T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA SPACELIKE YÜZEYLERİN GANCHEV İNVARYANTLARI VE UYGULAMALARI

Yunus ÖZTEMİR

OCAK 2017

Matematik Anabilim Dalında Yunus ÖZTEMİR tarafından hazırlanan 4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA SPACELIKE YÜZEYLERİN GANCHEV İNVARYANTLARI VE UYGULAMALARI adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM
Danışman

Juri Üyeleri:

Başkan	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM
Üye	: Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN

04/01/2017

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa YİĞİTOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

4-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA SPACELIKE YÜZEYLERİN GANCHEV İNVARYANTLARI VE UYGULAMALARI

ÖZTEMİR, Yunus
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM
Ocak 2017, 84 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde alt manifoldlar ve yarı Öklidyen uzaylar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde dört boyutlu Minkowski uzayda yüzeyler incelenmiştir. Yüzeyler için Weingarten tipi dönüşümü tanımlanarak bazı geometrik invaryantlar elde edilmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dört boyutlu Minkowski uzayda spacelike yüzeyler, Weingarten tipli lineer dönüşüm, yüzeyler için invaryantlar

ABSTRACT

GANCHEV INVARIANTS OF SPACELIKE SURFACES IN THE FOUR DIMENSIONAL MINKOWSKI SPACE AND THEIR APPLICATIONS

ÖZTEMİR, Yunus

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Depertment of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

January 2017, 84 pages

This thesis consist of three chapter. The first chapter is reserved for introduction. In the second chapter, we give some fundamental notions related with the geometry of submanifolds and semi Euclidean spaces. In the third chapter, spacelike surfacese are investigated in Minkowski 4-space. By defining Weingarten type map for these surfaces, some geometrical invariants obtained. The fourth chapter is reserved for discussion and conclusion.

Key Words: Spacelike surfaces in the four-dimensional Minkowski space, Weingarten-type linear map, Invariant for surfaces

TEŞEKKÜRLER

Yüksek Lisans eğitimim boyunca ve bu tez çalışmasının ortaya çıkışından son haline gelene kadar gerek akademik bilgisiyle gerek de manevi desteğiyle yanımda olduğunu hep gösteren hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM'a teşekkürü bir borç bilirim. Bununla birlikte desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anneme, babama ve kardeşime ayrıca teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

V^n	n boyutlu vektör uzayı
$\mathbb{R}$	Reel uzay
$T_p^{E^n}$	E^n in p noktasında tanjant uzayı
$T_p^{M^2}$	M^2 yüzeyinin p noktasında tanjant uzayı
v^p	p noktasında tanjant vektör
M^2	Spacelike yüzey
E,F,G	Birinci temel form katsayıları
∇'	$\mathbb{R}_1^4$ üzerinde Riemann konneksiyonu
σ	İkinci temel form
c_{ij}^k	İkinci temek form katsayıları
σ_g	M^2 nin eşlenik teğetleri
v_g	M^2 nin normal eğriliği
α_g	M^2 nin geodezik torsiyonu
γ	Weingarten tipi dönüşüm
γ_{ij}^k	Weingarten eşitlikleri
k	M^2 de invaryant fonksiyon
$\varkappa$	Normal konneksiyonun eğrilik fonksiyonu
D	M^2 nin normal konneksiyonun eğriliği
$R^{\perp}$	D normal konneksiyonun eğriliği
R'	∇' konneksiyonunun eğriliği
H	Ortalama eğrilik vektör alanı
v', v''	Asli normal eğrilikler
χ	Teğet uzayın tanjant göstergesi
$E(p)$	M^2 nin p noktasındaki eğriliğin elipsi
K	M^2 nin Gauss eğriliğ
$\alpha\ (\xi)$	ξ nin allied vektör alanı

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride yüzeylerin sınıflandırılması problemi önemli bir yer teşkil etmektedir. Bir yüzeyin sınıflandırılabilmesi için onu diğerlerinden ayıran bir takım geometrik invaryantlara ihtiyaç vardır. Örneğin $\mathbb{R}^3$ de bir yüzeyin nasıl bir yüzey olduğunu anlamak için normalinin kovaryant türev yardımıyla tanımlanan şekil operatörünü bilmek yeterlidir.

Fakat, dört boyutlu Öklidyen veya yarı Öklidyen uzaylardaki 2-boyutlu altmanifoldlar, yani yüzeyler için durum böyle değildir. Çünkü burada bir değil birden fazla şekil operatörü vardır.Bu noktada şu soru sorulabilir. $\mathbb{R}^3$ de olduğu gibi $\mathbb{R}^4$ de verilen bir yüzey için de bir lineer dönüşüm tanımlanabilir mi ki onun determinant ve izi bu yüzeyi karakterize etsin? Bu sorunun cevabını Georgi Ganchev ve V.Miloushava, "On The Theory of Surfaces In The Four-Dimensional Euclidean Space " isimli çalışmada vermiştir [6].

Georgi Ganchev ve V.Miloushava 2010 yılında bu düşünceyi daha zengin olan bir geometriye sahip olan Minkowski uzayına genelleştirdiler. Ayrıca, $\mathbb{R}^3$ de eğriliğin temel teoremine benzer olarak dört boyutlu uzaydaki bir yüzey için temel teorem söz konusu çalışmada verilmiş ve bu tezde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bu çalışmanın amacı: Bu tez çalışması ile $\mathbb{R}^4_1$ de iki boyutlu bir altmanifoldu genel altmanifold teorisi ile ele almak yerine daha somut ve daha belirleyici geometrik metodlar ile incelemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride ele alınacak konular için temel teşkil eden kavramlar verilecektir. Bu kavramlar hakkında daha detaylı bilgi [6, 7] de bulunabilir.

Tanım 2.1 V sonlu boyutlu vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu için

i. Bilineer:

$\forall\ u, v, w, \in V, \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g(au + bv, w) &= ag(u, w) + bg(v, w) \\ g(u, av + bw) &= ag(u, v) + bg(u, w) \end{aligned}$$

ii. Simetrik:

$\forall u, v \in V$ için

$$g(v, w) = g(w, v)$$

özellikleri sağlanıyor ise g ye V üzerinde bir **simetrik bilineer form** denir [3].

V vektör uzayı üzerinde bir simetrik g bilineer formu için aşağıdaki sınıflandırma söz konusudur:

$\forall\ v \in V\ \ , v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ $\quad g$ bilineer formu **pozitif tanımlı**

$\forall\ v \in V\ \ , v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ $\quad g$ bilineer formu **negatif tanımlı**

$\forall\ v \in V\ \ , v \neq 0$ için $g(v, v) \geq 0$ $\quad g$ bilineer formu **yarı-pozitif tanımlı**

$\forall\ v \in V\ \ , v \neq 0$ için $g(v, v) \leq 0$ $\quad g$ bilineer formu **yarı-negatif tanımlı**

$\forall\ v \in V\ \ , g(v, w) = 0$ için $w = 0$ oluyorsa g bilineer formu **non degenere** aksi halde **degenere** denir [3].

Tanım 2.2 g, n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. V nin bir bazı $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ olmak üzere A= $[g(\alpha_i, \alpha_j)]_{n \times n}$matrisine g nin S bazına göre matrisi denir [3] .

Teorem 2.1 g non-degeneredir $\Leftrightarrow$ detĄ $\neq 0$ dır [3].

M yüzeyi üzerindeki metriğin matris formu

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

ile belirlidir. M yüzeyi üzerindeki metrigin non-degenere olması için gerek ve yeter sart

$$\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0 \text{ veya } EG - F^2 \neq 0$$

olmasıdır [3] .

Tanım 2.3 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve non-degenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım, bu çarpım ile birlikte V vektör uzayına da bir **skalar çarpım uzayı** denir [3] .

Örnek 2.1 $\mathbb{R}^n$ üzerinde,

$$g(v, w) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i - v_n w_n$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir skalar çarpım olup, bu çarpımla birlikte $\mathbb{R}^n$ bir skalar çarpım uzayıdır.

Tanım 2.4 g, V üzerinde bir skalar çarpım olsun. W, g skalar çarpımının üzerinde negatif tanımlı olduğu V nin en büyük boyutlu altuzayı ise W altuzayının boyutuna g skalar **çarpımının indeksi** denir.

g skalar çarpımının indeksi v ise $0 \leq v \leq boyV$ dir.

Ayrıca, V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır [3].

Tanım 2.5 $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu standart reel vektör uzayı üzerinde
$v, w \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n-v} v_i w_i - \sum_{i=v-n+1}^{n} v_i w_i$$

eşitliğiyle verilen v- indeksli skalar çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına bir **yarı-Öklidyen uzay** denir ve $\mathbb{R}^n_v$ ile gösterilir.
Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, sırasıyla v_i ve w_i ler v ve w vektörlerinin bileşenleridir [3].

Tanım 2.6 R^n_v yarı-Öklidyen uzayında $v = 1$ ve $n \geq 2$ ise R^n_1 yarı-Öklidyen uzayına **Minkowski n-uzayı** denir [3] .

Uyarı 2.1 Çalısmanın bundan sonraki kısmında skalar çarpım uzayı yerine Minkowski uzayı alınacak ve kavramlar bunun için verilecektir.

Tanım 2.7 V bir Mınkowskı uzayı olsun.
$\forall\ v \in V$ için,
$g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye **spacelike vektör**,
$g(v, v) < 0$ ise v ye **timelike vektör,**
$v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ ise v 'ye **lightlike (null) vektör** denir [3] .

Tanım 2.8 V skalar çarpımlı bir uzay ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| = (|g(v, v)|)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına v vektörünün **normu** denir. Normu 1 olan vektöre de **birim vektör** denir [3] .

Tanım 2.9 g, V üzerinde bir skalar çarpım olsun.

$$p + q = n$$

olmak üzere V nin bu skalar çarpıma göre bir ortonormal bazında p tane spacelike q tane timelike vektör varsa g skalar çarpımı, (p, q) işaretlidir denir. [3]

Tanım 2.10 g, V üzerinde bir skalar çarpım olsun. $S = \{e_1, e_2, ...e_n\} \subset V$ olmak üzere,

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j$$

ise S kümesine V için bir **ortonormal baz** denir.
Burada

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq p \\ -1, & p+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

ve

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

dır [3] .

Tanım 2.11 $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kümesi V için bir ortonormal baz olsun.
Herbir $v \in V$ vektörü için

$$v = \sum \varepsilon_i g(v, e_i) e_i, \ \varepsilon_j = g(e_i, e_i)$$

şeklinde yazılışı tek türlüdür [3] .

Tanım 2.12 $V \neq \{0\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir [3] .

Tanım 2.13 (V, g) bir Lorentz uzayı ve $W \subset V$ bir alt uzay olsun.
$\forall\ a, b \in W$ için

$$g_{|W}(a, b) = g(a, b)$$

şeklinde tanımlı $g_{|W}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Eğer,
$g_{|W}$ pozitif tanımlı ise W ya **spacelike altuzay**,
$g_{|W}$ nondegenere ve indeksi 1 ise W ya **timelike altuzay,**
$g_{|W}$ degenere ise W ya **lightlike altuzay** denir [3] .

Tanım 2.14 M bir diferensiyellenebilir (C^{∞} -) manifold, M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve reel değerli C^{∞} fonksiyonların

birimli ve değişmeli halkası $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olsun.

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

olmak üzere $\forall p \in M$ için g_p, $T_P M$ uzayı üzerinde bir skalar çarpım ise (M,g) ikilisine bir **yarı Riemann manifoldu** ve g ye de M üzerinde bir **yarı Riemann metrik** denir.

$\forall p \in M$ için g_p nin indeksi v ise (M,g) ikilisine v**-indeksli yarı Riemann manifoldu** denir.

Özel olarak $v = 1$ ise bu manifolda **Lorentz manifoldu** denir [3] .

Örnek 2.2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı

$$g(v,w) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i w_i - v_n w_n$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir yarı Riemann metriğidir ve bu metrikle $\mathbb{R}^n$ bir **y**arı Riemann manifoldudur.

Tanım 2.15 M bir manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X,Y) &\rightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü,

$$\begin{aligned}
&\textbf{i. } \nabla_X(Y+Z) &&= \nabla_X Y + \nabla_X Z \\
&\textbf{ii. } \nabla_{(X+Y)} Z &&= \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\
&\textbf{iii. } \nabla_{fX} Y &&= f\nabla_X Y \ ; \forall \ f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\
&\textbf{iv. } \nabla_X(fY) &&= X(f)Y + f\nabla_X Y
\end{aligned}$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ye M üzerinde bir **afin konneksiyon,** ∇_X e de X e göre **kovaryant türev operatörü** denir [1].

Örnek 2.3 $X, Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$ ve $X = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \zeta^i \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere,

$$\nabla_X Y = X[\zeta^i] \frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde tanımlı

$$\nabla : \chi(\mathbb{R}^n) \times \chi(\mathbb{R}^n) \to \chi(\mathbb{R}^n)$$

dönüşümü bir afin konneksiyondur.
Buna $\mathbb{R}^n$ üzerinde standart afin konneksiyon denir.

Tanım 2.16 M bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerinde bir afin konneksiyon ∇ olmak üzere

i. Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği:

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \ ; \forall \ X, Y \in \chi(M)$$

ii. Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği:

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \ ; \forall \ Z \in \chi(M)$$

sağlanıyorsa ∇ a M üzerinde bir **Riemann konneksiyonu** veya **bir metrik konneksiyon** denir [1] .

Örnek 2.4 Örnek 2.3 deki standart afin konneksiyon Örnek 2.1 deki metriğe göre bir Riemann konneksiyonudur.

Şimdi ∇ Riemann konneksiyonunun lokal ifadesi aşağıdaki şekilde ve-rilebilir: (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olmak üzere $\chi(M)$ nin bir bazı $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_1} \right\}$ olarak alınsın.

Ayrıca,

$$g_{ij} = \ < \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} >$$

ve

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i, \quad \tfrac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j$$

olmak üzere,

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k; \quad 1 \leq i, j, k \leq n \tag{2.1}$$

eşitlikleriyle tanımlı

$$\Gamma_{ij}^k \ : M \to \mathbb{R}$$

∇ Riemann konneksiyonunun **Christoffel sembolleri** denir.

Örnek 2.5 Örnek 2.4 de verilen standart afin konneksiyonun Christoffel sembolleri sıfırdır [1] .

Tanım 2.17 (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan Riemann konneksiyonu olmak üzere
$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_X Y, Z\right) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg\left(X, Y\right) \\ &\quad -g\left(X, [Y, Z]\right) - g\left(Y, [X, Z]\right) + g\left(Z, [X, Y]\right) \end{aligned}$$

şeklinde verilen eşitliğe **Kozsul formülü** denir [4].
Bu formüle göre

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

elde edilir. Burada, $[g_{ij}]^{-1} = [g^{km}]$ dir [4].

Tanım 2.18 M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki vektör alanlarının modülü $\chi(M)$ olsun.
M üzerindeki bir Riemann konneksiyonu ∇ olmak üzere

$$\begin{aligned} R &: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi\left(M\right) \\ R\left(X, Y\right) Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı $(1,3)$ tipli tensör alanına **Riemann eğrilik tensörü** denir[3] .

$\forall X,Y,Z,V,W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

ii. $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$

iii. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

iv. $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$.

Örnek 2.6 Örnek 2.4 de verilen Riemann konneksiyonu gözönüne alındığında $\mathbb{R}^n$ nin eğrilik tensörü sıfırdır. Dolayısıyla söz konusu metrik yapıya göre $\mathbb{R}^n$ sıfır eğrilikli bir manifolddur.

Tanım 2.19 M ve $\overline{M}$ m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve

$$f : M \to \overline{M}$$

fonksiyonu p noktasında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} f_* & : & T_pM \to T_{f(p)}\overline{M} \\ v_p & \to & f_{*|_p}(v_p) = \left(v_p\,[f_1]_{|_{f(p)}}, ..., v_p\,[f_n]_{|_{f(p)}}\right) \end{array}$$

ile tanımlı f_* dönüşümüne f nin **türev dönüşümü** denir.

Eğer $g \in C^\infty(\overline{M},\mathbb{R})$, $f(p)$ nin komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$\left(f_{*|_p}(v_p)\right) g = v_p\,(g \circ f)$$

dir [1].

Tanım 2.20 M ve $\overline{M}$, sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere

$$f : M \to \overline{M}$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun.

$\forall\ p \in M$ için

$$f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$$

türev dönüşümü birebir ise f fonksiyonuna bir **immersiyon** denir.
Bu durumda M ye de $\overline{M}$ nin **immersed altmanifoldu** denir.
Eğer, f immersiyonu birebir ise f ye **imbeding (gömme)**, M ye de $\overline{M}$ nin **gömülen altmanifoldu** ya da sadece **altmanifoldu** denir [1].

Uyarı 2.2 Çalışmanın ileriki kısmında $\mathbb{R}^4$ deki 2-boyutlu bir imbedded altmanifold $\mathbb{R}^4$ de bir yüzey olarak alınacak ve M^2 ile gösterilecektir.

Örnek 2.7 Parabol düzlemin bir immersed altmanifoldudur. $\mathbb{R}^3$ deki bütün yüzeyler birer immersed hatta imbedded altmanifoldudur.

Tanım 2.21 M ve $\overline{M}$, sırasıyla, n ve $(n+d)$-boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere

$$f : M \to \overline{M}$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\overline{M}$ manifoldu bir Riemann yapıya sahip ise f yardımıyla $\overline{M}$ den indirgenen metrik için
$\forall p \in M$ olmak üzere

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle f_{*p}\left(X\right)_p \ , \ f_{*p}\left(Y\right)_p\rangle, \forall X_p, Y_p \in T_pM$$

eşitliği sağlandığında f e bir **izometrik immersiyon** denir [1] .

