

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Genelleştirilmiş Fibonacci Maksimum Yol Grafları

Gökçe DİCLE KARAAĞAÇ

MAYIS 2017

Matematik Anabilim Dalı Gökçe DİCLE KARAAĞAÇ tarafından hazırlanan Fibonacci Maksimum Yol Grafları adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Kerim KOCA

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Danışman

Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Jüri Üyeleri

Başkan : Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Üye : Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nurettin IRMAK

12/05/2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

FİBONACCİ MAKSİMUM YOL GRAFLARI

DİCLE KARAAĞAÇ, Gökçe

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Mayıs 2017, 61 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde üzerinde çalışılan konu ve incelenen kaynaklar hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde graf teorisinin temel kavramları, graf çeşitleri, komşuluk ve çakışım matrisleri, graflarda bağlantısallık, yollar ve devreler incelenmiştir. Euler graflarının ve Hamilton yolunun sağlanması gereken genel koşullar sunulmuştur.

Üçüncü bölümde genelleştirilmiş Fibonacci grafları ve bu graflarda maksimum yol problemleri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise eksiltilmiş genelleştirilmiş Fibonacci grafları, maksimum yol problemi çözümü ve çözüm aşamaları, çözüm aşamalarının sağlamış olduğu koşullar ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Fibonacci grafları, maksimum yol problemleri, eksiltilmiş genelleştirilmiş Fibonacci grafları, Euler grafları, Hamilton yolu, komşuluk ve çakışım matrisleri, yollar ve devreler.

ABSTRACT

FIBONACCI MAXIMUM PATH GRAPHS

DİCLE KARAAĞAÇ, Gökçe

Kirikkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlker AKKUŞ

May 2017, 61 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, general information related with our work and references we have examined are given.

In the second chapter, fundamental properties of graph theory, types of graphs, incidence and adjacency matrices, connectivity of graphs, paths and cycles are examined. The general conditions required for the Euler graphs and Hamilton path are presented.

In the third chapter, generalized Fibonacci graphs and the maximum path problems in these graphs are discussed.

In the fourth chapter, deficient generalized Fibonacci graphs, solution of the maximum path problems and solution steps, the conditions provided by the solution steps are investigated.

Key Words: Genarelized Fibonacci graphs, maksimum path problems, deficient genarelized Fibonacci graphs, Euler graphs, Hamilton path .

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımcı esirgemeyen tez yöneticisi hocam, Sayın Doç. Dr. İlker AKKUŞ'a, çalışmalarımnda bana destek olan aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ	1
1.1 Kaynak Özetleri	5
1.2 Tezin Amacı	5
2. TEMEL KAVRAMLAR	7
2.1 Graf Tanımı ve Çeşitleri	7
2.2 Graf İzomorfizması	10
2.3 Grafların Düğüm Dereceleri	11
2.4 Alt Graflar	12
2.5 Komşuluk ve Çakışım Matrisleri	13
2.6 Basit Grafların Derece Vektörleri	16
2.7 Yollar, Devreler ve Devir	17
2.8 Euler ve Hamilton Grafları	23
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MAKSİMUM YOL GRAFLARI	26
3.1 Maksimum Yol Grafları.....	26
3.2. Maksimum Yol Graflarının Yapısı	29
3.3. Genelleştirilmiş Fibonacci Grafları.....	31
4. EKŞİLTİLMİŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MAKSİMUM YOL GRAFLARI	39
4.1 k – Genelleştirilmiş Fibonacci Grafları ve Eksiltilmiş k - Genelleştirilmiş Fibonacci Grafları	39
4.2 Çözümün Açıklaması	41
4.3 Sınır Kuralları	43
4.4 Yerel Özellikler	46

4.5 Eksiltiilmiş Fibonacci Graflarında Kirişlerin Dağılımı	47
5. SONUÇ	60
KAYNAKLAR	61



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>ÇİZELGE</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. G ve G_1 Graflarındaki Maksimum Yol Sayıları	57



ŞEKİLLER DİZİNİ

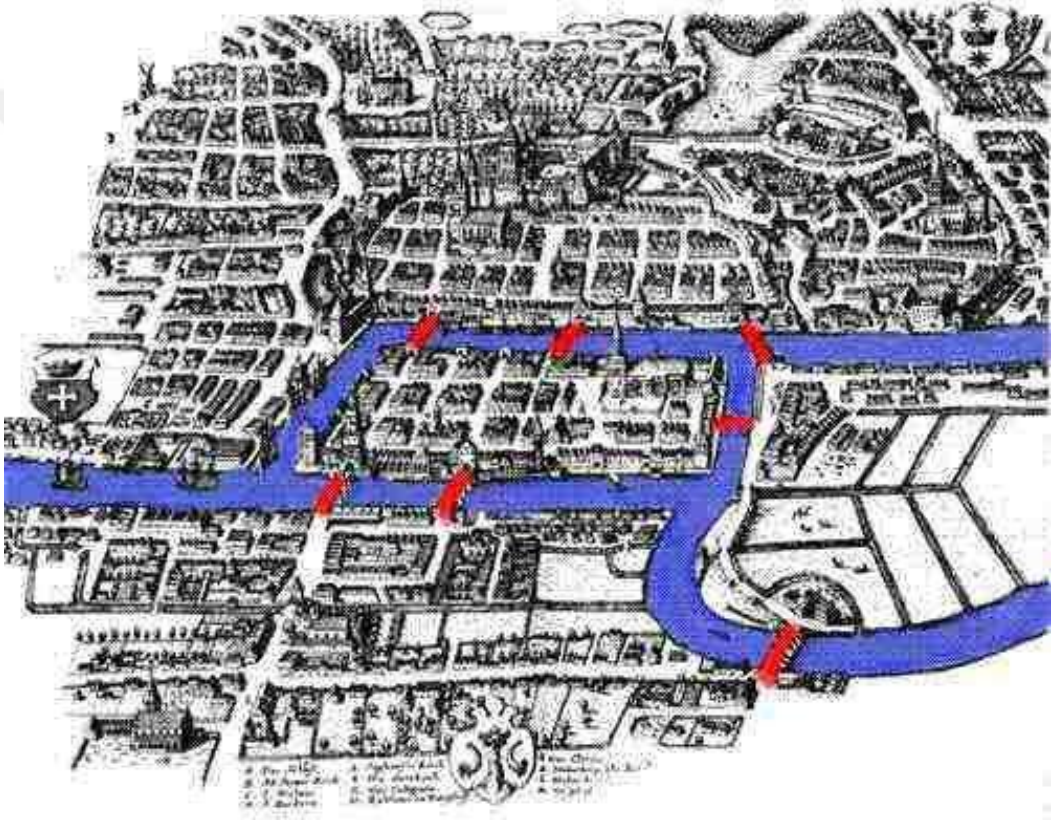
<u>ŞEKİL</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Königsberg Problemini İfade Eden Graf	2
2.1. Yol Haritası	7
2.2. Elektrik Devresi	7
2.3. 5 Düğüm ve 8 Ayrıtlı Graf	8
2.4. G_1 , G_2 ve G_3 grafları	11
2.5. 3-Düzgün Graf	12
2.6. 4 Düğümlü Yönlü Graf	12
2.7. G grafi	13
2.8. H alt grafi	13
2.9. 7 Düğümlü Graf	15
2.10. 4 Düğümlü Yönlü Graf	15
2.11. 9 Düğümlü Basit Graf	18
2.12. 7 Düğümlü ve 9 Ayrıtlı Bir Graf	19
2.13. 7 Düğümlü Yönlü Graf	20
2.14. 5 Düğümlü Basit Graf	21
2.15. 5 Düğümlü Basit Graf	22
2.16. 13 Düğümlü Bağlantısız Graf	23
2.17. 13 Düğümlü Taban Ormanı	23
2.18. Euler Patikası	24
2.19. Euler Devresi	24
2.20. Hamilton Grafi	25
3.1. \mathcal{F}_n n . Fibonacci Grafi	28
3.2. \mathcal{F}_9 Fibonacci Grafi	28
3.3. \mathcal{A}_n n . hemen hemen Fibonacci Grafi	29
3.4. \mathcal{A}_9 9. hemen hemen Fibonacci Grafi	29

3.4. \mathcal{A}_9 9. hemen hemen Fibonacci Grafi	39
4.1. 3- Genelleştirilmiş Fibonacci Grafi	41
4.2. Eksiltilmiş 3- Genelleştirilmiş Fibonacci Grafi	41

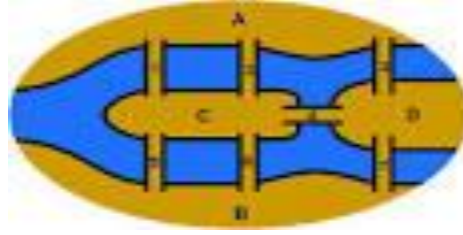


1. GİRİŞ

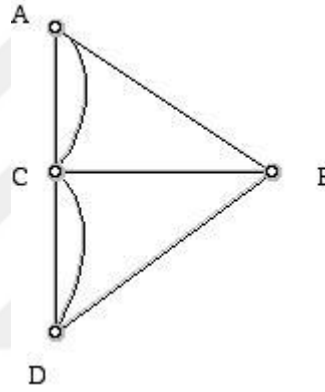
Graf teorisinin uygulamaları günlük yaşamda karşı karşıya kalabileceğimiz birçok problemin çözümüne yardımcı olmaktadır. Yakın zamana kadar pek uygulama alanına sahip olmayan bu dal son yirmi yılda önemli ölçüde gelişme gösterdi. Graf teorisinin temeli 1736'da Leonhard Euler tarafından atılmıştır. Teorinin ortaya atılmasında önemli rol oynayan Königsberg problemi'dir.



Königsberg kenti 18. Yüzyılda Prusya'da Pregel Nehri'nin üzerine kurulu iki yaka ve nehirde bulunan iki adadan oluşmaktaydı. Nehir üzerinde yakalar ve adalar arasına yedi köprü inşa edilerek kent dört ayrı bölgeye ayrıldı. Bu adalardan büyük olanı yakalara ikişer köprü ile küçük olanı ise yakalara birer köprü ile bağlanmıştır.



Euler'in cevaplandırmaya çalıştığı soru şuydu: Kentin ayrıldığı bu dört bölgenin herhangi birinden başlayarak ve tüm köprüleri bir ve yalnız bir kez kullanarak tüm bölgeleri gezdikten sonra başlangıç noktasına geri dönülebilir mi?



Şekil 1.1. (Königsberg problemini ifade eden graf)

İsviçreli matematikçi Leonhard Euler bu soruya yönelik, bu şartlara uygun bir yürüyüşün mümkün olmayacağını belirtmiştir ve buradan Euler Teoremini ortaya koymuştur. Euler, problemin üzerinde daha rahat çalışabilmek için Şekil 1.1 de görüldüğü gibi şehrin dört bölgesini noktalarla, bölgeler arasındaki köprüleri ise çizgilerle göstermiştir. Böylece dört nokta ve yedi çizgiden oluşan bir yapı ortaya çıkmıştır. Bu yapıdaki noktalar düğüm ve çizgiler de ayrıt olarak isimlendirilmiştir. Düğüm ve bu düğümler arasında yer alan ayrıtlar bir graf oluşturur. Problem 'Grafta yer alan herhangi bir düğümden başlayarak, her bir ayrıtı bir ve yalnız bir kez kullanarak başlangıç düğümüne dönülebilir mi?' halini alır. Euler bu problemin çözümünün mevcut olmadığını ifade edebilmek için birkaç önemli tanım daha yapmıştır. Bunlardan biri, bir düğümü uç noktası kabul eden ayrıt sayısı düğüm

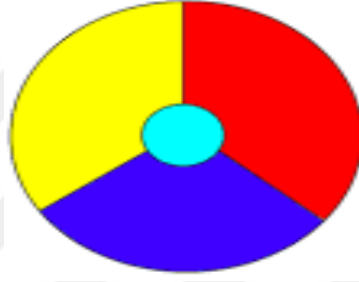
derecesi olarak ifade edilir. Örneğin C nin düğüm derecesi 5 tir. Euler teoremi bize şunu söyler: Derecesi tek olan bir düğüm başlangıç düğümü olamaz çünkü düğüme bağlı ayrıtlardan birisi harekete başlarken çıkış ayrıtı olarak kullanılacaktır. Geriye bu düğüme bağlı çift sayıda ayrıt kalır. Bu düğüme gelebilmek için tekrar bir ayrıt kullanılacağından kalan tek sayıdaki ayrıt, bu düğümün hareketin biteceği nokta olmasını engeller. Diğer yandan derecesi tek olan bir düğüm ara düğüm de olamaz. Bir düğüm başlangıç ve bitiş düğümü değilse, o düğüme gelindiğinde yürüyüşün tamamlanması için o düğümdeki bir ayrıtı düğümden çıkmak için kullanmak gerekir. Bu nedenle ara düğümler çift dereceli olmalıdır. Grafta tek dereceli düğüm sayısının ikiden fazla olması yürüyüşün tamamlanmasını engeller. Yürüyüşe başladığımız noktaya geri gelebilmenin koşulu tüm düğümlerin çift dereceli olmasıdır. Bu da her bir düğüm ve ayrıtı bir kez içeren, başlangıç ve bitiş düğümü aynı olan bir turun tamamlanmasını sağlar. Yani problemimizde var olan, bütün köprülerden bir ve yalnız bir kez geçmek koşulu ile tam bir turla yürüyüş yapılması imkansızdır. [1]

Leonhard Euler'in bu çalışmaları matematikte yepyeni bir alan olan graf teorisinin habercisi olmuştur. Euler'in yaptığı bu çalışmadan sonraki yıllarda yeni bir alan olarak ortaya çıkan graf teorisi günlük yaşamda karşı karşıya kaldığımız birçok problem için çözüm üretecektir. Yıllar sonra ünlü matematikçi De Morgan'ın eski bir öğrencisi olan Francis Guthrie 1952 yılında ünlü dört renk problemini ortaya çıkarmıştır.



Guthrie İngiltere haritasını renklendirirken, komşu şehirler farklı renkte olmak koşuluyla dört renk kullanarak bu renklendirmeyi yapabileceğini gördü. Aynı yıl 23

Ekim’de, Francis’in kardeşi Frederick bu problemi De Morgan’a sordu: Bir haritanın ülkeleri, sınırdaş ülkeler farklı renklerde olacak biçimde her zaman dört renge boyanabilir mi? De Morgan soruyu aralarında filozof William Whewell’in da bulunduğu arkadaşlarıyla paylaştı. Whewell, De Morgan’ın Buluşun Felsefesi adlı kitabına yazdığı eleştiri yazısında bu sorudan bahsetti. Yalnız problemin çözümlüne yönelik bir sonuca ulaşamadı ve üzerinden zaman geçtiği için unutuldu. Bir süre sonra ünlü matematikçi Cayley bu sorunun çözümlünün bulunup bulunmadığını sordu.



