T.C
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS *q*-İNTEGRALLER

GAMZENUR YILMAZ

TEMMUZ 2018

Matematik Anabilim Dalında Gamzenur YILMAZ tarafından hazırlanan KOMPLEKS q-İNTEGRALLER adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan (Danışman) : Prof. Dr. Kerim KOCA

Üye : Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Üye :Doç. Dr. Murat OLGUN

25/07/2018

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans Derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KOMPLEKS q-İNTEGRALLER

YILMAZ, Gamzenur

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kerim Koca

Temmuz 2018, 81 sayfa

Bu tez dört temel bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü, q-analizi ile ilgili temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde reel ve kompleks sayıların q-analogları, q-Binom gösterilimleri ve Pochemmer gösterilimlerine yer verilmiştir. İkinci bölümde reelde q-türev ve q-integraller yer almaktadır. Ayrıca bu bölümde Taylor formülü, Jackson İntegral, q-analizin temel teoremi ve parçalı q-integrasyon incelenmiştir. Üçüncü bölümde kompleks q-integraller ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde katlı q-integraller konusu ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler : Kompleks q-eğrisel integral, Katlı q-integral, q-regülerlik

ABSTRACT

COMPLEX q-INTEGRALS

YILMAZ, Gamzenur
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor : Prof. Dr. Kerim KOCA
July 2018, 81 pages

This thesis consists of four parts. The first part of this thesis divided into basic concepts related to q-analysis. This section contains q-analogues of real and complex numbers, q-Binomial display, q-Pochammer display. In the second part contains real q-derivatives and q-integrals. Furthermore, Taylor formula, Jackson Integral, fundamental theorem of q-calculus and integration by parts are examined in this section. In the third part definitions and theorems related to complex q-integrals are given. In the fourt part the multiple q-integrals is taken up.

Key Words : Complex q- line integrals**,** Multiple q-integrals, q-regular

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1.GİRİŞ

Doğada olaylar kesikli ve sürekli olmak üzere ikiye ayrılır. Örneğin; akışkanlar, ısı yayılması, serbest düşme vb. olaylar sürekli olduğu halde, canlıların çoğalması, bir toplumda hastalık yayılması, daha genel olarak tane ile ölçülebilen olaylar ise kesikli olaylardır.

Sürekli olaylar, sürekli analizin temel teorisi (süreklilik, integral, türev) yardımıyla incelenir ve olayların modellenmesi sonunda çeşitli tipten diferansiyel denklemler ortaya çıkar. Kesikli olaylar modellendiğinde ise fark denklemleri ortaya çıkar. Fark denklemlerini ortaya çıkarmak için kesikli analizin teorisine ihtiyaç duyulur. q-analizi teorisinin temeli kesikli olayların incelenmesinden ortaya çıkmıştır. Bu teorinin çıkış noktası Quantum Calculus olup q-analizindeki q harfi “Quantum” kelimesinin ilk harfidir.

Son yıllarda q-analizi teorisine ilgi çok artmıştır. Kesikli olayların incelenmesinde zaman skalası kalkülüsü öne çıkmaktadır ve q-analizi de zaman skalası teorisinin bir özel halidir. Klasik anlamda ve süreklilik analizinde bilinen türev, integral kavramlarının q-kalkülüsleri (q-analogları) yapılmıştır. q-analizin kompleks q-analogları ise 1970 li yıllardan sonra çalışılmıştır. Günümüzde ise komleks q-türevler, q-analitiklik, q-kompleks katlı integralleri, q-Green formülü, q-kompleks eğrisel integraller detaylı olarak incelenmiştir. Bu konular için [4] , [6] ve [7] kaynaklarına bakılabilir.

1.1.Tezin Amacı

Bu tezin temel amacı q-analitik fonksiyonların özelliklerini ortaya koymada karşımıza çıkan q-kompleks eğrisel integralleri incelemektir. Klasikte, Cauchy teoreminde, Cauchy integral formülünde, analitik fonksiyonların kuvvet serisine açılımında kompleks eğrisel integraller kullanılmaktadır. Bu kavramların q-analoglarını vermek için kompleks q-eğrisel integrallere ihtiyaç vardır.

1.2. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanmasında [1] nolu kaynak, çalışmalarımızın temelini oluşturmuştur. Bu kaynaktan q-analizindaki temel kavramlar, q-Binom gösterilimleri, q-türev, q-integral konuları incelenmiştir. [2] nolu kaynaktan , kompleks analizdeki q-türev, q-integral konularındaki tanımlar,kurallar ve teoremler alınmıştır. [3] nolu kaynaktan kompleks analizde q-analoglar, Gauss'un q-Binom formülü, kompleks trigonometrik fonksiyonlar konularında yararlanılmıştır. [4] kaynağından kompleks q-Binom formülü alınmıştır. [5] nolu kaynaktan q-Pochammer gösterilimleri konusunda faydalanılmıştır. [6] ve [7] kaynakları kompleks q-integraller ve katlı q-integraller konularında temel kaynak olmuştur. [8] nolu kaynaktan kompleks analizde q-Pochammer gösterilimleri alınmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Reel ve Kompleks Sayıların q-Analogları

Bu bölümde ilk olarak reeldeki gösterimlerin q-analizindeki karşılıkları, daha sonra kompleks sayıların q-analogları verilecektir**.**

Tanım 2.1. [1] $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$[n] = [n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

ifadesine n doğal sayısının q-analoğu denir ve $[n]$ veya $[n]_q$ şeklinde gösterilir. Burada $n \to \infty$ için limit alınırsa sonsuzun q-analoğu

$$[\infty] = \frac{1}{1-q}$$

olur [7]. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1^-} [n]_q &= \lim_{q\to 1^-} 1 + q + \cdots + q^{n-1} = 1 + 1 + \cdots + 1 \\ &= n\end{aligned}$$

olduğu görülür. Örnek olarak

$$[0]_q = 0$$

$$[1]_q = 1$$

$$[2]_q = 1 + q$$

$$[3]_q = 1 + q + q^2$$

dir.

Ayrıca;

$$[x+y]_q = q^y[x]_q + [y]_q = q^x[y]_{q+}[x]_q$$

$$[x-y]_q = q^{-y}\big([x]_q - [y]_q\big) = -q^{x-y}[y]_q + [x]_q$$

$$[x.y]_q = [x]_q.[y]_{q^x} = [y]_q.[x]_{q^y}$$

$$\left[\frac{x}{y}\right]_q = \frac{[x]_q}{[y]_{q^{\frac{x}{y}}}} = \frac{[x]_{q^{\frac{1}{y}}}}{[y]_{q^{\frac{1}{y}}}}$$

şeklindedir [3].

Tanım 2.2. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$[n]!_q = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ [n]_q[n-1]_q \dots [2]_q[1]_q & n = 1,2,\dots \end{cases}$$

ifadesine $n!$ ifadesinin q-analoğu denir ve $[n]!$ veya $[n]!_q$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 2.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a) = \prod_{i=0}^{n-1}\left(x-q^i a\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

ifadesine $(x-a)^n$ ifadesinin q-analoğu denir [1].

Genelde $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$$

dir. Fakat

$$(x-a)_q^{m+n}$$
$$= (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{m-1}a)(x-q^m a)(x-q^{m+1}a)\dots(x-q^{m+n-1}a)$$
$$= \left((x-a)(x-qa)\dots(x-q^{m-1}a)\right)\left((x-q^m a)\left(x-q(q^m\, a)\right)\dots(x-q^{n-1}(q^m a)\right)$$
$$= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$$

özdeşliği doğrudur. Yani

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \tag{2.1}$$

dir. Bu son eşitlikte *m* yerine –*n* alınırsa, *n* pozitif tamsayı olmak üzere ;

$$1 = (x-a)_q^{-n}(x-q^{-n}a)_q^n$$

veya

$$(x-a)_q^{-n}=\frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n}$$

olur [1].

(2.1) özdeşliğinin herhangi bir m ve n tamsayısı için doğru olduğunu görmek için [1] nolu kaynağa bakılabilir.

Tanım 2.4. [1]

$$e_q^x=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]_q!}=1+\frac{x}{[1]_q!}+\frac{x^2}{[2]_q!}+\cdots$$

ifadesine e^x fonksiyonunun q-analoğu denir.

Tanım 2.5. [3] $z=x+iy$ herhangi bir kompleks sayı olmak üzere

$$[z]_q=[x+iy]_q=\frac{1-q^{x+iy}}{1-q}=\frac{1-q^x.q^{iy}}{1-q}$$

ifadesine $z\in\mathbb{C}$ kompleks sayısının q-analoğu denir.

Burada $q^{iy}=a$ denirse

$$iy.Inq=Ina$$

$$a=e^{iy\,Inq}$$

elde edilir.Buradan

$$[z]_q=\frac{1-q^x\big(\cos(yInq)+isin(yInq)\big)}{1-q}$$

dir [3].

Tanım 1.6. [4] $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$(x+iy)_q^n:=(x+iy)(x+iqy)(x+iq^2y)\ldots(x+iq^{n-1}y) \qquad (2.2)$$

özdeşliğine kompleks q-Binomial denir.

Ayrıca (2.2) deki negatif kuvvetler

$$(x+iy)_q^{-n}=\frac{1}{(x+iq^{-n}y)_q^n}$$

olarak tanımlanır.

$|q| < 1$ olmak üzere bazı kompleks fonksiyonların q-analogları ;

$$e_q^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)_q^n}{[n]_q!},$$

$$sin_q z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+iy)_q^{2n+1}}{[2n+1]_q!},$$

$$cos_q z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+iy)_q^{2n}}{[2n]_q!}$$

şeklindedir [4].

2.2. Reel ve Kompleks *q*-Binom Gösterilimleri, Pochammer Gösterilimleri

Tanım 2.7. [1]

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

binom açılımında $\binom{n}{k}$ Binom katsayısının q-analoğu $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ile gösterilir ve

$n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! \, [k]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$$

ifadesine $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $(k \le n)$ ifadesinin q-analoğu denir.

q-Binom katsayısının $q \to 1^-$ için limiti alınırsa reeldeki Binom katsayısı elde edilir. Yani

$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} \mathrm{n} \\ \mathrm{k} \end{bmatrix}_q = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}$$

dir.

2.2.1. *q*-Binom Katsayısının Özellikleri

Bildiğimiz anlamdaki Binom katsayılarının özellikleri

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k} \qquad (Simetri\text{ Özelliği })$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (1 \le k \le n-1) \quad (Pascal\ Kuralı)$$

dir.

Klasik anlamda

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$$

eşitliğine karşın q-analoglarda durum farklıdır. Örneğin

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{[2]_q!}{[1]_q!\,[1]_q!} = \frac{[2]_q}{[1]_q} = 1 + q$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{[1]_q!}{[1]_q!\,[0]_q!} + \frac{[1]_q!}{[0]_q!\,[1]_q!} = 1 + 1 = 2$$

olup

$$2 \neq 1 + q$$

dur.

Lemma 2.1. [1] $n, k \in \mathbb{N}$ ve $1 \le k \le n-1$ olmak üzere

a)

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

ve

b)

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

özdeşlikleri doğrudur.

İspat.

a) $1 \leq k \leq n-1$ için

$$\begin{aligned}[n] &= 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} \\ &= 1+q+q^2+\cdots+q^{k-1}+q^k(1+q+\cdots+q^{n-k-1}) \\ &= [k]+q^k[n-k]\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!} = \frac{[n-1]!\,[n]}{[k]!\,[n-k]!} \\ &= \frac{[n-1]!\,([k]+q^k[n-k])}{[k]!\,[n-k]!} \\ &= \frac{[n-1]!}{[k-1]!\,[n-k]!} + q^k \frac{[n-1]!}{[k]!\,[n-k-1]!} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.

b)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 2.1. Her $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ q-Binom katsayısı, başkatsayısı 1 olan $j(n-j)$. dereceden q nun bir polinomudur.

Gerçekten ;

$n \epsilon \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

bir polinomdur. Lemma 1.1 de görüldüğü üzere herhangi bir $1 \leq j \leq n-1$ için $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ iki polinomun toplamı şeklinde yazılabildiğinden kendisi de bir polinomdur. Çünkü

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-j]!\,[j]!} = \frac{[n][n-1]\dots[n-j+1][n-j][n-j-1]\dots[1]}{[n-j][n-j-1]\dots[1][j][j-1]\dots[1]}$$

$$= \frac{[n][n-1]\dots[n-j+1]}{[j][j-1]\dots[1]}$$

$$= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\dots(q-1)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son eşitlikte hem pay, hem de payda q nun birer polinomu olup başkatsayıları 1 dir. Dolayısıyla bu iki polinomun bölümünün de başkatsayısı 1 dir. Buradan $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ nin başkatsayısı 1 olup, derecesi pay ve paydanın derecelerinin farkıdır. Payın derecesi ; $n+(n-1)+\cdots+(n-j+1)$ ve paydanın derecesi; $j+(j-1)+\cdots+1$ olduğundan polinomun derecesi

$$[n+(n-1)+\cdots+(n-j+1)]-[j+(j-1)+\cdots+1]$$
$$=(n-j)+(n-j)+\cdots+(n-j)=j(n-j)$$

dir.

Dolayısıyla $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ q-Binom katsayısının ,başkatsayısı 1 olan $j(n-j)$. dereceden q nun bir polinomu olduğu elde edilmiş oldu. Bu polinomu

$$a_0+a_1q+\cdots+a_{j(n-j)-1}q^{j(n-j)-1}+a_{j(n-j)}q^{j(n-j)}$$
$$=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\dots(q-1)}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Elde edilen bu eşitlikte q yerine $\frac{1}{q}$ alınırsa

$$a_0+\frac{a_1}{q}+\cdots+\frac{a_{j(n-j)-1}}{q^{j(n-j)-1}}+\frac{a_{j(n-j)}}{q^{j(n-j)}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{q^n}-1\right)\left(\frac{1}{q^{n-1}}-1\right)\dots\left(\frac{1}{q^{n-j+1}}-1\right)}{\left(\frac{1}{q^j}-1\right)\left(\frac{1}{q^{j-1}}-1\right)\dots\left(\frac{1}{q}-1\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots\left(1-q^{n-j+1}\right)}{q^{nj-\frac{(j-1)j}{2}}}}{\dfrac{(1-q^j)(1-q^{j-1})\dots(1-q)}{q^{\frac{j(j+1)}{2}}}}$$

$$=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots\left(q^{n-j+1}-1\right)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\dots(q-1)}\frac{1}{q^{j(n-j)}}$$

dolayısıyla

$$a_0+\frac{a_1}{q}+\dots+\frac{a_{j(n-j)-1}}{q^{j(n-j)-1}}+\frac{a_{j(n-j)}}{q^{j(n-j)}}$$

$$=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots\left(q^{n-j+1}-1\right)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\dots(q-1)}\frac{1}{q^{j(n-j)}}$$

elde edilmiş olur. Bu eşitlikte iki tarafı $q^{j(n-j)}$ ile çarparsak

$$a_0q^{j(n-j)}+a_1q^{j(n-j)-1}+\dots+a_{j(n-j)-1}q+a_{j(n-j)}$$

$$=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots\left(q^{n-j+1}-1\right)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)\dots(q-1)}$$

$$=\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

bulunur.