Tanım 2.22 M_v^m m-boyutlu ve v-indeksli yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}_q^n$ m-boyutlu ve v indeksli bir başka yarı-Riemann manifoldu olsun.

$$J : M_v^m \ \to \ \overline{M}_q^n$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ise $(Rank J = m)$ M_v^m manifolduna $\overline{M}_q^n$ bir **yarı-Riemann altmanifoldu** denir [3] .

Uyarı 2.3 Bundan sonraki gösterimlerde $\overline{M}$ üzerindeki metrik tensör ile M üzerindeki metrik tensör g ile gösterilecektir.

Tanım 2.23 M bir yarı Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $\overline{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times\ \chi(M)\ &\rightarrow\ \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla\ _X Y = \tan \bar{\nabla}_X Y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşümüne M altmanifoldu üzerine **indirgenmiş konneksiyon** denir [3].

Tanım 2.24 M ve $\overline{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere $\overline{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu M olsun. M ye normal birim vektör alanı N ve $\overline{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri sırası ile, $-A_N X$ ve $\nabla_X^{\perp} N$ olmak üzere,

$$A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. Böylece

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N$$

biçiminde **Weingarten eşitliği** elde edilir.
Burada A_N **şekil operatörü**, $\nabla^{\perp}$e de M nin $T^{\perp}M$ normal demetindeki **(normal) konneksiyonudur** [2].

Tanım 2.25 M, $\overline{M}$ yarı-Riemann altmanifoldunun bir altmanifoldu ve $\overline{M}$ üzerinde verilen Riemann konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olsun.

$\forall\ X \in \chi(M)$ ve $\forall\ \xi \in \chi\,(M)^{\perp}$ için

$$\begin{aligned} \nabla^{\perp} : \chi(M) \times \chi(M)^{\perp} &\rightarrow \chi\,(M)^{\perp} \\ (X, \xi) &\rightarrow \nabla_X^{\perp} \xi = nor(\bar{\nabla}_X \xi) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\nabla^{\perp}$operatörüne M altmanifoldu üzerinde n**ormal konneksiyon** denir [4].

Tanım 2.26 $\overline{M}$ manifoldunun bir alt manifoldu M olsun.
$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall \xi \in \chi(M)^{\perp}$ için

$$\begin{aligned} R^{\perp} &: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M)^{\perp} \rightarrow \chi\left(M\right)^{\perp} \\ (X, Y, \xi) &\rightarrow R^{\perp}\left(X, Y\right)\xi = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi \end{aligned}$$

eşitliğine **normal konneksiyonun eğriliği** denir [4].

Tanım 2.27 $\overline{M}$, bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde bir Riemann konneksiyonu ve M üzerinde bundan indirgenen Riemann konneksiyonu ∇ olsun. Bu durumda
$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\sigma\left(X, Y\right) = \overline{\nabla}_{X}Y - \nabla_{X}Y$$

eşitliğiyle tanımlı

$$\begin{aligned} \sigma &: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi\left(M\right)^{\perp} \\ (X, Y) &\rightarrow \quad \sigma\left(X, Y\right) = norD_{X}Y \end{aligned}$$

dönüşümüne M altmanifoldunun **ikinci temel formu** denir.
Böylece $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_{X}Y = \nabla_{X}Y + \sigma(X, Y)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğe **Gauss eşitliği** denir [2].

Tanım 2.28 Eğer $\sigma = 0$ ise M ye $\overline{M}$ nin bir **total geodezik altmanifoldu** denir .

Sonuç 2.1 M nin şekil operatörü A_N ve ikinci temel formu σ arasında

$$g\left(A_{N}X, Y\right) = g\left(\sigma\left(X, Y\right), N\right)$$

bağıntısı vardır. Burada g, T_pM deki Riemann metriğidir [2] .
ispat: $X, Y \in \chi(M)$, $N \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$
\begin{aligned}
g(Y,N) &= 0 \\
Xg(Y,N) &= 0 \\
g\left(\overline{\nabla}_X Y, N\right) + g\left(Y, \overline{\nabla}_X N\right) &= 0 \\
g\left(\nabla_X Y + \sigma\left(X,Y\right), N\right) + g\left(Y, -A_N X + \nabla_X^{\perp} N\right) &= 0 \\
g\left(\nabla_X Y, N\right) + g\left(\sigma\left(X,Y\right), N\right) + g\left(Y, -A_N X\right) + g\left(Y, \nabla_X^{\perp} N\right) &= 0 \\
g\left(A_N X, Y\right) &= g\left(\sigma\left(X,Y\right), N\right)
\end{aligned}
$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Tanım 2.29 $(\overline{M},\overline{g})$ yarı Riemann manifoldunun n boyutlu bir altmanifoldu (M,g) olsun. M üzerindeki bir $p \in M$ için T_pM nin lokal ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ gözönüne alınsın. M üzerinde

$$
\begin{aligned}
H \;:\; M \to \underset{P\in M}{\cup} T_p^{\perp} M, \\
H_p = \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \, \sigma\left(e_i, e_i\right), \quad \varepsilon_i = \overline{g}\left(e_i, e_i\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı vektör alanına da **ortalama eğrilik vektör alanı** denir [3].

Tanım 2.30 M üzerinde $H \equiv 0$ ise M ye **minimal altmanifold** denir [2].

Tanım 2.31 $(\overline{M}, g)$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun.
$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\sigma(X,Y) = Hg(X,Y)$$

ise M ye $\overline{M}$ nin **umbilik altmanifoldu** denir [2].

Tanım 2.32 $(\overline{M}, g)$bir Riemann manifoldu, M ye de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. M nin ikinci temel formu σ ve ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\sigma(X,Y), H) = \lambda g(X,Y)$$

ise M manifolduna, $\overline{M}$ manifoldunun **pseudo-umbilik altmanifoldu** denir [2].

Tanım 2.33 $\mathbb{R}_1^4$ de

$$S_1^3 = \left\{x \in \mathbb{R}_1^4 : \langle x, x\rangle = 1\right\}$$

ve

$$H_1^3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_1^4 : \langle x, x \rangle = -1 \right\}$$

yüzeylerine sırasıyla **De-Sitter uzayı** ve **pseudo-hiperbolik uzay** denir [6].

Tanım 2.34 M^2 kümesi $\mathbb{R}_1^4$ içinde bir alt küme olsun. Her $p \in M^2$ noktası için $\mathbb{R}_1^4$ içinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir V komşuluğu ve bir $U \subset \mathbb{R}^2$ açık kümesinden $V \cap M^2 \subset \mathbb{R}_1^4$ üzerine örten bir $z : U \to V \cap M^2$ dönüşümü varsa M^2 alt kümesine bir yüzey denir.

i. z dönüşümü türevlenebilirdir.

ii. z dönüşümü bir homeomorfizmadır.

iii. z dönüşümü regülerdir[5] .

Tanım 2.35 $\mathbb{R}_1^4$, 4-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M^2 olsun.
$\forall\ p \in M^2$ ve $\forall w_p \in T_p M^2$ için $g(v_p, w_p) = 0 \Rightarrow v_p = 0$ önermesi sağlanıyorsa M ye $\mathbb{R}_1^4$ de **non-degenere yüzey** denir [3].

Tanım 2.36 $\mathbb{R}_1^4$, 4-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M^2 olsun. M^2 yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M^2 yüzeyine $\mathbb{R}_1^4$ de **Spacelike yüzey** denir [3].

Tanım 2.37 $\mathbb{R}_1^4$, 4-boyutlu Minkowski uzayında bir yüzey M^2 olsun. M^2 yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M^2 yüzeyine $\mathbb{R}_1^4$ de **Timelike yüzey** denir [3].

Tanım 2.38 $\mathbb{R}_1^4$, 4-boyutlu Minkowski uzayının bütün timelike vektörlerin kümesi τ olsun.

Böylece $\forall\ u \in \tau$ için

$$\begin{aligned} C(\overrightarrow{u}) &= \{\overrightarrow{x} \in \tau : g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}) < 0\} \\ &= \left\{\overrightarrow{x} \in E_1^4 : g(x-u, x-u) < 0\right\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $C(\overrightarrow{u})$ kümesine u'yu içeren E_1^4 ün **time-konisi** denir. Minkowski 4-uzayında $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ timelike vektörleri aynı time-koninin elemanı ise

$$g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = -\,\|\overrightarrow{x}\| \,.\, \|\overrightarrow{y}\| \cosh\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Yukarıda verilen θ reel sayısına $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ timelike vektörleri arasındaki **Lorentz timelike açı** denir.

Tanım 2.39 n-boyutlu bir reel V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma g ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eger W üzerinde g non-degenere ise W ya **non-degenere alt uzay**, non-degenere değilse W ya **degenere alt uzay** denir [3].

Tanım 2.40 ε odaklı bir elips $p = (p_1, p_2)$ ve $q = (q_1, q_2) \in M$ için

$$\varepsilon = \{x = (x, y) \in M \ \mid d_M(x, p) + d_M(x, q) = k\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada k bir reel sayıdır.

Minkowski düzleminin ε elipsine göre gerçek denklemi x kordinatının p ve q odaklarına göre aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & 4((q_1 - p_1)^2 \; - \; k^2)x^2 + 8(q_1 - p_1)(p_2 - q_2)xy \\ & +4((p_2 - q_2)^2 + k^2)y^2 \\ & +4(((q_1 - p_1)(q_2^2 - p_1^2 + q_2^2 - p_2^2 - k^2) + 2k^2 q_1)x \\ & +4((p_2 - q_2)(q_1^2 - p_1^2 + q_2^2 - p_2^2 - k^2) - 2k^2 q_2)y \\ & +(q_1^2 - p_1^2 + q_2^2 - p_2^2 - k^2)^2 - 4k^2 q_1^2 + 4k^2 q_2^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Gerçekten Minkowski düzlemindeki konik denklemi Öklid düzleminden farklıdır. Öklitteki genel quadratik denklemlerdeki koniklerin sınıflandırılması kullanılarak (2.3) denkleminin diskriminantı

$$\Delta \;=\; 64k^2((p_2 - q_2)^2 - (p_1 - q_1)^2 + k^2) \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

$p_2 \neq -q_2$ odak noktalı elipsi alalım.

$$(p_2 - q_2)^2 > -(p_1 - q_1)^2 + k^2$$

olduğundan $\Delta > 0$ dır. Bu nedenle ne tam ne de kapalı bir eğridir [9] .

3. $\mathbb{R}_1^4$ DE SPACELIKE YÜZEYLERİN TANJANT İNVARYANTLARI

Bu bölümde [7] de verilen yüzeylerin geometrik invaryantları incelenecektir.

$\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayı üzerinde $(3,1)$ işaretli skalar çarpım $\langle , \rangle$ ile gösterilsin ve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= (v_1, v_2, v_3, v_4)\\ \overrightarrow{w} &= (w_1, w_2, w_3, w_4)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 - v_4w_4$$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{R}_1^4$ ün standart bazı $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun. $\langle , \rangle$ skalar çarpımın tanımından

$$\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1, \langle e_4, e_4\rangle = -1$$

olduğu açıktır. Bundan sonra bu baz $\mathbb{R}_1^4$ için bir yönlendirme olarak alınacaktır.

$\mathbb{R}_1^4$ de bir yüzey, $D \subset \mathbb{R}^2$ için bir açık alt küme olmak üzere,

$$M^2 = \{(z\,(u,v) : u, v \in D)\}$$

şeklinde gösterilecektir

M^2, $\mathbb{R}_1^4$ de bir spacelike yüzey olsun. M^2 nin bir p noktasında teğet ve normal uzayları sırasıyla T_pM^2 ve N_pM^2 ile temsil edilecektir.

$\langle , \rangle$ non-degenere olduğundan bir $p \in M^2$ noktasında aşağıdaki direkt toplam yazılabilir:

$$\mathbb{R}_1^4 = T_pM^2 \oplus N_pM^2.$$

$\langle , \rangle$ nin T_pM^2 teğet uzayının kısıtlanmışı g ile gösterilecektir.

Açıkca görülmektedir ki g, $(2,0)$ işaretli iken $\langle , \rangle$ nin N_pM^2 normal uzayına kısıtlanmışı $(1,1)$ işaretlidir.

M^2 nin bir p noktasındaki teğet uzayının bir bazı $\{z_u, z_v\}$ olsun. M^2 spacelike bir yüzey olduğundan

$$\langle z_u, z_u\rangle \quad > \quad 0,\ \langle z_v, z_v\rangle\ > 0$$

dır. Buna göre

$$\begin{aligned} E\left(u,v\right) &= \langle z_u, z_u\rangle, \\ F\left(u,v\right) &= \langle z_u, z_v\rangle, \\ G\left(u,v\right) &= \langle z_v, z_v\rangle \end{aligned} \tag{3.1}$$

eşitlikleri ile verilen diferensiyellenebilir fonksiyonlar elde edilebilir.

Tanım 3.1 (3.1) eşitlikleri ile verilen E, F, G fonksiyonlarına birinci temel formun katsayıları denir.

Yüzeyin I. temel formu hesaplanabilir.

Gerçekten,

z nin tam diferensiyeli

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

olup

$$\begin{aligned} I &= (ds)^2 = < dz, dz > \\ &= < \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} > (du)^2 + 2 < \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v} > dudv + < \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} > (dv)^2 \\ &= E\left(du\right)^2 + 2Fdudv + G\left(dv\right)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{(ds)^2}{(dv)^2} = E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G\left(dv\right)^2$$

için standart gösterimi

$$I\left(\lambda,\mu\right) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

şeklinde elde edilir. $I\left(\lambda,\mu\right)$ pozitif olduğundan ve (3.1) yardımıyla

$$W = \sqrt{EG - F^2}$$

ile verilir.

Bir $\{n_1, n_2\}$ normal çatı alanı alınabilir öyleki $\langle n_1, n_1\rangle = 1$, $\langle n_2, n_2\rangle = -1$, ve $\{z_u, z_v, n_1, n_2\}$ dörtlüsü $\mathbb{R}_1^4$ ün pozitif yönlendirmesidir. $\mathbb{R}_1^4$ de standart kovaryant türevi ∇' ile gösterilsin.

Tanım 3.2 $z(u,v)$ nin 2.mertebeden kısmi türevleri z_{uu}, z_{uv}, z_{vv} ve normal vektör alanları n_1, n_2 olmak üzere M^2 nin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{array}{ll} c_{11}^1 = \langle z_{uu}, n_1 \rangle; & c_{11}^2 = \langle z_{uu}, n_2 \rangle; \\ c_{12}^1 = \langle z_{uv}, n_1 \rangle; & c_{12}^2 = \langle z_{uv}, n_2 \rangle; \\ c_{22}^1 = \langle z_{vv}, n_1 \rangle; & c_{22}^2 = \langle z_{vv}, n_2 \rangle. \end{array}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Önerme 3.1 $\forall\ z_u, z_v \in T_pM^2$ ve $\{n_1, n_2\} \in T_p^{\perp}M^2$ için

$$\begin{aligned} \nabla'_{z_u} z_u &= z_{uu} = \Gamma_{11}^1 z_u + \Gamma_{11}^2 z_v + c_{11}^1 n_1 - c_{11}^2 n_2; \\ \nabla'_{z_u} z_v &= z_{uv} = \Gamma_{12}^1 z_u + \Gamma_{12}^2 z_v + c_{12}^1 n_1 - c_{12}^2 n_2; \\ \nabla'_{z_v} z_u &= z_{vu} = \Gamma_{21}^1 z_u + \Gamma_{21}^2 z_v + c_{21}^1 n_1 - c_{21}^2 n_2; \\ \nabla'_{z_v} z_v &= z_{vv} = \Gamma_{22}^1 z_u + \Gamma_{22}^2 z_v + c_{22}^1 n_1 - c_{22}^2 n_2. \end{aligned}$$

dir. Burada Γ_{ij}^k Christoffel sembolleridir.

M^2 nin ikinci temel formunu σ olmak üzere
$\forall X_p, Y_p \in T_pM^2$ için $\sigma(X_p, Y_p) = nor\left(\nabla'_{X_p} Y\right)$ şeklinde tanımlı olduğundan

$$\begin{aligned} \sigma(z_u, z_u) &= c_{11}^1 n_1 - c_{11}^2 n_2; \\ \sigma(z_u, z_v) &= c_{12}^1 n_1 - c_{12}^2 n_2; \\ \sigma(z_v, z_v) &= c_{22}^1 n_1 - c_{22}^2 n_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.2) eşitlikleri gözönüne alındığında aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1 M^2 yüzeyi bir hiper düzlemde yatar gerek ve yeter şart M^2 total geodeziktir.

Herhangi bir noktada yüzeylerin de genel tiplerini inceleyebilmek için c_{ij}^{k} katsayılarını sıfırdan farklı kabul edilebilir.

Şimdi M^2 yüzeyinin herhangi bir noktasında eşlenik teğetler tanımlanacaktır.

Sıfırdan farklı $X = \lambda z_u + \mu z_v$ teğet vektörü gözönüne alınsın.

$g = \frac{X}{\|X\|}$ olmak üzere bir $p \in M^2$ noktasındaki

$$\sigma_g(Y) = \sigma\left(\frac{\lambda z_u + \mu z_v}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}, Y\right), \quad Y \in T_pM^2 \tag{3.3}$$

ile tanımlı

$$\sigma_g : T_pM^2 \longrightarrow N_pM^2$$

dönüşümü tanımlanabilir.