Kempe 1876’da verilen herhangi bir haritanın biri dışında tüm ülkelerinin boyandığını varsayarak henüz boyanmamış ülkenin boyanabileceğini, boyanamazsa da boyanmış ülkelerin renkleri değiştirilerek düzeltebileceğini gösterdiğini sandı. Kanıtı yanlıştı fakat ilginçti. Kanıtı 11 yıl boyunca Cayley dahil olmak üzere pek çok kişi tarafından inandırıcı bulundu. 1890’da Heawood’un Kempe’nin yöntemine göre her haritanın dört renge boyanmadığını belirten makalesi büyük şaşkınlık yarattı. Heawood’un Kempe’nin kanıtından 11 yıl sonra Kempe’nin yönteminin yeterli olmadığını göstermesi ve yanlış kanıtın tamiri mümkün olmaması problemin çözümlünü 1976’ya kadar geciktirdi. Bu tarihte Appel ve Haken bilgisayar yardımıyla bu kanıtı Kempe’nin zincirini kullanarak tamamlamıştır.[2] Graf teorisinin uygulamaları bir çok yerde karşımıza çıkmaktadır. Yakın zamanda ortaya çıkan Çinli Postacı Problemi graf teori alanında üzerinde çalışılabilecek önemli bir örnektir. Bu problem ilk olarak 1962 yılında Çinli matematikçi Mei-Ko Kwan tarafından incelenmiştir. Problem, bir postacının postaneden aldığı mektupları mümkün olan en kısa yoldan şehirdeki tüm sokaklara uğrayarak dağıtmak istemesiyle ortaya çıkmıştır. Mektupların dağıtımından sonra postacı başladığı nokta olan postaneye geri dönmek

zorundadır. Çinli postacı problemi graf teorideki kavramlarla izah edilirse şu hali alır: Belirli bir başlangıç noktasından başlayarak graftaki her bir ayrıta en az bir kez uğramak koşuluyla en kısa turun oluşturulmasıdır.

Çinli postacı probleminin bir çok uygulama alanı vardır. Özellikle araç rotalarının belirlenmesinde yoğun olarak kullanılır. İşletmeler araçlarının çalışma maliyetlerini düşürebilmek için; araç duraklarını düğüm, yolları da ayrıt olarak alan çizge kuramından yardım almaktadır. Böylece araçların hareket maliyetlerinin en az olduğu, her yoldan geçen ve başlanılan noktaya dönülen en iyi rotaların belirlenmesinde kullanılmaktadırlar. Çinli postacı problemi temel olarak, bir çizgedeki ayrıtların yönlerine bağlı olarak yönlü, yönsüz ve karma olmak üzere üçe ayrılmaktadır. Çinli postacı problemi çeşitlerine ilişkin bugüne kadar çeşitli kesin ve kesin olmayan çözüm yöntemleri ortaya konmuştur. Problem yaygın olarak, kesin çözüm yöntemi olan tamsayılı doğrusal programlamayla ve dal-sınır ve dal-kesme yöntemleriyle çözülmektedir.[3] Graf teori üzerine çalışmalar son 20 yılda önemli ölçüde artmıştır. Graf teori bir mantıksal ve sistem yaklaşımı olarak bilim ve teknolojinin çeşitli alanlarında modelleme ve analiz için kullanılan model sunumlarını kapsar.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında öncelikle [7-8] nolu kaynaklardan geliştirilmiş Fibonacci grafları ve eksiltilmiş geliştirilmiş Fibonacci grafları hakkında bilgi edinildi ve bu graflarda maksimum yol problemlerinin çözümü ortaya konulmuştur. [5] nolu kaynaktan Euler grafları ve Hamilton yolu ile ilgili bilgiler edinilmiştir. Konuya ilişkin temel kavramlar [1-6] nolu kaynaktan öğrenilmiştir.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezde öncelikle geliştirilmiş Fibonacci graflarında ve eksiltilmiş geliştirilmiş Fibonacci graflarında maksimum yol problemleri verilecek ve bu problemlere ilişkin uygun çözümler ve çözüm aşamaları ortaya konulacaktır. Bu

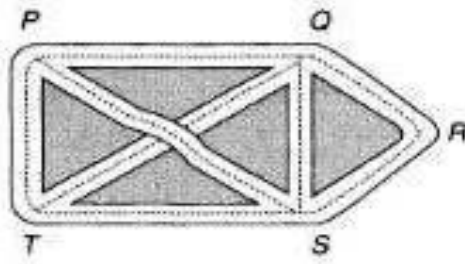
tezin amacı ileriki bir çalışma olarak düşünölen problemlerin genelleştirilmesinin yapılmasına temel oluşturmaktır.



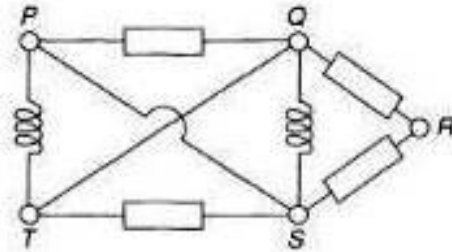
2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Graf Tanımı ve Çeşitleri

Graf tanımını yapmadan önce, yaşamımızda oldukça geniş yer tutan grafları bir model üzerinde incelemek faydalı olacaktır. Bir yol haritasını ifade eden Şekil 2.1 ve bir elektrik devresini ifade eden Şekil 2.2 aşağıda verilmiştir.

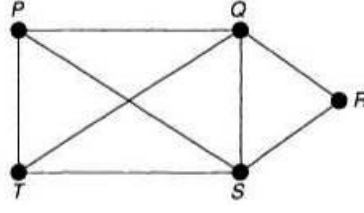


Şekil 2.1. (Yol haritası)



Şekil 2.2. (Elektrik devresi)

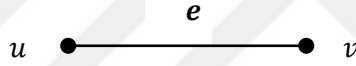
Yukarıdaki bu iki durum noktalar ve doğru parçaları yardımıyla Şekil 2.3 te olduğu gibi bir diyagramda yeniden ifade edilebilir. Bu diyagramda yer alan P , Q , R , S ve T noktaları düğüm, noktalar arasında yer alan doğru parçaları ayrıt, düğüm ve ayrıtlardan oluşan bu diyagram ise bir graf olarak adlandırılır.[4]



Şekil 2.3. (5 düğüm ve 8 ayrıtlı graf)

Tanım 2.1.1. Bir G grafi, düğümlerin bir V kümesini (boş olmayan) ve ayrıtların bir E koleksiyonunu içerir ve $G = (V, E)$ ile gösterilir. Aksi söylenmedikçe V ve E kümeleri sonlu kabul edilecektir. Burada düğümler arasındaki ayrıtlar; $e \in E$ için $\delta(e)$, V nin bir veya iki elemanlı bir alt kümesi olmak üzere $\delta: E \rightarrow P(V)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon yardımıyla oluşturulur.

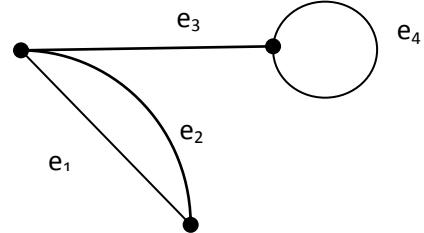
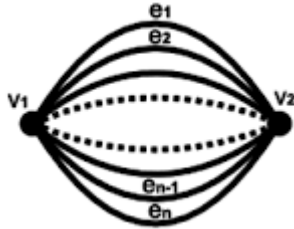
Eğer u ve v grafin düğümleri ise $\{u, v\}$ çifti bir ayrıttır ve uv ya da e ile gösterilir. O halde bir e ayrıtı, $\delta(e) = \{u, v\}$ biçiminde ifade edilebilir.



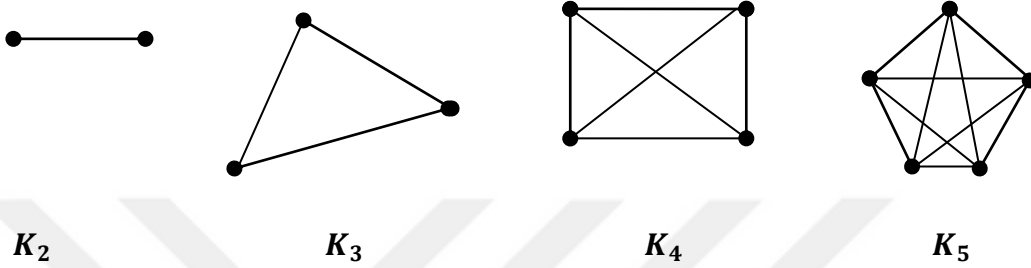
Bir graftaki düğümlerin sayısı v_G , G grafinin derecesi ve bir graftaki ayrıtların sayısı ε_G , G grafinin boyutudur. Yani

$$v_G = |V_G| \text{ ve } \varepsilon_G = |E_G|.$$

İki veya daha fazla ayrıt bir düğüm çiftini birleştiriyorsa bu ayrıtlara *paralel ayrıtlar* denir. Bir ayrıt bir düğümü kendisine birleştiriyorsa bu ayrıta *döngü* denir.[5]



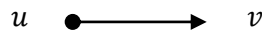
Tanım 2.1.2. Graftaki bir düğüm çiftini birleştiren birden fazla ayrıta sahip olan, herhangi bir döngü içermeyen graflara *çoklu graf* denir. En az bir döngü içeren graflara *pseudograf* denir. Hiçbir döngü ve paralel ayrıt içermeyen graflara ise *basit graf* denir. Bir grafta n tane düğüm ve bu düğümlerin her biri arasında yalnız bir ayrıt varsa bu basit grafa K_n *tam grafi* denir.[5]



Yalnız bir düğümlü olan ve herhangi bir ayrıtı bulunmayan K_1 tam grafi *monoton graf* olarak adlandırılır.[5]



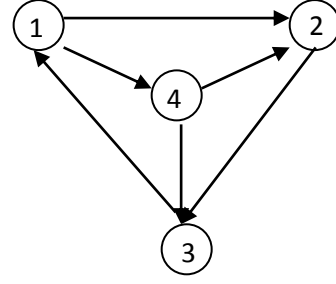
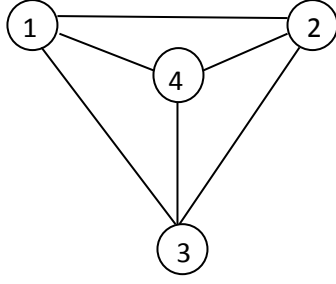
Tanım 2.1.3. Bir *yönlendirilmiş graf* ya da *yönlü graf*, düğümlerin sonlu bir V kümesini ve yay olarak adlandırılan farklı düğüm çiftlerinin bir A kümesini içerir. Eğer $\{u, v\}$ düğüm çifti bir a yayı ise a yayı u dan v ye yönlendirilmiştir denir.



Bir basit grafın her bir ayrıtı bir yay ile tanımlanmışsa sonuçta oluşan yapı basit grafın bir yönlendirmesi olarak bilinen yönlü grafır.

Karma graflarda, en az bir ayrıt ve en az bir yay olmalıdır.

Bir tam grafın herhangi bir yönlendirmesi, *tur* olarak adlandırılır.[5]



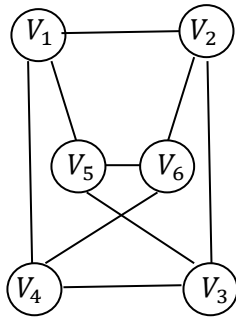
2.2. Graf İzomorfizması

$G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları için $V = V'$ ve $E = E'$ ise bu iki graf özdeştir.

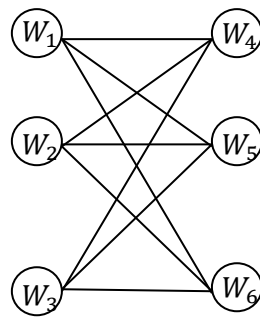
V den V' ye birebir ve örten bir f -izomorfizması varsa $G = (V, E)$ ve $G' = (V', E')$ grafları *izomorfiktir* denir. Bu durumda $f(v)$ ve $f(w)$ arasında G' de bir ayrıt olması için gerek ve yeter koşul G de v den w ya bir ayrıt olmasıdır. İki eş graf izomorfiktir, ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Böylece n -düğümlü her tam graf, diğer n -düğümlü tüm tam graflara izomorfiktir.

Aşağıda üç graf tanımlanmıştır. G_1 ve G_2 grafları izomorfiktir. Çünkü G_1 ve G_2 grafları arasında aşağıdaki biçimde bir f -izomorfizması tanımlanmıştır. Ancak G_1 ya da G_2 graflarından hiçbiri G_3 grafına izomorfik değildir.[5]

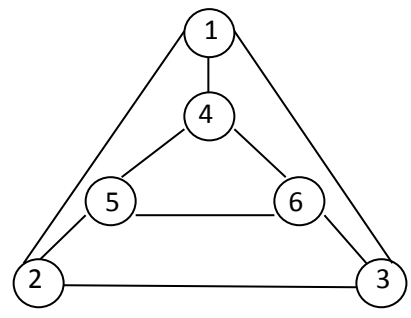
$$f(v_1) = w_1 \quad f(v_2) = w_4 \quad f(v_3) = w_3 \quad f(v_4) = w_6 \quad f(v_5) = w_5 \quad f(v_6) = w_2$$



G_1



G_2



G_3

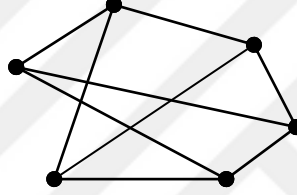
Şekil 2.4. (G_1 , G_2 ve G_3 grafları)

2.3. Graflarda Dügümlerin Derecesi

$v \in G$ olmak üzere v , G grafında bir düğüm olsun. v nin komşu olduğu düğümlerin kümesi, $N_G(v) = \{u \in G : vu \in G\}$ olmak üzere v nin derecesi onun komşu olduğu düğümlerin sayısıdır ve $d_G(v) = |N_G(v)|$ biçiminde gösterilir. Eğer $d_G(v) = 0$ ise v *izole düğüm* olarak adlandırılır.

G grafının minimum derecesi $\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in G\}$ biçiminde ve maksimum derecesi $\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in G\}$ biçiminde gösterilir.[6].

Bir grafın her bir düğümünün derecesi k ise bu grafa *k-düzgün graf* denir.[1]



Şekil 2.5. (3-Düzgün Graf)

Bir graftaki bir düğümün derecesi tek ise *tek düğüm*; derecesi çift ise *çift düğüm* olarak adlandırılır.[5]

Lemma 2.3.1. (Tokalaşma Lemması) Her bir G grafı için

$$\sum_{v \in G} d_G(v) = 2\varepsilon_G . \quad (2.1)$$

Yani G grafındaki tüm düğümlerin dereceleri toplamı graftaki ayrıtların sayısının iki katıdır.[6]

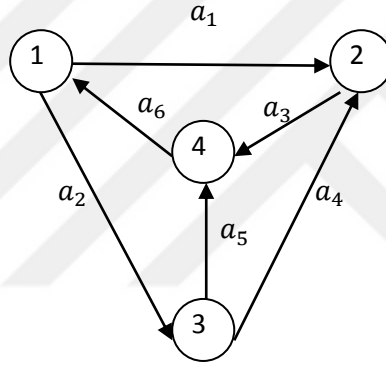
Teorem 2.3.1. Her graftaki derecesi tek olan düğümlerin sayısı çifttir.[1]

Kanıt. (2.1) eşitliğinden elde edilen $d_G(v_1) + d_G(v_2) + \dots + d_G(v_n) = 2\varepsilon_G$ toplamından ve tek sayıda tek sayının toplamı yine tek sayı olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağlanabilmesi için tek sayıda düğüm sayısının çift olması gerekir.