(2.3) eşitliğine, $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ nin daha önce yazdığımız polinom şeklini eşitleyerek

$$a_0q^{j(n-j)}+a_1q^{j(n-j)-1}+\dots+a_{j(n-j)-1}q+a_{j(n-j)}$$

$$=a_0+a_1q+\dots+a_{j(n-j)-1}q^{j(n-j)-1}+a_{j(n-j)}q^{j(n-j)}$$

şeklinde yazabiliriz. Katsayıların eşitliğinden

$$a_0=a_{j(n-j)}$$

$$a_1=a_{j(n-j)-1}$$

....

elde edilebilir. Buna göre katsayılar $a_i=a_{j(n-j)-i}$ genel terimiyle yazılabilir. Dolayısıyla $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ q-Binom katsayısının polinom yazılışındaki katsayıların simetrik olduğu görülür.

q-Binom formülünü vermeden önce bir konuya değinmemiz gerekir. Klasik analizde reel sayılarda çarpma işleminin değişme özelliğine sahip olduğunu biliyoruz. Yani her $x, y \in \mathbb{R}$ için $xy = yx$ tir. Ancak genelde matris çarpımı ve operatörlerin çarpımında değişme özelliğinin olmadığını biliyoruz. Buna benzer bir durum q-analizde de geçerlidir. Bu duruma bir örnek verelim :

Örnek 2.1. $\hat{x}$ ve $\widehat{M}_q$ polinomlar uzayında lineer operatörler olmak üzere bir $f(x)$ polinomu için

$$\hat{x}[f(x)] = xf(x)$$

ve

$$\widehat{M}_q[f(x)] = f(qx)$$

olsun. Herhangi bir $f(x)$ için

$$\widehat{M}_q\hat{x}[f(x)] = \widehat{M}_q[xf(x)] = qxf(qx) = q\hat{x}\widehat{M}_q[f(x)]$$

dir. Yani

$$\widehat{M}_q\hat{x} = q\hat{x}\widehat{M}_q$$

dir.

Teorem 2.1. Eğer $yx = qxy$ ise (burada q sayısı x ve y ile değişmelidir)

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x^j y^{n-j}$$

dir.

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. Eşitliğin $n = 1$ için doğru olduğu açıktır. Özdeşliğin n için doğru olduğunu kabul edelim.$n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

q-analizinde

$$y^k x = qy^{k-1}xy = q^2y^{k-2}xy = \cdots = q^k xy^k$$

özdeşliği mevcuttur.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\right)(x+y) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j} x + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j \left(q^{n-j} x y^{n-j}\right) + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} q^{n-j+1} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(q^{n-j+1} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\right) x^j y^{n-j+1} + x^{n+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n+1-j} \qquad (q - \text{Pascal kuralı yardımıyla})
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece eşitliğin $n+1$ için de doğru olduğu görülmüş olur.

2.2.2. Gauss'un Binom Formülü:

Değişmeli x ve a için $(xa = ax)$ Gauss'un Binom formülü

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \, a^{n-k}$$

şeklindedir.

Burada

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_q$$

denilirse Gauss'un Binom formülünü

$$(x+a)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_q x^k \, a^{n-k}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin doğruluğunu tümevarım yöntemiyle gösterelim.

Özdeşliğin $n = 1$ için doğruluğunu görmemiz gerekir.

$$\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}_q a + \begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}_q x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_q q^0 a + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_q q^0 x = a + x$$

olduğundan eşitlik $n = 1$ için doğrudur.

Eşitlik n için doğru olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(x+a)_q^{n+1} &= (x+a)_q^n (x + q^n a)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}_q x^k\, a^{n-k}(x + q^n a)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}_q x^{k+1}\, a^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}_q x^k q^n a^{n-k+1}.\end{aligned}$$

olur. Daha önce gördüğümüz

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}$$

q-Pascal kuralından yararlanarak

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{Bmatrix}n+1\\k\end{Bmatrix}_q x^k a^{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{Bmatrix}n\\k-1\end{Bmatrix}_q x^k a^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}_q x^k q^n a^{n-k+1}$$

elde edilir. Burada

$$k = 0 \text{ için } \begin{Bmatrix}n+1\\0\end{Bmatrix}_q = q^n \begin{Bmatrix}n\\0\end{Bmatrix}_q$$

$$k = n+1 \text{ için } \begin{Bmatrix}n+1\\n+1\end{Bmatrix}_q = \begin{Bmatrix}n\\n\end{Bmatrix}_q$$

$$k = j \text{ için } \begin{Bmatrix}n+1\\j\end{Bmatrix}_q = \begin{Bmatrix}n\\j-1\end{Bmatrix}_q + q^n \begin{Bmatrix}n\\j\end{Bmatrix}_q \quad ,1 < j < n$$

olduğu kolayca görülür.

2.2.3 Heine'nin Binom Formülü:

$x \neq 1$ için

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]\ldots[n+j-1]}{[j]!} x^j$$

özdeşliği Heine'nin Binom formülü adıyla bilinir [1].

Gauss'un Binom formülünden

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j$$

ve Heine'nin Binom formülünden

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[n][n+1]\ldots[n+j-1]}{[j]!} x^j$$

yazabiliriz.

$n \to \infty$ için bu formüllerin nasıl yazılacağına bakalım.

$$(1+x)_q^{\infty} = (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\ldots$$

olup $|q| < 1$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} [n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

dır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-j+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

dir. Buradan

$$(1+x)_q^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

bulunur.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{1\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\dots\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!}$$

olup

$$e_q^x=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!}$$

olması nedeniyle

$$e_q^{x/1-q}=\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}}$$

ve

$$e_q^x=\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}$$

elde edilir. Diğer bir q-üstel fonksiyonu da

$$E_q^x=\sum_{j=0}^{\infty}q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{x^j}{[j]!}=(1+(1-q)x)_q^{\infty}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$e_q^xE_q^{-x}=1$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$e_{1/q}^x=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)^j x^j}{\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{q^j}\right)}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}q^{j(j-1)/2}\frac{(1-q)^jx^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}$$

dir. Buradan

$$e_{1/q}^x=E_q^x$$

elde edilir [1].

Tanım 2.8. q-trigonometrik fonksiyonlar

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \qquad \mathrm{Sin}_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \qquad \mathrm{Cos}_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\mathrm{Sin}_q x = \sin_{1/q} x$$

ve

$$\mathrm{Cos}_q x = \cos_{1/q} x$$

özellikleri vardır. Ayrıca

$$cos_q\, xCos_q\, x = \frac{e_q^{ix}E_q^{ix} + e_q^{-ix}E_q^{-ix} + 2}{4}$$

$$sin_q\, xSin_q\, x = -\frac{e_q^{ix}E_q^{ix} + e_q^{-ix}E_q^{-ix} - 2}{4}$$

olup, buradan

$$cos_q\, xCos_q\, x + sin_q\, xSin_q\, x = 1$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik klasikteki $sin^2x + cos^2x = 1$ özdeşliğinin q-analoğudur.

$z \in \mathbb{C}$ olmak üzere kompleks q-üstel fonksiyonlar ise

$$E_q^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{n}{2}} z^n}{(q;q)_n} = (-z;q)_\infty$$

$$e_q^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(z;q)_\infty} \quad |z| < 1$$

dir. Burada $|z| < 1$ için $e_q^z E_q^{-z} = 1$ olduğu görülür [8].

$z \in \mathbb{C}$ olmak üzere kompleks q-trigonometrik fonksiyonlar ise

$$\sin_q z = \frac{e_q^{iz} - e_q^{-iz}}{2i}, \qquad \mathrm{Sin}_q z = \frac{E_q^{iz} - E_q^{-iz}}{2i}$$

$$\cos_q z = \frac{e_q^{iz} + e_q^{-iz}}{2}, \qquad \mathrm{Cos}_q z = \frac{E_q^{iz} + E_q^{-iz}}{2}$$

biçimindedir [3].

Tanım 2.9. $0 < q < 1$ ve $n = 1,2, \ldots$ olmak üzere

$$(a;q)_n = (1-a)(1-qa)\ldots(1-q^{n-1}a) = \prod_{k=o}^{n-1}(1-q^k a), \qquad (a;q)_0 = 1$$

gösterilimine q-Pochammer formülü denir [8].

Dolayısıyla

$$(q;q)_n = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$$

dir. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty}(a;q)_n = (a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^k a)$$

olarak yazılır [5]. Buradan

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$(q;q)_n = \frac{(q;q)_\infty}{(q^{n+1};q)_\infty}$$

olduğu görülür.

$n \in \mathbb{N}_0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(z;q)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} z^k$$

ve

$$(z;q)^\infty = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{z^k}{(q;q)_k}$$

eşitlikleri geçerlidir [8].

Şimdi q-Pochammer sembolü ile ilgili bazı özellikleri verelim [5]:

$k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$1)\ (a;q)_{n+k} = (a;q)_n (aq^n;q)_k \ ,$$

$$2)\ \frac{(aq^n;q)_k}{(aq^k;q)_n} = \frac{(a;q)_k}{(a;q)_n},$$

$$3)\ (aq^k;q)_{n-k} = \frac{(a;q)_n}{(a;q)_k}, \qquad k = 0,1,2,\dots,n \ ,$$

$$4)\ (a;q)_n = (a^{-1}q^{1-n};q)_n (-a)^n q^{\binom{n}{2}}, \qquad a \neq 0 \ ,$$

$$5)\ (aq^{-n};q)_n = (a^{-1}q;q)_n (-a)^n q^{-n-\binom{n}{2}}, \qquad a \neq 0 \ ,$$

$$6)\ \frac{(aq^{-n};q)_n}{(bq^{-n};q)_n} = \frac{(a^{-1}q;q)_n}{(b^{-1}q;q)_n}\left(\frac{a}{b}\right)^n, \qquad a \neq 0, b \neq 0 \ ,$$

$$7)\ (a;q)_{n-k} = \frac{(a;q)_n}{(a^{-1}q^{1-n};q)_k}\left(-\frac{q}{a}\right)^k q^{\binom{k}{2}-nk}, \qquad a \neq 0, \quad k = 0,1,2,\dots,n,$$

$$8)\ \frac{(a;q)_{n-k}}{(b;q)_{n-k}} = \frac{(a;q)_n\,(b^{-1}q^{1-n};q)_k}{(b;q)_n\,(a^{-1}q^{1-n};q)_k}\left(\frac{b}{a}\right)^k, a \neq 0, b \neq 0, k = 0,1,2,\dots,n \ ,$$

$$9)\ (q^{-n};q)_k = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}}(-1)^k q^{\binom{k}{2}-nk} \ , \qquad k = 0,1,2,\dots,n \ ,$$

$$10)\ (aq^{-n};q)_k = \frac{(a^{-1}q;q)_n}{(a^{-1}q^{1-k};q)_n}\ (a;q)_k q^{-nk} \ , \qquad a \neq 0 \ ,$$

$$11)\ (aq^{-n};q)_{n-k} = \frac{(a^{-1}q;q)_n}{(a^{-1}q;q)_k}\left(-\frac{a}{q}\right)^{n-k} q^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}}, a \neq 0, k = 0,1,2,\dots,n \ ,$$

12) $(a;q)_{2n} = (a;q^2)_n\,(aq;q^2)_n$,

13) $(a^2;q^2)_n = (a;q)_n\,(-a;q)_n$,

14) $(a;q)_\infty = (a;q^2)_\infty\,(aq;q^2)_\infty$,

15) $(a^2;q^2)_\infty = (a;q)_\infty\,(-a;q)_\infty$.

Şimdi, daha önce q-analoglarını verdiğimiz bazı reel sayıların q-Pochammer gösterilimlerini verelim :

$0 < q < 1$ ve $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}[n]! &= [n][n-1]\ldots[2][1] \\ &= \frac{(1-q^n)}{1-q}\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{1-q}{1-q} \\ &= \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!} = \frac{\dfrac{(q;q)_n}{(1-q)^n}}{\dfrac{(q;q)_{n-k}}{(1-q)^{n-k}}\dfrac{(q;q)_k}{(1-q)^k}} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k}$$

şeklindedir [5].

q-üstel fonksiyonların q-Pochammer gösterilimleri ise

$$e_q^x = \frac{1}{\big((1-q)x;q\big)_\infty}$$

$$E_q^x = (-(1-q)x;q)_\infty$$

şeklindedir [1].

3. REELDE q-TÜREV VE q-İNTEGRALLER

Tanım 3.1. Herhangi bir f fonksiyonunun q-türevi

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \quad , \qquad x \neq 0, \qquad q \neq 1$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = \alpha x^2$ fonksiyonunun q-türevi

$$D_q \alpha x^2 = \frac{q\alpha x^2 - \alpha x^2}{(q-1)x} = \frac{\alpha x^2 (q-1)}{(q-1)x} = \alpha x$$

dir. Diğer taraftan

$$D_h f(x) = \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olmak üzere, q-türev ve h-türev arasında

$$\lim_{q \to 1} D_q f(x) = \lim_{h \to 0} D_h f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

ilişkisi vardır.

q-türev operatörü lineerdir. Yani, her $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$D_q[af(x) + b(g(x)] = aD_q f(x) + bD_q g(x)$$

eşitliği geçerlidir.

q-türev tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned} D_q\big(f(x)g(x)\big) &= \frac{d_q(f(x)g(x))}{d_q x} \\ &= \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x)}{(q-1)x} \\ &= \frac{f(qx)g(qx) + f(qx)g(x) - f(qx)g(x) - f(x)g(x)}{(q-1)x} \\ &= f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) \end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla çarpımın q-türevi

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x)$$

şeklindedir.

Benzer şekilde

$$D_q\big(f(x)g(x)\big)=\frac{f(qx)g(qx)-f(x)g(x)}{(q-1)x}$$

$$=\frac{f(qx)g(qx)+f(x)g(qx)-f(x)g(qx)-f(x)g(x)}{(q-1)x}$$

$$=f(x)D_qg(x)+g(qx)D_qf(x)$$

olup çarpımın q-türevinin diğer bir gösterilimi

$$D_q(f(x)g(x))=f(x)D_qg(x)+g(qx)D_qf(x)$$

olarak verilebilir.

Şimdi

$$g(x)\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)$$

eşitliğinin her iki tarafının q-türevini alalım.

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(x)}{g(x)}D_qg(x)=D_qf(x)$$

olup buradan bölümün q-türevi

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde, q-türevin diğer tanımını kullanarak da

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{D_qf(x)g(qx)-f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}$$

yazılabilir.

Bileşke fonksiyonun q-türevi, reeldeki gibi bir kuralla genellenemez. Bu nedenle burada sadece bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.2. $u = u(x) = \alpha x^\beta$ olmak üzere $f(u(x))$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$D_q[f(u(x)] = D_q\left[f\left(\alpha x^\beta\right)\right] = \frac{f\left(\alpha q^\beta x^\beta\right) - f\left(\alpha x^\beta\right)}{qx - x}$$

$$= \frac{f\left(\alpha q^\beta x^\beta\right) - f\left(\alpha x^\beta\right)}{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta} \frac{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}{qx - x}$$

$$= \frac{f\left(q^\beta u\right) - f(u)}{q^\beta u - u} \frac{u(qx) - u(x)}{qx - x}$$

$$= \left(D_{q^\beta} f\right)\left(u(x)\right) D_q u(x)$$

dir .

3.1. q-Taylor Formülü

$f(x)$, derecesi N olan herhangi bir polinom ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, f fonksiyonunun a noktasındaki q-Taylor genişlemesi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D_q^n f)(a) \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}$$

şeklindedir. Burada

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (x-a)(x-qa) \ldots (x - q^{n-1}a), & n \geq 1 \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz .

Örnek 3.3. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ ve $a = 1$ olsun.$j \leq n$ için

$$\left(D_q f\right)(x) = [n] x^{n-1}$$

$$(D_q^2 f)(x) = [n][n-1] x^{n-2}$$

$$\ldots$$

$$(D_q^j f)(x) = [n][n-1] \ldots [n-j+1] x^{n-j}$$

olduğu açıktır. Buradan

$$(D_q^j f)(1) = [n][n-1] \dots [n-j+1]$$

dir.Dolayısıyla x^n için q-Taylor formülü

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n][n-1] \dots [n-j+1]}{[j]!} (x-1)_q^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q (x-1)_q^j$$

olarak elde edilir .

Lemma 3.1. $n = 1,2, \dots$ için $D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$ dir.

İspat. Formül $n = 1$ için doğrudur. Herhangi bir k doğal sayısı için doğru olduğunu varsayalım. Yani

$$D_q(x-a)_q^k = [k](x-a)_q^{k-1}$$

olsun. Tanım gereği

$$(x-a)_q^{k+1} = (x-a)_q^k (x - q^k a)$$

dır. Çarpımın q-türevinden

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+1} &= (x-a)_q^k D_q(x - q^k a) + (qx - q^k a) D_q(x-a)_q^k \\ &= (x-a)_q^k + q(x - q^{k-1}a)[k](x-a)_q^{k-1} \\ &= (x-a)_q^k + q[k](x-a)_q^k \\ &= (1 + q[k])(x-a)_q^k \\ &= \left(1 + q\frac{1-q^k}{1-q}\right)(x-a)_q^k \\ &= \left(\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\right)(x-a)_q^k \\ &= [k+1](x-a)_q^k \end{aligned}$$

olup özdeşlik $k+1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

$n \in \mathbb{Z}$ için eşitliğin doğru olduğunu görmek için [1] nolu kaynağa bakılabilir.