Burada σ_g dönüşümü lineerdir.Gerçekten,

$$\sigma_g : T_pM^2 \longrightarrow N_pM^2$$

$$Y \longrightarrow \sigma_g(Y) = \sigma\left(\frac{X}{I(\lambda,\mu)}, Y\right)$$

$$\sigma_g(Y) = \sigma(g, Y) = \sigma\left(\frac{X}{\|X\|}, Y\right) = nor\nabla_{\frac{X}{\|X\|}} Y$$

i. $a, b \in \mathbb{R}$ $Y, Z \in T_pM^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sigma_g(aY + bZ) &= nor\left(\nabla_g(aY + bZ)\right) \\
&= nor\left(a\nabla_g Y + b\nabla_g Z\right) \\
&= a\nabla_g Y + b\nabla_g Z \\
&= a\sigma_g(Y) + b\sigma_g(Z)
\end{aligned}$$

ii. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sigma_g(\lambda X) &= nor\left(\nabla_g \lambda Y\right) \\
&= nor\left(\lambda \nabla_g Y\right) \\
&= \lambda nor\left(\nabla_g Y\right) \\
&= \lambda \sigma_g(Y).
\end{aligned}$$

σ_g lineer dönüşümü, g ile lineer bağımlı sıfırdan farklı X vektörünün seçiminden bağımsızdır. (3.2) ve (3.3) kullanılarak $\sigma_g(z_u)$ ve $\sigma_g(z_v)$ normal vektörleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$Y = az_u + bz_v$$

olmak üzere (3.3) den

$$\sigma_g(Y) = \sigma\left(\frac{\lambda z_u + \mu z_v}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}, Y\right)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte Y yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma_g(Y) &= \sigma\left(\frac{\lambda z_u + \mu z_v}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}, az_u + bz_v\right) \qquad (3.4)\\
nor\nabla_{\frac{\lambda z_u+\mu z_v}{\sqrt{I(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu})}}}(az_u + bz_v) &= \frac{\lambda}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_u}(az_u + bz_v) + \frac{\mu}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_v}(az_u + bz_v)\\
&= \frac{\lambda}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_u}az_u + \frac{\lambda}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_u}bz_v\\
&\quad + \frac{\mu}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_v}az_u + \frac{\mu}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_v}bz_v\\
&= \frac{\lambda a}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_u}z_u + \frac{\lambda b}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_u}z_v\\
&\quad + \frac{\mu a}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_v}z_u + \frac{\mu b}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\nabla_{z_v}z_v\\
&= \frac{\lambda a}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\left(c_{11}^1 n_1 - c_{11}^2 n_2\right)\\
&\quad + \frac{\lambda b}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\left(c_{12}^1 n_1 - c_{12}^2 n_2\right)\\
&\quad + \frac{\mu a}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\left(c_{12}^1 n_1 - c_{12}^2 n_2\right)\\
&\quad + \frac{\mu b}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\left(c_{22}^1 n_1 - c_{22}^2 n_2\right)\\
&= \frac{\left(\lambda a c_{11}^1 + (\lambda b + \mu a)\, c_{12}^1 + \mu b c_{22}^1\right) n_1}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\\
&\quad - \frac{\left(\lambda a c_{11}^2 + (\lambda b + \mu a)\, c_{12}^2 + \mu b c_{22}^2\right) n_2}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\\
&= \frac{\left(\lambda a c_{11}^1 + (\lambda b + \mu a)\, c_{12}^1 + \mu b c_{22}^1\right) n_1}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}\\
&\quad - \frac{\left(\lambda a c_{11}^2 + (\lambda b + \mu a)\, c_{12}^2 + \mu b c_{22}^2\right) n_2}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\lambda a c_{11}^1 + (\lambda b + \mu a) c_{12}^1 + \mu b c_{22}^1\right) n_1}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}} - \frac{\left(\lambda a c_{11}^2 + (\lambda b + \mu a) c_{12}^2 + \mu b c_{22}^2\right) n_2}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}}.$$

elde edilir. Şimdi (3.4) eşitliklerinde özel olarak

$$Y = z_u, \quad Y = z_v$$

alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_g(z_u) &= \frac{\lambda c_{11}^1 + \mu c_{12}^1}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}} n_1 - \frac{\lambda c_{11}^2 + \mu c_{12}^2}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}} n_2; \\ \sigma_g(z_v) &= \frac{\lambda c_{12}^1 + \mu c_{22}^1}{\sqrt{I(\boldsymbol{\lambda},\mu)}} n_1 - \frac{\lambda c_{12}^2 + \mu c_{22}^2}{\sqrt{I(\lambda,\mu)}} n_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

M^2 nin bir p noktasındaki iki teğeti $g_1 : X_1 = \lambda_1 z_u + \mu_1 z_v$ ve $g_2 : X_1 = \lambda_2 z_u + \mu_2 z_v$ olsun.

$Sp\{n_1, n_2\}$ normal uzayında $\sigma_{g_1}(z_u)\,\sigma_{g_2}(z_v)$ ve $\sigma_{g_2}(z_u)\,\sigma_{g_1}(z_v)$ normal vektör çifti yardımıyla tanımlanan paralel kenarları gözönüne alınsın. Bu paralel kenarların alanları sırasıyla $S(\sigma_{g_1}(z_u),\ \sigma_{g_2}(z_v))$ ve $S(\sigma_{g_2}(z_u),\ \sigma_{g_1}(z_v))$ ile gösterilecektir.

g_1, g_2 teğetler çiftine aşağıdaki gibi tanımlanan $\zeta_{g_1,\,g_2}$ sayısı karşılık getirilsin:

$$\zeta_{g_1,g_2} = \frac{S(\sigma_{g_1}(z_u),\ \sigma_{g_2}(z_v))}{W} + \frac{S(\sigma_{g_2}(z_u),\ \sigma_{g_1}(z_v))}{W} \tag{3.6}$$

(3.5) deki eşitlik gözönüne alınarak $\zeta_{g_1,\,g_2}$ sayısı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\zeta_{g_1,\,g_2} = \frac{2\begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}\lambda_1\lambda_2 + \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) + 2\begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}\mu_1\mu_2}{W.\sqrt{I(\lambda_1,\mu_1)}\sqrt{I(\lambda_2,\mu_2)}}. \tag{3.7}$$

Burada

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix};$$
$$L(u,v) = \tfrac{2\Delta_1}{W}, \quad M(u,v) = \tfrac{\Delta_2}{W}, \quad N(u,v) = \tfrac{2\Delta_3}{W},$$

eşitlikleri hesaba katılarak (3.7) eşitliği daha kısa bir şekilde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\zeta_{g_1,\,g_2} = \frac{L\lambda_1\lambda_2 + M(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) + N\mu_1\mu_2}{\sqrt{I(\lambda_1,\,\mu_1)}\sqrt{I(\lambda_2,\,\mu_2)}}. \tag{3.8}$$

Teorem 3.2 $\zeta_{_{g_1,\ g_2}}$ sayısı M^2 deki parametre değişiminden bağımsızdır.

İspat: M^2 nin (u,v) parametrelerinin değişimi

$$\left.\begin{array}{c} u = u\left(\overline{u},\overline{v}\right); \\ v = v\left(\overline{u},\overline{v}\right) \end{array}\right\} \left(\quad (\overline{u},\ \overline{v}) \in \overline{D},\ \overline{D} \in \mathbb{R}^2.\right) \tag{3.9}$$

$$J = u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} \neq 0$$

olsun.

$$\begin{aligned} z_{\overline{u}} &= z_u u_{\overline{u}} + z_v v_{\overline{u}}, \\ z_{\overline{v}} &= z_u u_{\overline{v}} + z_v v_{\overline{v}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \langle z_{\overline{u}}, z_{\overline{u}} \rangle, \\ \overline{F} &= \langle z_{\overline{u}}, z_{\overline{v}} \rangle, \\ \overline{G} &= \langle z_{\overline{v}}, z_{\overline{v}} \rangle \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{E} &= u_{\overline{u}}^2 E + 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} F + v_{\overline{u}}^2 G, \\ \overline{F} &= u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} E + (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) F + v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} G, \\ \overline{G} &= u_{\overline{v}}^2 E + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} F + v_{\overline{v}}^2 G. \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\overline{EG} - \overline{F}^2 = J^2 \left(EG - F^2 \right)$$

veya buna denk olarak

$$\overline{W} = \varepsilon J W$$

dir. Burada J nin işareti ε dur.

$$\begin{aligned} \sigma\left(z_{\overline{u}}, z_{\overline{u}}\right) &= \overline{c}_{11}^1 n_1 - \overline{c}_{11}^2 n_2; \\ \sigma\left(z_{\overline{u}}, z_{\overline{v}}\right) &= \overline{c}_{12}^1 n_1 - \overline{c}_{12}^2 n_2; \\ \sigma\left(z_{\overline{v}}, z_{\overline{v}}\right) &= \overline{c}_{22}^1 n_1 - \overline{c}_{22}^2 n_2. \end{aligned}$$

(3.9) ve (3.2) den aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir.

$$\left.\begin{array}{c} \overline{c}_{11}^k = u_{\overline{u}}^2 c_{11}^k + 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} c_{12}^k + v_{\overline{u}}^2 c_{22}^k, \\ \overline{c}_{12}^k = u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} c_{11}^k + (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) c_{12}^k + v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} c_{22}^k, \\ \overline{c}_{22}^k = u_{\overline{v}}^2 c_{11}^k + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} c_{12}^k + v_{\overline{v}}^2 c_{22}^k \end{array}\right\} (k = 1, 2.)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta_1} &= J\left(u_{\overline{u}}^2\Delta_1 + u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}\Delta_2 + v_{\overline{u}}^2\Delta_3\right); \\
\overline{\Delta_2} &= J\left(2u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}\Delta_1 + (u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})\Delta_2 + 2v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}\Delta_3\right); \\
\overline{\Delta_3} &= J\left(2u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}\Delta_1 + (u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})\Delta_2 + 2v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}\Delta_3\right);
\end{aligned}$$

Böylece $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
\overline{L} &= \varepsilon\left(u_{\overline{u}}^2 L + 2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}M + v_{\overline{u}}^2 N\right), \\
\overline{M} &= \varepsilon\left(u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}L + (u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})M + v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}N\right), \\
\overline{N} &= \varepsilon\left(u_{\overline{v}}^2 L + 2u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}M + v_{\overline{v}}^2 N\right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$X = \lambda z_u + \mu z_v = \overline{\lambda}_{z_{\overline{u}}} + \overline{\mu}_{z_{\overline{v}}}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\lambda &= \overline{\lambda}_{u_{\overline{u}}} + \overline{\mu}_{u_{\overline{v}}} \\
\mu &= \overline{\lambda}_{v_{\overline{u}}} + \overline{\mu}_{v_{\overline{v}}}
\end{aligned}$$

dür. (3.9) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\overline{L\lambda_1\lambda_2} + \overline{M}\left(\overline{\lambda_1}\overline{\mu_2} + \overline{\mu_1}\overline{\lambda_2}\right) + \overline{N}\overline{\mu_1\mu_2} \\
&= \varepsilon\left(L\lambda_1\lambda_2 + M\left(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2\right) + N\mu_1\mu_2\right).
\end{aligned}$$

$\overline{I}\left(\overline{\lambda}, \overline{\mu}\right) = I(\lambda, \mu)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\zeta}_{g_1, g_2} &= \frac{\overline{L\lambda_1\lambda_2} + \overline{M}\left(\overline{\lambda_1}\overline{\mu_2} + \overline{\mu_1}\overline{\lambda_2}\right) + \overline{N}\overline{\mu_1\mu_2}}{\sqrt{I\left(\overline{\lambda}_1, \overline{\mu}_1\right)}\sqrt{I\left(\overline{\lambda}_2, \overline{\mu}_2\right)}} \\
&= \varepsilon\frac{\left(L\lambda_1\lambda_2 + M\left(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2\right) + N\mu_1\mu_2\right)}{\sqrt{I\left(\lambda_1, \mu_1\right)}\sqrt{I\left(\lambda_2, \mu_2\right)}} \\
&= \varepsilon\zeta_{g_1, g_2}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, ζ_{g_1, g_2} sayısı parametre değişiminden bağımsızdır.

Sonuç 3.1 Aralarındaki işaret farkı teğet veya normal uzayda seçilecek bir yönlendirme ile kaldırılabilir.

Tanım 3.3 Eğer $\zeta_{g_1,\ g_2} = 0$ ise $g_1 : X_1 = \lambda_1 z_u + \mu_1 z_v$ ve $g_2 : X_2 = \lambda_2 z_u + \mu_2 z_v$ teğetleri eşlenik teğetlerdir denir.

Açıkça görülmektedir ki $\zeta_{g_1,\ g_2} = 0$ eşitliği

$$L\lambda_1\lambda_2 + M\left(\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2\right) + N\mu_1\mu_2 = 0$$

eşitliğine denktir.

Son eşitlikteki formül yardımıyla M^2 yüzeyinin bir p noktasındaki σ ikinci temel formu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.
Bir $p \in M^2$ noktasında bir tanjant vektör $X = \lambda z_u + \mu z_v,\ \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ olsun.
O zaman

$$\sigma(\lambda, \mu) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Teorem 3.2 deki M^2 nin E, F, G katsayılarının parametrelerinin değiştiği gibi L, M, N fonksiyonlarının da parametreleri değişir.
M^2 nin bir başka normal çatı alanı $\{\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2\}$ ise

$$\langle\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_1\rangle = 1, \langle\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2\rangle = 0, \langle\widetilde{n}_2, \widetilde{n}_2\rangle = -1$$

olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \varepsilon'\left(\cosh\theta\widetilde{n}_1 + \sinh\theta\widetilde{n}_2\right); \\ n_2 &= \varepsilon'\left(\sinh\theta\widetilde{n}_1 + \cosh\theta\widetilde{n}_2\right); \end{aligned}\right\} \left(\varepsilon' = \pm 1.\right)$$

olarak verilsin. Önerme 3.1 deki eşitliklerin normal bileşenlerin olduğu yerlere yukarıdaki n_1 ve n_2 nin değerleri yerine yazılsın.

$$\begin{aligned}
\nabla'_{z_u} z_u &= c_{11}^1\left[\varepsilon'\left(\cosh\theta\widetilde{n}_1 + \sinh\theta\widetilde{n}_2\right)\right] - c_{11}^2\left[\varepsilon'\left(\sinh\theta\widetilde{n}_1 + \cosh\theta\widetilde{n}_2\right)\right]; \\
\nabla'_{z_u} z_v &= c_{12}^1\left[\varepsilon'\left(\cosh\theta\widetilde{n}_1 + \sinh\theta\widetilde{n}_2\right)\right] - c_{12}^2\left[\varepsilon'\left(\sinh\theta\widetilde{n}_1 + \cosh\theta\widetilde{n}_2\right)\right]; \\
\nabla'_{z_v} z_u &= c_{21}^1\left[\varepsilon'\left(\cosh\theta\widetilde{n}_1 + \sinh\theta\widetilde{n}_2\right)\right] - c_{21}^2\left[\varepsilon'\left(\sinh\theta\widetilde{n}_1 + \cosh\theta\widetilde{n}_2\right)\right]; \\
\nabla'_{z_v} z_v &= c_{22}^1\left[\varepsilon'\left(\cosh\theta\widetilde{n}_1 + \sinh\theta\widetilde{n}_2\right)\right] - c_{22}^2\left[\varepsilon'\left(\sinh\theta\widetilde{n}_1 + \cosh\theta\widetilde{n}_2\right)\right].
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\langle\nabla'_{z_u} z_u, \widetilde{n}_1\rangle &= \widetilde{c}_{11}^1 = \varepsilon'\left(\cosh\theta c_{11}^1 - \sinh\theta c_{11}^2\right) \\
\langle\nabla'_{z_u} z_u, \widetilde{n}_2\rangle &= \widetilde{c}_{11}^2 = \varepsilon'\left(\cosh\theta c_{11}^2 - \sinh\theta c_{11}^1\right) \\
\langle\nabla'_{z_u} z_v, \widetilde{n}_1\rangle &= \widetilde{c}_{12}^1 = \varepsilon'\left(\cosh\theta c_{12}^1 - \sinh\theta c_{12}^2\right)
\end{aligned}$$

$$\langle \nabla'_{z_u} z_v, \widetilde{n_2}\rangle = \widetilde{c}^2_{12} = \varepsilon' \left(\cosh\theta c^2_{12} - \sinh\theta c^1_{12}\right).$$

eşitlikleri yazılabilir. Genel olarak $\widetilde{c}^k_{ij}$ ve c^k_{ij} $(i, j, k = 1, 2)$ fonksiyonları arasındaki bağıntı aşağıdaki eşitlikler yardımıyla ifade edilir.