Tanım 2.3.2. Yönlü graflardaki bir düğüme gelen yay sayısı düğümün *iç derecesi* ve düğümden çıkan yay sayısı düğümün *dış derecesi* olarak adlandırılır.[5]

Teorem 2.3.2. Bir yönlü grafta tüm düğümlerin iç dereceleri(ya da dış dereceleri) toplamı yayların sayısına eşittir.[5]

Örnek 2.3.1.



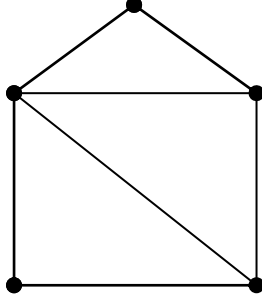
Şekil 2.6. (4 düğümlü yönlü graf)

Şekildeki yönlü grafın 1, 2, 3 ve 4 düğümlerinin dış dereceleri sırasıyla 2, 1, 2, 1 ve iç dereceleri sırasıyla 1, 2, 1, 2 dir.

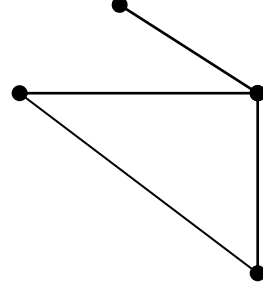
2.4. Alt Graflar

Eğer $V_H \subseteq V_G$ ve $E_H \subseteq E_G$ ise H grafı, bir G grafının *alt grafıdır* denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilir.[6]

Eğer G nin her düğümü H de bulunuyorsa yani $V_H = V_G$ ise $H \subseteq G$ alt grafı G grafını *gerer* denir.[6]



Şekil 2.7. (G grafi)



Şekil 2.8. (H alt grafi)

2.5. Komşuluk ve Çakışım Matrisleri

Tanım 2.5.1. (Komşuluk Matrisleri) $V = \{1,2, \dots, n\}$ olmak üzere $G = (V, E)$ grafini alalım. Grafın komşuluk matrisi $n \times n$ lik $A = [a_{ij}]$ matrisidir. a_{ij} köşegen olmayan elemanı i ve j düğümlerini birleştiren ayrıtların sayısı, a_{ii} esas köşegen elemanı ise i düğümündeki döngülerin sayısının iki katıdır.

Bir grafın komşuluk matrisinin simetrik olduğu aşıkardır. Çünkü her i ve j için $a_{ij} = a_{ji}$ dir. Bir basit grafın komşuluk matrisi *ikilik matristir*($0,1$ Matris). Bu matriste köşegenlerdeki tüm elemanlar 0 dir. K_n tam grafının komşuluk matrisinin köşegende olmayan her bir elemanı 1 dir.

n düğümlü bir graf $n!$ şekilde sınıflandırılabilir ve her bir sınıfta grafın komşuluk matrisi elde edilebilir.

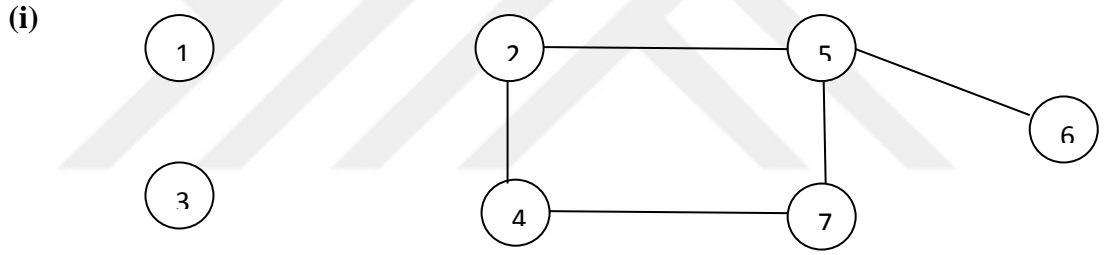
$\{1,2,3, \dots, n\}$ düğüm kümeli bir yönlü grafın $n \times n$ lik $A=[a_{ij}]$ komşuluk matrisinde $a_{ij} = 1$ olması için gerek ve yeter koşul i düğümünden j düğümüne bir yay olmasıdır. Bir yönlü grafın A komşuluk matrisinde her bir esas köşegen elemanı sıfırdır ve A nın simetrik olması gerekmez.[5]

Teorem 2.5.1.

(i) Bir grafın komşuluk matrisinde, bir satır ya da bir sütundaki elemanların toplamı bir düğüme ait dereceye eşittir ve matrisin tüm elemanlarının toplamı, graftaki ayrıt sayısının iki katıdır.

(ii) Bir yönlü grafın komşuluk matrisinde, bir satırdaki elemanların toplamı bir düğümün dış derecesine, bir sütundaki elemanların toplamı bir düğümün iç derecesine ve matristeki tüm elemanların toplamı yönlü graftaki yayların sayısına eşittir.[5]

Örnek 2.5.1

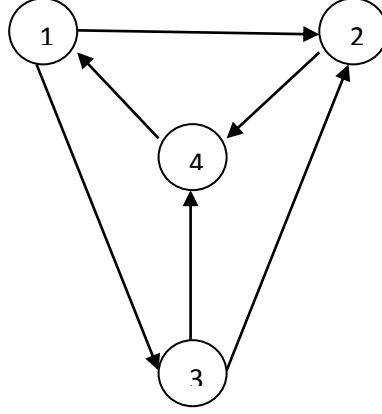


Şekil 2.9. (7 Düğümlü graf)

Şekil 2.9 daki grafın komşuluk matrisi;

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii)



Şekil 2.10. (4 Döğümlü Yönlü Graf)

Şekil 2.10 daki yönlü grafın komşuluk matrisi;

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 2.5.2. (Çakışım Matrisleri) $G = (V, E)$ bir basit graf olsun. Burada $V = \{1, 2, \dots, n\}$ grafın döğümler kümesi ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ grafın ayrıtlar kümesidir. G grafının $B = [b_{ij}]$ çakışım matrisi: her bir i için matrisin i . satırı grafın i döğümüne karşılık gelir ve her bir k için matrisin k . sütunu grafın e_k ayrıtlına karşılık gelir, şeklinde tanımlanır. Eğer e_k, i döğümü ile j döğümünü birleştiren bir ayrıt ise b_{ik} ve b_{jk} elemanları 1 dir ve k sütunundaki diğerelemler 0 dir.

Eğer G bir yönlü graf ve e_k, i döğümünden j döğümüne bir yay ise k sütununa $b_{ik} = -1$ ve $b_{jk} = 1$ yazılır. Benzer şekilde diğerelemler sıfırdır. Böylece n döğümlü ve m ayrıtlı bir basit grafın çakışım matrisi $n \times m$ lik ikilik matristir. Yani bu basit matrisin her bir elemanı 0 ya da 1 dir. Oysa bir yönlü grafın çakışım matrisi $n \times m$ lik matristir ve her bir elemanı 0, 1 ya da -1 dir. Çakışım matrisinin her bir sütunu sıfırdan farklı iki elemana sahiptir.[5]

Teorem 2.5.2.

(i) Bir basit grafın çakışım matrisinin bir satırındaki elemanların toplamı, bir düğüme ait dereceye karşılık gelir ve matristeki tüm elemanların toplamı ayrıtların sayısının iki katıdır.

(ii) Bir yönlü grafın çakışım matrisinin bir satırındaki elemanların toplamı, bir düğümün iç dereceleri ile dış derecelerinin farkına eşittir ve matristeki tüm elemanların toplamı sıfırdır.[5]

Örnek 2.5.2.

(i) Şekil 2.9 daki grafın çakışım matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Şekil 2.10 daki yönlü grafın çakışım matrisi

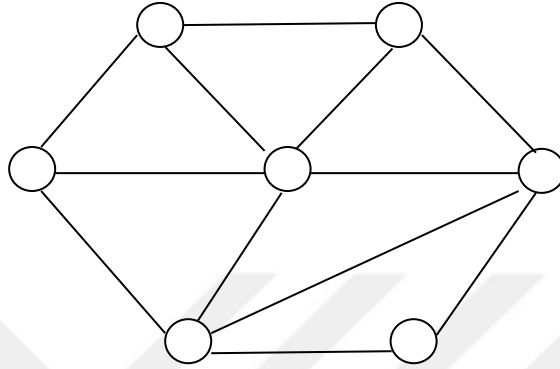
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.6. Basit Grafların Derece Vektörleri

Bir G basit grafının $d(G)$ derece vektörü, düğüm derecelerinin artmayan sıralı dizisidir. Eğer G ve G' grafları izomorfik ise $d(G) = d(G')$ dür. Fakat bu durumun karşıtı doğru değildir.

Şekil 2.4 teki üç graf, $[3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$ olan aynı derece vektörüne sahiptir. Fakat G_3 grafi, G_1 ya da G_2 graflarına izomorfik değildir.

Her basit graf tek türlü derece vektörüne sahiptir ve vektördeki terimlerin toplamı çifttir. n elemanlı bir derece vektöründeki her terim pozitif ve değeri en fazla $n - 1$ dir. Burada n , grafın derecesidir. $d_i \leq n - 1, i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere sonlu artmayan $v = [d_1 d_2 \dots d_n]$ derece vektöründeki tüm terimlerin toplamı çifttir.[5]



Şekil 2.11. (9 Düğümlü basit graf)

Şekil 2.11 deki basit grafın derece vektörü $v = [5 4 4 3 3 3 2]$ dir.

2.7. Yollar, Devreler ve Devir

Tanım 2.7.1. Bir grafta v ve w iki düğüm olsun. v ve w düğümleri arasında bir yürüyüş, sonlu bir alternatif dizi olan $v = v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = w$ dir ve bu dizide $\delta(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ biçiminde tanımlıdır. Yani bu dizide yer alan her bir e_i ayrıtı v_{i-1} düğümünü ve v_i düğümüne birleştirir. Bu yürüyüşteki düğüm ve ayrıtların birbirinden farklı olması gerekli değildir.

$v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ ve $u_0, f_1, u_1, f_2, \dots, f_m, u_m$ yürüyüşleri $n = m, v_i = u_i$ ve $e_i = f_i$ ise birbirine eşittir ($0 \leq i \leq n$).

Bir yürüyüşteki ayrıtların sayısı, yürüyüşün uzunluğudur. Eğer graf basitse dizideki ayrıtlar u ve w arasında bir yürüyüş tanımlar, bu ayrıtlar açıkça listelenmek zorunda değildir.

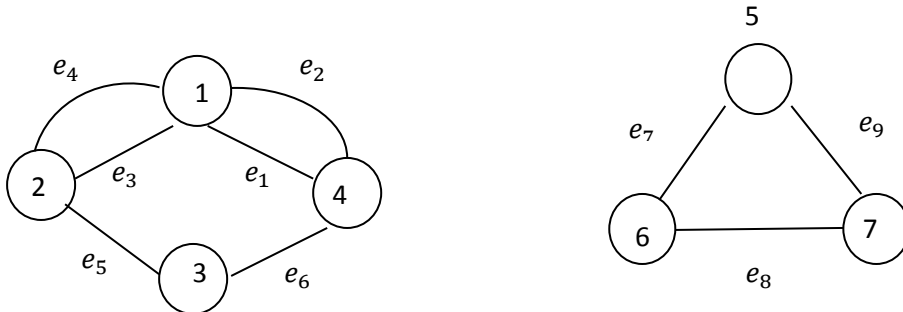
$v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = w$ yolu $v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_n$ olarak yazılabilir. Bu yürüyüşteki ayrıtlar tekrarlı değilse buna *patika* denir.[5]

Tanım 2.7.2. $v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = w$ yürüyüşünde v_i ($0 \leq i \leq n$) düğümleri birbirinden farklı ise v ve w arasındaki bu yürüyüşe *yol* denir. Bu yolda bulunan $n - 1$ adet v_i ($0 < i < n$) düğümü yolun *ortanca düğümü* olarak adlandırılır. O halde her yolun bir patika olduğu aşikardır.[5]

Tanım 2.7.3. Eğer v ve w düğümleri bir yönlü grafta ise, v den w ya bir yönlü yürüyüş, düğüm ve yayların $v = v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, a_n, v_n = w$ şeklinde bir dizisi olup, buradan a_i yayı v_{i-1} düğümünden v_i düğümüne bir yaydır. Bu durum $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ biçiminde yazılır. Bir yönlü yürüyüş, eğer yaylar farklı ise yönlü bir patikadır. [5]

Tanım 2.7.4. $v = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = w$ yönlü yürüyüşünde v_i düğümleri ($0 \leq i \leq n$) birbirinden farklı ise v ve w arasındaki bu yönlü yürüyüşe *yönlü yol* denir.[5]

Örnek 2.7.1



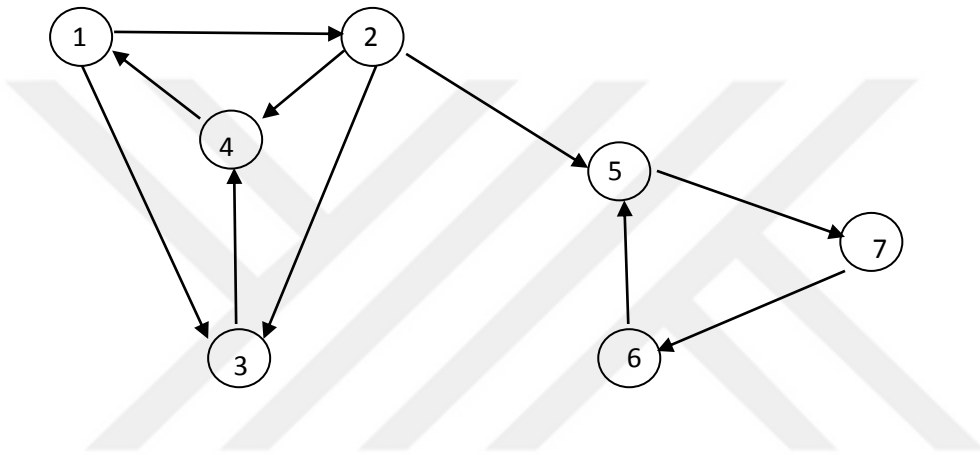
Şekil 2.12. (7 düğümlü ve 9 ayrıtlı bir graf)

Şekil 2.12 deki grafta $2, e_4, 1, e_1, 4, e_2, 1, e_1, 4$ dizisi 2 ve 4 düğümleri arasında bir yürüyüştür.

$2, e_3, 1, e_1, 4, e_2, 1, e_4, 2, e_5, 3$ dizisi 2 ve 3 arasında bir patikadır.

$2, e_5, 3, e_6, 4, e_1, 1$ dizisi 2 ve 1 arasında bir yoldur.

Örnek 2.7.2.



