;c_1+1,c_2;x_1,x_2,x_3]$$

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın (5.5) te bulunan integral gösteriminde, [1, syf.198] de verilen aşağıdaki formül

$${}_0F_1[-;c_1-1;x_1] - {}_0F_1[-;c_1;x_1] - \frac{ab_1x_1}{c_1(1-c_1)}.\ {}_0F_1[-;c_1+1;x_1] = 0$$

yerine yazılırsa, bizden istenilen sonuç olan (5.10) kolaylıkla elde edilir.■

Teorem 5.1.6: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın yineleme formülü aşağıdaki gibi mevcuttur [12, syf. 198].

$$(b_2+c_2-1)\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] \tag{5.11}$$

$$=b_2\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2+1;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]$$

$$-(c_2-1)\Gamma_A^H[(a+1,x),b_1+1,b_2;c_1,(c_2-1);x_1,x_2,x_3]$$

İspat: (5.11) ifadesinin sağ tarafındaki ilk ifade

$$b_2\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2+1;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{b_2\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \tag{5.12}$$

$$.\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}\Gamma(b_1+m+n)\Gamma(b_2+1+n+p)}{\Gamma(c_1+m)\Gamma(c_2+n+p)}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!}\frac{x_3{}^p}{p!}$$

$$=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}\Gamma(b_1+m+n)\Gamma(b_2+n+p)}{\Gamma(c_1+m)\Gamma(c_2+n+p)}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!}\frac{x_3{}^p}{p!}$$

$$.(b_2+n+p)$$

ve sağ yanındaki ikinci ifade

$$(c_2-1)\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,(c_2-1);x_1,x_2,x_3]=\frac{(c_2-1)\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)} \tag{5.13}$$

$$.\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}\Gamma(b_1+m+n)\Gamma(b_2+n+p)}{\Gamma(c_1+m)\Gamma(c_2-1+n+p)}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!}\frac{x_3{}^p}{p!}$$

$$=\frac{\Gamma(c_1)\Gamma(c_2)}{\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}\Gamma(b_1+m+n)\Gamma(b_2+n+p)}{\Gamma(c_1+m)\Gamma(c_2-1+n+p)}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!}\frac{x_3{}^p}{p!}$$

$$.(c_2-1+n+p)$$

şeklinde yazılabilir. (5.12) ifadesi ile (5.13) taraf tarafa çıkarılırsa, (5.11) ifadesi kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 5.1.7: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın dönüşüm formülü aşağıdaki gibi sağlanır [12, syf. 197].

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = (1-x_2)^{-b_1}(1-x_3)^{-a} \tag{5.14}$$
$$.\,\Gamma_A^H\left[(a,(1-x_3)),b_1,c_2-b_2;c_1,c_2;\frac{x_1}{(1-x_2)(1-x_3)},\frac{x_2}{(1-x_2)},\frac{x_3}{(1-x_3)}\right]$$

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın (5.5) te bulunan integral gösteriminde, [2, syf. 125] te verilen aşağıdaki Kummer formülü

$$_1F_1[a;b;z] = \exp(z).\ {}_1F_1[b-a;b;-z]$$

yerine konulursa, bizden istenilen sonuç (5.14) elde edilir. ■

Teorem 5.1.8: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın indirgeme formülü aşağıdaki gibi mevcuttur [12, syf. 197].

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,c_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = (1-x_2)^{-b_1}(1-x_3)^{-a} \tag{5.15}$$
$$.\ {}_2\Gamma_1\left[(a,x(1-x_3)),b_1;c_1;\frac{x_1}{(1-x_2)(1-x_3)}\right].$$

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın (5.5) te bulunan integral gösteriminde $c_2 = b_2$ ve $_1F_1[c_2;c_2;sx_2,tx_3] = e^{sx_2+tx_3}$ yazılırsa

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,c_2;c_1,c_2;x_2x_3,x_2,x_3] = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)}\int_{x(1-x_3)}^{\infty}\int_0^{\infty} t^{a-1}\,s^{b_1-1} \tag{5.16}$$
$$.\,e^{-(1-x_3)t-(1-x_2)s}\ {}_0F_1[-;c_1;tsx_2x_3]\,dtds$$

olur. Son olarak (5.16) da $t(1-x_3) = u$ ve $s(1-x_2) = v$ dönüşümü yapılırsa ve gerekli düzenlemelerden sonra bizden istenilen (5.15) elde edilir. ■

Şimdi ise yukarıdaki formüllere ek olarak, yazar tarafından γ_A^H ve Γ_A^H tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonları için elde edilmiş olan bazı formüller verilecektir.

Teorem 5.1.9: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın integral gösterimleri aşağıdaki gibi sağlanır.