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{c}^1_{ij} = \varepsilon' \left(\cosh\theta c^1_{ij} - \sinh\theta c^2_{ij}\right) \\ \widetilde{c}^2_{ij} = \varepsilon' (-\sinh\theta c^1_{ij} + \cosh\theta c^2_{ij}) \end{array}\right\} (i, j = 1, 2.)$$

Bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta_1} &= \widetilde{c}^1_{11}\widetilde{c}^2_{12} - \widetilde{c}^1_{12}\widetilde{c}^2_{11} \\
&= \varepsilon' \left(\cosh\theta c^1_{11} - \sinh\theta c^2_{11}\right) \varepsilon' \left(\cosh\theta c^2_{12} - \sinh\theta c^1_{12}\right) \\
&\quad -\varepsilon' \left(\cosh\theta c^1_{12} - \sinh\theta c^2_{12}\right) \varepsilon' \left(\cosh\theta c^2_{11} - \sinh\theta c^1_{11}\right) \\
&= \varepsilon'^2 \left[\begin{array}{c} (\cosh\theta c^1_{11} - \sinh\theta c^2_{11}) \cosh\theta c^2_{12} - \sinh\theta c^1_{12} \\ -(\cosh\theta c^1_{12} - \sinh\theta c^2_{12}) (\cosh\theta c^2_{11} - \sinh\theta c^1_{11}) \end{array}\right] \\
&= \varepsilon'^2 \left[\begin{array}{c} \cosh\theta^2 c^1_{11} c^2_{12} - \cosh\theta \sinh\theta c^1_{12} c^1_{11} - \sinh\theta \cosh\theta c^2_{12} c^2_{11} \\ +\sinh\theta^2 c^2_{11} c^1_{12} - \cosh\theta^2 c^1_{12} c^2_{11} + \cosh\theta \sinh\theta c^1_{11} c^1_{12} \\ +\sinh\theta \cosh\theta c^2_{11} c^2_{12} - \sinh\theta^2 c^2_{12} c^1_{11} \end{array}\right] \\
&= \varepsilon'^2 \left[\left(\cosh\theta^2 - \sinh\theta^2\right) \left(c^1_{11} c^2_{12}\right) + \left(\sinh\theta^2 - \cosh\theta^2\right) \left(c^2_{11} c^1_{12}\right)\right] \\
&= \varepsilon'^2 \left(c^1_{11} c^2_{12} - c^2_{11} c^1_{12}\right) \\
&= \varepsilon'^2 \Delta_1
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}(u, v) &= \frac{\varepsilon'^2 2\Delta_1}{W} \\
&= \varepsilon'^2 L(u, v)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $\widetilde{\Delta_i} = \Delta_i$, $i = 2, 3$ yazılabilir. Bununla birlikte

$$M(u, v) = \tfrac{\Delta_2}{W}, \quad N(u, v) = \tfrac{2\Delta_3}{W}, \quad W = \sqrt{EG - F^2}$$

olduğundan $\widetilde{\Delta_i} = \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$ ve $\widetilde{W}$ gözönüne alındığında

$$\widetilde{L} = \varepsilon'^2 L, \quad \widetilde{M} = \varepsilon'^2 M, \quad \widetilde{N} = \varepsilon'^2 N$$

yazılabilir.

Sonuç olarak L, M, N fonksiyonları yüzeyin normal çatısının seçilişinden bağımsızdır.

Sonuç 3.2 İkinci temel form yüzeyin normal uzayının veya teğet uzayının yönlendirmesinden kaynaklanan bir işaret farkıyla invaryanttır.

$\mathbb{R}^3$ deki yüzeylerin klasik diferensiyel geometrisinde olduğu gibi aynı yolla $\mathbb{R}^4$ de verilen bir yüzeyin herhangi bir noktasında da eşlenik teğet vektörleri yine ikinci temel form belirler. [4]

Uyarı 3.1 Yukarıdaki incelemeler göstermektedir ki ikinci temel form anlamındaki eşleniklik ζ_{g_1,g_2} invaryantı yardımıyla tanımlanan eşlenikliktir.

Yüzeyin g tanjant vektörüne ν_g ve α_g invaryantları karşılık getirilecektir. $g : X = \lambda z_u + \mu z_v$ bir tanjant vektör ve bunun

$$X^{\perp} = -\frac{F\lambda + G\mu}{W} z_u + \frac{E\lambda + F\mu}{W} z_v \tag{3.12}$$

vektörü tarafından tespit edilen birim ortogonal vektör $g^{\perp}$ olsun.

Tanım 3.4 $\nu_g = \zeta_{g,g}$;ve $\alpha_g = \zeta_{g,\, g^{\perp}}$ fonksiyonları sırasıyla g tanjant vektörünün normal eğriliği ve geodezik torsiyonu denir.

Yukarıdaki tanım, (3.6) ve (3.8) eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\nu_g = 2\frac{S\left(\sigma_g\left(z_u\right),\ \sigma_g\left(z_v\right)\right)}{W} = \frac{II\left(\lambda, \mu\right)}{I\left(\lambda, \mu\right)}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan g teğetinin normal eğriliği, $\sigma_g\left(z_u\right)$ ve $\sigma_g\left(z_v\right)$ normal vektörleri tarafından tespit edilen paralelkenarın alanın iki katıdır. $\mathbb{R}^3$ de yüzeyler teorisinde bir teğetin normal eğriliğinde olduğu gibi aynı yolla yüzeyin birinci ve ikinci temel formları aracılığıyla ν_g invaryantıda yazılmıştır.

(3.8) ve (3.11) kullanılarak

$$\alpha_g = \frac{\lambda^2\left(EM - FL\right) + \lambda\mu\left(EN - GL\right) + \mu^2\left(FN - GM\right)}{WI\left(\lambda, \mu\right)}$$

elde edilebilir. Burada α_g, $\mathbb{R}^3$ de yüzeyler teorisindeki geodezik torsiyona benzer olarak birinci ve ikinci temel formun katsayaları cinsinden yazılmıştır.

Tanım 3.5 Eğer g özeşlenikse yani $\nu_g = 0$ ise $g : X = \lambda z_u + \mu z_v$ teğeti asimtotiktir denir.

M^2 nin bir p noktasındaki asimtotik teğetleri için denklemi

$$L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 = 0$$

dır.

Tanım 3.6 Eğer $\alpha_g = 0$ ise $g : X = \lambda z_u + \mu z_v$ teğeti bir asli doğrultudur denir. M^2 nin bir p noktasındaki asli teğetlerinin denklemi

$$\begin{vmatrix} E & F \\ L & M \end{vmatrix} \lambda^2 + \begin{vmatrix} E & G \\ L & N \end{vmatrix} \lambda\mu + \begin{vmatrix} F & G \\ M & N \end{vmatrix} \mu^2 = 0.$$

dır.

Tanım 3.7 M^2 de bir eğri

$$c : u = u\left(q\right), v = v\left(q\right); q \in J \subset \mathbb{R}$$

olsun. Eğer bu eğrinin teğeti asimtotik ise asimtotik eğri,asli ise asli eğri denir.

Tanım 3.8 Bir M^2 yüzeyi gözönüne alınsın. $z = z(u, v)$, bu yüzey için bir paremetri-zasyon ve z_u z_v birer asli teğet vektörler ise yüzey asli eğriler tarafından paremetrize edilmiştir denir.

Önerme 3.2 M^2 yüzeyi asli eğriler tarafından parametrize edilir $\Leftrightarrow$ $F = 0$, $M = 0$ dır.

4. $\mathbb{R}^4_1$ DE WEİNGARTEN DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde $\mathbb{R}^4$ deki bir yüzeyin geometrisini incelemek için bazı diferansiyel invaryantlar tanımlanacaktır.

Bilindiği gibi $\mathbb{R}^3$de bir yüzeyin geometrisi tamamen şekil operatörü denilen bir matrisle incelenmektedir. Ancak burada $\mathbb{R}^4$ ile yüzeyin boyut farkı 2 olduğundan yüzeye ait global bir şekil operatörü olmayıp normaller doğrultusunda şekil operatörleri söz konusudur. Buradan da anlaşılmaktadır ki böyle bir yüzeyin geometrisi bir tek lineer dönüşüm veya buna karşılık gelen matrisle belirlenemez. Şimdi bu noktada şöyle bir soruyla karşı karşıyayız, $\mathbb{R}^4$ de verilen 2 boyutlu yüzeyler için öyle bir matris tanımlayabilirmiyiz ki bu matrisin bazı invaryantları vasıtasıyla yüzeyin geometrisi belirlensin? Örneğin böyle bir matrisin izi veya determinantı bizim için ne ifade eder?

Tersine bulunacak bu invaryantlar yüzeyi tamamen tespit edebilir mi? Daha açıkçası bu invaryantlar vasıtasıyla $\mathbb{R}^4$ deki yüzeyler için bir temel teorem verilebilir mi? Ganchev ve Milousava 2008 de yaptığı "On The Theory of Surfaces In The Four-Dimensional Euclidean Space " isimli çalışmada bu sorunun cevabını Öklidyen uzaylar için vermiştir.

$\mathbb{R}^3$ de a_{ij} değerleri L, M, N katsayıları türünden ifade edilsin ve

$$\begin{aligned} -L &= \langle N_u, z_u\rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -M &= \langle N_v, z_u\rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ &= \langle N_u, z_v\rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -N &= \langle N_v, z_v\rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned} \tag{4.1}$$

fonksiyonları tanımlansın. (4.1) eşitlikleri matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$-\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ matrisi regüler olup tersi

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanabilir.

(4.2) eşitliği göz önünde bulundurularak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$a_{11} = \frac{FM - GL}{EG - F^2}, \; a_{21} = \frac{FL - EM}{EG - F^2}, \; a_{12} = \frac{FN - GM}{EG - F^2}, \; a_{22} = \frac{FM - EN}{EG - F^2}.$$

şeklinde hesaplanır. Bu eşitliklere Weingarten formülleri denir.

Denklem (4.2) kullanarak

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{4.3}$$

elde edilebilir.

Ortalama eğriliği hesaplamak için γ dönüşümünün özdeğerlerinin $-k_1, -k_2$ dir. Bu durumda, I özdeşlik dönüşümü olmak üzere, k_1 ve k_2 eğrilikleri, bir $v \in T_pM^2, v \neq 0$ için

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= -kv \\ &= -kIv \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar. Bunun sonucu olarak $\gamma + kI$ dönüşümünün tersi yoktur; dolayısıyla determinantı sıfırdır. Böylece

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{bmatrix} = 0$$

ya da

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

olur. k_1 ve k_2 sayıları yukarıdaki ikinci dereceden denklemi sağladıkları için

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}(k_1+k_2) = -\tfrac{1}{2}(a_{11}+a_{22}) \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{EN+GL-2FM}{(EG-F^2)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Böylece

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

ve sonuç olarak

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K} \tag{4.5}$$

olur [5] .

$\mathbb{R}^3$ de olduğu gibi $\mathbb{R}^4_1$ de γ Weingarten tipi dönüşüm II temel form ile tanımlanabilir.

M^2 nin herhangi bir noktasında standart yolla

$$\gamma : T_pM^2 \longrightarrow T_pM^2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma(z_u) &= \gamma_1^1 z_u + \gamma_1^2 z_v, \\ \gamma(z_v) &= \gamma_2^1 z_u + \gamma_2^2 z_v, \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir.

Tanım 4.1 $h = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$ ve $g = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ olmak üzere $\gamma = -h \circ g^{-1}$ lineer dönüşümüne yüzeyin Weingarten tipli dönüşümü
denir. Böylece γ dönüşümünün $\left(\gamma_i^j\right)$ bileşenleri

$$\gamma_1^1 = \tfrac{FM-GL}{EG-F^2}, \quad \gamma_1^2 = \tfrac{FL-EM}{EG-F^2}, \quad \gamma_2^1 = \tfrac{FN-GM}{EG-F^2}, \quad \gamma_2^2 = \tfrac{FM-EN}{EG-F^2}$$

dır.

(3.10) ve (3.11) gözönüne alınırsa normal çatı alanının değişimi ve yüzeylerin parametrelerinin değişimi altında γ lineer dönüşümü invaryant olduğu görülür.

Lemma 4.1 M^2 yüzeyindeki $\quad k : \det\gamma = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \quad \varkappa := -\frac{1}{2}tr\gamma = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}$ fonksiyonları invaryanttır.

İspat M^2 nin (u,v) parametrelerinin değisimi

$$\left.\begin{array}{c} u = u\left(\overline{u},\overline{v}\right); \\ v = v\left(\overline{u},\overline{v}\right) \end{array}\right\} \left(\quad (\overline{u},\overline{v}) \in \overline{D},\ \overline{D} \subset \mathbb{R}^2. \right)$$

$$J = u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} - u_{\overline{v}}v_{\overline{u}} \neq 0$$

olsun.

$$\begin{aligned} z_{\overline{u}} &= z_u u_{\overline{u}} + z_v v_{\overline{u}}, \\ z_{\overline{v}} &= z_u u_{\overline{v}} + z_v v_{\overline{v}}. \end{aligned}$$

$$\overline{E} = \langle\ z_{\overline{u}}, z_{\overline{u}}\rangle,\ \overline{F} = \langle z_{\overline{u}}, z_{\overline{v}}\rangle,\quad \overline{G} = \langle z_{\overline{v}}, z_{\overline{v}}\rangle$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overline{E} &= u_{\overline{u}}^2 E + 2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}F + v_{\overline{u}}^2 G, \\ \overline{F} &= u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}E + (u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})F + v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}G, \\ \overline{G} &= u_{\overline{v}}^2 E + 2u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}F + v_{\overline{v}}^2 G. \end{aligned}$$

ve

$$\overline{EG} - \overline{F}^2 = J^2\left(EG - F^2\right)$$

dir. Buradan

$$\overline{W} = \varepsilon J W, \varepsilon = J$$

dir. Burada ε, J nin işaretidir.

$$\begin{aligned} \overline{L} &= \varepsilon\left(u_{\overline{u}}^2 L + 2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}M + v_{\overline{u}}^2 N\right), \\ \overline{M} &= \varepsilon\left(u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}L + (u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})M + v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}N\right), \\ \overline{N} &= \varepsilon\left(u_{\overline{v}}^2 L + 2u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}M + v_{\overline{v}}^2 N\right). \end{aligned}$$

olmak üzere

$$k : \det\overline{\gamma} = \frac{\overline{LN} - \overline{M}^2}{\overline{EG} - \overline{F}^2} \text{ olsun.}$$

$$
\begin{aligned}
k \quad : \quad & \det \overline{\gamma} = \frac{\overline{LN} - \overline{M}^2}{\overline{EG} - \overline{F}^2} \\
= \quad & \frac{\varepsilon\left(u_{\overline{u}}^2 L + 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} M + v_{\overline{u}}^2 N\right) \varepsilon\left(u_{\overline{v}}^2 L + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} M + v_{\overline{v}}^2 N\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
& \frac{-\left(\varepsilon\left(u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} L + (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) M + v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} N\right)\right)^2}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
= \quad & \frac{\varepsilon^2\left(\left(u_{\overline{u}}^2 L + 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} M + v_{\overline{u}}^2 N\right)\left(u_{\overline{v}}^2 L + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} M + v_{\overline{v}}^2 N\right)\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
& - \frac{\varepsilon^2\left(\left(\left(u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} L + (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) M + v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} N\right)\right)^2\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
= \quad & \frac{\left(u_{\overline{u}}^2 L + 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} M + v_{\overline{u}}^2 N\right)\left(u_{\overline{v}}^2 L + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} M + v_{\overline{v}}^2 N\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
& - \frac{\left(\left(u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} L + (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) M + v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} N\right)\right)^2}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
= \quad & \frac{\left(u_{\overline{u}}^2 L + 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} M + v_{\overline{u}}^2 N\right)\left(u_{\overline{v}}^2 L + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} M + v_{\overline{v}}^2 N\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
& - \frac{\left(\left(u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} L + (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) M + v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} N\right)\right)^2}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
= \quad & -\left(\frac{u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2 L^2 + u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) LM + u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} LN}{J^2\left(EG - F^2\right)}\right) \\
& -\left(\frac{(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} ML + (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}})^2 M^2}{J^2\left(EG - F^2\right)}\right) \\
= \quad & -\left(\frac{+2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 MN + v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2 NL + 2v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} NM + v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 N^2}{J^2\left(EG - F^2\right)}\right) \\
= \quad & \frac{L^2\left(u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2 - u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
& + \frac{LM\left(2u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} + 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}^2 - u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) - (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) u_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
& + \frac{M^2\left(4u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} - (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}})^2\right)}{J^2\left(EG - F^2\right)} \\
& + \frac{MN\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 + 2v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} - (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}})\right)}{J^{\ 2}\left(EG - F^2\right)} \\
& + \left(\frac{NL\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 + v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2 - u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} u_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right) + N^2\left(v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 - v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2\right)}{J^{\ 2}\left(EG - F^2\right)}\right) \\
= \quad & \frac{LM\left(2u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} \ + \ 2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}^2 \ - \ u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) \ - \ (u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) u_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)}{J^{\ 2}\left(EG - F^2\right)} \\
& + \frac{M^2\left(4u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} \ - u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 - u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2 - 2u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}\right)}{J^{\ 2}\left(EG - F^2\right)} \\
& + \frac{MN\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 + 2v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} - u_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}} - u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 u_{\overline{u}} - v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}} u_{\overline{v}}\right)}{J^{\ 2}\left(EG - F^2\right)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{NL\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2+v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2-u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}-v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} u_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)}{J^{\,2}\left(EG-F^2\right)}$$

$$=\frac{LM\left(2u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}+2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}^2-u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}-u_{\overline{u}} v_{\overline{u}}\, u_{\overline{v}}^2-u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}} u_{\overline{v}}-u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}} u_{\overline{u}}\right)}{J^{\,2}\left(EG-F^2\right)}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{M^2\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}-u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2-u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
&+\frac{MN\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2+2v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}-2u_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}-2u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
&+\frac{NL\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2+v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2-2u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
=\;&\frac{LM\left(2u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}+2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}^2-2u_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}-2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}^2\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
&+\frac{M^2\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}-u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2-u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
&+\frac{MN\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2+2v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}-2u_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}-2u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
&+\frac{NL\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2+v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2-2u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
=\;&\frac{M^2\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}-u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2-u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2\right)+NL\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2+v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2-2u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
=\;&\frac{\left(LN-M^2\right)\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2+v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2-2u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}\right)}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
=\;&\frac{\left(LN-M^2\right)\left(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}}-v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)^2}{J^2\left(EG-F^2\right)}\\
=\;&\frac{\left(LN-M^2\right)J^2}{J^2\left(EG-F^2\right)}=\frac{\left(LN-M^2\right)}{\left(EG-F^2\right)}=k=\det\gamma
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\overline{\varkappa}:=-\frac{1}{2}tr\overline{\gamma}=\frac{\overline{EN}+\overline{GL}-2\overline{FM}}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^2\right)}\text{ olsun}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\varkappa}\quad:\quad&=-\frac{1}{2}tr\overline{\gamma}=\frac{\overline{EN}+\overline{GL}-2\overline{FM}}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^2\right)}\\
=\;&\frac{\left(u_{\overline{u}}^2E+2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}}F+v_{\overline{u}}^2G\right).\left(\varepsilon\left(u_{\overline{v}}^2L+2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}M+v_{\overline{v}}^2N\right)\right)}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{\,2}\right)}\\
&+\frac{\left(u_{\overline{v}}^2E+2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}}F+v_{\overline{v}}^2G\right).\left(\varepsilon\left(u_{\overline{u}}^2L+2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}}M+v_{\overline{u}}^2N\right)\right)}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^2\right)}
\end{aligned}$$