Şekil 2.13. (7 düğümlü yönlü graf)

Şekil 2.11 deki yönlü grafta $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6$, 2 den 6 ya yönlü yürüyüştür.

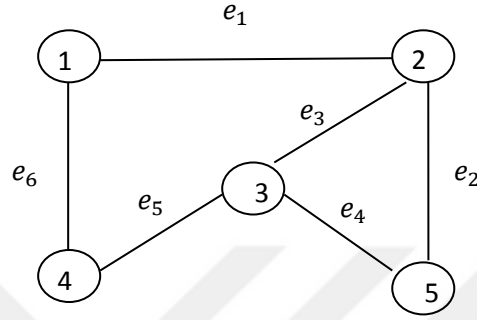
$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 3$, 1 den 3 e yönlü patikadır.

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$, 1 den 7 ye yönlü yoldur.

Teorem 2.7.1. Bir graftaki v ve w arasındaki her yürüyüş, v ve w arasında bir yol içerir. Bir yönlü graftaki v den w ya her yönlü yürüyüş v den w ya yönlü bir yol içerir.[5]

Teorem 2.7.2. Eğer A , $G = (V, E)$ basit grafının komşuluk matrisi ise A nın k . kuvvetinde (i, j) elemanı, i ve j düğümleri arasındaki k uzunluğundaki farklı yürüyüşlerin sayısıdır. Özellikle, A^2 deki (i, i) köşegen elemanı her bir i için i düğümünün derecesidir.[5]

Örnek 2.7.3.



Şekil 2.14 (5 düğümlü basit graf)

A Şekil 2.14 deki basit grafın komşuluk matrisi olmak üzere:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 11 & 1 & 6 \\ 3 & 15 & 7 & 11 & 8 \\ 11 & 6 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 11 & 3 & 9 & 6 \\ 6 & 8 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

1, 2, 3, 4 ve 5 düğümlerinin derecesi 2, 3, 3, 2 ve 2 dir. Bu elemanlar A^2 matrisinin diagonal elemanlarıdır.

A^4 matrisindeki $(1,5)$ elemanı 6 dır. Bu durum 1 ve 5 düğümleri arasında 4 uzunluğunda 6 farklı yol olduğunu gösterir. Bu yollar:

$$\begin{array}{lll} 1-4-1-2-5 & 1-2-1-2-5 & 1-4-3-2-5 \\ 1-2-5-2-5 & 1-2-3-2-5 & 1-2-5-3-5 \end{array}$$

Tanım. 2.7.5. Bir graftaki bir düğüm ile kendisi arasındaki her yürüyüş bir kapalı yürüyüştür.

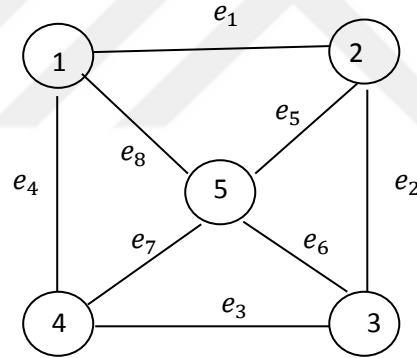
Bir kapalı yürüyüşteki ayrıtlar tekrar etmiyorsa buna *devre* denir. Düğümleri tekrar etmeyen devrelere de *devir* adı verilir.[5]

v, e_1, w, e_2, v kapalı yürüyüşü bir devredir; fakat v, e_1, w, e_1, v kapalı yürüyüşü ortadaki düğümler tekrar ettiği için bir devir değildir. Bu nedenle devre de olamaz.

Bir G basit grafının C alt grafının G de bir devir olması için gerek ve yeter koşul C nin bir devir grafi olmasıdır.

Bir G basit grafında her devir k düğüm içeriyorsa G de bir k -devir olarak tanımlanır; eğer k tek sayı ise *tek devir* ve k çift sayı ise *çift devir* denilir.[5]

Örnek 2.7.4.



Şekil 2.15. (5 düğümlü basit graf)

Şekil 2.15 de gösterilen G basit grafında,

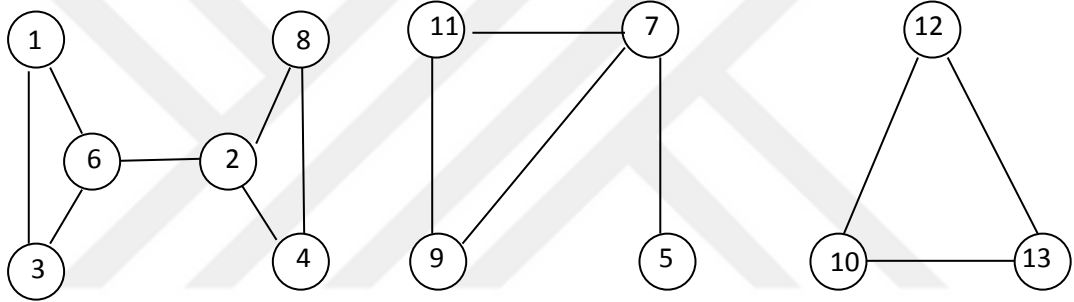
$1, e_1, 2, e_5, 5, e_6, 3, e_3, 4, e_7, 5, e_8, 1$ kapalı yürüyüşü bir devredir.

$1 - 2 - 3 - 4 - 1$ kapalı yürüyüşü bir çift devirdir.

Tanım 2.7.6. Bir grafta bir düğüm çifti arasında bir yol varsa bu düğüm çiftine *bağlantılı çift* denir. Eğer G de her düğüm çifti bağlantılı ise G grafi bağlantılı graftır.[5]

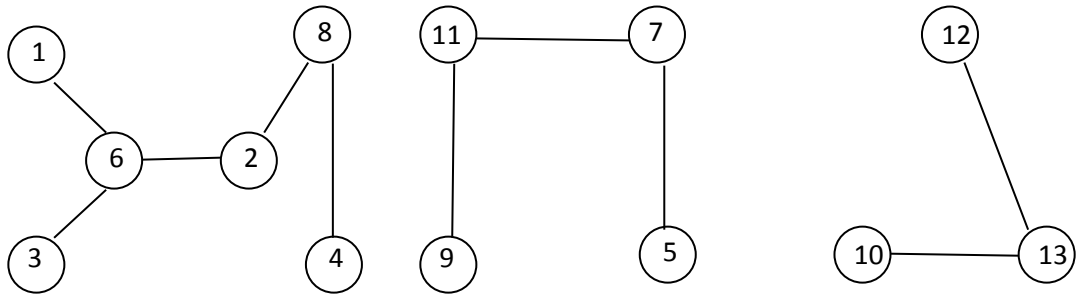
Tanım 2.7.7. Herhangi bir devir içermeyen graflara *yarı-devir (acyclic) graf* denir ve *orman* olarak da bilinir. Bir bağlantılı yarı-devir graf *ağaç* olarak adlandırılır. Bir G grafini geren yarı-devir alt grafi G de *taban ormanı* olarak adlandırılır. Bir G grafini geren bağlantılı yarı-devir alt grafi ise G de bir *taban ağacı* olarak adlandırılır.[5]

Örnek 2.7.5.



Şekil 2.16. (13 düğümlü bağlantısız graf)

Şekil 2.16 deki G grafi 13 düğümlü bağlantısız bir graftır. Aşağıda şekil 2.17. de gösterilen graf G ormanının taban ormanıdır.

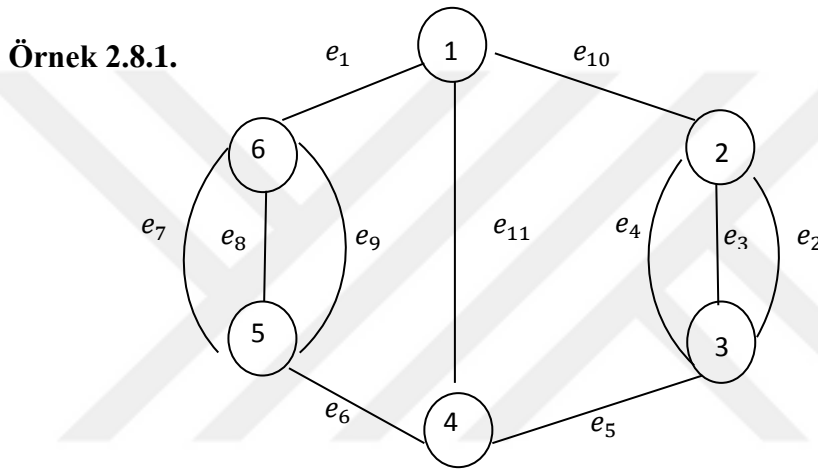


Şekil 2.17. (13 düğümlü taban ormanı)

Şekil 2.15 de gösterilen G bağlantılı grafında $\{e_1, e_2, e_6, e_7\}$ ayrıtların kümesi G deki bir taban ağacının ayrıtlarını oluşturur.[5]

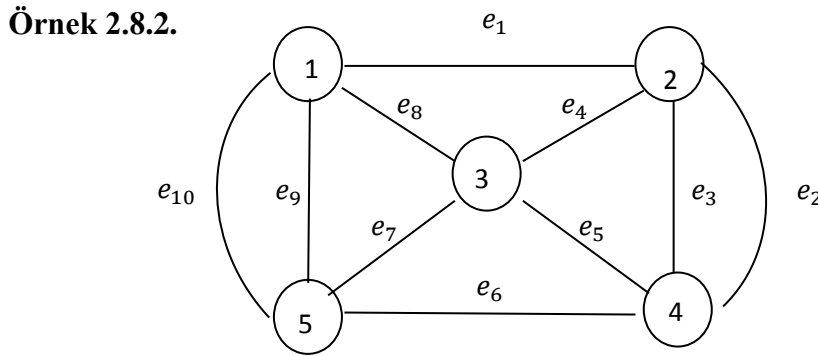
2.8. Euler ve Hamilton Grafları

Tanım 2.8.1. Bir bağlantılı G grafında iki farklı düğüm arasındaki patika, eğer G nin tüm ayrıtlarını içeriyorsa *Euler patikasıdır*. Tüm ayrıtları içeren bir devre, *Euler devresidir*. Bir graf, bir Euler devresine sahipse *Euler Grafıdır*. [5]



Şekil 2.18. (Euler patikası)

Şekil 2.18 deki grfta $\{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_{11} \}$ patikası 1 ve 4 arasında bir Euler patikasıdır.



Şekil 2.19. (Euler devresi)

Şekil 2.19 daki graf bir Euler grafıdır. Çünkü $\{ e_1, e_2, e_3, \dots, e_{10} \}$ Euler devresi içerir.

Teorem 2.8.1. Bir bağlantılı G grafının Euler grafı olması için yeterli ve gerekli koşul G nin her bir düğümünün derecesinin çift olmasıdır.[4]

Teorem 2.8.2. $G = (V, E)$ grafında aşağıdaki dört ifade birbirine denktir:

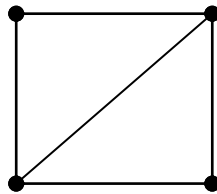
(i) G Euler grafıdır.

(ii) G bağlantılıdır ve her bir düğüm çifttir.

(iii) G bağlantılıdır ve E nin bir parçalanışı vardır, öyle ki parçalanışın her bir alt kümesindeki ayrıtlar G de bir devir oluşturur.

(iv) G bağlantılıdır ve G deki her bir ayrıt, G deki tek sayıdaki devirlerde bir ayrıttır.[5]

Tanım 2.8.2. Bir graftaki iki düğüm arasındaki bir yol, grafın bütün düğümlerinden geçiyorsa *Hamilton yolu* olarak adlandırılır. Graftaki bir kapalı Hamilton yoluna, *Hamilton devri* denir. Bir Hamilton devrine sahip graflara Hamilton grafı denir. Her Hamilton grafı, bir Hamilton yoluna sahiptir; fakat bunun karşıtı doğru değildir. Üç ya da daha fazla düğümlü tam graf olarak bilinen her devirli graf, Hamilton grafıdır.[5]



Şekil 2.20. (Hamilton grafı)

Teorem 2.8.3. n düğümlü G basit grafında, her bir komşu olmayan düğüm çifti v ve w için

$$d_G(v) + d_G(w) \geq n, \quad (n \geq 3)$$

ise G bir Hamilton grafıdır. [4]

Teorem 2.8.4. n düğümlü G basit grafında, her bir düğümün derecesi en az $n/2$ ise G Hamilton grafıdır.[5]

Kanıt. Eğer her bir derece en az $n/2$ ise her düğüm çiftinin toplamı en az n dir. Teorem 2.8.3. ten G bir Hamilton grafıdır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MAKSİMUM YOL GRAFLARI

3.1. Maksimum Yol Grafları

Bir yönlü $G = (V, E)$ grafi, düğümlerin sonlu bir V kümesini ve tercihsiz farklı düğüm çiftlerini ifade eden ayrıtların bir E koleksiyonunu içerir.

$[v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k]$ düğümlerin dizisi, $(v_{i-1}, v_i) \in E$ ve $i = 1, 2, 3, \dots, k$ olmak üzere v_0 dan v_k ya bir yol olarak adlandırılır. Düğümlerin dizileri özdeş değilse iki yol farklıdır. G de $[v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, v_0]$ kapalı yolu yoksa, G yönlü grafi devirsizdir.

Farklı her x ve y düğüm çifti için G de $[x = v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_k = y]$ zinciri varsa G bağlantılıdır. Bir (x, y) ayrıtı için 'x den çıkar ve y ye girer' denir.

G , iki s ve t düğümünü içersin. s den t ye G deki farklı yolların sayısı $N(G)$ olarak tanımlanır.

Dikkate alınacak problem şudur: Verilen m ve n tam sayıları için, m -ayrıt ve n -düğümlü bir devirsiz yönlü G grafi bulunsun öyle ki s den t ye farklı yolların sayısı $N(G)$ maksimum olsun. m ve n parametreleri ile G bir maksimum yol grafi olarak adlandırılır ve $N_{n,m} = N(G)$ biçiminde tanımlanır.

$N_{n,m}$ maksimum yolların sayısı sadece $n - 1 \leq m \leq \frac{1}{2}n$. $(n - 1)$ aralığında tanımlı olduğu açıktır.[7]

Örnek 3.1.1. F_n yönlü grafi, $\{1, 2, \dots, n\}$ düğümlerine ve

$\{(i, i + 1) : i = 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{(i, i + 2) : i = 1, 2, \dots, n - 2\}$ ayrıtlarına sahip olsun.

$s = 1$ ve $t = n$ olsun. $N(F_n)$ nedir?

1 den n ye her yol,

(i) $(n - 2, n)$ ayrıtlarıyla devam eden 1 den $n - 2$ ye kadar bir yol

veya

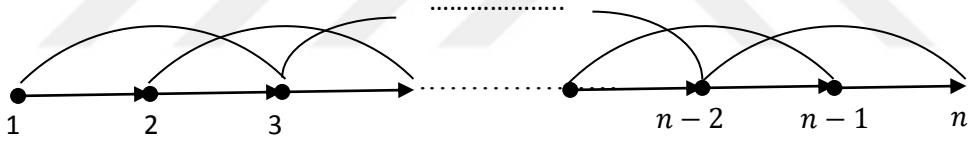
(ii) $(n - 1, n)$ ayrıtlarıyla devam eden 1 den $n - 1$ e kadar bir yol içerir.