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{B(b_1,s-b_1)}$$

$$.\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{s-b_1-1}\Gamma_A^H[(a,x),s,b_2;c_1,c_2;tx_1,tx_2,x_3]dt \quad (5.17)$$

$$(x \geq 0;\ Re(s) > \ Re(b_1) > 0),$$

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{B(b_2,s-b_2)}$$

$$.\int_0^1 t^{b_2-1}(1-t)^{s-b_2-1}\Gamma_A^H[(a,x),b_1,s;c_1,c_2;x_1,tx_2,tx_3]dt \quad (5.18)$$

$$(x \geq 0;\ Re(s) > \ Re(b_2) > 0)$$

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{B(s,c_1-s)}$$

$$.\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{c_1-s-1}\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;s,c_2;tx_1,x_2,x_3]dt \quad (5.19)$$

$$(x \geq 0;\ Re(c_1) > Re(s) > 0)$$

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{B(s,c_2-s)}$$

$$.\int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{c_2-s-1}\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,s;x_1,tx_2,tx_3]dt \quad (5.20)$$

$$(x \geq 0;\ Re(c_2) > Re(s) > 0)$$

İspat: (5.2) deki eşitliğin sağ tarafında pay ve paydayı $(s)_{m+n}$ ile çarpıp bölersek,

$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(s)_{m+n}[a,x]_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(s)_{m+n}(c_1)_m(c_2)_{n+p}} \frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!} \quad (5.21)$$

elde edilir. (5.21) de (2.35) özelliği uygulanıp ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{B(b_1,s-b_1)}\int_0^1 t^{b_1-1}(1-t)^{s-b_1-1}$$

$$.\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}(s)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}}\frac{(tx_1)^m}{m!}\frac{(tx_2)^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, (5.17) ifadesi kolaylıkla elde edilir. (5.18) − (5.20) eşitlikleri de benzer şekilde ispatlanır. ■

[1, syf. 39-40] dan bilinmektedir ki, Weber parabolik silindir fonksiyonu $\boldsymbol{D_\nu}(z)$, Hermite polinomu $\boldsymbol{H_\nu}(z)$ ve Whittaker fonksiyonu $\boldsymbol{M_{k,m}}(z)$ nin ${}_1F_1$ ve ${}_0F_1$ hipergeometrik fonksiyonları türünden aşağıdaki gibi ifadeleri mevcuttur.

$$\boldsymbol{D_\nu}(z) = 2^{\frac{\nu}{2}}exp\left(-\frac{1}{4}z^2\right)\ {}_1F_1\left[-\frac{1}{2}\nu;\frac{1}{2};\frac{1}{2}z^2\right] \tag{5.22}$$

$$\boldsymbol{H_\nu}(z) = 2^{-\frac{1}{2}n}exp\left(\frac{1}{2}z^2\right)\boldsymbol{D_\nu}\left(z\sqrt{2}\right) \tag{5.23}$$

ve

$$\boldsymbol{M_{k,m}}(z) = 2^{m+\frac{1}{2}}exp\left(-\frac{1}{2}z\right)\ {}_1F_1\left[m-k+\frac{1}{2};2m+1;z\right] \tag{5.24}$$

dir. Şimdi, (4.10) ve (4.11) i (5.5) te, (5.22) i (5.5) te, (5.23) yi (5.5) te ve (5.24) ü (5.5) te sırasıyla uygularsak **Sonuç 5.1.1** - **Sonuç 5.1.4** de verilen integral gösterimlerini elde edebiliriz.

Sonuç 5.1.1: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın integral gösterimleri aşağıdaki gibi sağlanır.

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1+1,c_2;-x_1,x_2,x_3] = \frac{{x_1}^{-\frac{1}{2}c_1}\Gamma(c_1+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \tag{5.25}$$

$$.\int_x^\infty\int_0^\infty t^{a-\frac{1}{2}c_1-1}\,s^{a-\frac{1}{2}b_1-1}e^{-t-s}$$

$$.\ \boldsymbol{J_\nu}\left[2\sqrt{tsx_1}\right].\ {}_1F_1[b_2;c_2;sx_2+tx_3]dtds$$

ve

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1+1,c_2;x_1,x_2,x_3]=\frac{x_1^{-\frac{1}{2}c_1}\Gamma(c_1+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \tag{5.26}$$

$$.\int_x^\infty\int_0^\infty t^{a-\frac{1}{2}c_1-1}\, s^{a-\frac{1}{2}b_1-1}e^{-t-s}$$

$$.\ \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{\nu}}\left[2\sqrt{tsx_1}\right].\ {}_1F_1[b_2;c_2;sx_2+tx_3]dtds.$$

Sonuç 5.1.2: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın integral gösterimi aşağıdaki gibi sağlanır.