$$-\frac{2\left(u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}E+(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})F+v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}G\right)}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$.\frac{\left(\varepsilon\left(u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}L+(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})M+v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}N\right)\right)}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$=\frac{\varepsilon\left(\left(u_{\overline{u}}^{2}E+2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}F+v_{\overline{u}}^{2}G\right).\left(u_{\overline{v}}^{2}L+2u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}M+v_{\overline{v}}^{2}N\right)\right)}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$+\frac{\varepsilon(\left(u_{\overline{v}}^{2}E+2u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}F+v_{\overline{v}}^{2}G\right).\left(u_{\overline{u}}^{2}L+2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}M+v_{\overline{u}}^{2}N\right))}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$-\varepsilon\left[\frac{\left(2\left(u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}E+(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})F+v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}G\right)\right.}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}\right.$$

$$\left..\frac{\left(u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}L+(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})M+v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}N\right)}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{u_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}^{2}EL+2u_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}EM+u_{\overline{u}}^{2}v_{\overline{v}}^{2}EN+2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}u_{\overline{v}}^{2}FL+4u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}FM}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}\right.$$

$$+\frac{2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}^{2}FN+v_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}^{2}GL+2v_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}GM+v_{\overline{u}}^{2}v_{\overline{v}}^{2}GN+u_{\overline{v}}^{2}u_{\overline{u}}^{2}EL}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$+\frac{2u_{\overline{v}}^{2}u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}EM+u_{\overline{v}}^{2}v_{\overline{u}}^{2}EN+2u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}u_{\overline{u}}^{2}FL+4u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}FM}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$+\frac{2u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}v_{\overline{u}}^{2}FN+v_{\overline{v}}^{2}u_{\overline{u}}^{2}GL+2v_{\overline{v}}^{2}u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}GM+v_{\overline{v}}^{2}v_{\overline{u}}^{2}GN}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$-\frac{2u_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}^{2}EL+2\left(u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}\right)\left(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}}\right)EM+2u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}EN}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$-\frac{2(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}FL+2(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})FM}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$-\frac{2(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}FN+2v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}u_{\overline{u}}u_{\overline{v}}GL}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}$$

$$\left.-\frac{2v_{\overline{u}}v_{\overline{v}}(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}}+u_{\overline{v}}v_{\overline{u}})GM+2v_{\overline{u}}^{2}v_{\overline{v}}^{2}GN}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{\left(2u_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}^{2}-2u_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}^{2}\right)EL+\left(2u_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}+2u_{\overline{v}}^{2}u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}-2u_{\overline{u}}^{2}u_{\overline{v}}v_{\overline{v}}-2u_{\overline{v}}^{2}u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}\right)EM}{2\left(\overline{EG}-\overline{F}^{2}\right)}\right.$$

$$+\frac{\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 + u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2 - 2u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}\right) EN}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}$$

$$+\frac{\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}^2 + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} u_{\overline{u}}^2 - 2(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) u_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right) FL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}$$

$$+\frac{(4u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} + 4u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} - 2(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}})(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}))FM}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}$$

$$+\frac{\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}^2 + 2u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} v_{\overline{u}}^2 - 2(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}) v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}\right) FN}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}$$

$$+\frac{\left(v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2 + v_{\overline{v}}^2 u_{\overline{u}}^2 - 2v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} u_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right) GL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}$$

$$+\frac{\left(2v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} + 2v_{\overline{v}}^2 u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} - 2v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}})\right) GM}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}$$

$$\left. +\frac{\left(v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 + v_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2 - 2v_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2\right) GN}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{\left(u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 + u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2 - 2u_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} v_{\overline{v}}\right) EN + \left(v_{\overline{u}}^2 u_{\overline{v}}^2 + v_{\overline{v}}^2 u_{\overline{u}}^2 - 2v_{\overline{u}} v_{\overline{v}} u_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right) GL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right.$$

$$\left. +\frac{(4u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} + 4u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} - 2(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}})(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} + u_{\overline{v}} v_{\overline{u}}))FM}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{\left(8u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} - 2u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 - 2u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} - 2u_{\overline{v}} v_{\overline{u}} u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - 2u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2\right) FM}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right.$$

$$\left. +\frac{\left(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)^2 EN + \left(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)^2 GL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{\left(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)^2 EN + \left(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)^2 GL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right.$$

$$\left. +\frac{\left(4u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} - 2u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 - 2u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2\right) FM}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{\left(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)^2 EN + \left(u_{\overline{u}} v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}} u_{\overline{v}}\right)^2 GL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right.$$

$$\left. +\frac{2\left(2u_{\overline{u}} v_{\overline{u}} u_{\overline{v}} v_{\overline{v}} - u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 - u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2\right) FM}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}}u_{\overline{v}})^2 EN + (u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}}u_{\overline{v}})^2 GL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\left(-2u_{\overline{u}}v_{\overline{u}}u_{\overline{v}}v_{\overline{v}} + u_{\overline{u}}^2 v_{\overline{v}}^2 + u_{\overline{v}}^2 v_{\overline{u}}^2\right) FM}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)} \right] \\
&= \frac{(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}}u_{\overline{v}})^2 EN - 2\left(u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}}u_{\overline{v}}\right)^2 FM + (u_{\overline{u}}v_{\overline{v}} - v_{\overline{u}}u_{\overline{v}})^2 GL}{2\left(\overline{EG} - \overline{F}^2\right)} \\
&= \frac{J^2 EN - 2J^2 FM + J^2 GL}{2J^2\left(EG - F^2\right)} \\
&= \frac{J^2\left(EN + GL - 2FM\right)}{2J^2\left(EG - F^2\right)} \\
&= \frac{\left(EN + GL - 2FM\right)}{2\left(EG - F^2\right)} = -\frac{1}{2} tr\gamma = \varkappa
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 4.1 M^2 nin normal konneksiyonunun eğriliği $\varkappa$ fonksiyonudur.

İspat M^2 nin normal konneksiyonu D olsun. Herhangi bir tanjant vektör alanı $x,\ y$ ve herhangi normal vektör alanı n olsun.

Weingarten eşitliğinden

$$\nabla'_x n = -A_n(x) + D_x n$$

dir. D normal konneksiyonun eğrilik tensörü $R^{\perp}$

$$R^{\perp}(x, y)\, n = D_x D_y n - D_y D_x n - D_{[x,y]} n$$

ile verilir. Bir $p \in M^2$ noktasındaki normal konneksiyonun eğriliği $\langle R^{\perp}(x,\ y)\, n_2, n_1\rangle$ ile tanımlanır. Burada $\{x,\ y,\ n_1,\ n_2\}$ pozitif yönlü ortonormal çatıdır. Genelliği bozmaksızın $F = 0$ alalım ve birim vektör alanı

$$x = \tfrac{z_u}{\sqrt{E}}, \quad y = \tfrac{z_v}{\sqrt{G}}$$

ile ifade edilsin. Buradan

$$
\begin{aligned}
\sigma(x, x) &= \frac{c_{11}^1}{E} n_1 - \frac{c_{11}^2}{E} n_2, \\
\sigma(x, y) &= \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}} n_1 - \frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}} n_2, \\
\sigma(y, y) &= \frac{c_{22}^1}{G} n_1 - \frac{c_{22}^2}{G} n_2.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla

$$\begin{array}{ll} A_1(x) = \frac{c_{11}^1}{E}x + \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}y, & A_2(x) = \frac{c_{11}^2}{E}x + \frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}y, \\ A_1(y) = \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}x + \frac{c_{22}^1}{G}y, & A_2(y) = \frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}x + \frac{c_{22}^2}{G}y, \end{array} \tag{4.6}$$

eşitlikleri elde edilir.

$A_1(x)$ şu şekilde elde edilebilir:

A_1 şekil operatörü olduğundan

$$A_1 : T_pM^2 \to T_pM^2$$

şeklinde bir lineer dönüşüm olup,

$$A_1(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 y$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi her iki eşitliğin x ile iç çarpımı alınırsa:

$$\langle A_1(x), x\rangle = \lambda_1\langle x, x\rangle + \lambda_2\langle y, x\rangle$$

olup, buradan da aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle A_1(x), x\rangle \\ &= \langle \frac{c_{11}^1}{E}n_1 - \frac{c_{11}^2}{E}n_2, n_1\rangle \\ &= \langle \frac{c_{11}^1}{E}n_1, n_1\rangle - \langle \frac{c_{11}^2}{E}n_2, n_1\rangle \\ &= \langle \frac{c_{11}^1}{E}n_1, n_1\rangle \\ &= \frac{c_{11}^1}{E} \end{aligned}$$

dır. Benzer bir hesaplamayla:

$$\lambda_2 = \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}$$

bulunur. (4.6) nın diğer eşitlikleri de benzer şekilde elde edilir.

Ricci denkleminden

$$\langle R^{\perp}(x, y)\, n_2, n_1\rangle = \langle [A_{n_2}, A_{n_1}]\, x, y\rangle$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$[A_{n_1}, A_{n_2}]\, x = A_{n_1}(A_{n_2}x) - A_{n_2}(A_{n_1}x)$$

dır. Son eşitlik ve (4.6) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}(A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(x) &= \left(\frac{c_{11}^1c_{12}^2-c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}}+\frac{c_{12}^1c_{22}^2-c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}}\right)y,\\ (A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(y) &= -\left(\frac{c_{11}^1c_{12}^2-c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}}+\frac{c_{12}^1c_{22}^2-c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}}\right)x.\end{aligned}$$

Gerçekten

$$\begin{aligned}(A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(x) &= (A_2\circ A_1(x)-A_1\circ A_2(x))\\ &= (A_2(\frac{c_{11}^1}{E}x+\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}y)-A_1(\frac{c_{11}^2}{E}x+\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}y))\\ &= \frac{c_{11}^1}{E}A_2(x)+\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}A_2(y)-\frac{c_{11}^2}{E}A_1(x)-\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}A_1(y)\\ &= \frac{c_{11}^1}{E}(\frac{c_{11}^2}{E}x+\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}y)+\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}(\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}x+\frac{c_{22}^2}{G}y)\\ &\quad -\frac{c_{11}^2}{E}(\frac{c_{11}^1}{E}x+\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}y)-\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}(\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}x+\frac{c_{22}^1}{G}y)\\ &= \frac{c_{11}^1}{E}\frac{c_{11}^2}{E}x+\frac{c_{11}^1}{E}\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}y+\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}x+\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}\frac{c_{22}^2}{G}y\\ &\quad -\frac{c_{11}^2}{E}\frac{c_{11}^1}{E}x-\frac{c_{11}^2}{E}\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}y-\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}x-\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}\frac{c_{22}^1}{G}y\\ &= (\frac{c_{11}^1}{E}\frac{c_{11}^2}{E}-\frac{c_{11}^2}{E}\frac{c_{11}^1}{E})x+(\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}-\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}})x\\ &\quad +(\frac{c_{11}^1}{E}\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}-\frac{c_{11}^2}{E}\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}})y+(\frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}}\frac{c_{22}^2}{G}-\frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}}\frac{c_{22}^1}{G})y\\ &= (\frac{c_{11}^1c_{12}^2}{E\sqrt{EG}}-\frac{c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}})y+(\frac{c_{12}^1c_{22}^2}{G\sqrt{EG}}-\frac{c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}})y\\ &= (\frac{c_{11}^1c_{12}^2-c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}})y+(\frac{c_{12}^1c_{22}^2-c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}})y\\ &= (\frac{c_{11}^1c_{12}^2-c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}}+\frac{c_{12}^1c_{22}^2-c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}})y\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(y)=-\left(\frac{c_{11}^1c_{12}^2-c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}}+\frac{c_{12}^1c_{22}^2-c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}}\right)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğu gösterilebilir:

$$\begin{aligned}(A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(x) &= \tfrac{EN+GL}{2EG}y=\varkappa y,\\ (A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(y) &= -\tfrac{EN+GL}{2EG}x=-\varkappa x\end{aligned}\tag{4.7}$$

dür. Gerçekten, $F=0$ olacak şekilde $z=z\,(u,v)$ parametrizasyonu seçilerek

$$
\begin{aligned}
\frac{EN+GL}{2EG}y &= \frac{1}{2}\left(\frac{N}{G}+\frac{L}{E}\right)y \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta_3}{GW}+\frac{2\Delta_1}{EW}\right)y \\
&= \frac{2}{2}\left(\frac{\Delta_3}{G\sqrt{EG}}+\frac{\Delta_1}{E\sqrt{EG}}\right)y \\
&= \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}}{G\sqrt{EG}}+\frac{\begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{12}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}}{E\sqrt{EG}}\right)y \\
&= (\frac{c_{12}^1c_{22}^2-c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}})y+(\frac{c_{11}^1c_{12}^2-c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}})y \\
&= (\frac{c_{11}^1c_{12}^2-c_{11}^2c_{12}^1}{E\sqrt{EG}}+\frac{c_{12}^1c_{22}^2-c_{12}^2c_{22}^1}{G\sqrt{EG}})y \\
&= (A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(x)
\end{aligned}
$$

dir. Diğer taraftan

$$\varkappa y := -\frac{1}{2}tr\gamma = \left(\frac{EN+GL-2FM}{2\left(EG-F^2\right)}\right)y$$

olduğundan

$$\varkappa y := -\frac{1}{2}tr\gamma = \left(\frac{EN+GL}{2EG}\right)y$$

dir. Bundan dolayı

$$(A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(x)=\frac{EN+GL}{2EG}y=\varkappa y$$

dir. Benzer şekilde

$$(A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)(y)=-\frac{EN+GL}{2EG}x=-\varkappa x$$

elde edilir. Sonuç olarak teğet uzayda

$$(A_2\circ A_1-A_1\circ A_2)$$

bir invaryant ters simetrik operatördür. Yani ortonormal tanjant çatı alanı $\{x,y\}$ baz seçilişinden bağımsızdır.

∇' konneksiyonun eğrilik tensörü R' sıfır olduğundan

$$\nabla'_x\nabla'_y n_1-\nabla'_y\nabla'_x n_1-\nabla'_{[x,y]}n_1=0$$

olup

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla'_x \nabla'_y n_1 - \nabla'_y \nabla'_x n_1 - \nabla'_{[x,\ y]} n_1 \\
&= \nabla'_x \left(D_y n_1 - A_{n_1}(y)\right) - \nabla'_y \left(D_x n_1 - A_{n_1}(x)\right) - [x, y]_{n_1} + A_{n_1}[x,\ y] \\
&= \nabla'_x D_y n_1 - \nabla'_x A_{n_1}(y) - \nabla'_y D_x n_1 + \nabla'_y A_{n_1}(x) - [x,\ y]_{n_1} + A_{n_1}[x,\ y] \\
&= D_x D_y n_1 - D_y D_x n_1 - D_{[x,\ y]} n_1 \ + A_{D_x n_1} y + D_y A_{n_1}(x) + \sigma(y,\ A_{n_1} x) \\
&\quad - A_{D_y n_1} x - D_x A_{n_1}(y) - \sigma(x,\ A_{n_1} y) + A_{n_1}[x,\ y] \\
&= R^{\perp}(x,\ y)\, n_1 + A_{D_x n_1} y + D_y A_{n_1}(x) + \sigma(y,\ A_{n_1} x) - A_{D_y n_1} x \\
&\quad - D_x A_{n_1}(y) - \sigma(x,\ A_{n_1} y) + A_{n_1}[x,\ y]
\end{aligned}
$$

dır. Bu nedenle $R'(x, y)\, n_1$ in hem normal hem de teğet bileşeni sıfırdır. Bu ifadenin normal bileşeni

$$
R^{\perp}(x,\ y)\, n_1 - \sigma(y,\ A_{n_1} x) + \sigma(x,\ A_{n_1} y) = 0
$$

olup

$$
R^{\perp}(x,\ y)\, n_1 = \sigma(x,\ A_{n_1} y) - \sigma(y, A_{n_1} x)
$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$
D_x D_y n_1 - D_y D_x n_1 - D_{[x,\ y]} n_1 \ - \sigma(x,\ A_1 y) + \sigma(y,\ A_1 x) = 0
$$

dır. Dolayısıyla

$$
D_x D_y n_1 - D_y D_x n_1 - D_{[x,\ y]} n_1 \ = \sigma(x,\ A_1 y) - \sigma(y,\ A_1 x) = 0 \tag{4.8}
$$

(4.8) in sol tarafı $R^{\perp}(x, y)\, n_1$ dir. O halde (4.8) eşitliği n_2 ile çarpılırsa:

$$
\begin{aligned}
\langle R^{\perp}(x,\ y)\, n_1,\ n_2 \rangle &= \langle \sigma(x,\ A_1 y),\ n_2 \rangle - \langle \sigma(y,\ A_1 x),\ n_2 \rangle \\
&= \langle \nabla'_x [A_{n_1}(y) + \sigma(x,\ A_1 y)],\ n_2 \rangle \\
&\quad - \langle \nabla'_y [A_{n_1}(x) + \sigma(y,\ A_1 x)],\ n_2 \rangle \\
&= \langle \nabla'_x [A_{n_1}(y)],\ n_2 \rangle + \langle \sigma(x,\ A_1 y),\ n_2 \rangle \\
&\quad - \langle \nabla'_y [A_{n_1}(x)],\ n_2 \rangle - \langle \sigma(y,\ A_1 x),\ n_2 \rangle \\
&= \langle \nabla'_x [A_{n_1}(y)],\ n_2 \rangle - \langle \nabla'_y [A_{n_1}(x)],\ n_2 \rangle \\
&= -\langle A_{n_1}(y),\ \nabla'_x n_2 \rangle + \langle A_{n_1}(x),\ \nabla'_y n_2 \rangle \\
&= -\langle A_{n_1}(y),\ A_{n_2}(x) \rangle + \langle A_{n_1}(x),\ A_{n_2}(y) \rangle \\
&= \langle A_{n_2} A_{n_1}(y),\ x \rangle + \langle x,\ A_{n_1} A_{n_2}(y) \rangle
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \langle (A_{n_1}A_{n_2} - A_{n_2}A_{n_1})\, y,\ x\rangle \\ &= \langle (A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(y),\ x\rangle \end{aligned}$$

yazılır. (4.7) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle R^{\perp}(x,y)\, n_1, n_2\rangle &= \langle (A_2 \circ A_1 - A_1 \circ A_2)(y),\ x\rangle \\ &= -\varkappa \end{aligned}$$

dur. $R^{\perp}$ operatörü ters simetrik olduğundan

$$\langle R^{\perp}(x,y)\, n_1, n_2\rangle = -\langle R^{\perp}(x,\ y)\, n_2,\ n_1\rangle$$

dolayısıyla

$$\langle R^{\perp}(x,y)\, n_2, n_1\rangle = \varkappa$$

elde edilir.