(i) biçiminde $N(\mathcal{F}_{n-2})$ ve (ii) biçiminde $N(\mathcal{F}_{n-1})$ sayıları mevcuttur. Bu nedenle

$$N(\mathcal{F}_n) = N(\mathcal{F}_{n-2}) + N(\mathcal{F}_{n-1})$$

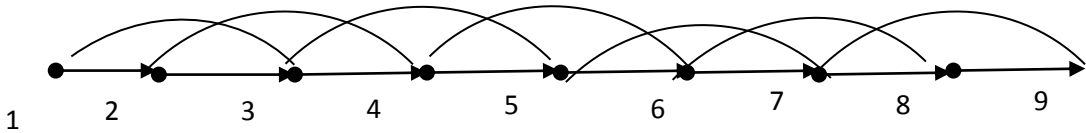
eşitliği elde edilir. Böylece $N(\mathcal{F}_1) = 1$ ve $N(\mathcal{F}_2) = 1$ olması aşıkardır.

Buradan F_n , n . Fibonacci sayısı olmak üzere $N(\mathcal{F}_n) = F_n$ sonucu elde edilir. \mathcal{F}_n grafi n . Fibonacci grafi olarak adlandırılır.



Şekil 3.1. (\mathcal{F}_n n . Fibonacci Grafi)

1 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 1$ ve 2 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 2$ olduğundan toplam ayrıt sayısı $m = 2n - 3$ tür.

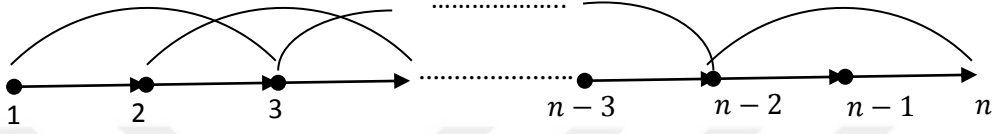


Şekil 3.2. (\mathcal{F}_9 Fibonacci Grafi)

Örnek 3.1.2. \mathcal{A}_n yönlü grafi, $\{1,2, \dots, n\}$ düğümlerine ve

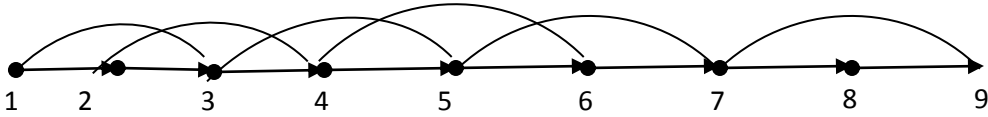
$\{(i, i + 1) : i = 1,2, \dots, n - 1\} \cup \{(i, i + 2) : i = 1,2, \dots, n - 4 \text{ ve } i = n - 2\}$ ayrıtlarına sahiptir. \mathcal{F}_n Fibonacci grafindan $(n - 3, n - 1)$ ayrıtlarının silinmesiyle, \mathcal{F}_n den elde edilen \mathcal{A}_n grafi n . hemen hemen Fibonacci grafi olarak adlandırılır.

$$N(\mathcal{A}_n) = 2N(\mathcal{F}_{n-2}) = 2F_{n-2}$$



Şekil 3.3. (\mathcal{A}_n n . hemen hemen Fibonacci Grafi)

1 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 1$ ve 2 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 3$ olduğundan toplam ayrıt sayısı $m = 2n - 4$ tür.



Şekil 3.4. (\mathcal{A}_9 , 9. hemen hemen Fibonacci Grafi)

Paralel ayrıtlar dışında devirsiz yönlü graflar için Fibonacci grafları ve hemen hemen Fibonacci grafları, ayrıtların tek veya çift sayıları için maksimum yol graflarıdır. Böylece

$$N_{n,2n-3} = N(\mathcal{F}_n) = F_n$$

$$N_{n,2n-4} = N(\mathcal{A}_n) = 2F_{n-2}$$

3.2. Maksimum Yol Graflarının Yapısı

$N(G)$ nin hesaplanmasında kullanılmalı olacak maksimum yol grafi G nin yapısı hakkında kesin varsayımlarda bulunulabilir.

İlk olarak, (1)'Her x düğümü, s alıcısından t kaynağına bir yerlerde bulunsun.' varsayımında bulunarak işe başlanır.

Böylece $N(G') \geq N(G)$ olacak biçimde bir G' grafi elde edilir.

Burada özellikle G nin bağlantılı olduğu ve sadece bir s kaynağına ve sadece bir t alıcısına sahip olduğu varsayılmalıdır.

İkinci ve daha güçlü bir varsayım G tercihen bir Hamilton yoluna sahip olmalıdır, bu yol grafin her düğümünü içerir.[7]

Teorem 3.2.1. Tüm m ve n tam sayıları için bir Hamilton yolu içeren maksimum yol grafi vardır. Böylece düğümlerin sıralanışı tek türdür.[7]

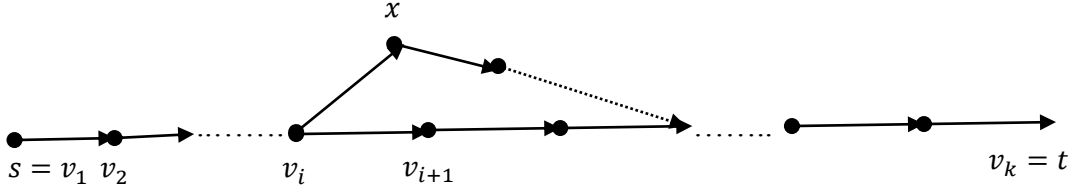
Kanıt. $G = (V, E)$ grafi, n ve m parametreleri ile (1) i sağlayan bir maksimum yol grafi olsun ve $P = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_k]$, G deki maksimum uzunluktaki bir yol olsun. ($s = v_1$ ve $t = v_k$ yazılır)

$k < t$ olduğu varsayalım. Buradan $k + 1$ uzunluğunda bir yol içeren bir G' grafi inşa edilir öyle ki $N(G') \geq N(G)$ dir.

P yolu üzerinde bulunmayan bir düğümden geçen her yol aşağıdaki formdadır:

$Q = [v_1, v_2, \dots, v_i, x, \dots, v_k]$ biçimindedir, burada $i \geq 1$ ve x düğümü P yolu üzerinde bulunmaz. Tercihen Q , en uzun yol olur.

P nin maksimalliğinden $(x, v_{i+1}) \notin E$ olur ve Q nun maksimalliği v_{i+1} den x e G de hiçbir yol olmamasını sağlar.



Şimdi $E' = E - \{(v_i, v_{i+1})\} + \{(x, v_{i+1})\}$ kümesi tanımlanır.

$G' = (V, E')$ devirsiz grafi $k + 1$ uzunluğunda bir yola sahip olduğundan $N(G') \geq N(G)$ olur.

Çünkü G deki (v_i, v_{i+1}) ayrıtının kullanıldığı her yol, $v_i \rightarrow x \rightarrow v_{i+1}$ yeni bölmesinin kullanılmasıyla yeniden yönlendirilebilir. Bu işlemin $n - k$ defa tekrarlanmasıyla, bir Hamilton yolu içeren bir maksimum yol grafi elde edilir. Graf devirsiz olduğundan Hamilton yolunda düğümlerin sıralanışı tek türdür.

Tanım 3.2.1. $1, 2, 3, \dots, n$ düğümlerine sahip ve $(i, i + 1)$ ayrıtlarını içeren maksimum yol grafi G olsun ($i = 1, 2, \dots, n - 1$). Böyle bir graf Hamilton maksimum yol grafi olarak adlandırılır. Bu graf hem bir maksimum yol grafidir hem de bir Hamilton yolu içerir.[7]

i den j ye G deki farklı yolların sayısı $P(i, j)$ ile gösterilir. Böylece

$$P(1, n) = N(G), P(i, i) = 1 \text{ ve } P(i, i + 1) = 1.$$

Tanım 3.2.2. $(i, i + k)$ ayrıtı k seviyesinde olarak adlandırılır. Eğer $i = 1, 2, \dots, n - k$ için $(i, i + k)$ ayrıtı G de bir ayrıtı ise k seviyesi G de doludur olarak adlandırılır. Böylece 1 seviyesi daima doludur.[7]

3.3. Genelleştirilmiş Fibonacci Grafları

G bir Hamilton maksimum yol grafi olsun. Eğer $i \leq i' \leq j' \leq j$ olacak biçimde grafta $e = (i, j)$ ve $e' = (i', j')$ ayrıtları varsa ayrıca $e \neq e'$ ise e ayrıtı uygun biçimde e' ayrıtını örter denir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı $F_n^{(j)}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F_1^{(j)} = 1,$$

$$F_h^{(j)} = \sum_{i=1}^{h-1} F_i^{(j)} \quad (h \leq j),$$

$$F_h^{(j)} = \sum_{i=h-j}^{h-1} F_i^{(j)} \quad (h > j).$$

$\mathcal{F}_n^{(k)}$ yönlü grafi, $\{1, 2, \dots, n\}$ düğümlerine ve $\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n \text{ ve } |j - i| \leq k\}$ ayrıtlarına sahiptir. Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğu açıktır:

$$N(\mathcal{F}_n^{(k)}) = F_n^{(k)}.$$

$\mathcal{F}_n^{(k)}$, n . genelleştirilmiş k -Fibonacci grafi olarak adlandırılır.[7]

Teorem 3.3.1: Tüm n ve m parametreleri için aşağıdaki özelliği sağlayan bir Hamilton maksimum yol grafi G vardır. Eğer G , k seviyesinde bir ayrıta sahipse her bir $l < k$ için l seviyesi G de doludur.[7]

Kanıt: Önceki teoremden, bir Hamilton maksimum yol grafi G vardır. Eğer G , grafta olmayan bir e' ayrıtını uygun şekilde örten bir e ayrıtına sahipse, buradan önceden e yi kullanan her yol e' aracılığıyla en az bir yolda yeniden yönlendirilebileceğinden

$P(1, n)$ sayısı azalmaz. Böylece G nin hiçbir ayrıtının grafa ait olmayan bir ayrıtı örtmediği varsayılır. l_x , x in en küçük (en sol) başlangıç komşusudur. O halde

$$P(1, x) = \sum_{i=l_x}^{x-1} P(1, i) \quad \text{ve } w \leq x \Rightarrow l_w \leq l_x .$$

Kabul edelim ki G , seviyesi birçok ayrıttan tam olarak daha yüksek olan herhangi bir ayrıtı sahip olsun. Bu durumda yolların sayısını azaltmadan değişim yapılabileceği gösterilecektir. Grafa olmayan j seviyesinde bir (a, c) ayrıtı ve k seviyesinde bir (b, d) ayrıtı tercih edilsin ve $j < k$ olsun. c, d nin solunda olacak biçimde $\Delta(c, d)$ onların sağ uç noktası arasında olabildiğince küçük olsun. $\Delta(c, d)$ nin minimalliğinden $l_x = x - j$ olur ($c < x < d$). Böylece

$$(d - 1) - j = l_d - 1 \leq l_d \leq b = d - k \leq d - (j + 1),$$

$$k = j + 1 ,$$

$$l_d = d - (j + 1).$$

Şimdi G den (b, d) nin silinmesiyle ve (a, c) nin eklenmesiyle elde edilen G' grafını ele alalım. Buradan $P'(v, w)$, G' grafında v den w ya yolların sayısını göstermek üzere

$$P'(c, x) = F_{\Delta(c, x)+1}^{(j)} , \quad (c \leq x \leq d)$$

olur.

Bu nedenle

$$P'(1, x) = P(1, x) \quad , \quad (0 \leq x < c) .$$

c nin minimum 3 olduğu varsayılmalıdır. Yani $x = 1$ ya da $x = 2$ olmalı.

$$P'(1, 1) = P(1, 1) ,$$

$$P'(1, 2) = P(1, 2),$$

$$P'(1, x) = P(1, x) + P(1, a)F_{\Delta(c,x)+1}^{(j)}, \quad (c \leq x \leq d),$$

$$P'(1, d) = P(1, d) + P(1, a)F_{\Delta(c,d)+1}^{(j)} - P(1, b).$$



Sonuç olarak 1 den d nin solundaki her düğüme olan yolların sayısı azalmadı. Eğer aynı şey d için de söylenebilirse; her bir y düğümü için $P'(1, y)$ sayısı $P(1, y)$ den eşit ya da büyük olacaktır. Bu teoremi kanıtlar. Böylece

$$1 = k - j = \Delta(b, d) - \Delta(a, c) = \Delta(c, d) - \Delta(a, b)$$

eşitliğinden

$$P(1, b) \leq P(1, a)F_{\Delta(a,b)+2}^{(j)}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$P'(1, d) = P(1, d) + P(1, a)F_{\Delta(c,d)+1}^{(j)} - P(1, b)$$

$$P(1, b) = P(1, a)F_{\Delta(c,d)+1}^{(j)} + P(1, d) - P'(1, d)$$

$$P(1, b) = P(1, a)F_{\Delta(a,b)+2}^{(j)} + P(1, d) - P'(1, d), \quad (\Delta(c, d) = \Delta(a, b) + 1)$$

$$P(1, b) \leq P(1, a)F_{\Delta(a,b)+2}^{(j)} \quad (P(1, d) - P'(1, d) \leq 0).$$

Şimdi aşağıdaki daha güçlü olan iddianın kanıtına geçelim.

$$P(1, x) \leq P(1, a)F_{\Delta(a,x)+2}^{(j)}, \quad (a \leq x < d). \quad (*)$$

Kesinlikle (*), $x = a$ için doğrudur.

$a < x < c$ için tümevarım kullanılarak (*) elde edilebilir.

$x = 2$ için $P(1,2) \leq P(1,a) F_{\Delta(a,2)+2}^{(j)}$ doğrudur.

$x = n$ için önerme doğru olsun. Yani

$$P(1,n) \leq P(1,a) F_{\Delta(a,n)+2}^{(j)}$$

$x = n + 1$ için önerme doğru olur mu?

$$\begin{aligned} P(1,n+1) &\leq P(1,n) + 1 \\ &\leq P(1,a) F_{\Delta(a,n)+2}^{(j)} + 1 \\ &\leq P(1,a) F_{\Delta(a,n)+2}^{(j)} + P(1,a) \\ &= P(1,a) \cdot (F_{\Delta(a,n)+2}^{(j)} + 1) \\ &\leq P(1,a) \cdot F_{\Delta(a,n+1)+2}^{(j)} \end{aligned}$$

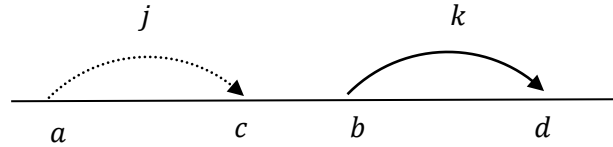
O halde $P(1,x) \leq P(1,a) F_{\Delta(a,x)+2}^{(j)}$, ($a \leq x < c$) elde edilir.

$$\begin{aligned} P(1,x) &\leq \sum_{i=l_a}^{x-1} P(1,i), \quad (P(1,x) = \sum_{i=l_x}^{x-1} P(1,i), l_a < l_x) \\ &= \sum_{i=a-j}^{x-1} P(1,i) \\ &= \sum_{i=a}^{x-1+j} P(1,i-j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(1, a - j) + \dots + P(1, a + j - 1 - j) + P(1, a) + \dots + P(1, x - 1) \\
&= P(1, a) + \sum_{i=a}^{x-1} P(1, i) \quad , \quad (P(1, a - j) + \dots + P(1, a + j - 1 - j) = P(1, a)) \\
&\leq P(1, a) \left[1 + \sum_{i=a}^{x-1} F_{\Delta(a,i)+2}^{(j)} \right] \quad (\text{Tümevarım}) \\
&= P(1, a) \left[1 + F_2^j + F_3^j + F_4^j + \dots + F_{x-a+1}^j \right] \\
&= P(1, a) \left[F_{x-a+2}^j \right] \\
&= P(1, a) F_{\Delta(a,x)+2}^{(j)} .
\end{aligned}$$

Şimdi iddianın $c \leq x < d$ için de doğru olduğu gösterilmelidir.