$$\Gamma_A^H\left[(a,x),b_1,-\frac{1}{2}b_2;c_1+1,-\frac{1}{2};-x_1,x_2,x_3\right]=\frac{2^{-\frac{1}{b_2}}x_1^{-\frac{1}{2}c_1}\Gamma(c_1+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \tag{5.27}$$

$$.\int_x^\infty\int_0^\infty t^{a-\frac{1}{2}c_1-1}\, s^{a-\frac{1}{2}b_1-1}e^{-t\left(1-\frac{1}{2}x_3\right)-s\left(1-\frac{1}{2}x_2\right)}$$

$$.\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\nu}}[2\sqrt{tsx_1}]\boldsymbol{D}_{b_2}\left(\sqrt{2(sx_2+tx_3)}\right)dtds.$$

Sonuç 5.1.3: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın integral gösterimi aşağıdaki gibi sağlanır.

$$\Gamma_A^H\left[(a,x),b_1,-\frac{1}{2}b_2;c_1+1,-\frac{1}{2};-x_1,x_2,x_3\right]=\frac{x_1^{-\frac{1}{2}c_1}\Gamma(c_1+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \tag{5.28}$$

$$.\int_x^\infty\int_0^\infty t^{a-\frac{1}{2}c_1-1}\, s^{a-\frac{1}{2}b_1-1}e^{-t-s}$$

$$.\ \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\nu}}[2\sqrt{tsx_1}]\boldsymbol{H}_{b_2}(sx_2+tx_3)dtds$$

Sonuç 5.1.4: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın integral gösterimleri aşağıdaki gibi sağlanır.

$$\Gamma_A^H\left[(a,x),b_1,c_2-b_2+\frac{1}{2};c_1+1,-\frac{1}{2};-x_1,x_2,x_3\right]=\frac{x_1^{-\frac{1}{2}c_1}\Gamma(c_1+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \tag{5.29}$$

$$.\int_{x}^{\infty}\int_{0}^{\infty} t^{a-\frac{1}{2}c_1-1}\, s^{a-\frac{1}{2}b_1-1} e^{-t\left(1-\frac{1}{2}x_3\right)-s\left(1-\frac{1}{2}x_2\right)}$$

$$.\,(sx_2+tx_3)^{-\left(c_2+\frac{1}{2}\right)} \boldsymbol{J_\nu}\left[2\sqrt{tsx_1}\right]\boldsymbol{M}_{b_2,c_2}(sx_2+tx_3)dtds$$

ve

$$\Gamma_A^H\left[(a,x),b_1,c_2-b_2+\frac{1}{2};c_1+1,-\frac{1}{2};x_1,x_2,x_3\right]=\frac{x_1^{-\frac{1}{2}c_1}\Gamma(c_1+1)}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \quad (5.30)$$

$$.\int_{x}^{\infty}\int_{0}^{\infty} t^{a-\frac{1}{2}c_1-1}\, s^{a-\frac{1}{2}b_1-1} e^{-t\left(1-\frac{1}{2}x_3\right)-s\left(1-\frac{1}{2}x_2\right)}$$

$$.\,(sx_2+tx_3)^{-\left(c_2+\frac{1}{2}\right)} \boldsymbol{I_\nu}\left[2\sqrt{tsx_1}\right]\boldsymbol{M}_{b_2,c_2}(sx_2+tx_3)dtds.$$

Teorem 5.1.10: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın Mellin-Barnes integral gösterimleri aşağıdaki gibi mevcuttur.

$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma_2\left[(a,x),b_1+n,b_2+n;c_1,c_2+n;x_1,x_3\right]$$

$$.\frac{(b_1)_n(b_2)_n}{(c_2)_n}\Gamma(-n)(-x_2)^n dn, \quad (5.31)$$

$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} {}_2\Gamma_1\left[(a+m,x),b_2+n;c_2+n;x_3\right]$$

$$.\frac{(a)_m(b_1)_{m+n}(b_2)_n}{(c_1)_m(c_2)_n}\Gamma(-m)\Gamma(-n)(-x_1)^m(-x_2)^n dmdn \quad (5.32)$$

ve

$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3]$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{(a,x)_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_{n+p}}$$

$$.\Gamma(-m)\Gamma(-n)\Gamma(-p)(-x_1)^m(-x_2)^n(-x_3)^p dmdndp. \quad (5.33)$$

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonunun (5.2) deki tanımından faydalanılarak

$$\Gamma_A^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2;x_1,x_2,x_3] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b_1)_n(b_2)_n}{(c_2)_n}$$

$$.\Gamma_2[(a,x),b_1+n,b_2+n;c_1,c_2+n;x_1,x_3]\frac{{x_2}^n}{n!} \quad (5.34)$$

elde edilir. Daha sonra, [4, syf. 667] de verilen integral formülü

$${}_2F_1[a,b;c;x] = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\Gamma(-n)(-x)^n dn$$

(5.34) te yerine yazılırsa, (5.31) eşitliği sağlanır. Benzer yöntemlerle (5.32) ve (5.33) ifadeleri kolaylıkla elde edilebilir. ■

5.2. γ_B^H ve Γ_B^H Tam Olmayan Srivastava Üçlü Hipergeometrik Fonksiyonları

Bu kısımda, [13] te J. Choi ve R.K. Parmar tarafından ifade edilmiş olan γ_B^H ve Γ_B^H tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonlarının özellikleri verilmiştir.