Lemma 3.1. ,

$$\frac{1}{(x-a)_q^n}, \qquad (a-x)_q^n, \qquad \frac{1}{(a-x)_q^n}$$

ifadelerinin q-türevlerini bulmak için doğrudan uygulanamaz.

Çünkü, örneğin $(a-x)_q^n \neq (-1)^n (x-a)_q^n$ dir.$n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}(a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x)\dots(a-q^{n-1}x)\\ &= (a-x)q(q^{-1}a-x)q^2(q^{-2}a-x)\dots q^{n-1}(q^{-n+1}a-x)\\ &= (-1)^n q^{n(n-1)/2}(x-q^{-n+1}a)\dots(x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a)\\ &= (-1)^n q^{n(n-1)/2}(x-q^{-n+1}a)_q^n\end{aligned}$$

dir.

Lemma 3.2. [1] n herhangi bir tamsayı olmak üzere;

$$D_q \frac{1}{(x-a)_q^n} = [-n](x-q^n a)_q^{-n-1}$$

$$D_q (a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}$$

$$D_q \frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}$$

eşitlikleri doğrudur.

Örnek 3.4. $n \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $f(x) = (x+a)_q^n$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki q-Taylor formülünü bulalım. $j \leq n$ için

$$D_q f(x) = [n](x+a)_q^{n-1}$$

$$D_q^2 f(x) = [n][n-1](x+a)_q^{n-2}$$

$$\dots$$

$$D_q^j f(x) = [n][n-1]\dots[n-j+1]\,(x+a)_q^{n-j}$$

dir.

$$(x+a)_q^{n-j} = (x+a)(x+qa)\dots\left(x+q^{n-j-1}a\right)$$

eşitliğinde $x = 0$ alınırsa sağ taraf

$$(a)(qa)\dots(q^{n-j-1}a) = q^{\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}} a^{n-j}$$

olur. Buradan

$$D_q^j f(0) = [n][n-1] \dots [n-j+1] q^{\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}} a^{n-j}$$

dir. Böylece q-Taylor formülü

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} [n][n-1] \dots [n-j+1] q^{\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}} a^{n-j} \frac{(x-0)_q^j}{[j]!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{(n-j-1)(n-j)}{2}} a^{n-j} x^j$$

olarak elde edilir. Bu ifadeyi *j* yerine *n-j* alarak yeniden yazabiliriz. q-Binom katsayısı tanımından

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-j]_q! \, [j]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j}$$

yazılabilir. Böylece, daha önce de ifade edilen Gauss'un Binom formülü elde edilmiş olur.

3.2. q-İntegraller

Tanım 3.2. $D_q F(x) = f(x)$ ise $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in q-belirsiz integrali denir ve bu durum

$$\int f(x) d_q x$$

ile gösterilir [1].

Biliyoruz ki,klasik analizde sabit fonksiyonun türevi sıfırdır. Bu nedenle de belirsiz integral tek değildir ; bir sabit farkıyla farklı integraller yazılabilir. q-analizinde ise bu durum biraz farklıdır. $D_q \varphi(x) = 0$ olması için $\varphi(qx) = \varphi(x)$

olmalıdır. Bu özelliği sağlayan fonksiyonlara q-periyodiktir denir. Buradaki φ fonksiyonu sabit olmak zorunda değildir. Ancak, φ yi

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

şeklinde kuvvet serisi olarak yazarsak $\varphi(x)=\varphi(qx)$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^nc_nx^n$$

olur. Buradan $c_n=q^nc_n$ elde edilir. Bu durum her $n\geq 1$ için $c_n=0$ olması halinde mümkündür. Bu ise $\varphi(x)=c_0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla φ sabit fonksiyondur. Eğer,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi ise $f(x)$ in sabit terime kadar q-integrali tektir.

Bu q-integral

$$\int f(x)d_qx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{[n+1]}+C$$

biçimindedir. Bazı kısıtlamalar altında q-integralin tekliğini irdeleyebiliriz. Tekrar $D_q\varphi(x)=0$ olduğunu düşünelim. Buradan elde edilen $\varphi(qx)=\varphi(x)$ eşitliği periyodik fonksiyonlara benzemektedir ve x, 0'a yaklaştığında periyot küçülür. Örneğin; $q=0.1$ olsun ve periyotları $(0.1,1]$, $(0.01,0.1]$, $(0.001,0.01]$ vb. şeklinde aralıklar olarak düşünelim. $(0.1,1]$ aralığını ele alalım. Bu aralıkta φ nin grafiği düz fakat yatay değilse,periyot sıfıra yaklaşacak ve grafik aynı şeklini koruyacaktır. Ancak grafik daha dik olur. Fonksiyonun 0 noktasındaki değeri tanımlı olmadığından $x=0$ noktasında sürekli değildir. Dolayısıyla φ fonksiyonu sabit fonksiyon değildir [1].

Lemma 3.3. $0<q<1$ olmak üzere,herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olan en fazla bir tane q-integrale sahiptir [1].

İspat. Kabul edelim ki, $f(x)$ in $x=0$ noktasında sürekli olan iki q-integrali $F_1(x)$ ve $F_2(x)$ olsun. $\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$ diyelim. Bu durumda φ fonksiyonu da $x=0$ da sürekli olur.

$$D_q F_1(x)=D_q F_2(x)=f(x)$$

olduğundan

$$D_q\varphi(x)=D_q F_1(x)-D_q F_2(x)=0$$

olup $D_q\varphi(x)=0$ dır. Buradan $\varphi(qx)=\varphi(x)$ dir.

$A>0$ olmak üzere

$$m=inf\{\varphi(x): qA\leq x\leq A\}$$

$$M=sup\{\varphi(x): qA\leq x\leq A\}$$

olsun. φ nin üstten veya alttan sınırsız olması durumunda m ve M nin sonsuz olması söz konusudur.

Önce $m<M$ olduğunu kabul edelim.

$\varphi(0)\neq m$ ve $\varphi(0)\neq M$ durumlarından en az biri doğrudur .$\varphi(0)\neq m$ olduğunu kabul edelim. φ fonksiyonun $x=0$ daki sürekliliği gereği,verilen $\mathcal{E}>0$ için öyle bir $\delta>0$ bulunabilir ki

$$m+\mathcal{E}\notin \varphi(0,\delta)$$

sağlansın. Ayrıca,yeterince büyük N için $q^N A<\delta$ sağlanır. $\varphi(qx)=\varphi(x)$ eşitliğinden de yararlanarak

$$m+\mathcal{E}\in(m,M)\subset\varphi[qA,A]=\varphi[q^{N+1}A,q^N A]\subset\varphi(0,\delta)$$

yazılabilir. Ancak bu, $m+\mathcal{E}\notin \varphi(0,\delta)$ ile çelişir. Bu durumda $m=M$ dir ve φ fonksiyonu $[qA,A]$ aralığında bir sabittir. Bu, φ nin her yerde sabit olduğu anlamına gelir. $\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)=c$ dir

Bu Lemma, $x=0$ noktasında sürekli olan bir fonksiyonun q-integralinin tek olduğunu gösterir.

Şimdi, $\alpha,\ \beta$ birer sabit olmak üzere $u=u(x)=\alpha x^{\beta}$ fonksiyonunu ele alarak değişken değiştirmenin nasıl yapılacağını görelim. $F(x)$, $f(x)$ in q-integrali olmak üzere

$$\int f(u)d_q u=F(u)=F\big(u(x)\big)$$

dir. Herhangi bir q' için,daha önce aynı u fonksiyonu üzerinden elde ettiğimiz zincir kuralı yardımıyla

$$F\big(u(x)\big) = \int D_{q'} F\big(u(x)\big) d_{q'} x$$

$$= \int (D_{{q'}^{\beta}} F)\big(u(x)\big) D_{q'} u(x) d_{q'} x$$

$$= \int (D_{{q'}^{\beta}} F)\big(u(x)\big) d_{q'} u(x)$$

yazılabilir. $q' = q^{1/\beta}$ olarak seçilirse, buradan $D_{{q'}^{\beta}} F = D_q F = f$ olup

$$\int f(u) d_q u = \int f\big(u(x)\big) d_{q^{1/\beta}} u(x)$$

eşitliği elde edilir. Bu, $f\big(u(x)\big) D_{q^{1/\beta}} u(x)$ in $f(u)$ nun bir q-integrali olduğu anlamına gelir.

3.3. Jackson İntegrali

Herhangi bir f fonksiyonunun q-antitürevi olan F fonksiyonunu elde etmek için

$$\widehat{M_q}\big(F(x)\big) = F(qx)$$

biçiminde tanımlanan $\widehat{M_q}$ operatörünü göz önüne alalım. q-türev tanımından ;

$$\frac{1}{(q-1)x}\big(\widehat{M_q} - 1\big)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x)$$

dir. Bu eşitlikten, q-antitürevi

$$F(x) = \frac{1}{1 - \widehat{M_q}}\big((1-q)xf(x)\big)$$

$$= \big(1 + \widehat{M_q} + \widehat{M_q^2} + \cdots\big)\big((1-q)xf(x)\big)$$

$$= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{M_q^j}\,\big(xf(x)\big)$$

$$= (1-q)\{xf(x) + \widehat{M_q}(xf(x)) + \widehat{M_q^2}\,(xf(x)) + \cdots\}$$

$$= (1-q)\{xf(x) + qxf(qx) + q^2xf(q^2x) + \cdots\}$$

$$= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j\,x)$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 3.3.

$$\int f(x)d_qx = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j\,x)$$

ifadesine $f(x)$ in Jackson belirsiz integrali denir [1].

Bu tanım yardımıyla

$$\int f(x)D_q g(x)d_qx = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j\,x)D_q g(q^j x)$$

$$= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j\,x)\frac{g(q^j x) - g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x}$$

$$\int f(x)d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j\,x)\left(g(q^j x) - g(q^{j+1}x)\right) \qquad (3.1)$$

şeklinde daha genel bir formül elde edilir.

Teorem 3.1. $0 < q < 1,\ 0 \le \alpha < 1$ olmak üzere $|f(x)x^\alpha|$, $(0,A]$ aralığında sınırlı ise Jackson integrali $(0,A]$ aralığında $f(x)$ in q-integrali olan $F(x)$ e yakınsar. Buna ek olarak $F(0) = 0$ olduğunda $F,\ x = 0$ da süreklidir.

İspat. $(0,A]$ aralığında $|f(x)x^\alpha|$ sınırlı olsun. Bu durumda $|f(x)x^\alpha| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. $0 < x \le A,\ j \ge 0$ olmak üzere

$$\left|f(q^j x)\right| < M(q^j x)^{-\alpha}$$

yazılabilir. Buradan, $0 < x \le A$ için

$$\left|q^j f(q^j x)\right| < Mq^j(q^j x)^{-\alpha} = Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j$$

dir.

$1-\alpha>0$ ve $0<q<1$ olduğundan $|q^{1-\alpha}|<1$ dir. Dolayısıyla

$$\sum_{j=0}^{\infty} Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j$$

geometrik serisi yakınsaktır ve

$$\sum_{j=0}^{\infty} Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j = \frac{Mx^{-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}$$

dır.

$$\left|(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\right| < (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j$$

$$= \frac{(1-q)Mx^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}} \quad ,0<x\le A$$

olduğundan $f(x)$ in Jackson İntegrali yakınsaktır ve herhangi bir $F(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Bu durumda

$$F(x) = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)$$

olur. Buradan $F(0)=0$ olduğu görülür. $F(x)$ in $x=0$ da sürekli olduğunu göstermek için $\varepsilon>0$ için $|x-0|<\delta$ iken $|F(x)-F(0)|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ sayısının var olduğunu göstermeliyiz.

$$|F(x)-F(0)| = \left|(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\right|$$

$$\le (1-q)|x|\sum_{j=0}^{\infty}\left|q^j f(q^j x)\right|$$

$$< (1-q)|x|\sum_{j=0}^{\infty} Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j$$

$$< (1-q)|x|\frac{Mx^{-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}}$$

$$< \frac{M(1-q)\delta^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}} < \varepsilon$$

olduğundan $F(x),\ x=0$ da süreklidir.

$F(x)$ in $f(x)$ in q-integrali olduğunu göstermek için $F(x)$ in

q-türevlenebildiğini ve $D_qF(x)=f(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$D_qF(x)=\frac{1}{(1-q)x}\left((1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^j f\left(q^j x\right)-(1-q)qx\sum_{j=0}^{\infty}q^j f\left(q^{j+1}x\right)\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}q^j f\left(q^j x\right)-\sum_{j=0}^{\infty}q^{j+1} f\left(q^{j+1}x\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}q^j f\left(q^j x\right)-\sum_{j=1}^{\infty}q^j f\left(q^j x\right)=f(x)$$

olduğundan $F(x)$ q-türevlenebilirdir ve $F(x),\ f(x)$ in q-belirsiz integralidir.

$F(x),\ f(x)$ in q-integrali ve $F(x),\ x=0$ noktasında sürekli ise Lemma (3.3) gereği q-integral tektir. O halde şimdi, q-integrali bir sabit farkıyla elde edelim.

$$(1-q)x\sum_{j=0}^{N}q^j f\left(q^j x\right)=(1-q)x\sum_{j=0}^{N}q^j\, D_qF(t)|_{t=q^jx}$$

$$=(1-q)x\sum_{j=0}^{N}q^j\,\frac{F\left(q^jx\right)-F\left(q^{j+1}x\right)}{(1-q)q^jx}$$

$$=\sum_{j=0}^{N}F\left(q^jx\right)-F\left(q^{j+1}x\right)$$

$$=F(x)-F(q^{N+1}x)\ ,$$

olup diğer taraftan

$N\to\infty$ için $F,\ x=0$ da sürekli olduğundan

$$\lim_{N\to\infty}F\left(q^{N+1}x\right)=F(0)$$

dır. Buradan

$$(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^j f\left(q^jx\right)=F(x)-F(0)$$

elde edilir.

$x \in [0, a]$ olmak üzere

$$\int_0^x f(t) d_q t = F(x) - \lim_{N \to \infty} F(q^N x)$$

olduğunu gördük.

Burada her $x \in [0, a]$ için

$$\lim_{N \to \infty} F(q^N x)$$

limiti mevcut ise $F(x)$ e $x = 0$ da q-regülerdir denir. Bu durumda $x = 0$ da sürekli bir fonksiyon için

$$\lim_{N \to \infty} F(q^N x) = F(0)$$

olduğundan $F(x)$ fonksiyonu q-regüler olacaktır. Dolayısıyla, $x = 0$ da sürekli bir fonksiyon aynı noktada q-regülerdir. Ancak bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.5. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$D_q logx = \frac{\log(qx) - \log(x)}{(q-1)x} = \frac{logq}{q-1}\frac{1}{x}$$

olması nedeniyle

$$\int \frac{1}{x} d_q x = \frac{q-1}{logq} logx$$

dir. Diğer taraftan, Jackson formülü yardımıyla

$$\int \frac{1}{x} d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{1}{q^j x} = (1-q) \sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty$$

elde edilir. Bu durumda Jackson formülü bizi sonuca ulaştıramamıştır. Bunun nedeni

$0 \leq \alpha < 1$ için $f(x)x^{\alpha} = \frac{1}{x} x^{\alpha} = x^{\alpha - 1}$ in sınırsız olmasıdır. Ayrıca $\log x$, $x = 0$ da sürekli değildir [1].

Tanım 3.4. $0 < q < 1$ ve $D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere her $x \in D$ için $qx \in D$ oluyorsa D kümesine q-geometrik küme denir [2].

Tanım 3.5. $A \subset \mathbb{R}$ kümesi q^{-1}-geometrik küme olsun. Her $x \in A$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(\,q^{-n}x) = c$$

olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ varsa $f(x)$ e sonsuzda *q*-regülerdir denir [2].