$l_x = x - j$ ($c < x < d$) eşitliğini kullanarak ve $l_c > c - j$ durumu $c \leq x < d$ için elde edilir.



$$\begin{aligned}
P(1, x) &= \sum_{i=l_x}^{x-1} P(1, i) \\
&\leq \sum_{i=x-j}^{x-1} P(1, i) \\
&= P(1, a) \sum_{i=x-j}^{x-1} F_{\Delta(a,i)+2}^{(j)} \quad (\text{Tümevarım})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(1, a) \left(F_{x-j-a+2}^{(j)} + F_{x-j-a+3}^{(j)} + F_{x-j-a+4}^{(j)} + \dots + F_{x-a+1}^{(j)} \right) \\
&= P(1, a) \left(F_{x-a+2}^{(j)} \right) \\
&= P(1, a) F_{\Delta(a,x)+2}^{(j)}.
\end{aligned}$$

Bu da Teorem 3.3.1 in kanıtını tamamlar.

Teorem 3.3.1. bir maksimum yol grafi inşası problemini oldukça basite dönüştürür. m tek türlü olarak aşağıdaki formda yazılabilir:

$$m = r + \sum_{i=1}^k (n-i) = r + kn - \frac{1}{2}k(k+1), \quad 1 \leq k \leq n-1 \text{ ve } 0 \leq r < n-k.$$

1 den k ya kadar tüm seviyeleri doldurduktan sonra, kalan $k+1$ seviyesindeki r ayrıt en uygun biçimde dağıtılır. Tam olarak bu ekstra r ayrıtın nasıl kullanılacağı şimdiye kadar gösterilmiş oldu, gerçekten de Teorem 3.3.1. $r=0$ durumunda bu ayrıtların dağılımı hakkında bilgi vermektedir.

Sonuç 3.3.1. $m = kn - k \frac{k+1}{2}$ eşitliğini sağlayan m ve k pozitif tam sayıları için n . genelleştirilmiş k -Fibonacci grafi $\mathcal{F}_n^{(k)}$ bir maksimum yol grafıdır. Yani

$$N(\mathcal{F}_n^{(k)}) = N_{n,m}. \quad [7]$$

$r \neq 0$ ise durum daha karışık bir hale gelir. Ekstra bir ayrıtın en soldaki (ya da sağdaki) en uygun yere eklenmesi gerektiği gösterilmelidir, yani $(1, k+2)$ ayrıtı eklenir. $\mathcal{F}_n^{(k)}$ grafına sırasıyla $(1, k+2)$ ve $(l, l+k+1)$ ayrıtalarının eklenmesiyle elde edilen graflar G ve G' olsun, burada $1 < l < n-k-1$. Simetri özelliğinden, $P_{l+k+1} = P'_{l+k+1}$ olur. G deki ekstra ayrıtın katkısıyla

$$P_i = P'_i + F_{i-k-1}^{(k)} \quad (k+1 \leq i \leq l+k)$$

elde edilir. Böylece

$$P_i > P'_i \quad (l + k + 2 \leq i \leq n)$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik

$$N(G) = F_n^{(k)} + F_{n-k-1}^{(k)}.$$

$r = 2$ durumunda ekstra iki ayrıtı birini en sağdaki ve diğerini en soldaki en uygun yere ekleyerek G gibi bir graf benzer biçimde elde edilir:

$$N(G) = F_n^{(k)} + 2F_{n-k-1}^{(k)} + F_{n-2k-2}^{(k)}.$$

G , n düğüm ve $m = (n - 1) + r$ ayrıtlı ($0 < r \leq n - 2$) bir (Hamilton) maksimum yol grafi olsun. G , 2 seviyesinde r ayrıta ve 1 seviyesinde dolu ayrıtlara sahiptir. G nin yapısını tanımlamak kolaydır.

Eğer $t = n - 1 - r$ ise G tam olarak t Fibonacci grafları $\mathcal{F}_{s_1}, \mathcal{F}_{s_2}, \dots, \mathcal{F}_{s_t}$ serilerinin birleştirilmesiyle elde edilir. Yani

$$N(G) = F_{s_1} F_{s_2} \dots F_{s_t} \text{ ve } \sum_{i=1}^t s_i = n + t - 1.$$

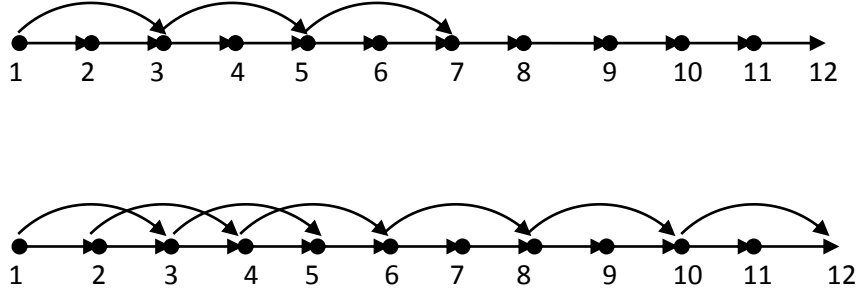
Teorem 3.3.2. m ve n pozitif tam sayılar olsun, öyle ki

$$m = (n - 1) + r, \quad 0 \leq r \leq n - 2.$$

Buradan

$$N_{n,m} = \begin{cases} 2^r, & r \leq \frac{1}{2}(n - 1) \\ 2^{n-2-r} F_{2r-n+4}, & r > \frac{1}{2}(n - 1) \end{cases}$$

maksimum yol sayısı tanımlanır. [7]



Şekil 3.5. (\mathcal{A}_9 , 9. hemen hemen Fibonacci Grafi)

Şekil 3.5 $n = 12$, $m = 14$ ve $n = 12$, $m = 18$ için maksimum yol graflarını gösterir.

$n = 12$, $m = 14$ için $m = (n - 1) + r$ eşitliğinden $r = 3$ elde edilir. Bu durumda $r \leq \frac{1}{2}(n - 1)$ eşitsizliğini sağlar. O halde bu graftaki maksimum yol sayısı 8 dir.

$n = 12$, $m = 18$ için $m = (n - 1) + r$ eşitliğinden $r = 7$ elde edilir. Bu durumda $r > \frac{1}{2}(n - 1)$ eşitsizliğini sağlar. O halde bu graftaki maksimum yol sayısı 64 dür.

4. EKSİLTİLMİŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ MAKSİMUM YOL GRAFLARI

Bu bölümde eksiltilmiş k -Genelleştirilmiş Fibonacci grafları ve 3 seviyesindeki ayrıtların dağılımı incelenecektir.

4.1. k -Genelleştirilmiş Fibonacci Grafları ve Eksitilmiş k -Genelleştirilmiş Fibonacci Grafları

G izole düğümler veya katlı ayrıtlar dışında bir yarı-devir yönlü graf olsun ve tanımlı iki s ve t düğümlerini içersin. s den t ye farklı yolların sayısı $N(G)$ olarak tanımlanır. Burada incelenecek problem şudur: verilen n ve m tam sayıları için, n düğüm ve m ayrıtlı maksimum yol sayısı $N(G)$ ye sahip olan bir G grafi bulmak. Böyle bir G grafi maksimum yol grafi olarak adlandırılır ve $N_{n,m} = N(G)$ olarak tanımlanır. $N_{n,m}$ sayısının $n - 1 \leq m \leq \binom{n}{2}$ aralığında tanımlı olduğu açıktır. Fibonacci grafları n düğüm için $N(G) = F_n$ ve hemen hemen Fibonacci grafları n düğüm için $N(G) = 2F_{n-2}$ dir. Burada $\{F_n\}$, Fibonacci dizisi olarak tanımlanır. Yani

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ ve } F_{i+1} = F_i + F_{i-1}, (i > 1).$$

$$N_{n,2n-3} = F_n,$$

$$N_{n,2n-4} = 2F_{n-2} [8].$$

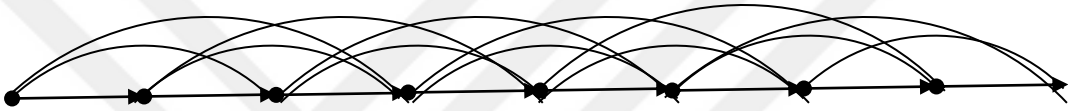
Maksimum yol yarı-devirli yönlü grafları için bir Hamilton yolu içeren maksimum yol grafi vardır. Böylece düğümlerin sıralanışı $\{1,2,3, \dots, n\}$ şeklinde tek türdür. Bu grafta tüm ayrıtlar $i < j$ için (i, j) formundadır. Bir (i, j) ayrıtlının uzunluğu $k = j - i$ dir ve bu ayrıtlın seviyesi k dir.

1 düğümünden i düğümüne farklı yolların sayısı $P(i)$ biçiminde gösterilir ve $N(G) = P(n)$ dir. Bir maksimum yol grafi k dolu seviyeli ayrıtlara ya da $k - 1$ dolu

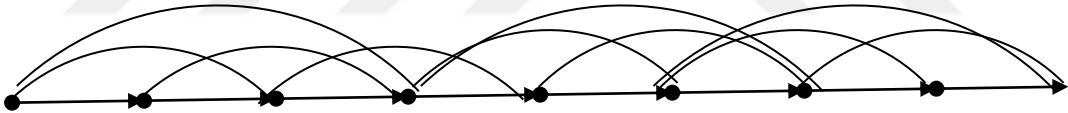
seviyeli ayrıtlara ve birkaç k seviyeli ayrıta sahiptir. Birinci tür graf k - genelleştirilmiş Fibonacci grafi olarak adlandırılır, bu graftaki yolların sayısı F_n^k olduğundan n inci k - genelleştirilmiş Fibonacci sayısı,

$$F_i^k = \begin{cases} 0, & i \leq 0 \\ 1, & i = 1 \\ \sum_{j=i-k}^{i-1} F_j^k, & i \geq 2 \end{cases}$$

ile tanımlanır. İkinci tür graf ise eksiltilmiş k -genelleştirilmiş Fibonacci grafi olarak adlandırılır.



Şekil 4.1. (3- Genelleştirilmiş Fibonacci Grafi)



Şekil 4.2. (Eksiltilmiş 3- Genelleştirilmiş Fibonacci Grafi)

Burada, eksiltilmiş k - genelleştirilmiş Fibonacci grafiındaki k seviyesindeki ayrıtların dağılımı incelenecek ve sadece $k = 3$ için $N(G)$ maksimize edilecektir. Kolaylık için sadece 3 seviyesindeki ayrıtlardan bahsedilecek ve çizilecektir. Ayrıca 3 seviyesi 0,1 dizisi $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-3}$ ile tanımlanır. Burada $(i, i + 3)$ grafta bir ayrıtsa $c_i=1$ ve aksi halde $c_i=0$ dir. Örneğin 100101 dizisi Şekil 4.2 deki ikinci tür grafi tanımlar. Bu ikili dizinin gösterimi sık sık kullanılır. Örneğin $(100)^3 01(011)^2$ demek 10010010001011011 dir. $[x]$ demek 'x tercihe bağlıdır' anlamında kullanılır. Örneğin $10[0](110)^k$; $100(110)^k$ ve $10(110)^k$ nin her ikisi ile de tanımlıdır.[8]

4.2 Çözümün Açıklaması

Çözümün durumu üç aralıkta farklıdır. Buradaki 3 seviyesindeki ayrıtların sayısı, 3 seviyedeki $n - 3$ ayrıtın,

- (1) Üçte birinden küçük,
- (2) Üçte biri ve üçte ikisi arasında,
- (3) Üçte ikisinden büyüktür.

Bu seviyeler sırasıyla aşama 1, aşama 2 ve aşama 3 olarak adlandırılır. İlk olarak çözümlerin yerel özelliklerinden bahsedilir. 3 seviyesindeki ayrıtların sayısı I ile gösterilirse, $0 < I \leq n - 3$.

Eğer $I > 1$ ise çözüm son ayrıtlar $(1,4)$ ve $(n - 3, n)$ in her ikisini de içerir. Üstelik, $I \leq n - 5$ ise yan son ayrıtlar $(2,5)$ ve $(n - 4, n - 1)$ i içermeyen bir çözüm vardır. Örneğin Şekil 4.1. de $n = 9$ ve $I = 3$ için olan çözüm, yukarıdaki özelliklerin ikisini de sağlar.

Ortak aralığa sahip olmayan iki ayrıt ayrıktır. Ardışık ayrıt ayrıtların bir koşusu $(001)^k00$, $k > 1$ şekliyle tanımlıdır.

Bir graf (i, j) ayrıtını içermiyorsa, (i, j) grafın ayrıtı değildir.

Ayrıca graf $(i, i + 3)$, $(i + 1, i + 4)$, $(i + 2, i + 5)$ ayrıtlarından hiç birini içermiyorsa $(i + 2, i + 3)$ boşluktur.

Çözümün üç aşaması aşağıdaki gibidir.[8]

Aşama 1. $I \leq \left\lfloor \frac{1}{3}(n - 1) \right\rfloor$.

Graf, ardışık ayrıt ayrıtların iki koşusundan oluşmuştur, son ayrıtlar ile başlar ve biter. Her bir koşudaki ayrıtların sayısı keyfidir.

$I = \frac{1}{3}(n - 1)$ durumunda, $n \equiv 1 \pmod{3}$ olmak üzere iki koşu biri içinde birleştirilir.

Örneğin $(100)^4 0^2 (001)^2$,

10010010010000001001,

$n = 23$ ve $I = 6$,

$(100)^4 1$,

1001001001001,

$n = 16$ ve $I = 5$.

Aşama 2. $\left\lfloor \frac{1}{3}(n + 3) \right\rfloor \leq I \leq 2 \left\lfloor \frac{1}{3}(n - 3) \right\rfloor$.

$n \not\equiv 1 \pmod{3}$ durumunda çözüm, ardışık ayrı ayrıtların iki koşusundan oluşmuştur. Bir son ayrıt ile başlar ve biter. İki koşudaki ayrıtların sayısı, iki yan son ayrıtları içeren koşudakiler dışında keyfidir.