Tanım 5.2.1: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonları

$$\gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(a,x)_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!} \quad (5.35)$$

ve

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{[a,x]_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p} \frac{{x_1}^m}{m!} \frac{{x_2}^n}{n!} \frac{{x_3}^p}{p!} \qquad (5.36)$$

olarak tanımlanmıştır [13, syf. 1781]. (5.35) ve (5.36) ifadelerinde (2.26) özelliğini kullanarak aşağıdaki ayrışma formülü

$$\gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3] + \Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]$$
$$= H_B\ [a,b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3] \qquad (5.37)$$

elde edilir [13, syf. 1781].

Teorem 5.2.1: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonları γ_B^H ve Γ_B^H nin kısmi diferensiyel denklemleri aşağıdaki gibi mevcuttur [13, syf. 1781].

$$\begin{cases} [\theta(\theta+b_1-1) - x_1(\theta+\Phi+a_1)(\theta+\Psi+a_2)]u = 0 \\ [\Psi(\Psi+b_2-1) - x_2(\theta+\Psi+a_2)(\Psi+\Phi+a_3)]u = 0 \\ [\Phi(\Phi+b_3-1) - x_3(\theta+\Phi+a_1)(\Psi+\Phi+a_3)]u = 0. \end{cases} \qquad (5.38)$$

Burada, $\theta = x_1 \frac{d}{dx_1}$, $\Psi = x_2 \frac{d}{dx_2}$,$\Phi = x_3 \frac{d}{dx_3}$ ve $u = \gamma_B^H + \Gamma_B^H = H_B$ dir.

İspat: (5.38) denklemi, (5.37) ayrışma ilişkisinden dolayı (2.62) de verilen Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonunun denkleminin bir sonucudur. ■

Teorem 5.2.2: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin integral gösterimi aşağıdaki gibidir [13, syf. 1782].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \int_x^\infty \int_0^\infty t^{a-1}\, s^{b_1-1} e^{-t-s} \qquad (5.39)$$
$$\cdot\ {}_0F_1[-;c_1;tsx_1]\Psi_2[b_2;c_2,c_3;sx_2,tx_3]dtds$$
$$(x \geq 0;\ x = 0\ iken\ \ Re(x_2) < 1, Re(x_3) < 1, Re(a) > 0, Re(b_1) > 0\ ).$$

Burada, Ψ_2 iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonların konflüent formlarından biridir [1, 6].

İspat: (2.25) te tanımlı olan tam olmayan Pochhammer sembolü ve (2.21) de ifade edilen Pochhammer sembolünün özellikleri (5.36) da yerlerine yazılırsa,

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)}$$

$$.\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\int_0^x\int_0^\infty t^{a+m+p-1}\,s^{b_1+m+n-1}\,e^{-t}\,\frac{(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!}\frac{x_3{}^p}{p!}dtds$$

olur. Yukarıdaki ifadede yakınsaklıktan dolayı toplam ve integral sembollerinin yerleri değiştirilirse, (5.39) ifadesi kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 5.2.3: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin integral gösterimi aşağıdaki gibi sağlanır [13, syf. 1782].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3] \tag{5.40}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}\int_x^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-1}\,s^{b_1-1}u^{b_2-1}e^{-t-s-u}$$

$$.\ {}_0F_1[-;c_1;tsx_1].\ {}_0F_1[-;c_2;usx_2].\ {}_0F_1[-;c_3;tux_3]dtdsdu$$

$$(x\geq 0;\ x=0\ iken\ \ min\{Re(a),Re(b_1),Re(b_2)\}>0\ ).$$

İspat : (2.25) te tanımlı olan tam olmayan Pochhammer sembolünü ve (2.21) de ifade edilen Pochhammer sembolünün özellikleri (5.36) da yerlerine yazılırsa,

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}$$

$$.\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\int_x^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a+m+p-1}\,s^{b_1+m+n-1}\,u^{b_2+n+p-1}$$

$$.\,e^{-t-s-u}\,\frac{1}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p}\frac{x_1{}^m}{m!}\frac{x_2{}^n}{n!}\frac{x_3{}^p}{p!}dtdsdu$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede yakınsaklıktan dolayı toplam ve integral sembollerinin yerleri değiştirilirse, (5.40) ifadesi kolaylıkla sağlanır. ■