Tanım 3.6. $A \subset \mathbb{R}$ kümesi q-geometrik bir küme ve $f(x)$ bu küme üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $f(0^+)$ ve $f(0^-)$ limitleri

$$f(0^+) = \lim_{n\to\infty} f(q^n x), \qquad x > 0$$

$$f(0^-) = \lim_{n\to\infty} f(q^n x), \qquad x < 0$$

şeklinde tanımlanır.

$A \subset \mathbb{R}\,,\ 0 \in$ A olmak üzere $f(x),\ x = 0$ da *q*-regüler ise

$$f(0) = f(0^+) = f(0^-)$$

olur [2].

Önerme 3.1. f, *A* *q*-geometrik kümesi üzerinde tanımlı *q*-periyodik bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu 0 noktasında *q*-regüler ise f sabit fonksiyondur. Buna ek olarak f, q^{-1}-geometrik *A* kümesi üzerinde tanımlı q^{-1}-periyodik fonksiyon ve sonsuzda *q*-regüler ise f, *A* kümesi üzerinde sabit fonksiyodur [2].

İspat. f, *A* da *q*-periyodik fonksiyon olduğundan

$$f(x) = f(qx) = \cdots = f(q^n x) \quad , \qquad x \in A, \qquad n \in \mathbb{N}$$

dır. Ayrıca f, 0 da *q*-regüler olduğundan

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(\,q^n x) = f(0)$$

olur. Dolayısıyla f, sabit fonksiyondur.

Benzer şekilde f, q^{-1} periyodik olduğundan

$$f(x) = f(q^{-1}x) = \cdots = f(q^{-n}x)$$

dır. $f(x)$, sonsuzda *q*-regüler olduğundan

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q^{-n}x) = c$$

olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan f in sabit fonksiyon olduğu görülür.

Kural 3.1.(q-Leibniz Kuralı) A, q-geometrik küme olmak üzere

$$D_q^n(fg)(x)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q (D_{q,x}^{n-k}f)(q^kx)D_q^k g(x), \qquad x\in A-\{0\}$$

dır [2].

Kural 3.2. D_q^n, n-yinci basamaktan q-türev olmak üzere, f fonksiyonu $\{q^jx,\ j=0,1,\dots,n\}$ noktalarındaki değerleri ile temsil edilsin. Bu durumda $x\in A-\{0\}$ için

$$D_q^n f(x)=(-1)^n(1-q)^{-n}x^{-n}q^{-\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}_q q^{\frac{r(r-1)}{2}}f(xq^{n-r}) \qquad (3.2)$$

dır. Bu formül

$$D_q^n f(x)=(1-q)^{-n}x^{-n}\sum_{r=0}^{n}q^r\frac{(q^{-n},q)_r}{(q,q)_r}f(xq^r), \qquad x\in A-\{0\}$$

olarak da yazılabilir.

(3.2) göz önüne alınarak tümevarımla

$$f(xq^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q (1-q)^kx^kq^{\binom{k}{2}}D_q^k f(x)$$

olduğu görülebilir [2].

Teorem 3.2. $f(x)$ ve $g(x)$, $[0,a]$ aralığında q-integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_0^a g(x)D_qf(x)d_qx=f(a)g(a)-\lim_{n\to\infty}(f(aq^n)g(aq^n))-\int_0^a f(qx)D_qg(x)d_qx$$

q-kısmi integrasyon kuralı geçerlidir. Ayrıca f ve g fonksiyonları sıfırda q-regüler ise

$$\lim_{n\to\infty}[f(q^na)\,g(q^na)]=f(0)g(0)$$

dır [2].

İspat. Jackson integrali tanımından

$$\int_0^a g(x)\, D_q f(x) d_q x = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n g(q^n a)\, D_q f(q^n a)$$

$$= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n g(q^n a) \left[\frac{f(q^n a) - f(q^{n+1} a)}{q^n a(1-q)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} g(q^n a)[f(q^n a) - f(q^{n+1} a)]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} g(q^n a)[f(q^n a) - f(q^{n+1} a)]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \{\, g(a)[f(a) - f(qa)] + g(qa)[f(qa) + f(q^2 a)] + \cdots$$

$$+ g(q^k a)[f(q^k a) - f(q^{k+1} a)]\, \}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\int_0^a f(qx)\, D_q g(x) d_q x = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1} a)\, D_q g(q^n a)$$

$$= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1} a) \left[\frac{g(q^n a) - g(q^{n+1} a)}{q^n a(1-q)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(q^{n+1} a)\, [g(q^n a) - g(q^{n+1} a)]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} f(q^{n+1} a)\, [g(q^n a) - g(q^{n+1} a)]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \{f(qa)[g(a) - g(qa)] + f(q^2 a)[g(qa) - g(q^2 a)] + \cdots$$

$$+ f\left(q^{k+1} a\right)\left[g\left(q^k a\right) - g\left(q^{k+1} a\right)\right]\}$$

dır. Buradan

$$\int_0^a g(x)\, D_q f(x) d_q t + \int_0^a f(qx)\, D_q g(x) d_q x$$

$$= \lim_{k\to\infty} [\, f(a)g(a) - f(qa)g(a) + f(qa)g(qa) - f(q^2a)g(qa)$$
$$+ f(q^2a)g(q^2a) + \cdots + f(q^ka)g(q^ka) - f(q^{k+1}a)g(q^ka)$$
$$+ f(qa)g(a) - f(qa)g(qa) + f(q^2a)g(qa) - f(q^2a)g(q^2a)$$
$$+ \cdots + f(q^{k+1}a)g(q^ka) - f(q^{k+1}a)g(q^{k+1}a)\,]$$
$$= \lim_{k\to\infty} [f(a)g(a) - f(q^{k+1}a)g(q^{k+1}a)]$$
$$= f(a)g(a) - \lim_{k\to\infty} [f(q^{k+1}a)g(q^{k+1}a)]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3. Sıfırı içeren A q-geometrik kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu sıfır noktasında q-regüler olsun. $c \in A$ sabit bir sayı ve $z \in A$ olmak üzere

$$F(z) \coloneqq \int_c^z f(t)d_qt$$

olarak tanımlansın. Bu durumda F, sıfır noktasında q-regülerdir. Ayrıca her $z \in A$ için $D_qF(z)$ mevcut ve $D_qF(z) = f(z)$ dir.

Tersine a ve b, A da iki nokta ise

$$\int_a^b D_qf(t)\, d_qt = f(b) - f(a)$$

dır [2].

İspat. F fonksiyonunun $z = 0$ da q-regüler olduğunu göstermek için

$$\lim_{n\to\infty} F(q^nz) = F(0)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$F(q^nz) = \int_c^{q^nz} f(t)d_qt = \int_0^{q^nz} f(t)d_qt - \int_0^c f(t)d_qt$$
$$= (1-q)q^nz \sum_{k=0}^{\infty} q^kf(q^{n+k}z) - (1-q)c \sum_{k=0}^{\infty} q^kf(q^kc)$$

olup buradan

$$\lim_{n\to\infty} F(q^n z) = \lim_{n\to\infty}\left[(1-q)q^n z\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^{n+k}z) - (1-q)c\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k c)\right]$$

$$= -(1-q)c\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k c)$$

olup

$$F(0) = \int_c^0 f(t)d_q t = -\int_0^c f(t)d_q t = -(1-q)c\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^k c)$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F(q^n z) = F(0)$$

elde edilir.

Ayrıca

$$D_q F(z) = D_q\left[\int_c^z f(t)d_q t\right]$$

$$= \frac{1}{(q-1)z}\left[\int_c^{qz} f(t)d_q t - \int_c^z f(t)d_q t\right]$$

$$= \frac{1}{(q-1)z}\left[\int_0^{qz} f(t)d_q t - \int_0^c f(t)d_q t - \left(\int_0^z f(t)d_q t - \int_0^c f(t)d_q t\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(q-1)z}\left[\int_0^{qz} f(t)d_q t - \int_0^z f(t)d_q t\right]$$

$$= \frac{1}{(q-1)z}\left[(1-q)qz\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^{n+1}z) - (1-q)z\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n z)\right]$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(q^{n+1}z) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n z)$$

$$= -qf(qz) - q^2 f(q^2 z) - \cdots + f(z) + qf(qz) + q^2 f(q^2 z) + \cdots$$

$$= f(z)$$

dir.

Dolayısıyla

$$D_qF(z) = f(z)$$

eşitliği elde edilmiş oldu.

Teorem 3.4. $[a,b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu verilsin ve ayrıca $0 \leq \gamma < 1$ olmak üzere $f(x)x^{\gamma}$, $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. $x \in [a,b]$,

$$F(x) = \int_c^x f(t)d_qt$$

olmak üzere $F(x)$, $[a,b]$ aralığında süreklidir. Burada c, $[a,b]$ aralığında sabit bir noktadır [2].

İspat. $x \in [0,a]$ olmak üzere $g(x) \coloneqq x^{\gamma}f(x)$ olsun.

$x_0 \in [a,b]$ ve $x_0 \neq 0$ olarak alalım.

$$F(x) - F(x_0) = \int_c^x f(t)d_qt - \int_c^{x_0} f(t)d_qt$$

$$= \int_0^x f(t)d_qt - \int_0^{x_0} f(t)d_qt$$

$$= (1-q)x\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^kx) - (1-q)x_0\sum_{k=0}^{\infty} q^k f(q^kx_0)$$

$$= (1-q)x\sum_{k=0}^{\infty} q^k g(q^kx)(q^kx)^{-\gamma} - (1-q)x_0\sum_{k=0}^{\infty} q^k g(q^kx_0)(q^kx_0)^{-\gamma}$$

$$= (1-q)x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(1-\gamma)}\left[g(q^kx) - g(q^kx_0)\right]$$

$$+ (1-q)x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(1-\gamma)} g(q^kx_0)$$

$$- (1-q){x_0}^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(1-\gamma)} g(q^kx_0)$$

$$= (1-q)x^{1-\gamma}\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(1-\gamma)}\,[g(q^k x) - g(q^k x_0)]$$

$$+ (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(1-\gamma)}\, g(q^k x_0)[x^{1-\gamma} - {x_0}^{1-\gamma}]$$

yazılabilir. $g(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$|x-y| < \delta$ iken $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ sayısı vardır.

Bu nedenle $x \in [a,b]$ olmak üzere $|x - x_0| < \delta$ iken $|q^k x - q^k x_0| < \delta$ dır ve her $k \in \mathbb{N}_0$ için $|g(q^k x) - g(q^k x_0)| < \varepsilon$ yazılabilir. Dolayısıyla

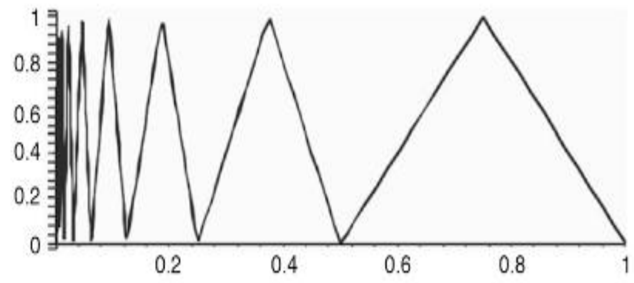
$$\lim_{x \to x_0} g(\,q^k x) = g(q^k x_0)$$

dır. Buradan

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

elde edilir. Yani $x_0 \in [a,b]$ ve $x_0 \neq 0$ olmak üzere $F(x)$ süreklidir.

Şimdi $x_0 = 0$ olduğunu varsayalım.



Şekil 3.1.

$$F(x) - F(0) = \int_c^x f(t)d_q t - \int_c^0 f(t)d_q t$$

$$= \int_0^x f(t)d_q t$$

$$= \int_0^x g(t)t^{-\gamma} d_q t$$

$$= \int_0^x t^{1-\gamma} d_q t\big(g(t) - g(0)\big) + \frac{1-q}{1-q^{2-\gamma}} x^{2-\gamma} g(0)$$

dır.

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \left(\max_{k\in\mathbb{N}_0} |g(q^k x) - g(0)| + g(0)\right) \frac{1-q}{1-q^{2-\gamma}} x^{2-\gamma}\ , 0 < \gamma < 1$$

olduğundan

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$$

dır. Sonuç olarak $F(x)$, $[a,b]$ aralığında süreklidir.

Örnek 3.6. g fonksiyonu [0,1] aralığında

$$g(x) = \begin{cases} f_k(x) & , \quad x \in (q^{k+1}, q^k] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

şeklinde tanımlı ve

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1-q}(-q + xq^{-k}), & x \in \left(q^{k+1}, \dfrac{q^k(1+q)}{2}\right] \\ \dfrac{2}{1-q}(1 - xq^{-k}), & x \in \left[\dfrac{q^k(1+q)}{2}, q^k\right] \end{cases}$$

olmak üzere, $x \in (0,1]$ olmak üzere bazı $t \in (q,1]$ ve $k_0 \in \mathbb{N}_0$ için $x = tq^{k_0}$ formunda yazılabilir. Böylece

$$\lim_{k\to\infty} g(\,q^k x) = \lim_{k\to\infty} f_{k+k_0}(q^k x) = \begin{cases} 2\dfrac{t-q}{1-q}, & q < t \leq \dfrac{1+q}{2} \\ 2\dfrac{1-t}{1-q}, & \dfrac{1+q}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dır. Burada limit değeri noktası x e bağlıdır, dolayısıyla g fonksiyonu sıfırda q-regüler değildir. Ancak, diğer yandan tüm x ler için $g(x) = g(qx)$ tir. q-türev tanımından $D_q g(x) = 0$ olur. Böylece

$$\int_0^1 D_q g(t) d_q t = \int_0^{\frac{1+q}{2}} D_q g(t) d_q t = 0$$

olup

$$\int_{\frac{1+q}{2}}^{1} D_q g(t) d_q t = 0 \neq g(1) - g\left(\frac{1+q}{2}\right) = -1$$

dir. Teorem 2.3 gereği, f eğer sıfırda q-regüler değilse

$$\int_{0}^{b} D_q f(t) d_q t = f(b) - \lim_{n\to\infty} f(q^n b)$$

dır. Buradan

$$\int_{a}^{b} D_q f(t) d_q t = \left[f(b) - \lim_{n\to\infty} f(q^n b)\right] - \left[f(a) - \lim_{n\to\infty} f(q^n a)\right]$$

elde edilir.

Şimdi klasik anlamda geçerli olan

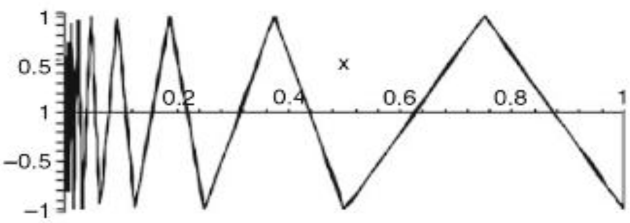
$$\left|\int_{a}^{b} f(t) d_q t\right| \leq \int_{a}^{b} |f(t)| d_q t \qquad (0 \leq a \leq b < \infty)$$

eşitliğinin q-integraller için her zaman doğru olmadığını bir örnekle gösterelim:

$h: [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q}\left(4q^{-n}x - (1+3q)\right), & q^{n+1} \leq x \leq \dfrac{q^n(1+q)}{2} \\ \dfrac{4}{1-q}\left(-xq^{-n} + 1\right) - 1, & \dfrac{q^n(1+q)}{2} \leq x \leq q^n \end{cases} , n \in \mathbb{N}_0$$

h fonksiyonu $[0,1]$ aralığında integrallenebilirdir.



Şekil 3.2.

Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $h(q^n) = -1$ ve $h\left(\frac{q^n(1+q)}{2}\right) = 1$ dir. Buradan

$$\int_{\frac{1+q}{2}}^{1} h(t) d_q t = \int_0^1 h(t) d_q t - \int_0^{\frac{1+q}{2}} h(t) d_q t$$

$$= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n h(q^n) - (1-q)\frac{1+q}{2}\sum_{n=0}^{\infty} q^n h\left(\frac{q^n(1+q)}{2}\right)$$

$$= -1 - \left(\frac{1+q}{2}\right)$$

$$= -\frac{3+q}{2}$$

dir. Benzer şekilde, $|h(q^n)| = 1$ ve $\left|h\left(\frac{q^n(1+q)}{2}\right)\right| = 1$ olup

$$\int_{\frac{1+q}{2}}^{1} |h(t)| d_q t = \int_0^1 |h(t)| d_q t - \int_0^{\frac{1+q}{2}} |h(t)| d_q t$$

$$= 1 - \frac{1+q}{2}$$

$$= \frac{1-q}{2}$$

dır. Bundan dolayı

$$\left|\int_{\frac{1+q}{2}}^{1} h(t) d_q t\right| > \int_{\frac{1+q}{2}}^{1} |h(t)| d_q t$$

elde edilir.