Örneğin $100(110)^4 01$,

($(100)^5 0^2$ ve $0^2(001)^5$ den oluşmuştur.)

$n = 20$ ve $I = 10$, $7 \leq I \leq 11$,

$(100)^2 10(110)^2 1$,

100100101101101,

$n = 18$ ve $I = 8$, $7 \leq I \leq 10$.

$n \equiv 1 \pmod{3}$ durumunda çözüm, ardışık ayrık ayrıtların iki koşusundan oluşur, son ayrıtlar ile başlar ve biter, diğer koşu herhangi bir düğümden başlar fakat son yan ayrıtı içermez.

Örneğin $(100)^2(110)^21$,

$n = 16, n \equiv 1 \pmod{3}$,

$10010(110)^301$,

$n = 16, n \equiv 1 \pmod{3}$.

Aşama 3. $I > \left\lfloor \frac{2}{3}(n - 3) \right\rfloor$.

Ardışık ayrık ayrıtların koşuları bakımından, grafın yapısı oldukça karışıktır. Diğer tarafta çözüm son-yan ayrıtlar ile başlayan ve biten ardışık ayrık ayrıt olmayanların iki koşusu dışında tüm $n - 3$ ayrıtı içerir.

Örneğin $1(011)^21^2(011)^201$,

10110111101101101 ,

$n = 20$ ve $I = 12$, $I > \left\lfloor \frac{2}{3}(20 - 3) \right\rfloor = 11$,

$1(011)^31^2(011)^201$,

10110110111101101101 ,

$n = 22$ ve $I = 13$, $I > \left\lfloor \frac{2}{3}(22 - 3) \right\rfloor = 12$.

4.3. Sınır Kuralları

İki sınır kural vardır. Bunlardan birincisi, Aşama 1 ve Aşama 2 arasında ortaya çıkar.

$$I = \left\lfloor \frac{1}{3}(n-1) \right\rfloor + 1 < \left\lfloor \frac{1}{3}(n+3) \right\rfloor$$

$n \equiv 0 \pmod{3}$ ve $I = \frac{1}{3}n$ olduğunda çözüm grafları $(100)^j 101(001)^k$, $j \geq 0$ ve $k \geq 0$ formundadır. Diğer durum ise Aşama 2 ve Aşama 3 arasında ortaya çıkar.

$$I = 2 \left\lfloor \frac{1}{3}(n-3) \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{2}{3}(n-3) \right\rfloor$$

$n \equiv 2 \pmod{3}$ ve $I = 2 \left\lfloor \frac{2}{3}(n-3) \right\rfloor$ olduğunda çözüm grafları $1(011)^j 010(110)^k 1$, $j \geq 0$ ve $k \geq 0$ formundadır ($|j-k| \leq 1$ olduğu varsayılır).

$n = 12, 13, 14$ ve her olası I için aşamalara bölünmüş çözümlerin sunumuyla, çözümün açıklaması sonuçlandırılır (Sınır kurallar * ile gösterilmiştir).

$$n = 12 \quad 100000000 \quad I = 1$$

$$100000001 \quad I = 2 \quad I \leq \left\lfloor \frac{1}{3}(n-1) \right\rfloor = 3$$

$$10100001 \quad I = 3$$

$$* \quad 100101001 \quad I = 4$$

$$100101101 \quad I = 5 \quad 5 = \left\lfloor \frac{1}{3}(n+3) \right\rfloor \leq I \leq 2 \cdot \left\lfloor \frac{1}{3}(n-3) \right\rfloor = 6$$

$$101101101 \quad I = 6$$

$$101111101 \quad I = 7 \quad I > \left\lfloor \frac{2}{3}(n-3) \right\rfloor = 7$$

$$111111101 \quad I = 8$$

$$111111111 \quad I = 9$$

$$n = 13 \quad 1000000000 \quad I = 1$$

1000000001 $I = 2$ $I \leq 4$

1001000001 $I = 3$

1001001001 $I = 4$

1011001001 $I = 5$ $5 \leq I \leq 6$

1011011001 $I = 6$

1011011101 $I = 7$

1011111101 $I = 8$ $I > 6$

1111111101 $I = 9$

1111111111 $I = 10$

n=14 10000000000 $I = 1$

10000000001 $I = 2$ $I \leq 4$

10010000001 $I = 3$

10010001001 $I = 4$

10010011001 $I = 5$ $5 \leq I \leq 6$

10011011001 $I = 6$

* 10110101101 $I = 7$

10110111101 $I = 8$

10111111101 $I = 9$ $I > 7$

$$11111111101 \quad I = 10$$

$$11111111111 \quad I = 11$$

4.4. Yerel Özellikler

G_1 ve G_2 , 3 seviyesinde I ayrıtlı iki graf ve ikisinin de alt grafı i düğümünden j düğümüne benzer olsun.

$P_1(i)$ ve $P_2(i)$ fonksiyonları 1 düğümünden i düğümüne sırasıyla G_1 ve G_2 deki yolların sayısını ifade eder ve $\Delta(i) = P_2(i) - P_1(i)$.

Birkaç j düğümü için $j \geq i$ olmak üzere,

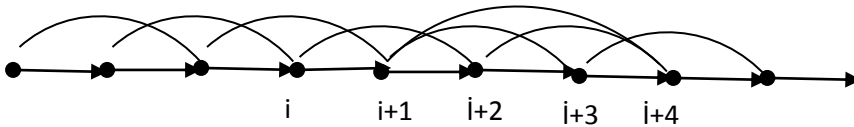
$P_2(j+y) \geq P_1(j+y)$, $y = 0, 1, 2$ ise $P_2(j+y) \geq P_1(j+y)$, $y = 3, 4, \dots, n-j$ dir ve böylece $N(G_2) \geq N(G_1)$ elde edilir.

Üstelik $c_i = 0$ ($(i, i+3)$ grafta ayrıtlı değildir) ve

$P_2(i+2) \geq P_1(i+2)$, $P_2(i+3) \geq P_1(i+3)$ ise $N(G_2) \geq N(G_1)$ dir.

O halde $c_{i+1} = 0$ durumunda $N(G_2) \geq N(G_1)$ olduğu açıktır. Aksi takdirde; yani $c_{i+1} = 1$ ise $c_i = 0$ olduğundan $P_2(i+3) = P_2(i+2) + P_2(i+1)$ dir. Çünkü 3 seviyesindeki ayrıtlın buradaki yol sayısına etkisi yoktur. Ancak

$P_2(i+4) = P_2(i+3) + P_2(i+2) + P_2(i+1)$ eşitliği sağlanır.



Üstelik

$$\begin{aligned}P_2(i + 4) &= P_2(i + 3) + P_2(i + 2) + P_2(i + 1) \\ &= 2P_2(i + 3) \\ &\geq 2P_1(i + 4) \\ &= P_1(i + 3) + P_1(i + 2) + P_1(i + 1) \\ &= P_1(i + 4).\end{aligned}$$

Böylece ilk gözlemle $N(G_2) \geq N(G_1)$ dir.[8]

4.5. Eksiltilmiş Fibonacci Graflarında Ayrıtların Dağılımı

Teorem 4.5.1. Her çözüm son ayrıtları içerir ($I = 1$ ise sadece bir son ayrıt içerir).[8]

Kanıt. Çözümün $(1, 4)$ ü içerdiği gösterilirse kanıt tamamlanır. $(n - 3, n)$ için kanıt simetrik olur. Kabul edelim ki bir G_1 çözümü $0^{i-1}1, i > 1$ ile başlasın. 10^{i-1} ile bu şeklin değiştirilmesiyle G_1 den elde edilen graf G_2 olsun. $P_1(i + 3)$, G_1 de $i + 3$ den 1 e karşıt yöndeki yolların sayısına eşittir. Böylece

$$P_2(i + 3) = P_1(i + 3)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$P_2(i + 2) > P_1(i + 2) \text{ ve } P_2(i + 1) \geq P_1(i + 1) \text{ olduğu görülür.}$$

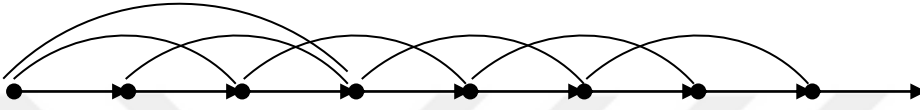
Böylece $N(G_2) > N(G_1)$, G_1 in uygunluğu ile çelişir. O halde G_1 , $(1, 4)$ ayrıtları içermelidir.

Sonuç 4.5.1. $N_{n,2n-2} = F_n + F_{n-3}$,

$$N_{n,2n-1} = F_n + 2F_{n-3} - F_{n-5} \cdot [8]$$

Kanıt: n düğüm ve $2n - 2$ ayrıtın bulunduğu bir grafta 1 uzunluğunda, 2 uzunluğunda ve 3 uzunluğunda ayrıtlar bulunmaktadır. 1 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 1$ adet, 2 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 2$ adet ve 3 uzunluğundaki ayrıtların sayısı 1 adettir. Yani

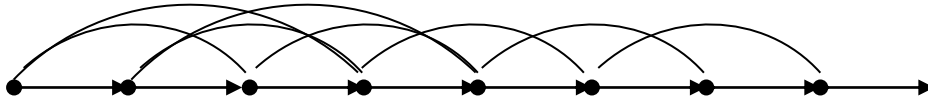
$$(n - 1) + (n - 2) + 1 = (2n - 2) .$$



3 uzunluğundaki ayrıtı dikkate almazsak geri kalan düğümlerin oluşturduğu yolların sayısı F_n dir. 3 uzunluğundaki ayrıtın oluşturduğu yol sayısı ise F_{n-3} tür. Buradan $N_{n,2n-2} = F_n + F_{n-3}$ elde edilir.

n düğüm ve $2n - 1$ ayrıtın bulunduğu bir grafta 1 uzunluğunda, 2 uzunluğunda ve 3 uzunluğunda ayrıtlar bulunmaktadır. 1 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 1$ adet, 2 uzunluğundaki ayrıtların sayısı $n - 2$ adet ve 3 uzunluğundaki ayrıtların sayısı 2 adettir. Yani

$$(n - 1) + (n - 2) + 2 = (2n - 1) .$$



3 uzunluğundaki ayrıtları dikkate almazsak geri kalan düğümlerin oluşturduğu yolların sayısı F_n dir. 3 uzunluğundaki ayrıtların oluşturduğu yolların sayısı ise F_{n-3} ve F_{n-4} tür. Yani

$$N_{n,2n-1} = F_n + F_{n-3} + F_{n-4}$$

$$\begin{aligned}
&= F_n + F_{n-3} + F_{n-3} - F_{n-5} \quad , \quad (F_{n-3} = F_{n-4} + F_{n-5}) \\
&= F_n + 2F_{n-3} - F_{n-5}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.[8]

Teorem 4.5.2. Yan – son ayrıtları içermeyen bir çözüm vardır ($I \geq n - 4$ olmadıkça) [8].

Lemma 4.5.1.

(1) $i \geq 2$ için $\frac{3}{2}P(i) \leq P(i+1) \leq 2P(i)$,

(2) $i \geq 3$ için $\frac{5}{2}P(i) \leq P(i+2) \leq \frac{11}{3}P(i)$,

(3) $i \geq 3$ için $4P(i) \leq P(i+3) \leq \frac{20}{3}P(i)$,

(4) $i \geq 3$ için $c_i = 1$ ise $\frac{5}{3}P(i+2) < \frac{39}{22}P(i+2) \leq P(i+3) \leq 2P(i+2)$,

(5) $i \geq 1$ için $c_i = 0$ ve $c_{i+1} = 1$ olması için gerek ve yeter şart

$$P(i+4) = 2(P(i+3)) \text{ olmasıdır.}$$

Aşama 1 : İlk olarak kanıt teknikleri tanımlanır, bu teknikler üç aşama için kullanılır ancak burada Aşama 2 ve Aşama 3 den daha basit olan Aşama 1 için gösterilecektir.

Kanıtlardaki temel amaç başlangıç iki düğümü a ve b olan bir grafa ait özel bir şekildeki $P(a)$ ve $P(b)$ nin bir fonksiyonu olarak, herhangi bir i düğümüne olan yolların sayısını açıklamaktır.

Öyle ki $(100)^i$, $(110)^i$, $i > 0$ ve 1^i , $i \geq 3$ özel yapıları sırasıyla Aşama 1, Aşama 2 ve Aşama 3 içindir. Bu bize $N(G)$ deki birkaç yerel dönüşümün etkisini ölçmek için fayda sağlar. Bu teknik kanıt için kullanılır, bazı şekiller farklı aşamalar için yasaktır. Bu yasak şekillerin atılmasıyla, çözümün yapısında birkaç sınıf kurulur. Daha sonra birkaç yerel dönüşüm, çözümün kesin yapısının belirlenmesinde kullanılır. Hesaplamalarla ilgili birçok teknik, kanıtlarda gereklidir ve sadece onlardan birkaçı bu çalışmada verilmiştir.[8]

Lemma 4.5.2. $j > 1$ olmak üzere $0100(100)^i$, $i \geq 0$ şeklindeki b den j . düğüme abc

$P(b + j)$ yolların sayısı, $P(b)$ ve $P(c)$ nin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Eğer şekil a , 0 ile başlarsa $P(a)$ ve $P(b)$ nin bir fonksiyonu olarak) :

$$P(b + j) = \begin{cases} 3 \cdot 5^{i-1} \cdot z & , j = 3i + 1, i \geq 1 \\ 5^i \cdot z & , j = 3i + 2, i \geq 0 \\ 2 \cdot 5^i \cdot z & , j = 3i + 3, i \geq 0 \end{cases}$$

burada a , b ve c bu şeklin başlangıcındaki üç ardışık düğümü ifade eder ve $z = P(b) + P(c)$ (eğer şekil 0 ile başlarsa $z = P(a) + 2P(b)$) dir.[8]

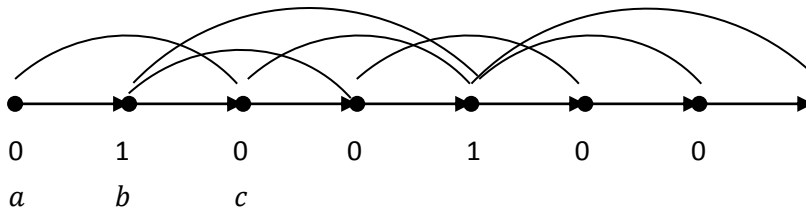
Kanıt : j üzerinden tümevarımla, aşağıdaki formüller kullanılarak ispat tamamlanır:

$$P(b + 3i + 1) = P(b + 3i) + P(b + 3i - 1),$$

$$P(b + 3i + 2) = P(b + 3i + 1) + P(b + 3i),$$

$$P(b + 3i + 3) = P(b + 3i + 2) + P(b + 3i + 1) + P(b + 3i).$$

I) $i = 1$ olsun.



$$\begin{aligned}
j = 4 \text{ alırsak } P(b + j) &= P(2 + 4) = P(6) = 3 \cdot 5^0 \cdot z \\
&= 3 \cdot 5^0 \cdot (P(b) + P(c)) \\
&= 3 \cdot 5^0 \cdot (P(2) + P(3)) \\
&= 3 \cdot 1 \cdot (1 + 2) \\
&= 9
\end{aligned}$$

$$\text{II) } P(b + j) = \begin{cases} 3 \cdot 5^{i-1} \cdot z, & j = 3i + 1, i \geq 1 \\ 5^i \cdot z, & j = 3i + 2, i \geq 0 \\ 2 \cdot 5^i \cdot z, & j = 3i + 3, i \geq 0 \end{cases}$$

eşitliğin doğru olduğunu kabul edilsin.

$$\text{III) } P(b + j + 1) = \begin{cases} 3 \cdot 5^i \cdot z, & j + 1 = 3(i + 1) + 1 \\ 5^{i+1} \cdot z, & j + 1 = 3(i + 1) + 2 \\ 2 \cdot 5^{i+1} \cdot z, & j + 1 = 3(i + 1) + 3 \end{cases}$$

eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
P(b + 3i + 4) &= P(b + 3i + 3) + P(b + 3i + 2) \\
&= 2 \cdot 5^i \cdot z + 5^i \cdot z \\
&= 3 \cdot 5^i \cdot z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(b + 3i + 5) &= P(b + 3i + 4) + P(b + 3i + 3) \\
&= 3 \cdot 5^i \cdot z + 2 \cdot 5^i \cdot z \\
&= 5 \cdot 5^i \cdot z \\
&= 5^{i+1} \cdot z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(b + 3i + 6) &= P(b + 3i + 5) + P(b + 3i + 4) + P(b + 3i + 3) \\
&= 5^{i+1} \cdot z + 3 \cdot 5^i \cdot z + 2 \cdot 5^i \cdot z \\
&= 2 \cdot 5^{i+1} \cdot z
\end{aligned}$$

O halde kanıt tamamlanır.