Sonuç 4.1 Normal konneksiyonun eğrilik fonksiyonunu $\varkappa$ fonksiyonu ile ifade edilecektir.

Tanım 4.2 γ Weingarten dönüşümünün karakteristik denklemi

$$\upsilon^2 + 2\varkappa\upsilon + k = 0$$

dır.

Lineer cebirden biliyoruz ki bir L lineer dönüşümüne Ą matrisi karşılık geliyorsa L nin karakteristik polinomu

$$\det(\text{Ą} - \lambda I_n) = P_L(\lambda)$$

şeklindedir. Buna göre γ lineer dönüşümünün karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} f_{\gamma}(\upsilon) &= \det(\upsilon I - L) \\ &= \det \begin{bmatrix} \upsilon - k_1 & -k_2 \\ -k_3 & \upsilon - k_4 \end{bmatrix} \\ &= (\upsilon - k_1)(\upsilon - k_4) - k_2k_3 \\ &= \upsilon^2 - \upsilon(k_1 + k_4) + k_1k_4 - k_2k_3 \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$
\begin{aligned}
iz\gamma &= 2\varkappa \\
&= -(k_1 + k_4)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\det \gamma &= k \\
&= k_1 k_4 - k_2 k_3
\end{aligned}
$$

dır. Buradan

$$
\upsilon^2 + 2\varkappa \upsilon + k = 0
$$

dır. γ simetrik lineer operatör olduğundan aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$
\varkappa^2 - k \geq 0
$$

dır. Diğer taraftan

$$
\varkappa^2 - k = 0
$$

eşitliği $L = \rho E, \quad M = \rho F, \quad N = \rho G, \quad \rho \in \mathbb{R}$ koşullarına denktir.
$p \in M^{\mathbf{2}}$ noktası için aşağıdaki denklik sağlanır:

$$
L = M = N \Leftrightarrow k = \varkappa = 0 \ .
$$

Tanım 4.3 M^2 nin p noktasındaki k ve $\varkappa$ invaryantları dört tipte tanımlanır: Bir $p \in M^2$ noktası için
i. Eğer $k = \varkappa = 0$ ise M^2 düzlemseldir.
ii. Eğer $k > 0$ ise M^2 eliptiktir.
iii. Eğer $k = 0$, $\varkappa \neq 0$ ise M^2 paraboliktir.
iv. Eğer $k < 0$ ise M^2 hiperboliktir.
şeklinde tanımlanır.

Daha sonraki bölümlerde düzlemsel olmayan spacelike yüzeyler ele alınacaktır. Yani $(L,\ M,\ N) \neq (0,\ 0,\ 0)$ dır.

Minimal yüzeyler $\varkappa$ ve k ile karakterize edilecektir. Şimdi bununla ilgili teorem verilecektir.

Teorem 4.2 $\mathbb{R}_1^4$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2 olsun.
Buna göre M^2 yüzeyi minimaldir $\Leftrightarrow$ $\varkappa^2 - k = 0$ dır.

İspat Genelliği bozmaksızın $F = 0$ ve birim vektör alanları

$$x = \tfrac{z_u}{\sqrt{E}}, \quad y = \tfrac{z_v}{\sqrt{G}}$$

ile gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\nabla'_x x &= \gamma_1 y + \frac{c_{11}^1}{E} n_1 - \frac{c_{11}^2}{E} n_2, \\
\nabla'_x y &= -\gamma_1 x + \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}} n_1 - \frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}} n_2, \\
\nabla'_y x &= -\gamma_2 y + \frac{c_{12}^1}{\sqrt{EG}} n_1 - \frac{c_{12}^2}{\sqrt{EG}} n_2, \\
\nabla'_y y &= \gamma_2 x + \frac{c_{22}^1}{G} n_1 - \frac{c_{22}^2}{G} n_2
\end{aligned}$$

alınsın.

Yüzey minimal olsun. Bu durumda $H = 0$ olup

$$H = \frac{1}{2}(\sigma(x,x) + \sigma(y,y)) = 0$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\sigma(x,x) + \sigma(y,y)) &= 0 \\
\left(\frac{c_{11}^1}{E} n_1 - \frac{c_{11}^2}{E} n_2 + \frac{c_{22}^1}{G} n_1 - \frac{c_{22}^2}{G} n_2\right) &= 0 \\
\left(\frac{c_{11}^1}{E} + \frac{c_{22}^1}{G}\right) n_1 - \left(\frac{c_{11}^2}{E} + \frac{c_{22}^2}{G}\right) n_2 &= 0 \\
\left(\frac{c_{11}^1}{E} + \frac{c_{22}^1}{G}\right) n_1 - \left(\frac{c_{11}^2}{E} + \frac{c_{22}^2}{G}\right) n_2 &= 0 \\
\frac{c_{11}^1}{E} n_1 + \frac{c_{22}^1}{G} n_1 - \frac{c_{11}^2}{E} n_2 - \frac{c_{22}^2}{G} n_2 &= 0
\end{aligned}$$

olup

$$\frac{c_{11}^1}{E} n_1 - \frac{c_{11}^2}{E} n_2 = \frac{c_{22}^2}{G} n_2 - \frac{c_{22}^1}{G} n_1$$

dir. O da gerektirir ki;

$$\tfrac{c_{11}^1}{E} = -\tfrac{c_{22}^1}{G}, \quad \tfrac{c_{22}^2}{G} = -\tfrac{c_{11}^2}{E}$$

yazılır. Düzenlenirse

$$c_{22}^1 = -\tfrac{G}{E}c_{11}^1, \quad c_{22}^2 = -\tfrac{G}{E}c_{11}^2 \tag{4.9}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla

$$\Delta_2 = 0, \quad \tfrac{\Delta_3}{G} = \tfrac{\Delta_1}{E}$$

dir. Gerçekten,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}$$

eşitliğinden

$$-\frac{G}{E}c_{11}^1 c_{11}^2 + \frac{G}{E}c_{11}^1 c_{11}^2 = 0$$

dır.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}$$

de (4.9) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & -\frac{G}{E}c_{11}^1 \\ c_{12}^2 & -\frac{G}{E}c_{11}^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}$$

buradan

$$\Delta_3 = -\frac{G}{E}c_{12}^1 c_{11}^2 + \frac{G}{E}c_{11}^1 c_{12}^2$$

ve

$$\Delta_1 = c_{11}^1 c_{12}^2 - c_{12}^1 c_{11}^2$$

olduğundan

$$\Delta_3 = \frac{G}{E}\Delta_1$$

dir. Düzenlenirse

$$\frac{\Delta_3}{G} = \frac{\Delta_1}{E}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$L = \rho E, \quad M = \rho F, \quad N = \rho G$$

olup ρ, M^2 üzerinde reel değerli diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. $F = 0$ olduğundan

$$\varkappa^2 - k = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{EN + GL - 2FM}{(EG - F^2)}\right)\right)^2 - \left(\frac{LN - M^2}{EG - F^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(EN+GL)^2}{(EG)^2} - \frac{(LN-M^2)}{(EG)}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(EN+GL)^2 - 4(EG)(LN-M^2)}{(EG)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(EN)^2 + 2(ENGL) + (GL)^2 - 4(EGLN) + 4(EGM^2)}{(EG)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(EN)^2 - 2(ENGL) + (GL)^2 + 4(EGM^2)}{(EG)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{(EN-GL)^2 + 4(EGM^2)}{(EG)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\left(E\frac{2\Delta_3}{W} - G\frac{2\Delta_1}{W}\right)^2 + 4\left(EG\left(\frac{\Delta_2}{W}\right)^2\right)}{(EG)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{2}{W}\left(E\Delta_3 - G\frac{E}{G}\Delta_3\right)\right)^2}{(EG)^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{2}{W}\left(E\Delta_3 - E\Delta_3\right)\right)^2}{(EG)^2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır.

Tersine, $\varkappa^2 - k = 0$ olsun. Burada

$$L = \rho E, \quad M = \rho F, \quad N = \rho G; \quad \rho \neq 0$$

dır. $F = 0$ olması $M = \rho F$ olduğundan $M = 0$ olmasını gerektirir. Buna göre M nin tanımından

$$\Delta_2 = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}$$

eşitliğin sağ tarafından yararlanılarak

$$c_{22}^1 = \widetilde{\rho} c_{11}^1, \quad c_{22}^2 = \widetilde{\rho} c_{11}^2$$

eşitlikleri yazılabilir.

Ayrıca $\frac{L}{E} = \frac{N}{G}$ eşitliklerinden $\widetilde{\rho} = -\frac{G}{E}$ dir. Bu değerler

$$H = \frac{1}{2}\left(\sigma(x,x) + \sigma(y,y)\right)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\sigma\left(x,x\right)+\sigma\left(y,y\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{c_{11}^1}{E}n_1-\frac{c_{11}^2}{E}n_2+\frac{c_{22}^1}{G}n_1-\frac{c_{22}^2}{G}n_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{c_{11}^1}{E}n_1+\frac{\widetilde{\rho}c_{11}^1}{G}n_1-\frac{c_{11}^2}{E}n_2-\frac{\widetilde{\rho}c_{11}^2}{G}n_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c_{11}^1}{E}+\frac{\widetilde{\rho}c_{11}^1}{G}\right)n_1-\left(\frac{c_{11}^2}{E}+\frac{\widetilde{\rho}c_{11}^2}{G}\right)n_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c_{11}^1}{E}+\left(-\frac{G}{E}\right)\frac{c_{11}^1}{G}\right)n_1-\left(\frac{c_{11}^2}{E}+\left(-\frac{G}{E}\right)\frac{c_{11}^2}{G}\right)n_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c_{11}^1}{E}-\frac{c_{11}^1}{E}\right)n_1-\left(\frac{c_{11}^2}{E}-\frac{c_{11}^2}{E}\right)n_2\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

olduğundan $H=0$ dır.

Buradan $\mathbb{R}_1^4$ de umbilik noktalar içeren spacelike bir yüzey tamamen minimal yüzeydir.

Uyarı 4.1 Spacelike bir yüzeyin herhangi bir noktasındaki teğet uzayı geometrik olarak minimal yüzeyler ve flat normal konneksiyonlu yüzeyler ile karakterize edilir.

Tanım 4.4 Asli teğetlerin normal eğriliğine M^2 nin asli normal eğrilikleri denir. Eğer bir $p\in M^2$ noktası umbilik nokta değilse yani $\varkappa^2-k>0$ ise $(u,\ v)$ asli parametre kabul edilir. Asli normal eğrilikleri

$$\nu'=\tfrac{L}{E},\quad \nu''=\tfrac{N}{G}$$

ve M^2 deki k , $\varkappa$ invaryantları aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$k=\nu'\nu'';\quad \varkappa=\tfrac{\nu'+\nu''}{2}. \tag{4.11}$$

Tanım 4.5 Bir $p\in M^2$ bir umbilik nokta ise yani

$$\varkappa^2-k=0$$

ise p nin tüm teğetleri tek ve aynı olan υ asli normal eğriliğidir.
(4.10) daki eşitlik

$$\nu^{'} = \nu^{''} = \upsilon$$

varsayımı içinde geçerlidir.

Tanım 4.6 $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^4$ yüzeyler teorisinde olduğu gibi M^2 nin keyfi bir p noktasında T_pM^2 tanjant uzayının χ göstergesi

$$\chi : \nu^{'}X^2 + \nu^{''}Y^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1$$

şeklinde tanımlanır.
i. Eğer p bir eliptik nokta ise χ göstergesi bir elipstir.
χ nin eksenleri ile p nin asli teğetleri lineer bağımlıdır ve χ nin eksen uzunlukları $\frac{2}{\sqrt{|\nu'|}}$ ve $\frac{2}{\sqrt{|\nu''|}}$ dür

ii. Eğer p bir hiperbolik nokta ise χ göstergesi iki hiperbolden oluşur. χ bir hiperboldür.
χ nin eksenleri ile p nin asli teğetleri lineer bağımlıdır. χ nin eksen uzunlukları $\frac{2}{\sqrt{|\nu'|}}$ ve $\frac{2}{\sqrt{|\nu''|}}$ dür.

iii. Eğer p bir parabolik nokta ise χ göstergesi sıfırdan farklı normal eğrilik ve asli teğetleri iki düzlemsel paralel doğrudan oluşur.

Teorem 4.3 g_1 ve g_2 tanjantları M^2 nin eşlenik iki teğetidir $\Leftrightarrow$ g_1 ve g_2 eşlenikleri χ göstergesini sağlar.

Şimdi yüzeylerin tanjant göstergesi açısından flat normal konneksiyonlu yüzeyler ve minimal yüzeyler ile karakterize edilecektir.

Teorem 4.4 $\mathbb{R}^4_1$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2 olsun.
M^2 minimal yüzeydir $\Leftrightarrow$ M^2 nin her noktasında χ tanjant göstergesi bir çemberdir.

İspat $\mathbb{R}^4_1$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2 olsun.

(4.10) daki eşitlikten

$$\begin{aligned}
\varkappa^2 - k &= \left(\frac{\nu' + \nu''}{2}\right)^2 - \left(\nu'\nu''\right) \\
&= \frac{\left(\nu'\right)^2 + 2\left(\nu'\nu''\right) + \left(\nu''\right)^2}{4} - \left(\nu'\nu''\right) \\
&= \frac{\left(\nu'\right)^2 - 2\left(\nu'\nu''\right) + \left(\nu''\right)^2}{4} \\
&= \left(\frac{\nu' - \nu''}{2}\right)^2 \\
\varkappa^2 - k &= 0 \Leftrightarrow \nu' = \nu'' \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Teorem 4.3. den $\varkappa^2 - k = 0 \Leftrightarrow M^2$ minimal bir yüzeydir.

Buradan M^2 minimal yüzey $\Leftrightarrow \chi$ bir çemberdir. Yani

$$\nu' X^2 + \nu'' Y^2 = 1$$

için

$$\nu' = \nu''$$

alındığında

$$\nu' X^2 + \nu' Y^2 = 1$$

olup buradan da yarıçapı $\frac{1}{\sqrt{|\nu'|}}$ olan çember denklemi

$$X^2 + Y^2 = \frac{1}{\nu'}$$

elde edilir.

Teorem 4.5 $\mathbb{R}^4_1$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2olsun.

M^2 flat normal konneksiyonlu bir yüzeydir $\Leftrightarrow M^2$ nin her noktasında χ tanjant göstergesi bir dikdörtgensel hiperboldür.

İspat $\mathbb{R}^4_1$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2 olsun.

(4.10) daki eşitlikten

$$\varkappa = 0 \Leftrightarrow \nu' = -\nu''$$

dür. M^2 flat normal konneksiyonlu bir yüzeydir $k < 0$ ve χ tanjant göstergesi bir hiperboldür.

$\nu' = -\nu''$ olduğundan χ tanjant göstergesinin yarı ekseni $\frac{1}{\sqrt{|\nu'|}}$ e eşittir. Yani χ bir dikdörtgensel hiperboldür.
Tersine, χ bir dikdörtgensel hiperbol olsun. Yani $\nu' = -\nu''$ olduğundan M^2 flat normal konneksiyonlu bir yüzeydir.

Uyarı 4.2 Flat normal konneksiyonlu yüzeyler ve minimal yüzeyler normal eğriliğin elipsi ile karakterize edilir.