Ancak

$$\left|\int_a^b f(t) d_q t\right| \leq \int_a^b |f(t)| d_q t, \qquad (0 \leq a \leq b < \infty)$$

eşitsizliği $a = 0,\ b = \infty$ veya $a, b \in I$ $(a < b)$ $a = xq^n$ $b = xq^m;$ $n, m \in \mathbb{Z}$ şeklinde tanımlı a veya b ler için sağlanır [2].

Lemma 3.4. $h(t,x)$ fonksiyonu $[0,a]\times[0,a]$ üzerinde tanımlı, öyle ki her sabit t fonksiyonları için

$$D_{q,x}^{j}h(t,x) \quad (j=0,1,\dots,k-1)$$

$[0,a]$ aralığında q-integrallenebilir olsun. Bazı $x\in[0,a]$ ve $k\in\mathbb{N}$ için

$$h\left(xq^{r},xq^{j}\right)=0 \quad (r=0,1,2,\dots,j-1\,;\ j=1,2,\dots,k)$$

olmak üzere

$$D_{q,x}^{k}\int_{0}^{x}h(t,x)d_{q}t=\int_{0}^{x}D_{q,x}^{k}\,h(t,x)d_{q}t$$

dir [2].

İspat.

$$D_{q}^{n}f(x)=(-1)^{n}(1-q)^{-n}x^{-n}q^{-\frac{n(n-1)}{2}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}_{q}q^{\frac{r(r-1)}{2}}f(xq^{n-r})$$

eşitliği yardımıyla

$$D_{q,x}^{k}\int_{0}^{x}h(t,x)d_{q}t=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_{q}\frac{q^{\frac{j(j+1)}{2}-kj}}{x^{k}(1-q)^{k}}\int_{0}^{xq^{j}}h(t,xq^{j})d_{q}t$$

yazılabilir.

$$h\left(xq^{r},xq^{j}\right)=0 \quad (r=0,1,2,\dots,j-1\,;\ j=1,2,\dots,k)$$

olduğundan

$$\int_{0}^{xq^{j}}h(t,xq^{j})d_{q}t=\int_{0}^{x}h(t,xq^{j})d_{q}t, \qquad j=1,2,\dots,k$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}D_{q,x}^{k}\int_{0}^{x}h(t,x)d_{q}t&=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_{q}\frac{q^{\frac{j(j+1)}{2}-kj}}{x^{k}(1-q)^{k}}\int_{0}^{x}h(t,xq^{j})d_{q}t\\&=\int_{0}^{x}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}_{q}\frac{q^{\frac{j(j+1)}{2}-kj}}{x^{k}(1-q)^{k}}h\left(t,xq^{j}\right)\right)d_{q}t\end{aligned}$$

$$= \int_0^x D_{q,x}^k h(t,x) d_q t$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.7. $0 < a < b$ olmak üzere

$$\int_0^b f(x) d_q x = (1-q) b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{3.3}$$

ifadesine $f(x)$ in $[0, b]$ aralığındaki belirli Jackson q-integrali denir. Ayrıca

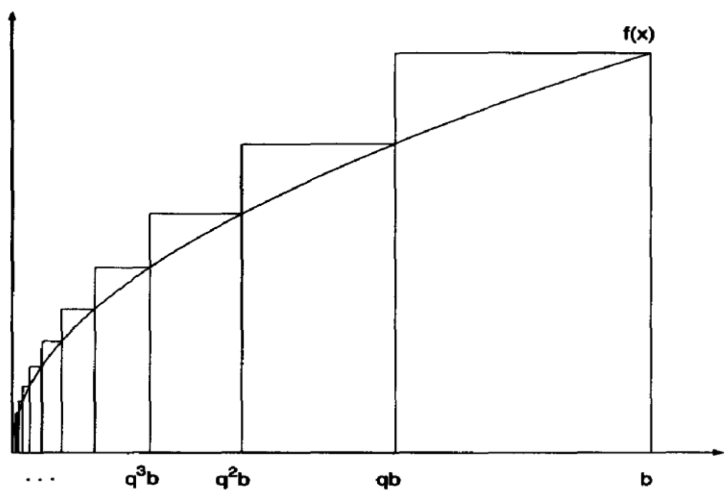
$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x$$

dir. (3.1) den, (3.3) ü daha genel haliyle

$$\int_0^b f(x) d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^j b\right)\left(g(q^j b) - g(q^{j+1} b)\right)$$

şeklinde yazabiliriz [1].

Şimdi q-integralin geometrik anlamda nasıl ifade edildiğine bakalım.



Şekil 3.3.

$\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere $[\varepsilon, b]$ aralığını ele alalım. Bu aralığı şekildeki gibi parçalara ayıralım. Burada elde ettiğimiz alanların toplamı Riemann toplamıdır. $q \to 1$ iken sonsuz sayıda dikdörtgen elde edilir ve dikdörtgenlerin taban uzunlukları sıfıra yaklaşır. Bu limitin sonucu bize eğri altında kalan alanı ; dolayısıyla Riemann integralini verir. ε keyfi olduğundan $f(x)$, $[0, b]$ aralığında sürekli olmak üzere $[0, b]$ aralığı alınırsa

$$\lim_{q \to 1} \int_0^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) dx$$

dir.

(3.3) de $b \to \infty$ için limit alınırsa genelleştirilmiş q-integralin tam bir tanımını yapamayız. Genelleştirilmiş q-integral tanımını vermeden önce bazı hesaplamalar yapalım. Öncelikle

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x) d_q x = \int_0^{q^j} f(x) d_q x - \int_0^{q^{j+1}} f(x) d_q x$$

$$= (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f\left(q^{j+k}\right) - (1-q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f\left(q^{j+k+1}\right)$$

$$= (1-q) q^j f(q^j)$$

yazılabilir. Böylece

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x) d_q x = (1-q) q^j f\left(q^j\right) \tag{3.4}$$

elde edilmiş oldu [1].

Tanım 3.8.

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x) d_q x & , \quad 0 < q < 1 \\ \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x) d_q x & , \quad q > 1 \end{cases}$$

ifadesine $f(x)$ in $[0,\infty)$ aralığındaki genelleştirilmiş q-integrali denir [1].

Lemma 3.5. $f(x)x^{\alpha}$; $\alpha < 1$ iken $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda ve $\alpha > 1$ iken yeterince büyük x için sınırlı ise genelleştirilmiş q-integrali yakınsaktır [1].

İspat. (3.4) ten

$$\int_0^{\infty} f(x)d_q x = |(1-q)| \sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f\left(q^j\right)$$

olup diğer taraftan

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f\left(q^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j\right) + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f\left(q^{-j}\right) \tag{3.5}$$

yazılabilir. Burada $0 < q < 1$ olarak seçeceğiz. $q > 1$ için de ispat benzer şekilde yapılır.

Genelleştirilmiş q-integralin yakınsak olduğunu göstermek için (3.5) eşitliğinin sağ tarafındaki iki serinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz. İlk serinin yakınsaklığını Teorem 2.1 de göstermiştik. Şimdi ikinci serinin yakınsaklığını gösterelim. Lemma gereğince, $\alpha > 1$ ve yeterince büyük x için $f(x)x^{\alpha}$ sınırlıdır. Yani $M > 0$ için

$$|f(x)x^{\alpha}| < M$$

dir. Burada, yeterince büyük x ler için $x = q^{-j}$ yazılabilir.

$$\left|q^{-j} f(q^{-j})\right| = q^{j(\alpha-1)}\left|q^{-\alpha j} f(q^{-j})\right| < M q^{j(\alpha-1)}$$

olup

$$\sum_{j=1}^{\infty} M q^{j(\alpha-1)}$$

serisi yakınsak olduğundan

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|q^{-j} f(q^{-j})\right|$$

serisi yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f(q^{-j})$$

serisi de yakınsaktır.

Sonuç olarak (3.5) teki iki seri de yakınsak olduğundan genelleştirilmiş q-integrali yakınsaktır. ■

Şimdi, daha önce elde ettiğimiz

$$\int f(u) d_q u = F\big(u(x)\big) = \int f\big(u(x)\big) d_{q^{1/\beta}} u(x) \tag{3.6}$$

eşitliğini göz önüne alalım ve $u = u(x) = \alpha x^{\beta}$ olsun. Eşitliğin sağ tarafını

$$\int f(x) d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f\big(q^j x\big)\big(g(q^j x) - g(q^{j+1} x)\big) \tag{3.7}$$

eşitliğini kullanarak yazarsak

$$\begin{aligned}
\int f\big(u(x)\big) d_{q^{1/\beta}} u(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(u\big(q^{j/\beta} x\big)\right)\left(u(q^{j/\beta} x) - u(q^{j+1/\beta} x)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\big(\alpha q^j x^{\beta}\big)\left(\alpha q^j x^{\beta} - \alpha q^{j+1} x^{\beta}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j u)\big(q^j u - q^{j+1} u\big) \\
&= (1-q) u \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\big(q^j u\big) \\
&= \int f(u) d_q u
\end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla (3.6) eşitliğinin sağ ve sol tarafındaki integrallerin Jackson integrallerinin eşit olduğunu göstermiş olduk. Sonuç olarak aynı q-antitüreve sahip olan integrallerin Jackson integrallerinin birbirine eşit olduğunu gördük.

Şimdi

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)d_q u = \int_a^b f\big(u(x)\big)d_{q^{1/\beta}} u(x) \tag{3.8}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini (3.7) yi kullanarak gösterelim.

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)d_{q^{1/\beta}} u(x) = \int_0^b f\big(u(x)\big)d_{q^{1/\beta}} u(x) - \int_0^a f\big(u(x)\big)d_{q^{1/\beta}} u(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(u\big(q^{j/\beta}b\big)\right)\big(u(q^{j/\beta}b) - u(q^{j+1/\beta}b)\big)$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty} f\left(u\big(q^{j/\beta}a\big)\right)\big(u(q^{j/\beta}a) - u(q^{j+1/\beta}a)\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} f\big(\alpha q^j b^\beta\big)\big(\alpha q^j b^\beta - \alpha q^{j+1} b^\beta\big) - \sum_{j=0}^{\infty} f\big(\alpha q^j a^\beta\big)\big(\alpha q^j a^\beta - \alpha q^{j+1} a^\beta\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^j u(b)\right)\left(q^j u(b) - q^{j+1}u(b)\right)$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^j u(a)\right)\left(q^j u(a) - q^{j+1}u(a)\right)$$

$$= (1-q)u(b)\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j u(b)\right) - (1-q)u(a)\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j u(a)\right)$$

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)d_q u$$

elde edilir.

(3.8) eşitliğinde $\alpha > 0,\ \beta = 1,\ b = \infty$ alınırsa $u(\infty) = \infty$ olup

$$\int_0^\infty f(\alpha x)d_q x = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(x)d_q x$$

eşitliği elde edilir [1].

3.4. q-Analizin Temel Teoremi ve Parçalı q-İntegrasyon

Teorem 3.5. (q-analizin temel teoremi) $f(x)$ in q-antitürevi $F(x)$ ve $F(x)$ $x = 0$ da sürekli ise

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a), \qquad 0 \leq a < b \leq \infty \tag{3.9}$$

dır [1].

İspat. $F(x)$, $x = 0$ da sürekli olduğundan $F(x)$ i

$$F(x) = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) + F(0)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q)a \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j a)$$

olduğundan

$$\int_0^a f(x) d_q x = F(a) - F(0)$$

yazılır. Aynı şekilde b sonlu bir sayı olmak üzere

$$\int_0^b f(x) d_q x = F(b) - F(0)$$

dir. Dolayısıyla

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x = F(b) - F(a)$$

elde edilir. Burada $0 < q < 1$ için $a = q^{j+1}, b = q^j$ (ya da $q > 1$ için $a = q^j$, $b = q^{j+1}$) alınırsa

$$\int_0^{\infty} f(x)d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_q x$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(q^j) - F(q^{j+1})$$

$$= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\lim_{x\to\infty} F(x)$$

limiti mevcutsa $b = \infty$ için (3.9) sağlanır.

Sonuç 3.1. $x = 0$ ın bir komşuluğunda $f'(x)$ mevcut (buradaki türev $f(x)$ in klasik anlamdaki türevidir) ve $x = 0$ da sürekli ise

$$\int_a^b D_q f(x)d_q x = f(b) - f(a) \tag{3.10}$$

dır [1].

İspat. L'Hospital kuralından

$$\lim_{x\to 0} D_q f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = \lim_{x\to 0} \frac{qf'(qx) - f'(x)}{q-1} = \frac{f'(0)(q-1)}{q-1}$$

$$= f'(0)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $D_q f(x)$, $D_q f(0) = f'(0)$ olacak şekilde tanımlı ve $x = 0$ da sürekli ise (3.9) dan (3.10) eşitliğinin doğruluğu kolayca görülür.

q-integral ile klasik anlamdaki integralin en önemli farklılığı; herhangi bir aralıkta bir fonksiyonun q-integralini aldığımızda, $x = 0$ daki durumunu incelemeliyiz. Bunun nedeni Jackson integralinin q-antitürevine yakınsaması için q-antitürevin $x = 0$ da sürekli olması şartıdır.

$f(x)$ ve $g(x)$, $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda türevlenebilen ve $x = 0$ da sürekli herhangi iki fonksiyon olsun. Buradan $f(x)g(x)$ çarpımı da türevlenebilirdir ve $x = 0$ noktasında süreklidir.

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)\left(D_q g(x)\right) + g(qx)\left(D_q f(x)\right)$$

olduğunu biliyoruz. Sonuç 3.1. yardımıyla

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)\left(D_q g(x)\right) d_q x + \int_a^b g(qx)\left(D_q f(x)\right) d_q x$$

ve

$$\int_a^b f(x) d_q\, g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) d_q f(x)$$

elde edilir. Bu eşitliğe parçalı q-integrasyon denir. $b = \infty$ iken de eşitlik doğrudur [1].

Teorem 3.6. $D_q^j f(x)$, $j \le n+1$ için $x = 0$ da sürekli olsun. Bu durumda Taylor formülünün q-analoğu, Cauchy kalan terimi ile birlikte

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!} \int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n\, d_q x \quad (3.11)$$

biçimindedir [1].

İspat. $D_q f(x)$, $x = 0$ da sürekli olduğundan ve Teorem 3.5. gereği

$$\int_a^b D_q\, f(x) d_q x = f(b) - f(a)$$

dir. Ayrıca $d_q(b-x) = D_q(b-x) d_q x$ ve $D_q(b-x) = -1$ olduğundan $d_q(b-x) = -d_q x$ olup buradan

$$\int_a^b D_q\, f(x) d_q x = f(b) - f(a) = \int_a^b D_q\, f(x) d_q(b-x)$$

dır. Bu son eşitlik (3.11) ifadesinin $n = 0$ için açılımıdır.

(3.11) eşitliğinin $(n-1)$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n-1]!} \int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1}\, d_q x \quad (3.12)$$

eşitliği doğru olsun. Şimdi eşitliğin n için de doğru olduğunu gösterelim.