0 şekilde önce gelirse $P(c) = P(a) + P(b)$ olur. Bu durumda

$$z = P(b) + P(c)$$

$$z = P(b) + P(a) + P(b)$$

$$z = 2P(b) + P(a). [8]$$

Teorem 4.5.3. Çözümün Aşama 1 inde ayrıklar ayrıktır.[8]

Kanıt : G çözümü ayrık olmayan ayrıklar içeriyorsa bu durumda G nin, 11 ya da 101 şekillerinden birini içerdiği gösterilmelidir. Buradan, olabildiğince G grafi içinde bir G_1 grafi dönüştürülür öyle ki $N(G_1) > N(G)$ elde edilir ki bu da G nin uygunluğu ile çelişir.

Aşama 1 de $I \leq [\frac{1}{3}(n - 1)]$ olduğundan, 11 ya da 101 in varlığı bir boşluk olmasını sağlar, bu da G içinde 000 şekline karşılık gelir. Genelliği bozmadan bir 000 şeklinin solunda ilk oluşumu ya 11 ya da 101 olarak dikkate alacağız..

Durum 1: 101

Genelliği bozmaksızın, G de $101(001)^k 000$ şeklini varsayalım. G_1 grafi, bu şeklin $(100)^{k+1}$ ile değiştirilmesiyle G den elde edilir.

$$\begin{array}{ccccccc}
G : & . & 1 & 0 & 1 & 0 & 0(100)^{k-1} 0 & . & . & . & . & . \\
& & u & v & w & a & b & & i & i + 1 & & i + 5
\end{array}$$

$$G_1 : . 1 0 0 1 0 0 (100)^{k-l}$$

$$u v w a b \quad i + 1 \quad i + 5$$

$y = P(a) + P(b)$ ve $z = P(a) + 2P(b)$ yazalım. $P_1(a) = P(a)$ ve $P_1(b) = P(b)$ olduğunu belirtelim.

P, P_1 ve $\Delta = P_1 - P$, i den $i + 5$ e kadar olan düğümler için Çizelge 4.1 de özetlenmiştir. Hesaplamalar Lemma 4.5.1 ve Lemma 4.5.2 ye dayanır, onların birkaçı burada verilmiştir.

$$\begin{aligned} \Delta(i + 3) &= P_1(i + 3) - P(i + 3) \\ &= 5 \cdot 5^k \cdot z - 8 \cdot 5^k \cdot y \\ &= 5^k \cdot (5 \cdot z - 8 \cdot y) \\ &= 5^k \cdot [5(P(a) + 2P(b)) - 8(P(a) + 2P(b))] \\ &= 5^k [-3P(a) + 2P(b)] > 0. \end{aligned}$$

$c_{i+1} = 1$ ise

$$\begin{aligned} \Delta(i + 4) &= P_1(i + 4) - P(i + 4) \\ &= 2P_1(i + 3) - 2P(i + 3) \quad (\text{Lemma 4.5.1(5)}) \\ &= 2\Delta(i + 3) \geq 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$c_{i+1} = 0$ ise

$$\Delta(i + 4) = P_1(i + 4) - P(i + 4)$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \cdot 5^k \cdot z - 13 \cdot 5^k \cdot y \\
&= 5^k (8 \cdot z - 13 \cdot y) \\
&= 5^k [8 \cdot (P(a) + 2P(b)) - 13 \cdot (P(a) + 2P(b))] \\
&= 5^k [-5P(a) + 3P(b)] > 0.
\end{aligned}$$

$c_{i+2} = 0$ ise önceki eşitsizlikler $N(G_1) > N(G)$ yi sağlar.

$c_{i+2} = c_{i+1} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
\Delta(i + 5) &= P_1(i + 5) - P(i + 5) \\
&= 18 \cdot 5^k \cdot z - 29 \cdot 5^k \cdot y \\
&= 5^k \cdot (18 \cdot z - 29 \cdot y) \\
&= 5^k \cdot [18 \cdot (P(a) + 2P(b)) - 29 \cdot (P(a) + 2P(b))] \\
&= 5^k \cdot [-11P(a) + 7P(b)] \\
&> 5^k \cdot [6P(b) - 10P(a)] \\
&> 0
\end{aligned}$$

$c_{i+2} = 1$ ve $c_{i+1} = 0$ ise Lemma – 1(5) den

$$\begin{aligned}
\Delta(i + 5) &= P_1(i + 5) - P(i + 5) \\
&= 2P_1(i + 4) - 2P(i + 4) \quad (\text{Lemma 4.5.1(5)}) \\
&= 2\Delta(i + 4) > 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır ve tekrar $N(G_1) > N(G)$ elde edilir.

Çizelge 4.1. (G ve G_1 graflarındaki maksimum yol sayıları)

	P	P_1	$\Delta = P_1 - P$
i	$2.5^k \cdot y$	$5^k \cdot z$	$-5^k P(a) < 0$
$i + 1$	$3.5^k \cdot y$	$2.5^k \cdot z$	$5^k(P(b) - P(a)) > 0$
$i + 2$	$5.5^k \cdot y$	$3.5^k \cdot z$	$5^k(P(b) - 2P(a)) \leq 0$
$i + 3$	$8.5^k \cdot y$	$5.5^k \cdot z$	$5^k(2P(b) - 3P(a)) > 0$
$c_{i+1} = 1, i + 4$	$16.5^k \cdot y$	$10.5^k \cdot z$	$5^k(4P(b) - 6P(a)) > 0$
$c_{i+1} = 0, i + 4$	$13.5^k \cdot y$	$8.5^k \cdot z$	$5^k(3P(b) - 5P(a)) > 0$
$c_{i+2} = c_{i+1} = 1, i + 5$	$29.5^k \cdot y$	$18.5^k \cdot z$	$5^k(11P(b) - 7P(a)) > 0$
$c_{i+2} = 1, c_{i+1}=0, i+5$	$26.5^k \cdot y$	$16.5^k \cdot z$	$5^k(6P(b) - 10P(a)) > 0$

Durum 2 : 11

Genelliği bozmaksızın, G de $11(001)^k000$ şeklini varsayalım. Bu şeklin $(100)^{k+1}10$ ile değiştirilmesiyle, $N(G)$ nin arttığı gösterilebilir, bu bir çelişkidir.

Aşağıdaki teorem, Aşama 1 deki çözüm grafının yapısını özetler.

Teorem 4.5.4. Aşama 1 deki çözüm tam olarak ardışık ayrık ayrıtların iki koşulunu içerir; $j \geq 1$ için j ayrıtlarının biri bir son ayrıtla başlar ve $k \geq 1$ için k ayrıtlarının diğeri diğeri son ayrıtla biter, burada $j + k = I$ dir ve çözüm $(100)^j 0^{n-3-3I} (001)^k$ formundadır. [8]

Sonuç 4.5.2.

$$N_{n,2n-3+I} = 4.5^{I-2} .F_{n-3I+4} , 2 \leq I \leq [\frac{1}{3}(n-1)] .[8]$$

Aşama 2 ve Aşama 3: Bu bölümde, Aşama 2 ve Aşama 3 teki çözüm graflarının yapıları incelenecektir. Kanıtlar dışında, birçok çözüm üzerinde durulacaktır. Aşağıdaki lemma, bu aşamalarla ilgili yaklaşımda oldukça faydalıdır.[8]

Lemma 4.5.3. G deki şekil $0110 (110)^k$ da a ve b , şeklin başlangıcındaki ardışık iki ab düğüm olmak üzere, $P(a)$ ve $P(b)$ fonksiyonları için a dan j . düğüme $P(a + j)$ yolların sayısı $P(a + j) = a_j(P(a) + P(b)) - a_{j-3}P(a)$ biçimindedir.

$$a_0 = 0 \quad a_1 = a_2 = 1 \text{ ve } i \geq 1 \text{ için}$$

$$a_{3i} = a_{3i-1} + a_{3i-2} + a_{3i-3} = 2a_{3i-1} ,$$

$$a_{3i+1} = a_{3i} + a_{3i-1} + a_{3i-2} ,$$

$$a_{3i+2} = a_{3i+1} + a_{3i} .$$

Bu aşama için yasak şekilleri gösterirken Aşama 2 deki unsur kullanılır.

$$[\frac{1}{3}(n+3)] \leq I \leq 2 [\frac{1}{3}(n-3)] .[8]$$

Teorem 4.5.5. Aşama 2 deki bir çözüm 111 şeklini içermez.[8]

Kanıt : Kabul edelim ki bir G çözümü, bir 111 şeklini içersin ve bu $N(G_1) > N(G)$ olacak biçimde G_1 e dönüştürülebilir bir G olmasının mümkün olduğunu gösterir, bu durum G nin uygunluğu ile çelişir. Genelliği bozmaksızın, $k \geq 0$ için G deki en sağdaki oluşumun $111(011)^k00$ ya da $111(011)^k010$ olduğunu ele alalım.

Durum 1: $111(011)^k00$

Bu şeklin $1(011)^{k+1}0$ ile değiştirilmesiyle $N(G)$ artar, bu bir çelişkidir.

Durum 2: $111(011)^k010$

Bu şeklin $1(011)^{k+1}0$ ile değiştirilmesiyle $N(G)$ artar, bu bir çelişkidir.

Teorem 4.5.6. Aşama 2 deki bir çözüm 000 şeklini içermez.[8]

Teorem 4.5.7. Aşama 2 deki bir çözüm 01010 şeklini içermez; bu şekil sadece Aşama 1 ve Aşama 2 arasındaki sınır kuralında,

$$n \equiv 0(\text{mod } 3) \text{ ve } I = \frac{1}{3} n$$

durumunda meydana gelir, burada çözüm $(100)^j101(001)^k$ $j, k \geq 0$ formundadır.
[8]

Teorem 4.5.8. Aşama 2 deki bir çözüm 10101 şeklini içermez, bu şekil sadece Aşama 2 ve Aşama 3 arasındaki sınır kuralında,

$$n \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ ve } I = \frac{1}{3} (2n-7)$$

durumunda meydana gelir, burada çözüm $1(011)^j010(110)^k1$ $j, k \geq 0$ formundadır. [8]

Sonuç 4.5.3. Aşama 2 deki bir çözüm 11 şeklini içerir.[8]

Teorem 4.5.9. Aşama 2 deki çözüm aşağıdaki şekillerden hiçbirini içermez:

$(j, k > 0)$

(a) $0100(110)^j[0](100)^k1011,$

(b) $0100(110)^j[0](100)^k11,$

(c) $010(110)^j[0](100)^k1011,$

(d) $010(110)^j[0](100)^k11.$

[8]

Teorem 4.5.10. Aşama 2 deki çözüm 1010 şekliyle başlamaz ve 0101 şekliyle bitmez. [8]

Teorem 4.5.11. Aşama 2 için

$(100)^i10[0](110)^j[0]1(001)^k,$ $i, j, k \geq 0$ formunda bir çözüm vardır.[8]

Lemma 4.5.4. Bir G grafindaki $k > 0$ için 0111^k şeklindeki a dan j inci düğüme ab

$P(a + j)$ yollarının sayısı, $P(a)$ ve $P(b)$ nin bir fonksiyonu olarak

$$P(a + j) = F_j^3(P(a) + P(b)) - F_{j-3}^3P(a), \quad j \geq 2$$

şeklinde verilir, burada a ve b , şeklin başlangıcındaki ardışık iki düğümdür.[8]

Teorem 4.5.12. Aşama 3 deki çözümde grafa ait olmayan ayrıtlar ayrıktır.[8]

Teorem 4.5.13. Aşama 3 te bir yan son ayrıtla başlayan ve diğer yan son ayrıtla biten, ardışık ayrık grafa ait olmayan ayrıtların iki koşusundan oluşmuş bir çözüm vardır:

$$10(110)^i 1^i (011)^k 01, \quad i, k > 0, \quad j \geq 3.[8]$$



SONUÇ

Bu tezde önce graf teorisinin temel kavramları açıklanmış ve genelleştirilmiş Fibonacci maksimum yol grafları incelenmiştir.

Bu tezde maksimum yol graflarının yapısı ortaya konmuş ve genelleştirilmiş Fibonacci grafları ile eksitilmiş genelleştirilmiş Fibonacci graflarının birer maksimum yol grafi oldukları ele alınmıştır.



KAYNAKLAR

- [1] Dođansoy, Ali, 93.1, Matematik Dñnyası Dergisi, 10-16, 1993.
- [2] Arkut, İbrahim C., 2004.1, Matematik Dñnyası Dergisi, 86-89, 2004.
- [3] Emel, G.G. , Taşkın, Ç. , Dinç E. ,Cilt 3, sayı 1, Anadolu Ûniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi, 121-140, 2004.
- [4] Wilson, Robin J., “Introduction to Graph Theory”, Prentice Hall, 1996.
- [5] Balakrishnan, V.K. , “Graph Theory”, Schaum’s Outlines, ISBN: 0-07-005489-4, McGraw-Hill, 1-6, 1997.
- [6] Tero Harju, “Lecture Notes on Graph Theory” , Department of Mathematics University of Turku, Finland, 1994-2011.
- [7] M.C. Golumbic ve Y. Perl, Generalized Fibonacci Maximum Path Graphs, Discrete math.28(1979).
- [8] Y. Perl ve S.Zaks, Deficient Generalized Fibonacci Maximum Path Graphs, Discrete math.34(1981).