Tanım 4.7 $M^2 \subset \mathbb{R}^4_1$ yüzeyini alalım. Bir $p \in M^2$ noktasındaki T_pM^2 teğet uzayında $\Psi \in [0, 2\pi]$ açısı ile verilen bir çember alınsın. Böylece $T_p^{\perp}(M^2)$ normal düzlem ile

$$\upsilon = \cos\Psi x + \sin\Psi y$$

doğrultu vektörünün oluşturduğu doğrunun direk toplamı olan $p \in M^2$ noktasındaki hiper düzlem ile M^2 nin arakesit eğrisi γ_Ψ ile gösterilsin. Burada x, y vektörleri $T_p(M^2)$ nin ortonormal bir bazıdır. Bu eğriye M^2 nin p noktasında ve υ yönünde **normal kesit eğrisi** adı verilir. Ayrıca γ_Ψ nın η_Ψ normal eğrilik vektörü $T_p^{\perp}(M^2)$ de yatan bir vektördür. Ayrıca Ψ açısı 0 dan 2π ye değiştiğinde bu vektör $T_p^{\perp}M^2$ de bir elips oluşturur. Bu elipse M^2 nin p noktasındaki eğrilik elipsi denir ve

$$E(p) = \left\{\sigma(x, x) : x \in T_pM^2, \langle x, x\rangle = 1\right\}$$

ile gösterilir [8]. Burada $\sigma(x, x)$ ifadesi M^2 nin ikinci temel formudur. Yani $T_p(M^2)$ deki bütün birim vektörlerin ikinci temel form altında incelenmesi ile normal uzayda elde edilen noktaların geometrik yeri bir elipstir. Bunun bir elips olduğunu göstermek için

$$\upsilon = \cos\Psi X + \sin\Psi Y$$

yardımıyla

$$\sigma(\nu, \nu) = \overrightarrow{H} + \cos 2\Psi \overrightarrow{B} + \sin 2\Psi \ \overrightarrow{C} \tag{4.12}$$

eşitliğini sağladığını göstermek yeterlidir. Burada

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{H} &= \frac{(\sigma(x,x)+\sigma(y,y))}{2}, \\
\overrightarrow{B} &= \frac{(\sigma(x,x)-\sigma(y,y))}{2}, \\
\overrightarrow{C} &= \sigma(x,y)
\end{aligned}
$$

$\overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ normal vektörler ve $\overrightarrow{H}$ ortalama eğrilik vektörüdür.

Şimdi bu eşitliği gösterelim:

p noktasındaki T_pM^2 tanjant uzayın bir ortonormal bazı $\{x,y\}$olsun. Herhangi

$$
v = \cos\Psi x + \sin\Psi y
$$

için

$$
\sigma(\nu,\nu) = H + \cos 2\Psi \frac{(\sigma(x,x)-\sigma(y,y))}{2} + \sin 2\Psi \sigma(x,y)
$$

dir. Yani

$$
\begin{aligned}
\sigma(\nu,\nu) &= \nabla_v v \\
&= \nabla_{(\cos\Psi x+\sin\Psi y)}(\cos\Psi x+\sin\Psi y) \\
&= \nabla_{(\cos\Psi x)}(\cos\Psi x+\sin\Psi y) + \nabla_{(\sin\Psi y)}(\cos\Psi x+\sin\Psi y) \\
&= \nabla_{(\cos\Psi x)}(\cos\Psi x) + \nabla_{(\cos\Psi x)}(\sin\Psi y) + \nabla_{(\sin\Psi y)}(\cos\Psi x) \\
&\quad +\nabla_{(\sin\Psi y)}(\sin\Psi y) \\
&= (\cos\Psi)^2 \nabla_{(x)}(x) + 2(\cos\Psi\sin\Psi)\nabla_{(x)}(y) + (\sin\Psi)^2\nabla_{(y)}(y) \\
&= (\cos\Psi)^2 \sigma(x,x) + 2(\cos\Psi\sin\Psi)\sigma(x,y) + (\sin\Psi)^2\sigma(y,y) \\
&= (\cos\Psi)^2 \sigma(x,x) + \sin 2\Psi\sigma(x,y) + (\sin\Psi)^2\sigma(y,y) \\
&= \frac{(\cos\Psi)^2\sigma(x,x)}{2} + \frac{(\cos\Psi)^2\sigma(x,x)}{2} + \frac{(\sin\Psi)^2\sigma(y,y)}{2} \\
&\quad + \frac{(\sin\Psi)^2\sigma(y,y)}{2} + \sin 2\Psi\sigma(x,y) - \frac{(\cos\Psi)^2\sigma(y,y)}{2} \\
&\quad - \frac{(\cos\Psi)^2\sigma(y,y)}{2} + \frac{(\cos\Psi)^2\sigma(y,y)}{2} + \frac{(\cos\Psi)^2\sigma(y,y)}{2} \\
&\quad - \frac{(\sin\Psi)^2\sigma(x,x)}{2} - \frac{(\sin\Psi)^2\sigma(x,x)}{2} + \frac{(\sin\Psi)^2\sigma(x,x)}{2} \\
&\quad + \frac{(\sin\Psi)^2\sigma(x,x)}{2} \\
&= (\cos\Psi)^2\left(\frac{\sigma(x,x)-\sigma(y,y)}{2}\right) - (\sin\Psi)^2\left(\frac{\sigma(x,x)-\sigma(y,y)}{2}\right) \\
&\quad + \sin 2\Psi\sigma(x,y) + (\cos\Psi)^2\left(\frac{\sigma(x,x)}{2}\right) - (\cos\Psi)^2\left(\frac{\sigma(y,y)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +(\sin\Psi)^2\left(\frac{\sigma(y,y)}{2}\right)+(\cos\Psi)^2\left(\frac{\sigma(y,y)}{2}\right) \\
& +(\cos\Psi)^2\left(\frac{\sigma(y,y)}{2}\right)-(\sin\Psi)^2\left(\frac{\sigma(x,x)}{2}\right) \\
& +(\sin\Psi)^2\left(\frac{\sigma(x,x)}{2}\right)+(\sin\Psi)^2\left(\frac{\sigma(x,x)}{2}\right) \\
= & \left((\cos\Psi)^2-(\sin\Psi)^2\right)\left(\frac{\sigma(x,x)-\sigma(y,y)}{2}\right)+\sin 2\Psi\sigma(x,y) \\
& +\left((\cos\Psi)^2+(\sin\Psi)^2\right)\left(\frac{\sigma(x,x)+\sigma(y,y)}{2}\right) \\
= & (\cos 2\Psi)\left(\frac{\sigma(x,x)-\sigma(y,y)}{2}\right)+\sin 2\Psi\sigma(x,y) \\
& +\left(\frac{\sigma(x,x)+\sigma(y,y)}{2}\right) \\
= & \left(\frac{\sigma(x,x)+\sigma(y,y)}{2}\right)+(\cos 2\Psi)\left(\frac{\sigma(x,\ x)-\sigma(y,y)}{2}\right) \\
& +\sin 2\Psi\sigma(x,y) \\
= & H+(\cos 2\Psi)\left(\frac{\sigma(x,x)-\sigma(y,y)}{2}\right)+\sin 2\Psi\sigma(x,y)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bu bize ν nin birim çember etrafında bir tur attığında $\sigma(\nu,\ \nu)$ vektörünün H merkezli elips etrafında iki tur attığını gösterir.

Sonuç olarak $E(p)$ elipsi bir nokta yada bir doğruya dejenere olabilir.

Flat normal konneksiyonlu yüzeyin karakterizasyonu normal eğriliğin elipsi ile verilir.

Teorem 4.7 $\mathbb{R}_1^4$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2 ve x, y asli teğetleri olsun.

M^2 bir flat normal konneksiyonlu yüzeydir $\Leftrightarrow$ $\sigma(x,x) = \sigma(y,y)$ dir.

İspat $\mathbb{R}_1^4$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2 ve M^2 asli parametreler ile parametrize edilsin.

Yani $F = M = 0$ dır.

$$\varkappa = \frac{1}{2}\frac{EN+GL-2FM}{(EG-F^2)}$$

eşitliği gözönüne alınarak

$$\varkappa = \frac{1}{2}\frac{EN+GL}{EG}$$

elde edilir.

$$x = \frac{z_u}{\sqrt{E}}, y = \frac{z_v}{\sqrt{G}}$$

ile gösterelim. $M = 0$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix} = 0$$

ve

$$c_{22}^1 = \rho c_{11}^1, \quad c_{22}^2 = \rho c_{11}^2$$

dir. Teorem (4.3) ün ispatından

$$\frac{\Delta_3}{G} = \frac{\Delta_1}{E}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{G}{E}\Delta_1 \\ &= -p\Delta_1 \end{aligned}$$

elde edilir ve $H = 0$ olduğundan

$$\frac{1}{2}\frac{EN + GL}{EG} = 0$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{N}{G} + \frac{L}{E} &= 0 \\ \frac{N}{G} &= -\frac{L}{E} \\ N &= -\frac{G}{E}L \\ N &= -pL \end{aligned}$$

dir.

M^2 bir flat normal konneksiyonlu yüzey olsun. Yani $\varkappa = 0$ dır.

$$\begin{aligned} \varkappa &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{EN + GL}{EG} &= 0 \\ \frac{EN + GL}{EG} &= 0 \\ \frac{N}{G} + \frac{L}{E} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{N}{G} &= -\frac{L}{E} \\ N &= -\frac{G}{E}L\end{aligned}$$

$N = -\frac{G}{E}L$ ve $\rho = \frac{G}{E}$ alınırak buradan

$$c_{22}^{1} = \tfrac{G}{E}c_{11}^{1}, \quad c_{22}^{2} = \tfrac{G}{E}c_{11}^{2}$$

olduğundan

$$\sigma\left(x,x\right) = \frac{c_{22}^{1}}{G}n_1 - \frac{c_{22}^{2}}{G}n_2 = \frac{c_{11}^{1}}{E}n_1 - \frac{c_{11}^{2}}{E}n_2 = \sigma\left(y,y\right)$$

olup

$$\sigma\left(x,x\right) = \sigma\left(y,y\right)$$

sonucuna varılabilir.

Tersine,

$\sigma\left(x,x\right) = \sigma\left(y,y\right)$ olsun. Buradan

$$\tfrac{c_{22}^{1}}{G} = \tfrac{c_{11}^{1}}{E}; \quad \tfrac{c_{22}^{2}}{G} = \tfrac{c_{11}^{2}}{E}$$

dir.

$$c_{22}^{1} = \rho c_{11}^{1}, \quad c_{22}^{2} = \rho c_{11}^{2}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\rho = \tfrac{G}{E}; \quad N = -\tfrac{G}{E}L$$

dir.Geçmişteki eşitliten

$$\begin{aligned}\varkappa &= \frac{1}{2}\frac{EN+GL}{EG} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{N}{G}+\frac{L}{E}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{G}{E}\frac{L}{G}+\frac{L}{E}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{L}{E}+\frac{L}{E}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Yani $M^{\mathbf{2}}$ flat normal konneksiyonlu yüzeydir.

Teorem 4.8 $\mathbb{R}_1^4$ de düzlemsel olmayan bir spacelike yüzey M^2 olsun. M^2 bir flat normal konneksiyonlu yüzeydir $\Leftrightarrow$ $\forall\ p \in M^2$ için normal eğriliğin elipsi ortalama eğrilik vektör alanı ile lineer bağımsız doğru parçasıdır.

İspat. M^2 bir flat normal konneksiyonlu yüzey olsun.

Lemma (4.7) den

$$\sigma(x,x) - \sigma(y,y) = 0$$

dır. Herhangi

$$\upsilon = \cos\Psi x + \sin\Psi y$$

için

$$\sigma(\nu,\nu) = H + \sin 2\Psi\sigma(x,y)$$

dir. Buradan υ birim teğet çemberinde birkez gittiğinde, $\sigma(\nu,\nu)$ vektörü H merkezli $\sigma(x,y)$ ile lineer bağımlı doğru parçasında iki kez gider. $H = \sigma(x,x)$ ile $\sigma(x,y)$ lineer bağımlı olma kabulü

$$\sigma(x,x) = \sigma(y,y)$$

olduğundan $L = M = N = 0$ olması M^2 nin düzlemsel olmaması ile çelişir.

Tersine,

$\mathbb{R}_1^4$ de düzlemsel olmayan M^2 yüzeyi olsun öyleki her $p \in M^2$ için normal eğrili-ğin elipsi bir doğru parçasıdır ve ortalama eğrilik vektör alanı ile lineer bağımsızdır. Genelliği bozmaksızın M^2 yi asli parametreler ile parametrize edelim. Dolayısıyla

$$c_{22}^1 = \rho c_{11}^1, \quad c_{22}^2 = \rho c_{11}^2$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \sigma(x,x) - \sigma(y,y) &= (1-\rho)\left(c_{11}^1 n_1 + c_{11}^2 n_2\right), \\ \sigma(x,y) &= c_{12}^1 n_1 + c_{12}^2 n_2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Normal eğriliğin elipsi bir doğru parçası olduğundan (4.11) düşünülerek aşağıdaki durumlar incelenecektir:

a) $\sigma(x,x) - \sigma(y,y)$ ile $\sigma(x,y)$ lineer bağımlıdır.

(4.12) den

$$\begin{aligned} c_{12}^1 &= (1-p)\, c_{11}^1, & c_{12}^2 &= (1-p)\, c_{11}^2 \\ c_{12}^1 &= \widetilde{\rho} c_{11}^1, & c_{12}^2 &= \widetilde{\rho} c_{11}^2 \end{aligned}$$

eşitlikleri ve

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix},$$
$$L(u,v) = \frac{2\Delta_1}{W}, \quad M(u,v) = \frac{\Delta_2}{W}, \quad N(u,v) = \frac{2\Delta_3}{W}.$$

den

$$\begin{aligned} L &= \frac{2\Delta_1}{W} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} c_{11}^1 & \widetilde{\rho} c_{11}^1 \\ c_{11}^2 & \widetilde{\rho} c_{11}^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2\widetilde{\rho}}{W}\left(c_{11}^1 c_{11}^2 - c_{11}^1 c_{11}^2\right) \\ &\Rightarrow L = 0. \end{aligned}$$

$M = 0$ olduğundan $\Delta_2 = 0$ dır. Yani

$$\left(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{11}^2\right) = 0 \tag{4.14}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\Delta_3}{W} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} \widetilde{\rho}\, c_{11}^1 & c_{22}^1 \\ \widetilde{\rho} c_{11}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2\widetilde{\rho}}{W}\left(c_{11}^1 c_{22}^2 - c_{22}^1 c_{11}^2\right) \end{aligned}$$

olup (4.14) daki eşitlikten $N = 0$ dır. Sonuç olarak

$$L = M = N = 0$$

dır. Bu ise bir çelişkidir.

b) $\sigma(x,y) = 0$ olma durumu gözönüne alınsın.

$$\sigma(x,y) = c_{12}^1 n_1 + c_{12}^2 n_2$$

olduğundan

$$c_{12}^1 n_1 + c_{12}^2 n_2 = 0$$

olup

$$c_{12}^1 = c_{12}^2 = 0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} L &= \frac{2\Delta_1}{W} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 \\ c_{11}^2 & c_{12}^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} c_{11}^1 & 0 \\ c_{11}^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\Rightarrow L = 0 \ . \end{aligned}$$

ve $M = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\Delta_3}{W} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} c_{12}^1 & c_{22}^1 \\ c_{12}^2 & c_{22}^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{2}{W}\begin{vmatrix} 0 & c_{22}^1 \\ 0 & c_{22}^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

olup $N = 0$ dır. Sonuç olarak

$$L = M = N = 0$$

dır. Bu ise bir çelişkidir.

c) $\sigma(x,x) - \sigma(y,y) = 0$ olma durumu gözönüne alalım. Yani

$$\sigma(x,x) = \sigma(y,y)$$

dir. Lemma (4.7) den

$$\sigma(x,x) = \sigma(y,y)$$

olduğundan M^2 flat normal konneksiyonlu yüzeydir.

5.SPACELİKE YÜZEYLERDE ORTALAMA EĞRİLİK VEKTÖR ALANI SPACELİKE OLAN VEKTÖRLER

Bu bölümde spacelike yüzeylerin ortalama eğrilik vektör alanlarının herhangi bir noktasında sıfırdan farklı olan vektörleri incelenecektir.

M^2 yüzeyi asli eğrilikler ile parametrize edilen spacelike yüzey ve birim vektör alanları $x = \frac{z_u}{\sqrt{E}}$, $y = \frac{z_v}{\sqrt{G}}$ olsun.

$M = 0$ olduğundan $\sigma(x,x)$ ve $\sigma(y,y)$ normal vektör alanları lineer bağımlıdır. Bundan dolayı geometrik olarak n normal çatı alanı bulunur öyleki $\sigma(x,x)$ ve $\sigma(y,y)$ normal vektör alanları n ile lineer bağımlıdır.

Buna göre aşağıdaki formüller verilebilir;

$$\begin{aligned} \sigma(x,x) &= v_1 n, \\ \sigma(y,y) &= v_2 n. \end{aligned}$$

Burada v_1, v_2 invaryant fonksiyonlardır.

Ortalama eğrilik vektör alanı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$H = \frac{v_1 + v_2}{2} n.$$

Tanım 5.1 M^2 yüzeyi minimal olmayan noktalardan oluşşun yani M^2 nin her noktasında $H \neq 0$ dır.

Ortalama eğrilik vektör alanı için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. H spacelikedır yani $\langle H, H \rangle > 0$,

ii. H timelikedır yani $\langle H, H \rangle < 0$,

iii. H lightlikedır yani $\langle H, H \rangle = 0$ dır.

x, y asli tanjant vektör alanları ve $b = \frac{H}{\sqrt{\langle H,H \rangle}}$ ile tanımlı b birim normal vektör alanı olsun.

$\langle b, b \rangle = 1$ ve b birim normal vektör alanı $\sigma(x,x)$ ve $\sigma(y,y)$ ile lineer bağımlıdır.

$\langle l, l \rangle = -1$ l birim normal vektör alanı öyleki $\mathbb{R}^4_1$ de $\{x, y, b, l\}$ pozitif yönlü ortonormal çatı alanıdır.

M^2 nin her bir p noktasında geometrik olarak $\{x, y, b, l\}$ ortonormal çatı alanı belirlenebilir.