Kısmi q-integrasyonu kullanarak ve $D_q(b-x)_q^n = -[n](b-qx)_q^{n-1}$ olduğundan

$$\int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1}\,d_qx = -\frac{1}{[n]}\int_a^b D_q^n f(x) D_q(b-x)_q^n\,d_qx$$

$$= -\frac{1}{[n]}\int_a^b D_q^n f(x) d_q(b-x)_q^n$$

$$= -\frac{1}{[n]}\left(D_q^n f(b)(b-b)_q^n - D_q^n f(a)(b-a)_q^n - \int_a^b (b-qx)_q^n\, D_q^{n+1} f(x)\right)$$

$$= -\frac{1}{[n]}\left(-D_q^n f(a)(b-a)_q^n - \int_a^b (b-qx)_q^n\, D_q^{n+1} f(x)\right)$$

olup böylece

$$\int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1}\,d_qx = \frac{1}{[n]} D_q^n f(a)(b-a)_q^n + \frac{1}{[n]}\int_a^b (b-qx)_q^n\, D_q^{n+1} f(x)$$

buunur. Bu ifadeyi (3.12) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(D_q^j f\right)(a)\frac{(b-a)_q^j}{[j]!} \\ &\quad + \frac{1}{[n-1]!}\left(\frac{1}{[n]} D_q^n f(a)(b-a)_q^n + \frac{1}{[n]}\int_a^b (b-qx)_q^n\, D_q^{n+1} f(x)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(a)\frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!}\int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n\,d_qx \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.11) eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

4. KOMPLEKS q- EĞRİSEL İNTEGRALLER

4.1. Kompleks q-Türevler

Kompleks q-integrallere geçmeden önce bazı tanımları vermek yararlı olacaktır.

Tanım 4.1. $D \subset \mathbb{C}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $z \in D$ için $\lambda z \in D$ ise D kümesine λ- geometrik küme denir.

$D \subset \mathbb{C}$ q-geometrik bir küme ve $f(z) \in D$ kompleks bir fonksiyon olsun.

Bu durumda $f(z)$ nin kompleks q-türevi

$$D_q f(z) := \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}, \qquad z \in D/\{0\}, |q| < 1$$

$$D_q f(0) := \lim_{n \to \infty} \frac{f(0) - f(q^n z)}{q^n z}, \qquad z \in D/\{0\}$$

biçiminde tanımlıdır [2].

Tanım 4.2. $D \subset \mathbb{C}$ q-geometrik küme ve $f(z) \in D$ kompleks bir fonksiyon olsun. Her $z \in D$ için

$$\lim_{n \to \infty} f(q^n z) = f(0)$$

eşitliği gerçekleniyorsa $f(z)$ ye $z = 0$ da q-regülerdir denir.

Dolayısıyla $z = 0$ da sürekli olan bir fonksiyonun bu noktada q-regüler olduğu görülür. Ancak $z = 0$ da q-regüler bir fonksiyon sürekli olmayabilir [2].

Tanım 4.3. $A \subset \mathbb{C}$ q-geometrik bir küme olmak üzere, her $z \in A$ için

$$\lim_{n \to \infty} f(q^{-n} z) = c$$

olacak olacak şekilde c sabiti varsa $f(z)$ ye sonsuzda q-regülerdir denir [2].

Teorem 4.1. $0 \in D$ olmak üzere $D \subset \mathbb{C}$ q-geometrik bir kümesi üzerinde $f(z)$ fonksiyonu verilsin ve $f(z)$, $z = 0$ da q-regüler olsun. Bu durumda

$$F(z) \coloneqq \int_0^z f(t) d_q t$$

fonksiyonu $z = 0$ da q-regülerdir. Buna ek olarak her $z \in D$ için

$$D_q F(z) = f(z)$$

ve

$$\int_0^z D_q f(t)\, d_q t = f(z) - f(0)$$

dir [2].

Teorem 4.1 deki $f(z)$ fonksiyonunun $z = 0$ da q-regüler olmaması durumunda

$$\int_0^z D_q f(t)\, d_q t = f(z) - \lim_{n\to\infty} f(q^n z)$$

eşitliği geçerlidir.

Bu eşitlikten yararlanarak, $a, b \in D$ için

$$\int_a^b D_q f(t)\, d_q t = \left[f(b) - \lim_{n\to\infty} f(q^n b)\right] - \left[f(a) - \lim_{n\to\infty} f(q^n a)\right]$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer f, $z = 0$ da q-regüler ise

$$\int_a^b D_q f(t)\, d_q t = f(b) - f(a)$$

dir [6].

Lemma 4.1. $h(x,t)$ fonksiyonu $[0,a] \times [0,a] = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le a,$ $0 \le t \le a\}$ kümesi üzerinde tanımlı ve her $t \in [0,a]$ için q-integrallenebilir olsun. Buna ek olarak $f(x)$ fonksiyonu da

$$f(x) := \int_0^x h(x,t) d_q t$$

şeklinde tanımlansın. $h(qx, x) = 0$ olması durumunda

$$D_q^x \int_0^x h(x,t)d_qt = \int_0^x D_q^x h(x,t)d_qt$$

eşitliği gerçeklenir [6].

İspat. Jackson integrali tanımı yardımıyla

$$D_q^x \int_0^x h(x,t)d_qt = D_q^x \left\{(1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^n\, h(x,q^nx)\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-q)x}\left\{(1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^n\, h(x,q^nx) - (1-q)qx\sum_{n=0}^{\infty} q^n\, h(qx,q^{n+1}x)\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n h(x,q^nx) - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\, h(qx,q^{n+1}x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n h(x,q^nx) - \sum_{n=1}^{\infty} q^n\, h(qx,q^nx)$$

$$= h(x,x) + \sum_{n=1}^{\infty} q^n\left(h(x,q^nx) - h(qx,q^nx)\right)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\int_0^x D_q^x h(x,t)d_qt = \int_0^x \left\{\frac{1}{(1-q)x}\left(h(x,t)-h(qx,t)\right)\right\}d_qt$$

$$= (1-q)x\frac{1}{(1-q)x}\sum_{n=0}^{\infty} q^n(h(x,q^nx) - h(qx,q^nx))$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n\left(h(x,q^nx) - h(qx,q^nx)\right)$$

$$= h(x,x) - h(qx,x) + \sum_{n=1}^{\infty} q^n\left(h(x,q^nx) - h(qx,q^nx)\right)$$

$$= h(x,x) + \sum_{n=1}^{\infty} q^n\left(h(x,q^nx) - h(qx,q^nx)\right)$$

$$= D_q^x \int_0^x h(x,t)d_qt$$

dır. Böylece ispat tamamlanır ■.

4.2. Kompleks Kısmi Türev Operatörleri

$D \subset \mathbb{R}^2$ alt kümesinde tanımlı $u = u(x, y)$ fonksiyonu verilsin.

$0 < q < 1,\ (q^n x, q^n y) \in D$ olmak üzere u fonksiyonunu x ve y ye göre q-kısmi türevleri

$$D_{q,x}u(x,y) = \frac{u(qx,y) - u(x,y)}{(q-1)x}, \qquad x \neq 0$$

$$D_{q,y}u(x,y) = \frac{u(x,qy) - u(x,y)}{(q-1)y}, \qquad y \neq 0$$

biçiminde tanımlıdır.

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleks fonksiyonunun q-türevi

$$D_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z} = \frac{u(qz) - u(z)}{(q-1)z} + i\frac{v(qz) - v(z)}{(q-1)z}$$

$$= D_q u(z) + iD_q v(z), \qquad z \neq 0$$

dir. $f(z)$ nin x ve y ye göre türevleri ise

$$D_{q,x}f(z) = \frac{f(qx+iy) - f(x+iy)}{(q-1)x}$$

$$D_{q,y}f(z) = \frac{f(x+iqy) - f(x+iy)}{(q-1)iy}$$

şeklindedir [6].

4.3. Kompleks q-Eğrisel İntegraller

Tanım 4.4. Parçalı düzgün rektiflenebilen (ölçüsü sonlu) $\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi üzerinde $f(z)$ fonksiyonunu (veya $t \in I = [0, a]$ üzerinde $f(z(t))$ fonksiyonunu) ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük k sayıları için

$$|z(aq^k) - z(aq^{k+1})| < \delta$$

olduğunda

$$|f(z(aq^k)) - f(z(aq^{k+1}))| < \varepsilon$$

sağlanacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayıları varsa $f(z)$ ye γ üzerinde (veya $f(z(t))$ fonksiyonuna I üzerinde) q-düzgün süreklidir denir [6].

Tanım 4.5. $A \subset \mathbb{C}$ q-geometrik bir küme olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu için

$$\int_0^z f(t) d_q t = (1-q) z \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n z) = F(z)$$

eşitliği mevcut ise f fonksiyonuna A üzerinde q-integrallenebilirdir denir [6].

Lemma 4.2. $\mathbb{C}$ de sürekli $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [0, a]$ eğrisi ve bu eğri üzerinde $f(z) = u(z) + iv(z) = u\big(z(t)\big) + iv(z(t))$ düzgün sürekli fonksiyonu verilsin. $x(t)$ ve $y(t)$ q-türevlenebilir, u ve v q-integrallenebilir olsun. Bu durumda $f(z)$ nin γ eğrisi üzerinden Jackson integrali

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) d_q z &= \int_{t=0}^{a} f\big(z(t)\big) D_q z(t) d_q t \\ &= (1-q) a \sum_{n=0}^{\infty} q^n f\left(z(q^n a)\right) D_q z(q^n a) \qquad (4.1) \end{aligned}$$

dır. Burada $f(z),\ z = 0$ da q-regülerdir [6].

İspat.

$$\gamma: z(t) = x(t) + iy(t);\ 0 \le t \le a$$

$$f(z) = f\big(z(t)\big) = u\big(z(t)\big) + iv(z(t))$$

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma f(z) d_q z \\ &= \int_0^a f\big(z(t)\big) D_q z(t) d_q t \\ &= \int_0^a \big[u\big(z(t)\big) + iv\big(z(t)\big)\big]\big[D_q x(t) + i D_q y(t)\big] d_q t \end{aligned}$$

$$= \int_0^a u(z(t))D_q x(t)\, d_q t + i\int_0^a v(z(t))D_q x(t)\, d_q t$$

$$+ i\int_0^a u(z(t))D_q y(t) d_q t - \int_0^a v(z(t))D_q y(t)\, d_q t$$

$$= \int_0^a u(z(t))\left[\frac{x(t)-x(qt)}{(1-q)t}\right] d_q t + i\int_0^a v(z(t))\left[\frac{x(t)-x(qt)}{(1-q)t}\right] d_q t$$

$$+ i\int_0^a u(z(t))\left[\frac{y(t)-y(qt)}{(1-q)t}\right] d_q t$$

$$- \int_0^a v(z(t))\left[\frac{y(t)-y(qt)}{(1-q)t}\right] d_q t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[u(z(q^n a)) + iv(z(q^n a))\right]\left[x(q^n a) - x(q^{n+1}a)\right.$$

$$\left. + i\left(y(q^n a) - y(q^{n+1}a)\right)\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(\,z(q^n a))[z(q^n a) - z(q^{n+1}a)]$$

$$= (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(z(q^n a))D_q z(q^n a)$$

dir.

Eğer (4.1) deki seri yakınsak ise $f(z)$ γ üzerinde q-integrallenebilirdir.

Lemma 4.3. $f(z)$, γ sürekli eğrisi üzerinde q-integrallenebilir ise

$$\lim_{q\to 1^-}\int_\gamma f(z) d_q z = \int_\gamma f(z) dz$$

dir [6].

İspat. $f(z)$, γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\int_\gamma f(z) d_q z = \int_{t=0}^{a} f(z(t))D_q z(t) d_q t = \sum_{n=0}^{\infty} f(\,z(q^n a))[z(aq^n) - z(aq^{n+1})]$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$\lim_{q\to 1^-}[z(aq^n) - z(aq^{n+1})] = 0$$

olduğunu görüyoruz. Diğer taraftan, $1 - q < \delta$ olmak üzere

$$|aq^n - aq^{n+1}| = |aq^n||1-q| < |aq^n|\delta = aq^n\delta < a\delta = \varepsilon$$

olup, $z(t)$ sürekli olduğundan $|aq^n - aq^{n+1}| < \varepsilon$ iken

$|z(aq^n) - z(aq^{n+1})| < \varepsilon_1$ olacak şekilde yeterince küçük ε_1 sayısı mevcuttur. Riemann integrali tanımı yardımıyla

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} f(z\,(t_k^*))[z(t_{k+1}) - z(t_k)], 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} < a$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(z(t_n^*)[z(t_{n+1}) - z(t_n)], \qquad t_n < t_n^* < t_{n+1}$$

dır. Bu son eşitlikte $t_n^* \to aq^n$, $t_{n+1} \to aq^n$, $t_n \to aq^{n+1}$ alınırsa, $1 - q < \delta$ için

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\lim_{q\to 1^-}\left\{f\Big(z(aq^k)\Big)[z(aq^k) - z(aq^{k+1})]\right\}$$

$$= \lim_{q\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty} f\Big(z(aq^k)\Big)[z(aq^k) - z(aq^{k+1})]$$

dır. Burada sağ taraftaki seri yakınsak olduğundan limit ile toplam yer değiştirmiştir. Dolayısıyla

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{q\to 1^-}\int_\gamma f(z)d_q z$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.1. γ eğrisi; köşeleri $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1 + i,\ z_4 = i$ noktaları olan birim karenin pozitif yönde yönlendirilmişi olmak üzere

$$\int_\gamma z d_q\, z$$

integralinin sonucunu bulalım.

$$\int_\gamma z d_q\, z = \int_{\gamma_1} z d_q\, z + \int_{\gamma_2} z d_q\, z + \int_{\gamma_3} z d_q\, z + \int_{\gamma_4} z d_q\, z$$

$z \in \gamma_1,\ z(t) = t, 0 \le t \le 1$ olmak üzere

$$D_q z(t) = \frac{z(t) - z(qt)}{(1-q)t} = \frac{t - qt}{(1-q)t} = 1$$

olup buradan

$$\int_{\gamma_1} z d_q z = \int_{t=0}^{1} t\, D_q z(t) d_q t = \int_{t=0}^{1} t\, d_q t = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{1}{1+q}$$

bulunur.

$z \in \gamma_2,\ z(t) = 1 + it,\ 0 \le t \le 1$ olmak üzere

$$D_q z(t) = \frac{1 + it - (1 + iqt)}{(1-q)t} = \frac{it(1-q)}{(1-q)t} = i$$

$$\int_{\gamma_2} z d_q z = \int_{t=0}^{1} (1 + it)\, i d_q t = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} i q^n (1 + i q^n)$$

dır.

$z \in \gamma_3,\ z(t) = 1 - t + i,\ 0 \le t \le 1$ olmak üzere

$$D_q z(t) = \frac{1 - t + i - (1 - qt + i)}{(1-q)t} = \frac{-t(1-q)}{(1-q)t} = -1$$

$$\int_{\gamma_3} z d_q z = \int_{t=0}^{1} -(1 - t + i)\, d_q t = -(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n\,(1 - q^n + i)$$

dır.

$z \in \gamma_4,\ z(t) = i(1-t),\ 0 \le t \le 1$ olmak üzere

$$D_q z(t) = \frac{i(1-t) - i(1-qt)}{(1-q)t} = \frac{-it(1-q)}{(1-q)t} = -i$$

$$\int_{\gamma_4} z d_q z = \int_{t=0}^{1} i(1-t)\,(-i) d_q t = \int_{t=0}^{1} (1-t) d_q t = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n\,(1 - q^n)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\int_{\gamma} z d_q z = \int_{\gamma_1} z d_q z + \int_{\gamma_2} z d_q z + \int_{\gamma_3} z d_q z + \int_{\gamma_4} z d_q z$$

$$=\frac{1}{1+q}+(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} iq^n(1+iq^n)-(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n\,(1-q^n+i)$$

$$+(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n\,(1-q^n)$$

$$=\frac{1}{1+q}+(1-q)\left[\sum_{n=0}^{\infty} iq^n-q^{2n}-q^n+q^{2n}-iq^n+q^n-q^{2n}\right]$$

$$=\frac{1}{1+q}-(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}$$

$$=\frac{1}{1+q}-\frac{1}{1+q}$$

$$=0$$

elde edilir [6].■

$$\gamma: z(t)=x(t)+iy(t), \qquad 0\le t\le a$$

rektiflenebilen parçalı düzgün eğrisi reeldeki gibi pozitif yönde (saat yönünün tersi) yönlendirilmiş olsun. Buradan γ eğrisinin başlangıç noktası

$z_0=z(0)=x(0)+iy(0)$, bitiş noktası $z_a=z(a)=x(a)+iy(a)$ dır.