Teorem 5.2.4: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin integral gösterimi aşağıdaki gibi sağlanır [13, syf. 1783].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3] \tag{5.41}$$

$$= \frac{1}{B(b_1,c_1-b_1)B(b_2,c_3-b_2)B(1-c_1+b_1,c_1+c_2-b_1-1)}$$

$$.\int_0^1\int_0^1\int_0^1 t^{b_1-1}\, s^{c_1-b_1}u^{b_2-1}(1-t)^{c_1-c_3-b_1+b_2}\,(1-s)^{c_1+c_2-b_1-2}(1-tx_1-ux_3)^{-a}$$

$$.\ \frac{\Gamma\big(a,x(1-tx_1-ux_3)\big)}{\Gamma(a)}(1-t-u+tu-tsu)^{c_3-b_1-1}dtdsdu$$

$(x \geq 0;\ x = 0\ iken\ 0 < Re(c_1-b_1) < 1; Re(b_1) > 1, Re(c_1+c_2-b_1) > 1,$

$Re(c_3) > Re(b_2) > 1).$

İspat: (5.36) da verilen tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonunun tanımından

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]$$

$$= \sum_{m,n,p=0}^{\infty} \frac{(b_1)_n(b_2)_n}{(c_2)_n}\Gamma_2[(a,x),b_1+n,b_2+n;c_1,c_3;x_1,x_3]\frac{{x_2}^n}{n!} \tag{5.42}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede (4.27) de verilen tam olmayan ikinci tip Appell hipergeometrik fonksiyonunun integral gösterimini yerine yazıp ve yakınsaklıktan dolayı toplam ve integral sembollerinin yerleri değiştirilirse,

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{B(b_1,c_1-b_1)B(b_2,c_3-b_2)} \tag{5.43}$$

$$.\int_0^1\int_0^1 t^{b_1-1}\,u^{b_2-1}(1-t)^{c_1-b_1-1}\,(1-tx_1-ux_3)^{-a}\,\frac{\Gamma\big(a,x(1-tx_1-ux_3)\big)}{\Gamma(a)}$$

$$.\ {}_2F_1\left[1-c_1+b_1,1-c_3+b_2;b_2;\frac{tux_2}{(1-t)(1-u)}\right]dtdu$$

elde edilir. Şimdi, (5.43) de (2.35) te verilmiş olan ${}_2F_1$ in

$$ {}_2F_1[a,b;c;z] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}\,(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt $$

integral gösterimi (5.43) te yerine yazılırsa, bizden istenilen sonuç (5.41) kolaylıkla sağlanır. ■

[1, 12, 13] ten de bilindiği üzere, Bessel fonksiyonu $\boldsymbol{J_\nu}(z)$ ve modifie Bessel fonksiyonu $\boldsymbol{I_\nu}(z)$ nin ${}_0F_1$ hipergeometrik fonksiyonu cinsinden, iki değişkenli Whittaker fonksiyonu $\boldsymbol{M_{k,m,n}}(x,y)$ nin, iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonların konflüent formlarından biri olan Ψ_2 fonksiyonu cinsinden aşağıdaki gibi ifadeleri mevcuttur.

$$ \boldsymbol{J_\nu}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.\ {}_0F_1\left[-;\nu+1;-\frac{1}{4}z^2\right] \tag{5.44} $$

$$ \boldsymbol{I_\nu}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.\ {}_0F_1\left[-;\nu+1;\frac{1}{4}z^2\right] \tag{5.45} $$

ve

$$ \boldsymbol{M_{k,m,n}}(x,y) = x^{m+\frac{1}{2}}y^{n+\frac{1}{2}}exp\left(-\frac{1}{2}(x+y)\right) \tag{5.46} $$

$$.\Psi_2[m+n-k+1;2m+1,2n+1;x,y] $$

dir. Şimdi, (5.46) yı (5.39) da, (5.44) ve (5.45) i (5.39) da, (5.44) ile (5.46) yı ve (5.45) ile (5.46) yı (5.39) da ve son olarak (5.44) ve (5.45) i (5.40) ta sırasıyla yerine yazarsak **Sonuç 5.2.1** - **Sonuç 5.2.4** te verilen integral gösterimlerini elde edebiliriz.