$f(z)$, γ eğrisi üzerinde q-integrallenebilir bir fonksiyon ve $\tilde{\gamma}, \gamma$ nın ters yönde yönlendirilmişi olsun. $aq^n\in[0,a]$, $n=0,1,\dots$ noktaları γ eğrisi üzerinde

$z_n=z(aq^n)=x(aq^n)+iy(aq^n)$ noktalarına karşılık gelir.

Diğer yandan bu noktalar $\tilde{\gamma}$ eğrisi üzerinde de olduğundan, γ eğrisinin

$\{z_n=z(aq^n)\}$, $n=0,1,\dots$ noktalarında $f\big(z(aq^n)\big)$ değerleri γ ve $\tilde{\gamma}$ üzerinde aynıdır. Dolayısıyla $f(z)$ nin $\tilde{\gamma}$ eğrisi üzerinden q-integrali

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)d_q z=(q-1)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n f\big(z(aq^n)\big)D_q z(aq^n)=-\int_{\gamma} f(z)d_q z$$

olur.

γ eğrisi üzerinde $z_n=x(aq^n)+iy(aq^n)\,, n=0,1,\dots$ noktalarını ele alalım. $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $I=[0,a]$ aralığında $D_q x(t)$ ve $D_q y(t)$ türevlerine sahip ve bu türevler q-integrallenebilirdir.

Şimdi

$$\ell_n = |z(aq^{n+1}) - z(aq^n)|, \qquad n = 0,1,..$$

diyelim. Jackson integrali yardımıyla

$$\int_0^a |D_q z(t)| d_q t = (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z(aq^{n+1}) - z(aq^n)|}{|(q-1)aq^n|} q^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |z_{n+1} - z_n|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n \tag{4.2}$$

bulunur ve (4.2) serisi rektiflenebilen bir γ eğrisi için yakınsaktır.

$f(z) = u(z) + iv(z)$ kompleks fonksiyonu γ eğrisi üzerinde q-düzgün sürekli ve sıfır noktasında q-regüler olsun. $t \in [0, a]$, $0 < q < 1$ olmak üzere $u = u(z(t)) = u(x(t), y(t))$, $v = v(z(t)) = v(x(t), y(t))$ reel değerli fonksiyonları q-integrallenebilirdir. Ayrıca $f(z(t))$ q-düzgün sürekli olduğundan $u(z(t))$ ve $v(z(t))$ de q-düzgün süreklidir.

Şimdi

$$z_k = z(aq^k),$$
$$\Delta_q x(aq^k) = x(aq^k) - x(aq^{k+1}),$$
$$\Delta_q y(aq^k) = y(aq^k) - y(aq^{k+1})$$

olmak üzere

$$S_1^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f(z_k)\ell_k, \qquad \ell_k = z(aq^k) - z(aq^{k+1})$$

$$S_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} u(z_k)\Delta_q x(aq^k)$$

$$S_3^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} v(z_k)\Delta_q y(aq^k)$$

toplamlarını ele alalım. Buna ek olarak

$$I_1 = \int_0^a f(z(t))|D_q z(t)|\, d_q t \tag{4.3}$$

$$I_2 = \int_0^a u(z(t))|D_q x(t)|\, d_q t \tag{4.4}$$

$$I_3 = \int_0^a v(z(t))|D_q y(t)|\, d_q t \tag{4.5}$$

diyelim ve aşağıdaki tanımı verelim [6].

Tanım 4.6. (4.4) ve (4.5) deki integrallerin toplamı olan

$$I_2 + I_3 = \int_0^a \left[u\big(x(t), y(t)\big)D_q x(t) + v\big(x(t), y(t)\big)D_q y(t)\right] d_q t$$

$$:= \int_\gamma u(x,y)\, d_q x + v(x,y) d_q y$$

integraline, (u, v) ikilisinin γ eğrisi üzerinden 2. tip eğrisel q-integrali denir [6].

$f(z)$, γ eğrisi üzerinde q-düzgün sürekli olduğundan

$$\sup_{\gamma} |f(z)| = L_1$$

olacak şekilde $L_1 \in (0, \infty)$ vardır. Diğer yandan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k = \ell_q$$

olacak şekilde $\ell_q \in (0, \infty)$ vardır. Buradan, $\forall\ \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0(\varepsilon)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde yeterince büyük n ler için

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \ell_k - \ell_q\right| < \frac{\varepsilon}{L_1}$$

dir.

Her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük n doğal sayıları için

$$\left|S_1^{(n)} - I_1\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(z\left(aq^k\right)\right)\left(z\left(aq^k\right) - z\left(aq^{k+1}\right)\right)\right.$$

$$\left. - (1-q)a \sum_{k=0}^{\infty} q^k f\left(z\left(aq^k\right)\right)\left|\frac{z\left(aq^{k+1}\right) - z\left(aq^k\right)}{(1-q)aq^k}\right|\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|f\left(z(aq^k)\right)\right| |z(aq^{k+1}) - z(aq^k)|$$

$$\leq L_1 \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \ell_k\right|$$

$$= L_1 |\ell_q - (\ell_0 + \ell_1 + \cdots + \ell_n)|$$

$$< L_1 \frac{\varepsilon}{L_1} = \varepsilon$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} S_1^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(z(aq^k)\right)\ell_k = \int_0^a f(z(t)) \left|D_q z(t)\right| d_q t = I_1$$

olarak elde edilir.

Diğer yandan, u fonksiyonunun γ üzerinde q-düzgün sürekli olması nedeniyle

$$\sup_{\gamma} |u(z)| = \sup_{t\,\in\,[0,a]} |u(z(t))| = L_2$$

eşitliğini sağlayacak $L_2 \in (0, \infty)$ sayısı vardır. Buradan

$$\left|I_2 - S_2^{(n)}\right| = \left|\int_0^a u\big(z(t)\big) D_q x(t) d_q t - \sum_{k=0}^{n} u(z_k)\Delta_q x(aq^k)\right|$$

$$= \left|(1-q)a \sum_{k=0}^{\infty} q^k u\left(z(aq^k)\right)\left[\frac{x(aq^{k+1}) - x(aq^k)}{(q-1)aq^k}\right]\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{n} u(z_k)(x(aq^k) - x(aq^{k+1}))\right|$$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u\left(z(aq^k)\right)[x(aq^{k+1}) - x(aq^k)]\right|$$

$$\leq L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(aq^{k+1}) - x(aq^k)|$$

$$\leq L_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell_k$$

elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \ell_k$$

serisi yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x(aq^k) - x(aq^{k+1})|$$

serisi de yakınsak olacaktır. Dolayısıyla

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x(aq^k) - x(aq^{k+1})| < \frac{\varepsilon}{L_2}$$

olacak biçimde $\varepsilon > 0$ vardır. Buradan

$$\left|I_2 - S_2^{(n)}\right| < \varepsilon$$

yazılır ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} S_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} u\Big(z(aq^k)\Big)\Delta_q x(aq^k) = \int_0^a u\big(z(t)\big)D_q x(t) d_q t = I_2$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} S_3^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} v\Big(z(aq^k)\Big)\Delta_q y(aq^k) = \int_0^a v\big(z(t)\big)D_q y(t) d_q t = I_3$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Ayrıca

$$\int_\gamma u(x,y) d_q x = \int_\gamma u(z) d_q\, x = \int_0^a u\big(z(t)\big)\, d_q x(t)$$

$$= \int_0^a u\big(x(t), y(t)\big)\, d_q x(t)$$

$$= \int_0^a u\big(x(t), y(t)\big)\, D_q x(t) d_q t$$

$$= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n\, u\big(x(aq^n), y(aq^n)\big) D_q x(aq^n)$$

$$= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n\, u\big(x(aq^n), y(aq^n)\big) \frac{x(aq^{n+1}) - x(aq^n)}{(q-1)aq^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u\big(z(aq^n)\big)\, \Delta_q x(aq^n) \tag{4.6}$$

ve benzer şekilde

$$\int_\gamma v(x,y) d_q y = \int_0^a v\big(x(t), y(t)\big)\, d_q y(t)$$

$$= \int_0^a v\big(x(t), y(t)\big)\, D_q y(t) d_q t$$

$$= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n\, v\big(x(aq^n), y(aq^n)\big) D_q y(aq^n)$$

$$= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n\, v\big(x(aq^n), y(aq^n)\big) \frac{y(aq^{n+1}) - y(aq^n)}{(q-1)aq^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} v\big(z(aq^n)\big)\, \Delta_q y(aq^n) \tag{4.7}$$

dir. (4.6) ve (4.7) den

$$\int_\gamma u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y = \sum_{n=0}^{\infty} u\big(z(aq^n)\big)\, \Delta_q x(aq^n) + v\big(z(aq^n)\big) \Delta_q y(aq^n)$$

elde edilir [6].

5. KATLI q-İNTEGRALLER

5.1 Katlı q-İntegral Tanımı ve Varlığı

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\}$ karesi üzerinde $h(x,y)$ fonksiyonu verilsin. $(x,y) \in D$, $0 < q < 1$ olmak üzere $h(x,y)$ nin katlı q-integrali

$$I = \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t\, d_q s \tag{5.1}$$

$$= (1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}\, h(q^n x, q^k y) \tag{5.2}$$

şeklinde verilir [6].

(5.2) katlı serisinin yakınsaklık durumunu inceleyelim. Her $(x,y) \in D$ için $|h(x,y)| \leq M$ olacak biçimde $M \in (0,\infty)$ varsa (4.1) integrali daima mevcuttur. $h(x,y)$ nin D kümesi üzerinde sınırsız olması durumunda da (5.1) integrali mevcuttur. Şimdi bununla ilgili olan aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 5.1. [6] $h(x,y), D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a\}$ kümesi üzerinde bir fonksiyon olmak üzere her $(x,y) \in [0,a] \times [0,a]$ ve $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$ için

$$x^\alpha y^\beta |h(x,y)| < M \tag{5.3}$$

eşitsizliğini sağlayacak pozitif M sayısı mevcut ise (5.2) serisi her

$(x,y) \in [0,a] \times [0,a]$ için yakınsaktır.

İspat. (5.3) eşitsizliğinden $x > 0$, $y > 0$ olmak üzere

$$|h(x,y)| < M x^{-\alpha} y^{-\beta} \tag{5.4}$$

dir. (5.4) te x yerine $q^n x$, y yerine de $q^k y$ yazılırsa

$$|h(q^n x\,, q^k y)| < M(q^n x)^{-\alpha}(q^k y)^{-\beta} = M q^{-n\alpha} x^{-\alpha} q^{-k\beta} y^{-\beta}$$

olur. Eşitsizliğin her iki taraf q^{n+k} ile çarpılırsa

$$q^{n+k}|h(q^n x\,, q^k y)| < M q^{n(1-\alpha)} q^{k(1-\beta)} x^{-\alpha} y^{-\beta}$$

elde edilir. $0 < q < 1$ olduğundan $0 < q^{1-\alpha} < 1$ ve $0 < q^{1-\beta} < 1$ dir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} Mx^{-\alpha}y^{-\beta}q^{(1-\alpha)n}\, q^{(1-\beta)k} = \frac{Mx^{-\alpha}y^{-\beta}}{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{1-\beta})}$$

serisi noktasal yakınsaktır. Buradan her $(x,y) \in [0,a] \times [0,a]$ için

$$(1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}\, |h(q^n x, q^k y)| < \frac{Mx^{-\alpha}y^{-\beta}}{(1-q^{1-\alpha})(1-q^{1-\beta})}$$

olduğundan (5.2) serisi mutlak yakınsak, dolayısıyla yakınsaktır.

Ancak şunu belirtmek gerekir ki; (5.4) eşitsizliğinin sağlanması (5.2) serisinin yakınsaklığı için yeterli fakat gerekli değildir.

$$\int_0^a\int_0^a h(x,y) d_q x\, d_q y = (1-q)^2 a^2 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}\, h(q^n a, q^k a) \qquad (5.5)$$

integrali geometrik olarak;

$$D_{n,k} = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : aq^{n+1} \le x \le aq^n, aq^{k+1} \le y \le aq^k, 0 < q < 1\},$$

$(n,k = 0,1,\dots)$ dikdörtgenlerinin sağ üst köşesindeki fonksiyon değeri ile $D_{n,k}$ dikdörtgenlerinin alanları çarpımlarının toplamını ifade etmektedir.

Ayrıca

$$\bigcup_{n,k=0}^{\infty} D_{n,k} = [0,a] \times [0,a]$$

olduğu kolaylıkla görülür.

(5.5) te her $(x,y) \in D$ için $h(x,y) = 1$ için $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\int_0^a\int_0^a d_q x\, d_q y = a^2 = Alan\ (D)$$

dir. Katlı q-integralin geometrik anlamı yardımıyla

$$\lim_{q\to 1^-}\int_0^a\int_0^a h(x,y)d_qx\,d_qy=\int_0^a\int_0^a h(x,y)dx\,dy$$

eşitliği görülür.

Tanım 5.1. $0<q<1$ olmak üzere $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le a, 0\le y\le a\}$ q-geometrik kümesi üzerinde $h(x,y)$ fonksiyonu verilsin.

$(x,y)\in D,\ x\neq 0,\ y\neq 0$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} h(q^n x,y)=h(0,y)$$

eşitliği gerçekleniyorsa $h(x,y)$ fonksiyonuna $D_1=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y\le a\}$ doğru parçası üzerinde q-regüler,

$$\lim_{n\to\infty} h(x,q^k y)=h(x,0)$$

olduğunda ise $D_2=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2: 0<x\le a\}$ doğru parçası üzerinde q-regülerdir denir. Buna ek olarak

$$\lim_{n,k\to\infty} h(\,q^n x,q^k y)\coloneqq\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{k\to\infty} h(q^n x,q^k y)\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} h(q^n x,q^k y)\right]$$
$$=h(0,0)$$

eşitliği sağlanıyorsa $h(x,y)$ fonksiyonuna $(0,0)$ noktasında q-regülerdir denir [6].

$D=[0,a]\times[0,a]$ kümesi üzerinde $h(x,y)$ fonksiyonu verilsin.$h(x,y)$ nin $D_1=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2: 0<y\le a\}$, $D_2=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2: 0<x\le a\}$ kümeleri üzerinde ve $(0,0)$ noktasında q-regüler olmaması durumunda (5.2) ifadesi, katlı q-integralin değerine eşit olmayabilir. Ancak $h(x,y)$, D_1 ve D_2 kümeleri üzerinde ve $(0,0)$ noktasında q-regüler ve bu noktalarda 0 değerini alıyorsa (5.2), q-integralin değerine her zaman eşittir.

$h(x,y),\ D=[0,a]\times[0,a]$ kümesi üzerinde hem x, hem de y ye göre q-integrallenebilirse

$$\int_0^x\int_0^y h(s,t)d_qt\,d_qs=\int_0^y\int_0^x h(s,t)d_qs\,d_qt$$

dir [6].

5.2 *q*-Green Formülü

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y h(s,t)d_qt\,d_qs$$

diyelim. $h(x,y)$ fonksiyonu, D_1 ve D_2 kümeleri üzerinde ve $(0,0)$ noktasında q-regüler ve bu noktalarda 0 değerini alıyorsa

$$F(x,y)=(1-q)^2xy\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}q^{n+k}\,h(q^nx,q^ky) \tag{5.6}$$

dir. Şimdi, aynı koşullarda $x\neq 0,\ y\neq 0$ iken

$$D_q^xD_q^y\int_0^x\int_0^y h(s,t)d_qt\,d_qs=\int_0^x\int_0^y D_q^sD_q^th(s,t)d_qt\,d_qs=h(x,y)$$

olduğunu gösterelim. Buna göre

$$F(x,y)=(1-q)^2xy\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}q^{n+k}\,h(q^nx,q^ky)$$

yazılır. Burada $h(x,y)$ fonksiyonu $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq a\}$ kümesi üzerinde x ve y ye göre q-integrallenebilir olsun.