Sonuç 5.2.1: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin integral gösterimi aşağıdaki gibi mevcuttur [13, syf. 1784].

$$ \Gamma_B^H[(a,x),b_1,c_2+c_3-b_2+1;c_1,2c_2+1,2c_3+1;x_1,x_2,x_3] \tag{5.47} $$

$$= \frac{x_2^{-c_2-\frac{1}{2}} x_3^{-c_3-\frac{1}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \int_x^\infty \int_0^\infty t^{a-c_3-\frac{3}{2}} s^{b_2-c_2-\frac{3}{2}} e^{-(1-\frac{1}{2}x_2)t-(1-\frac{1}{2}x_3)s}$$

$$. \quad {}_0F_1[-;c_1;tsx_1] \ \boldsymbol{M}_{b_2,c_2,c_3}(sx_2,tx_3)dtds$$

dir.

Sonuç 5.2.2: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin integral gösterimleri aşağıdaki gibi mevcuttur [13, syf. 1784].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1+1,c_2,c_3;-x_1,x_2,x_3] \tag{5.48}$$

$$= \frac{\Gamma(c_1+1)x_1^{-\frac{c_1}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \int_x^\infty \int_0^\infty t^{a-\frac{c_1}{2}-1} s^{b_1-\frac{c_1}{2}-1} e^{-t-s}$$

$$. \boldsymbol{J}_{c_1}\left(2\sqrt{tsx_1}\right)\Psi_2[b_2;c_2,c_3;sx_2,tx_3]dtds$$

ve

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1+1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3] \tag{5.49}$$

$$= \frac{\Gamma(c_1+1)x_1^{-\frac{c_1}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)} \int_x^\infty \int_0^\infty t^{a-\frac{c_1}{2}-1} s^{b_1-\frac{c_1}{2}-1} e^{-t-s}$$

$$. \boldsymbol{I}_{c_1}\left(2\sqrt{tsx_1}\right)\Psi_2[b_2;c_2,c_3;sx_2,tx_3]dtds$$

dir.

Sonuç 5.2.3: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin integral gösterimleri aşağıdaki gibi mevcuttur [13, syf. 1784].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,c_2+c_3-b_2+1;c_1,2c_2+1,2c_3+1;-x_1,x_2,x_3] \tag{5.50}$$

$$= \frac{\Gamma(c_1+1)x_1^{-\frac{1}{2}c_1} x_2^{-c_2-\frac{1}{2}} x_3^{-c_3-\frac{1}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)}$$

$$. \int_x^\infty \int_0^\infty t^{a-c_3-\frac{1}{2}c_1-\frac{3}{2}} s^{b_1-c_2-\frac{1}{2}c_1-\frac{3}{2}} e^{-(1-\frac{1}{2}x_2)t-(1-\frac{1}{2}x_3)s}$$

$$. \boldsymbol{J}_{c_1}\left(2\sqrt{tsx_1}\right) \ \boldsymbol{M}_{b_2,c_2,c_3}(sx_2,tx_3)dtds$$

ve

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,c_2+c_3-b_2+1;c_1,2c_2+1,2c_3+1;x_1,x_2,x_3] \tag{5.51}$$

$$=\frac{\Gamma(c_1+1)x_1^{-\frac{1}{2}c_1}x_2^{-c_2-\frac{1}{2}}x_3^{-c_3-\frac{1}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)}$$

$$.\int_x^\infty\int_0^\infty t^{a-c_3-\frac{1}{2}c_1-\frac{3}{2}}s^{b_1-c_2-\frac{1}{2}c_1-\frac{3}{2}}e^{-(1-\frac{1}{2}x_2)t-(1-\frac{1}{2}x_3)s}$$

$$.\,\boldsymbol{I}_{c_1}\left(2\sqrt{tsx_1}\right)\ \boldsymbol{M}_{b_2,c_2,c_3}(sx_2,tx_3)dtds$$

dir.

Sonuç 5.2.4: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin integral gösterimleri aşağıdaki gibi mevcuttur [13, syf. 1785].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1+1,c_2+1,c_3+1;-x_1,-x_2,-x_3] \tag{5.52}$$

$$=\frac{\Gamma(c_1+1)\Gamma(c_2+1)\Gamma(c_3+1)x_1^{-\frac{c_1}{2}}x_2^{-\frac{c_2}{2}}x_3^{-\frac{c_3}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}$$

$$.\int_x^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-\frac{c_1}{2}-\frac{c_3}{2}-1}s^{b_1-\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2}-1}u^{b_2-\frac{c_2}{2}-\frac{c_3}{2}-1}e^{-t-s-u}$$

$$.\,\boldsymbol{J}_{c_1}\left(2\sqrt{tsx_1}\right).\ \boldsymbol{J}_{c_2}\left(2\sqrt{usx_2}\right).\ \boldsymbol{J}_{c_3}\left(2\sqrt{tux_3}\right)dtdsdu$$

ve

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1+1,c_2+1,c_3;x_1,x_2,x_3] \tag{5.53}$$

$$=\frac{\Gamma(c_1+1)\Gamma(c_2+1)\Gamma(c_3+1)x_1^{-\frac{c_1}{2}}x_2^{-\frac{c_2}{2}}x_3^{-\frac{c_3}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)\Gamma(b_2)}$$

$$.\int_x^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty t^{a-\frac{c_1}{2}-\frac{c_3}{2}-1}s^{b_1-\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2}-1}u^{b_2-\frac{c_2}{2}-\frac{c_3}{2}-1}e^{-t-s-u}$$

$$.\,\boldsymbol{I}_{c_1}\left(2\sqrt{tsx_1}\right).\ \boldsymbol{I}_{c_2}\left(2\sqrt{usx_2}\right).\ \boldsymbol{I}_{c_3}\left(2\sqrt{tux_3}\right)dtdsdu$$

dur.

Teorem 5.2.5: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin türev formülü aşağıdaki gibi sağlanır [13, syf. 1785].

$$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]\} \tag{5.54}$$

$$=\frac{(a)_{r+t}(b_1)_{r+s}(b_2)_{s+t}}{(c_1)_r(c_2)_s(c_3)_t}$$

$$.\Gamma_B^H[(a+r+t,x),b_1+r+s,b_2+s+t;c_1+r,c_2+s,c_3+t;x_1,x_2,x_3]$$

$$(r,s,t\in\mathbb{N}_0).$$

Burada, $D_{x_1,x_2,x_3}f = {\partial f}/{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}$ dür

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonunun (5.36) daki tanımında x_1, x_2 ve x_3 e göre sırasıyla r, s ve t kez türevi alınırsa

$$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]\}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p}D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\left\{\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!}\right\}$$

$$=\sum_{m=r}^{\infty}\sum_{n=s}^{\infty}\sum_{p=t}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p}(b_1)_{m+n}(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m(c_2)_n(c_3)_p}\frac{{x_1}^{m-r}}{(m-r)!}\frac{{x_2}^{n-s}}{(n-s)!}\frac{{x_3}^{p-t}}{(p-t)!} \tag{5.55}$$

olur. (5.55) te m yerine $m+r$, n yerine $n+s$ ve p yerine $p+t$ yazılırsa

$$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]\}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[a,x]_{m+p+r+t}(b_1)_{m+n+r+s}(b_2)_{n+p+s+t}}{(c_1)_{m+r}(c_2)_{n+s}(c_3)_{p+t}}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!} \tag{5.56}$$

elde edilir. (5.56) da Pochammer sembolünün (2.17) ve (2.27) de verilen özelliğinden faydalanarak

$$D_{x_1,x_2,x_3}^{r+s+t}\{\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]\}=\frac{(a)_{r+t}(b_1)_{r+s}(b_2)_{s+t}}{(c_1)_r(c_2)_s(c_3)_t}$$

$$.\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{[a+r+t,x]_{m+p}(b_1+r+s)_{m+n}(b_2+s+t)_{n+p}}{(c_1+r)_m(c_2+s)_n(c_3+t)_p}\frac{{x_1}^m}{m!}\frac{{x_2}^n}{n!}\frac{{x_3}^p}{p!}$$

sağlanır. ■

Teorem 5.2.6: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin indirgeme formülü aşağıdaki gibi mevcuttur [13, syf. 1785].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,c_2;c_1,c_2,c_2;x_2x_3,x_2,x_3] = (1-x_2)^{-b_1}(1-x_3)^{-a} \tag{5.57}$$

$$\cdot\ {}_4\Gamma_3\left[\begin{matrix}\left(a,x(1-x_3)\right),b_1,\dfrac{c_1+c_2}{2},\dfrac{c_1+c_2-1}{2}; & \dfrac{4x_2x_3}{(1-x_2)(1-x_3)} \\ c_1,c_2,c_1+c_2-1; & \end{matrix}\right]$$

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_A^H nın (5.39) da bulunan integral gösteriminde $c_2 = c_3 = b_2$ ve $\Psi_2[c_2;c_2,c_2;sx_2,tx_3] = e^{sx_2+tx_3}\ {}_0F_1[-;c_2;sx_2tx_3]$ yazılırsa

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,c_2;c_1,c_2,c_2;x_2x_3,x_2,x_3] = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b_1)}\int_{x(1-x_3)}^{\infty}\int_{0}^{\infty} t^{a-1}\,s^{b_1-1} \tag{5.58}$$

$$.\,e^{-(1-x_3)t-(1-x_2)s}\ {}_0F_1[-;c_1;tsx_2x_3]\ {}_0F_1[-;c_2;tsx_2x_3]\,dtds$$

olur. Son olarak (5.58) de $t(1-x_3)=u$ ve $s(1-x_2)=v$ dönüşümü uygulanır ve [13, syf. 1786] da verilen aşağıdaki formül

$${}_0F_1[-;\alpha;x].\ {}_0F_1[-;\beta;x] = {}_2F_3\left[\begin{matrix}\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha+\beta-1}{2}; \\ \alpha,\beta,\alpha+\beta-1;4x\end{matrix}\right]$$

yerine yazıldıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa, bizden istenilen (5.57) elde edilir. ■