$D_q^xF(x,y)$ ve $D_q^yF(x,y)$ q-türevlerini hesaplayalım:

$x\neq 0$ için

$$\begin{aligned}D_q^xF(x,y)&=\frac{F(x,y)-F(qx,y)}{(1-q)x}\\&=\frac{1}{(1-q)x}\Bigg[(1-q)^2xy\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}q^{n+k}\,h(q^nx,q^ky)\\&\qquad-(1-q)^2qxy\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}q^{n+k}\,h(q^{n+1}x,q^ky)\Bigg]\\&=(1-q)y\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}q^{n+k}\,[h(q^nx,q^ky)-qh(q^{n+1}x,q^ky)]\end{aligned}$$

dır. $y\neq 0$ için

$$D_q^yF(x,y)=\frac{F(x,y)-F(x,qy)}{(1-q)y}$$

$$= \frac{1}{(1-q)y}\left[(1-q)^2 xy\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}\, h(q^n x, q^k y)\right.$$

$$\left. - (1-q)^2 qxy\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}\, h(q^n x, q^{k+1} y)\right]$$

$$= (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}\,[h(q^n x, q^k y) - qh(q^n x, q^{k+1} y)]$$

dır. $s \neq 0,\ x \neq 0$ olmak üzere

$$\int_0^x\int_0^y D_q^s h(s,t) d_q t\, d_q s = \int_{s=0}^{x}\int_{t=0}^{y} \frac{1}{(1-q)s}[h(s,t) - h(qs,t)] d_q t\, d_q s$$

$$= \int_0^x \left\{\frac{1}{(1-q)s}\left[(1-q)y\sum_{k=0}^{\infty} q^k [h(s, q^k y) - h(qs, q^k y)]\right]\right\} d_q s$$

$$= (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^n \left\{\frac{1}{(1-q)q^n x}\left[(1-q)y\sum_{k=0}^{\infty} q^k\left[h\left(q^n x, q^k y\right) - h\left(q^{n+1}x, q^k y\right)\right]\right]\right\}$$

$$= (1-q)y\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^k [h(q^n x, q^k y) - h(q^{n+1} x, q^k y)]$$

bulunur. Ayrıca $t \neq 0,\ y \neq 0$ olmak üzere

$$\int_0^x\int_0^y D_q^t h(s,t) d_q t\, d_q s = \int_{s=0}^{x}\int_{t=0}^{y} \frac{1}{(1-q)t}[h(s,t) - h(s,qt)] d_q t\, d_q s$$

$$= \int_0^x \left\{(1-q)y\sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{1}{(1-q)q^k y}[h(s, q^k y) - h(s, q^{k+1} y)]\right\} d_q s$$

$$= (1-q)x\sum_{n=0}^{\infty} q^n [h(q^n x, q^k y) - h(q^n x, q^{k+1} y)]$$

dır.

Diğer taraftan

$$D_q^s D_q^t h(s,t) = D_q^s\left\{\frac{1}{(1-q)t}[h(s,t) - h(s,qt)]\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-q)s}\frac{1}{(1-q)t}[h(s,t) - h(s,qt) - h(qs,t) + h(qs,qt)]$$

$$= \frac{1}{(1-q)^2 st}\left[h(s,t) - h(s,qt) - h(qs,t) + h(qs,qt)\right]$$

olarak bulunur. (5.4) ten

$$\int_0^x \int_0^y D_q^s D_q^t h(s,t) d_q t \, d_q s$$

$$= (1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} \left\{ \frac{1}{(1-q)^2 q^n x q^k y} \left[h(q^n x, q^k y) - h(q^n x, q^{k+1} y) \right. \right.$$
$$\left. \left. - h(q^{n+1} x, q^k y) + h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)\right] \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[h(q^n x, q^k y) - h(q^n x, q^{k+1} y) - h(q^{n+1} x, q^k y) \right.$$
$$\left. + h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)\right] \tag{5.7}$$

dır.

Şimdi

$$D_q^x D_q^y \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t \, d_q s$$

ifadesinin değerini bulup (5.7) ile karşılaştıralım

$$D_q^x D_q^y \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t \, d_q s = D_q^x D_q^y \left\{ (1-q)^2 xy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} \, h(q^n x, q^k y) \right\}$$

$$= D_q^x \left\{ (1-q)^2 x \frac{1}{(1-q)y} \left[y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} \, h(q^n x, q^k y) \right. \right.$$
$$\left. \left. - qy \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} \, h(q^n x, q^{k+1} y) \right] \right\}$$

$$= D_q^x \left\{ (1-q) x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} \left[h(q^n x, q^k y) - q h(q^n x, q^{k+1} y)\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{(1-q)x} \left\{ (1-q) x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} \left[h(q^n x, q^k y) - q h(q^n x, q^{k+1} y)\right] \right.$$
$$\left. -(1-q) q x \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} \left[h(q^{n+1} x, q^k y) - q h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)\right] \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}[h(q^n x, q^k y) - qh(q^n x, q^{k+1} y) - qh(q^{n+1} x, q^k y)$$
$$+ q^2 h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) - q^{n+k+1} h(q^n x, q^{k+1} y) - q^{n+k+1}\, h(q^{n+1} x, q^k y)$$
$$+ q^{n+k+2} h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n\, h(q^n x, y) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\, h(q^n x, qy)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^n x, q^{k+1} y) - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\, h(q^{n+1} x, y)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^{n+1} x, q^k y) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+2}\, h(q^{n+1} x, qy)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+2} h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= h(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\, h(q^n x, qy)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1}\, h(q^n x, qy)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^n x, q^{k+1} y)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^{n+1} x, q^k y) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+2}\, h(q^{n+1} x, qy)$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+2} h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= h(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^n x, q^{k+1} y)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+2}\, h(q^{n+1}x, qy)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^{n+1}x, q^k y) + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+2}\, h(q^{n+1}x, qy)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} q^{k+2}\, h(qx, q^{k+1}y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+2} h(q^{n+1}x, q^{k+1}y)$$

$$= h(x,y) + \sum_{k=2}^{\infty} q^k\, h(x, q^k y)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} q^{n+k} h(q^n x, q^k y) - \sum_{k=1}^{\infty} q^{k+1}\, h(x, q^{k+1}y)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^n x, q^{k+1}y) - \sum_{k=2}^{\infty} q^{k+1}\, h(qx, q^k y)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^{n+1}x, q^k y) + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k+2}\, h(qx, q^{k+1}y)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+2} h(q^{n+1}x, q^{k+1}y)$$

$$= h(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^n x, q^{k+1}y) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+1} h(q^n x, q^{k+1}y)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+2} h(q^{n+1}x, q^{k+1}y)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} q^{n+k+2} h(q^{n+1}x, q^{k+1}y)$$

$$= h(x,y)$$

olup

$$D_q^x D_q^y \int_0^x \int_0^y h(s,t)\, d_q t\, d_q s = h(x,y) \tag{5.8}$$

elde edilir.

Diğer yandan, (5.7) ten

$$\int_0^x \int_0^y D_q^s D_q^t h(s,t) d_q t \, d_q s$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(q^n x, q^k y) - h(q^n x, q^{k+1} y) - h(q^{n+1} x, q^k y) + h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(q^n x, q^k y) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(q^n x, q^{k+1} y) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^k y) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h(q^n x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^n x, q^k y) - \sum_{n=0}^{\infty} h(q^n x, qy) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^n x, q^{k+1} y) - \sum_{n=0}^{\infty} h(q^{n+1} x, y) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^k y) + \sum_{n=0}^{\infty} h(q^{n+1} x, qy) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [h(q^n x, y) - h(q^{n+1} x, y)] + \sum_{n=0}^{\infty} [h(q^{n+1} x, qy) - h(q^n x, qy)] + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^n x, q^k y) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^n x, q^{k+1} y) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^k y) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= \lim_{N\to\infty}[h(x,y) - h(q^{N+1}x,y)] + \lim_{N\to\infty}[h(q^{N+1}x,qy) - h(x,qy)]$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} h(q^n x, qy) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} h(q^n x, q^k y)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h(q^n x, q^{k+1} y) - \sum_{n=0}^{\infty} h(q^{n+1}x, qy)$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^k y) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h(q^{n+1} x, q^{k+1} y)$$

$$= h(x,y) - h(0,y) + h(0,qy) - h(x,qy) + \sum_{n=0}^{\infty}[h(q^n x,qy) - h(q^{n+1}x,qy)]$$

$$= h(x,y) - h(0,y) + h(0,qy) - h(x,qy) + \lim_{N\to\infty}[h(x,qy) - h(q^{N+1}x,qy)]$$

$$= h(x,y) - h(0,y) + h(0,qy) - h(x,qy) + h(x,qy) - h(0,qy)$$

$$= h(x,y) - h(0,y)$$

dir. Buradan

$$\int_0^x \int_0^y D_q^s D_q^t h(s,t) d_q t \, d_q s = h(x,y) - h(0,y) \tag{5.9}$$

elde edilir [6].

(5.8) ve (5.9) den aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.1. $h(x,y)$ fonsiyonu $D_1 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leq a\}$, $D_2 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq a\}$ kümeleri üzerinde ve (0,0) noktasında q-regüler olsun. Eğer $h(0,y) = h(x,0) = h(0,0) = 0$ ise

$$\int_0^x \int_0^y D_q^s D_q^t h(s,t) d_q t \, d_q s = D_q^x D_q^y \int_0^x \int_0^y h(s,t) d_q t \, d_q s$$

dir.

Genel olarak , $h(x,y)$ reel değerli fonksiyonu için

$$\int_0^x \int_0^y D_q^s h(s,t) d_q t \, d_q s = \int_0^y [h(x,t) - h(0,t)] d_q t \tag{5.10}$$

$$\int_0^x \int_0^y D_q^t h(s,t) d_q t \, d_q s = \int_0^y [h(s,y) - h(s,0)] d_q s \tag{5.11}$$

eşitlikleri yazılabilir [6].

Teorem 5.2. (q-Green Formülü) $D = [0,a] \times [0,a]$ kümesi üzerinde $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ reel değerli fonksiyonları verilsin ve $u,\ v,\ D_q^x v,\ D_q^y u$ fonksiyonları D üzerinde x ve y ye göre q-integrallenebilir olsun. Bu durumda

$$\int_{\partial D} u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y = \iint_D \left[D_q^x v(x,y) - D_q^y u(x,y) \right] d_q x d_q y$$

Green özdeşliği geçerlidir. Burada $\partial D, D$ dikdörtgeninin çevresinin pozitif yönde yönlendirilmiş halidir [6].

İspat. $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ olsun.

$$\gamma_1 :\ x = t, \qquad y = 0\,, \qquad 0 \le t \le a$$

$$d_q x(t) = d_q t, \qquad d_q y(t) = 0$$

$$\int_{\gamma_1} u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y = \int_0^a u(t,0) d_q t + 0 = \int_0^a u(t,0) d_q t$$

$$\gamma_2 : x = a, \qquad y = t, \qquad 0 \le t \le a$$

$$d_q x(t) = 0, \qquad d_q y(t) = d_q t$$

$$\int_{\gamma_2} u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y = 0 + \int_0^a v(a,t) d_q t = \int_0^a v(a,t) d_q t$$

$\widetilde{\gamma_3}$, γ_3 eğrisinin ters yönde yönlendirilmişi olmak üzere

$$\widetilde{\gamma_3} : x = t, \qquad y = a, \qquad 0 \le t \le a$$

$$d_q x(t) = d_q t, \qquad d_q y(t) = 0$$

$$\int_{\gamma_3} u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y = - \int_{\widetilde{\gamma_3}} u(x,y) d_q x + v(x,y) d_q y$$

$$= -\int_0^a u(t,a)d_qt + 0$$

$$= -\int_0^a u(t,a)d_qt$$

dir.

Benzer şekilde $\widetilde{\gamma_4}$, γ_4 eğrisinin ters yönde yönlendirilmişi olmak üzere

$$\widetilde{\gamma_4} : x = 0, \qquad y = t, \qquad 0 \le t \le a$$

$$d_qx(t) = 0, \qquad d_qy(t) = d_qt$$

$$\int_{\gamma_4} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = -\int_{\widetilde{\gamma_4}} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy$$

$$= -\left(0 + \int_0^a v(0,t)d_qt\right)$$

$$= -\int_0^a v(0,t)d_qt$$

dir. Böylece

$$\int_{\partial D} u(x,y)d_qx + v(x,y)d_qy = \int_0^a [u(t,0) + v(a,t) - u(t,a) - v(0,t)]d_qt$$

olur.

Diğer yandan, (5.10) ve (5.11) eşitlikleri yardımıyla

$$\iint_D D_q^x v(x,y)\, d_qxd_qy = \int_0^a \int_0^a D_q^x v(x,y)d_qxd_qy = \int_0^a [v(a,y) - v(0,y)]d_qy$$

$$= \int_0^a [v(a,t) - v(0,t)]d_qt$$

ve

$$\iint_D D_q^y u(x,y)\, d_qxd_qy = \int_0^a \int_0^a D_q^y u(x,y)d_qxd_qy = \int_0^a [u(x,a) - u(x,0)]d_qx$$

$$= \int_0^a [u(t,a) - u(t,0)]d_q t$$

bulunur. Buradan

$$\iint_D \left[D_q^x v(x,y) - D_q^y u(x,y)\right] d_q x d_q y = \int_0^a [v(a,t) - v(0,t) - u(t,a) + u(t,0)]d_q t$$

olur.

Sonuç olarak

$$\iint_D \left[D_q^x v(x,y) - D_q^y u(x,y)\right] d_q x d_q y = \int_{\partial D} u(x,y)d_q x + v(x,y)d_q y$$

elde edilir.

6.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde belirtilen kaynaklardan yararlanılarak önce q-analizin türev, integral ve Binom formülü gibi temel kavramları verilmiş; daha sonra eğrisel kompleks q-integraller ve katlı q-integral kavramları incelenmiştir. Her iki integrali tanımlarken reelde iyi bilinen bir $f(x)$ tek değişkenli fonksiyonu için verilen

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n a), \qquad 0 < a$$

Jackson integrali temel alınmıştır. Kompleks q-analizinde eğrisel integraller ve eğri kavramları çeşitli kaynaklarda farklı farklı tanımlanmıştır. Bunun için [6] ve [7] kaynaklarına bakılabilir. Ayrıca q-analitiklik kavramının da farklı tanımları vardır. Bunun için de [4] ve [7] kaynaklarına bakılabilir. [4] de tanımlanan q-analitiklik $f(z)$ diskret fonksiyonları için q-eğrisel integral kavramı tanımı kullanılarak [7] dekinden farklı olarak yeni bir q-Cauchy integral formülü araştırılabilir. Yine bu tezde diskret karesel kümeler üzerinde katlı q-integral verilmiştir. Bundan yararlanarak diğer (dikdörtgensel, dairesel) diskret kümeler üzerinden katlı q-integraller araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kac, V., Cheung, P., Quantum Calculus. Springer Verlag, New York, 2002.

[2] Annaby, M.H., Mansour, Z.S., q-Fractional Calculus and Equations, Springer Verlag, Lecture Notes in Mathematics 2056, (2012).

[3] Nalcı, Ş., Exactly Solvable Q-Extended Nonlinear Classical and Quantum Models. Yüksek Lisans Tezi. İzmir İleri teknoloji Enstitüsü, İzmir, (2011).

[4] Pashaev, O.K., Nalci, Ş., q-Analytic Functions,Fractals and Generalized Analytic Functions, Journal of Physics ;Mathematical and Teorical, Vol. 47, 1-25, (2014).

[5] Koekoek, R., Swarttouw, R.F., The Askey-Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polynomials and its q-Analogue, 9, (1996).

[6] Aydın, M.; Kompleks q-İntegraller ve Bazı Uygulamaları; Doktora Tezi , Kırıkkale Üniversitesi (2017).

[7] Harman, C.J.; Discrete Geometric Function Theory 1; Applicable Analysis, An İnternational Journal, Vol. 7, 315-336; (1978).

[8] Salem, A., On q-Extension of Laurent Expansion with Applications, A.J. of Math. Sci. Vol. 20(1), 141-156, (2014).

[9] Rajkovic, P.M., Marinkovic, S.D., Stankovic, M.S., Fractional İntgerals and Derivatives in q-Calculus, App Analy and Disc. Math. 1, 311-323, (2007).

[10] Gökşin, E., Q-Analizi ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir, (2015).

[11] Albayrak, D., Özel Fonksiyonların q-Benzerleri, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul, (2009).