Teorem 5.2.7: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin yineleme formülü aşağıdaki gibi mevcuttur [13, syf. 1786].

$$\Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]$$

$$= \Gamma_B^H[(a,x),b_1,b_2;c_1-1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]$$

$$+\frac{ab_1x_1}{c_1(1-c_1)}\Gamma_B^H[(a+1,x),b_1+1,b_2;c_1+1,c_2,c_3;x_1,x_2,x_3]. \tag{5.59}$$

İspat: Tam olmayan Srivastava üçlü hipergeometrik fonksiyonu Γ_B^H nin (5.39) da bulunan integral gösteriminde [13, syf. 1786] da ifade edilmiş olan aşağıdaki formül

$$ {}_0F_1[-;c_1-1;x_1]-\ {}_0F_1[-;c_1;x_1]-\frac{ab_1x_1}{c_1(1-c_1)}.\ {}_0F_1[-;c_1+1;x_1]=0 $$

yerine yazılırsa, bizden istenilen sonuç (5.59) elde edilir. ■

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezin birinci kısmında bize ileriki bölümlerde yardımcı olacak temel ifadeler ve teoremleri ele alınmıştır.

İkinci bölümde, bir önceki kısımda ifade ettiğimiz ifadeler ve teoremleri kullanılarak elde edilen tek değişkenli yani özel olarak Gauss Hipergeometrik Fonksiyonunun, iki değişkenli Appell Hipergeometrik Fonksiyonlarının ve üç değişkenli Srivastava Hipergeometrik fonksiyonlarının bazı önemli özellikleri sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, ikinici bölümde verilen tek ve iki değişkenli hipergeometrik fonksiyonlarının tamamlanmamış formlarını ve bu tamamlanmamış hipergeometrik fonksiyonların özelliklerini verildi.

Son bölümde ise, tamamlanmamış üç değişkenli hipergeometrik fonksiyonlarını tanımlanmış ve bu fonksiyonların bazı özellikleri olan örneğin, integral gösterimleri, türev formülleri, yineleme ve indirgeme bağıntılarını verilmiştir.

Bu çalışmada, özel fonksiyonların önemli bir bölümünü oluşturan tam olmayan hipergeometrik fonksiyonlar için bir taban oluşturması amaçlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Srivastava, H.M., Manocha, H.L., Treatise on Generating Functions, John Wiley&Sons, New York, Chichester, Brisbaneand Toronto, 1984.

[2] Rainville, E.D., Special Functions, The Macmillan Company, New York, 1960.

[3] Chaudhry, M.A.,Zubair, S.M., On a class of incomplete gamma functions with applications, CRC Press, 2001.

[4] Srivastava, H.M., Chaudhry, M.A., Agarwal, R.P., The incomplete Pochhammer symbols and their applications to hypergeometric and related functions, Integral Transforms and Special Functions, 23(9), 659-683, 2012.

[5] Bailey, W.N., Generalized Hypergeometric Series, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 32, Cambridge, 1935; Reprinted by Stechert-Hafner Service Agency, New York and London 1964.

[6] Srivastava, H.M., Karlsson P.W., Multiple Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1964.

[7] Srivastava, H.M., Hypergeometric functions of three variables, Ganita 15, 97-108, 1964.

[8] Srivastava, H.M., Some integrals representing triple hypergeometric functions, Rend. Circ. Mat. Palermo, 16 (2), 99-115, 1967.

[9] Chen, M.P., Srivastava, H.M., Orthogonality relations and generating functions for Jacobi polynomials and related hypergeometric functions, Appl. Math. Comput. , 68, 153-188, 1994.

[10] Choi, J., Parmar, R.K., Chopra, P., The incomplete Lauricella and first Appell functions and associated properties, Honam Mathematical Journal, 36 (3), 531-542, 2014.

[11] Çetinkaya, A., The incomplete second Appell hypergeometric functions, Applied Mathematics and Computation, 219 (5), 8332-8337, 2013.

[12] Choi, J., Parmar, R.K., The Incomplete Srivastava's Triple Hypergeometric Functions γ_A^H and Γ_A^H, Miskolc Mathematical Notes, 19 (1), 191-200, 2018.

[13] Choi, J., Parmar, R.K., Chopra, P., The Incomplete Srivastava's Triple Hypergeometric Functions γ_B^H and Γ_B^H, Filomat, 30 (7), 1779-1787, 2016.