$\{x, y, b, l\}$ çatı alanından

$$\begin{aligned} \sigma(x,x) &= v_1 b, \\ \sigma(x,y) &= \lambda b - \mu l, \\ \sigma(y,y) &= v_2 b \end{aligned} \tag{5.1}$$

formülleri yazılabilir. Burada v_1, v_2, λ, μ invaryant fonksiyonlardır ve

$$\begin{array}{ll} v_1 = \langle \sigma(x,x), b \rangle, & v_2 = \langle \sigma(y,y), b \rangle, \\ \lambda = \langle \sigma(x,y), b \rangle, & \mu = \langle \sigma(x,x), l \rangle \end{array}$$

şeklinde gösterilir.

M^2 nin K gauss eğriliği ve k ve $\varkappa$ invaryantları v_1, v_2, λ, μ fonksiyonları ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$k = -4\ v_1.v_2\mu^2, \quad \varkappa = (v_1 - \ v_2)\,\mu, \quad K = v_1.v_2 - \lambda^2 + \mu^2. \tag{5.2}$$

$\varkappa^2 - k > 0$ olduğundan ve (5.2) eşitliğinden $\mu \neq 0$ dır.

M^2 nin normal ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \frac{1}{2}\left(\sigma(x,x) + \sigma(y,y)\right)$$

eşitliğinden yararlanarak

$$H = \frac{v_1 + v_2}{2} b$$

bulunur. (5.2) eşitliğinden H ortalama eğrilik vektör alanın uzunluğu

$$\|H\| = \frac{\sqrt{\varkappa^2 - k}}{2\,|\mu|}$$

dır. Bu eşitlik görülebilir;

$$\begin{aligned} \|H\| &= \frac{v_1 + v_2}{2} \langle b, b \rangle \\ &= \frac{v_1 + v_2}{2} \end{aligned}$$

ve

$$\varkappa = (v_1 - \ v_2)\,\mu, \quad k = -4\ v_1.v_2\mu^2$$

eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\varkappa^2 - k &= \left(((v_1 - \ v_2)\,\mu)^2 - \left(-4\ v_1.v_2\mu^2\right)\right) \\
&= \left(\left((v_1)^2 - 2v_1v_2 + (v_1)^2\right)\mu^2 + (4\ v_1.v_2)\,\mu^2\right) \\
&= \left((v_1)^2 + 2v_1v_2 + (v_1)^2\right)\mu^2 \\
&= ((v_1 + \ v_2)\,\mu)^2
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\sqrt{\varkappa^2 - k} &= \sqrt{((v_1 + v_2)\,\mu)^2} \\
\sqrt{\varkappa^2 - k} &= |(v_1 + v_2)\,\mu| \\
\frac{\sqrt{\varkappa^2 - k}}{|\mu|} &= |(v_1 + v_2)| \\
\frac{\sqrt{\varkappa^2 - k}}{2\,|\mu|} &= \frac{|(v_1 + v_2)|}{2} \\
&= \frac{|(v_1 + v_2)|}{2} \\
&= \|H\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan da görülürki $|\mu|$ ifadesi k, $\varkappa$ invaryantları ve H ortalama eğrilik vektör alanı ile ifade edilir.

Şimdi λ invaryantının geometrik anlamı verilecektir.

Tanım 5.2 $m-$boyutlu $\widetilde{M}$ riemann manifoldunun $n-$boyutlu M altmanifoldu ve M nin normal vektör alanı ξ olsun.

ξ_x, $m-n$ boyutta M nin ortogonal birim normal vektör alanına karşılık gelir öyle ki

$$\xi = \|\xi\|\,\xi_1$$

dir. $a\,(\xi)$ normal vektör alanı

$$a\,(\xi) = \frac{\|\xi\|}{n}\sum_{k=2}^{m-n}\{tr\,(A_1A_k)\}\,\xi_k$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitliğe ξ nun $a\,(\xi)$ **allied vektör alanı** denir [1].

Burada $\left\{\xi_1 = \frac{\xi}{\|\xi\|}, \xi_2, \xi_m\right\}$ M nin normal uzayının ortonormal bazıdır ve

$A_i = A_{\xi_i}$, $(i = 1, 2, ..., m)$ olup ξ_i şekil operatörüdür. $a(\xi)$, M nin iyi tanımlanmış normal vektör alanıdır ve M de süreklidir.

Tanım 5.3 H ortalama eğrilik vektör alanının $a(H)$ allied vektör alanı H için ortonormal olan normal vektör alanı için iyi tanımlıdır. Buna $\widetilde{M}$ de M nin **allied ortalama vektör alanı** denir [1].

Tanım 5.4 H ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere eğer $a(H) = 0$ ise M ye **Chen altmanifoldu** denir.

Örnek 5.1 Minimal altmanifoldlar, pseudo-umbilik altmanifoldları ve hiperyüzeyler Chen altmanifoldlarıdır.

Tanım 5.5 Minimal altmanifoldlar, pseudo-umbilik altmanifoldları ve hiperyüzeylere **trivial chen altmanifoldları** denir.

Şimdi $\mathbb{R}_1^4$ de spacelike ortalama vektör alanlı M^2 yüzeyini alalım. (5.1) deki eşitliklere allied ortalama vektör alanı tanımını uygulanırsa

$$\begin{aligned} a(H) &= \frac{v_1 + v_2}{2}\lambda\mu l \\ &= \frac{\sqrt{\varkappa^2 - k}}{2}\lambda l \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.Buradan dolayı
M^2 minimal olmayan bir yüzey öyleki $a(H) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ dır.
Bu λ invaryantının geometrik anlamını verir.

Sonuç 5.1 M^2 non-trivial Chen yüzeyidir $\Leftrightarrow \lambda = 0$ dır.

Geometrik olarak $\{x, y, b, l\}$ çatı alanından ortonormal çatı alanı ile belirlenen aşağıdaki M^2 nin Frenet tipi türev formüllerini aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\begin{aligned} \nabla'_x x &= \gamma_1 y + v_1 b, & \nabla'_x b &= -v_1 x - \lambda y - \beta_1 l, \\ \nabla'_x y &= -\gamma_1 x + \lambda b - \mu l, & \nabla'_y b &= -\lambda x - v_2 y - \beta_2 l, \\ \nabla'_y x &= -\gamma_2 y + \lambda b - \mu l, & \nabla'_x l &= -\mu y - \beta_1 b, \\ \nabla'_y y &= \gamma_2 x + v_2 b, & \nabla'_y l &= -\mu x - \beta_2 b. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Burada

$$\gamma_1 = -y\left(\ln\sqrt{E}\right), \quad \gamma_2 = -X\left(\ln\sqrt{G}\right),$$
$$\beta_1 = \langle \nabla'_x b, l\rangle, \quad \beta_2 = \langle \nabla'_y b, l\rangle$$

eşitlikleridir.

$\mathbb{R}^4$ ün standart konneksiyona göre eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır olduğundan

$$R'(x,y,x) = 0, \quad R'(x,y,y) = 0, \quad R'(x,y,b) = 0$$

ve (5.3) eşitlikleri de gözönüne alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
v_1 v_2 - \lambda^2 + \mu^2 &= x(\gamma_2) + y(\gamma_1) - \left((\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2\right), \\
2\mu\gamma_2 + v_1\beta_2 - \lambda\beta_1 &= x(\mu), \\
2\mu\gamma_1 - \lambda\beta_2 + v_2\beta_1 &= y(\mu), \\
2\lambda\gamma_2 - \mu\beta_1 - (v_1 - v_2)\gamma_1 &= x(\lambda) - y(v_1), \\
2\lambda\gamma_1 - \mu\beta_2 + (v_1 - v_2)\gamma_2 &= -x(v_2) + y(\lambda), \\
\gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2 + (v_1 - v_2)\mu &= -x(\beta_2) + y(\beta_1),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Gerçekten

$$\begin{aligned}
R'(x,y,x) &= 0 \\
0 &= \nabla'_x\nabla'_y x - \nabla'_y\nabla'_x x - \nabla'_{[x,y]}x \\
&= \nabla'_x\nabla'_y x - \nabla'_y\nabla'_x x - \nabla'_{(\nabla_x y - \nabla_y x)}x \\
&= \nabla'_x(-\gamma_2 y + \lambda b - \mu l) - \nabla'_y(\gamma_1 y + v_1 b) \\
&\quad -\nabla'_{(-\gamma_1 x + \lambda b - \mu l - (-\gamma_2 y + \lambda b - \mu l))}x \\
&= \nabla'_x(-\gamma_2 y + \lambda b - \mu l) - \nabla'_y(\gamma_1 y + v_1 b) \\
&\quad -\nabla'_{(-\gamma_1 x + \lambda b - \mu l + (+\gamma_2 y - \lambda b + \mu l))}x \\
&= \nabla'_x(-\gamma_2 y + \lambda b - \mu l) - \nabla'_y(\gamma_1 y + v_1 b) - \nabla'_{(-\gamma_1 x + \gamma_2 y)}x \\
&= -\nabla'_x\gamma_2 y + \nabla'_x\lambda b - \nabla'_x\mu l - \nabla'_y\gamma_1 y - \nabla'_y v_1 b + \nabla'_{\gamma_1 x}x - \nabla'_{\gamma_2 y}x \\
&= -x[\gamma_2]y - \gamma_2\nabla'_x y + x[\lambda]b + \lambda\nabla'_x b - x[\mu]l - \mu\nabla'_x l - y[\gamma_1]y \\
&\quad -\gamma_1\nabla'_y y - y[v_1]b - v_1\nabla'_y b + \gamma_1\nabla'_x x - \gamma_2\nabla'_y x \\
&= -x[\gamma_2]y + x[\lambda]b - x[\mu]l - y[\gamma_1]y - y[v_1]b \\
&\quad -\gamma_2(-\gamma_1 x + \lambda b - \mu l) + \lambda(-v_1 x - \lambda y - \beta_1 l)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\mu\left(-\mu y-\beta_1 b\right)-\gamma_1\left(\gamma_2 x+v_2 b\right)-v_1\left(-\lambda x-v_2 y-\beta_2 l\right) \\
& +\gamma_1\left(\gamma_1 y+v_1 b\right)-\gamma_2\left(-\gamma_2 y+\lambda b-\mu l\right) \\
= \quad & -x\left[\gamma_2\right] y+x[\lambda] b-x[\mu] l-y\left[\gamma_1\right] y-y\left[v_1\right] b+\gamma_2 \gamma_1 x-\gamma_2 \lambda b \\
& +\gamma_2 \mu l-\lambda v_1 x-\lambda^2 y-\lambda \beta_1 l+\mu^2 y+\mu \beta_1 b-\gamma_1 \gamma_2 x-\gamma_1 v_2 b \\
& +v_1 \lambda x+v_1 v_2 y+v_1 \beta_2 l+\gamma_1^2 y+\gamma_1 v_1 b+\gamma_2^2 y-\gamma_2 \lambda b+\gamma_2 \mu l \\
= \quad & -x\left[\gamma_2\right] y+x[\lambda] b-x[\mu] l-y\left[\gamma_1\right] y-y\left[v_1\right] b-\gamma_2 \lambda b+\gamma_2 \mu l \\
& -\lambda^2 y-\lambda \beta_1 l+\mu^2 y+\mu \beta_1 b-\gamma_1 v_2 b+v_1 v_2 y+v_1 \beta_2 l \\
& +\gamma_1^2 y+\gamma_1 v_1 b+\gamma_2^2 y-\gamma_2 \lambda b+\gamma_2 \mu l \\
= \quad & \left(-x\left[\gamma_2\right] y-y\left[\gamma_1\right] y-\lambda^2 y+\mu^2 y+v_1 v_2 y+\gamma_1^2 y+\gamma_2^2 y\right) \\
& +\left(x[\lambda] b-y\left[v_1\right] b-\gamma_2 \lambda b+\mu \beta_1 b-\gamma_1 v_2 b+\gamma_1 v_1 b-\gamma_2 \lambda b\right) \\
& +\left(-x[\mu] l+\gamma_2 \mu l-\lambda \beta_1 l+v_1 \beta_2 l+\gamma_2 \mu l\right) \\
= \quad & \left(-x\left[\gamma_2\right]-y\left[\gamma_1\right]-\lambda^2+\mu^2+v_1 v_2+\gamma_1^2+\gamma_2^2\right) y \\
& +\left(x[\lambda]-y\left[v_1\right]-\gamma_2 \lambda+\mu \beta_1-\gamma_1 v_2+\gamma_1 v_1-\gamma_2 \lambda\right) b \\
& +\left(-x[\mu]+\gamma_2 \mu-\lambda \beta_1+v_1 \beta_2+\gamma_2 \mu\right) l
\end{aligned}
$$

buradan

$$0=\left(-x\left[\gamma_2\right]-y\left[\gamma_1\right]-\lambda^2+\mu^2+v_1 v_2+\gamma_1^2+\gamma_2^2\right),$$

$$0=\left(x[\lambda]-y\left[v_1\right]-\gamma_2 \lambda+\mu \beta_1-\gamma_1 v_2+\gamma_1 v_1-\gamma_2 \lambda\right),$$

$$0=\left(-x[\mu]+\gamma_2 \mu-\lambda \beta_1+v_1 \beta_2+\gamma_2 \mu\right)$$

dır. Düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
v_1 v_2-\lambda^2+\mu^2 & = x\left[\gamma_2\right]+y\left[\gamma_1\right]-\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right), \\
2 \lambda \gamma_2-\mu \beta_1-\left(v_1-v_2\right) \gamma_1 & = x[\lambda]-y\left[v_1\right], \\
2 \gamma_2 \mu+v_1 \beta_2-\lambda \beta_1 & = x[\mu]
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde

$$R^{'}(x, y, y)=0$$

için

$$x\left[\gamma_2\right]+y\left[\gamma_1\right]-\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right) \quad = \quad v_2 v_1-\lambda^2+\mu^2,$$

$$\begin{aligned} y[\lambda] - x[v_2] &= 2\gamma_1\lambda - \mu\beta_2 + (v_1 - v_2)\gamma_{2,} \\ y[\mu] &= 2\gamma_1\mu + v_2\beta_1 - \lambda\beta_2 \end{aligned}$$

ve

$$R'(x, y, b) = 0$$

için

$$\begin{aligned} x(\lambda) - y(v_1) &= 2\lambda\gamma_2 - \mu\beta_1 - (v_1 - v_2)\gamma_1, \\ -x(v_2) + y(\lambda) &= 2\lambda\gamma_1 - \mu\beta_2 + (v_1 - v_2)\gamma_2, \\ -x(\beta_2) + y(\beta_1) &= \gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2 + (v_1 - v_2)\mu \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$x = \tfrac{z_u}{\sqrt{E}}, \quad y = \tfrac{z_v}{\sqrt{G}}$$

olduğunu gözönüne alınarak (5.4) eşitlikleri aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir;

$$\begin{aligned} v_1v_2 - \lambda^2 + \mu^2 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\gamma_2)_u + \frac{1}{\sqrt{G}}(\gamma_1)_v - \left((\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2\right), \\ 2\mu\gamma_2 + v_1\beta_2 - \lambda\beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\mu)_u, \\ 2\mu\gamma_1 - \lambda\beta_2 + v_2\beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{G}}(\mu)_v, \\ 2\lambda\gamma_2 - \mu\beta_1 - (v_1 - v_2)\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}(\lambda)_u - \frac{1}{\sqrt{G}}(v_1)_v, \\ 2\lambda\gamma_1 - \mu\beta_2 + (v_1 - v_2)\gamma_2 &= -\frac{1}{\sqrt{E}}(v_2)_u + \frac{1}{\sqrt{G}}(\lambda)_v, \\ \gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2 + (v_1 - v_2)\mu &= -\frac{1}{\sqrt{E}}(\beta_2)_u + \frac{1}{\sqrt{G}}(\beta_1)_v. \end{aligned}$$

$(\mu)_u(\mu)_v \neq 0$ olduğundan

$$(2\mu\gamma_2 + v_1\beta_2 - \lambda\beta_1).(2\mu\gamma_1 - \lambda\beta_2 + v_2\beta_1) \neq 0$$

dır. Bu yüzden eğer $(\mu)_u(\mu)_v \neq 0$ ise

$$\sqrt{E} = \tfrac{(\mu)_u}{2\mu\gamma_2 + v_1\beta_2 - \lambda\beta_1}, \quad \sqrt{G} = \tfrac{(\mu)_v}{2\mu\gamma_1 - \lambda\beta_2 + v_2\beta_1}$$

dir.

$\mathbb{R}_1^4$ de spacelike yüzeylerin temel teoremi verilecektir. $\mathbb{R}_1^4$ de spacelike yüzeylerin herhangi bir noktasında ortalama eğrilik vektör alanı sıfır olmayan

spacelike vektörleri içeren aşağıdaki teorem verilecektir.
Öncelikle bu teoremin ispatında yararlanacağımız teoremlerin ifadesi verilsin.

Teorem 5.1 Lineer homojen denklem sistemi

$$X' = A(t)X$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ vektör fonksiyonları

$$X' = A(t)X$$

homojen sisteminin çözümleriyse, bu durumda bunların lineer kombinasyonu;

$$X = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

ifadeside verilen sistemin bir çözümüdür (Lineer homojen sistemler teorisi).

Teorem 5.2 Birinci mertebeden n-adet denklemden oluşan lineer homojen

$$X' = A(t)X$$

sisteminin

$$t_1 < t < t_2$$

aralığında daima n- adet lineer bağımsız $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ çözümleri vardır.
(Katsayılar matrisi A nın elemanlarının bu aralıkta sürekli fonksiyonlar olduğu kabul edilmiştir.)
Bu aralıkta homojen sistemin genel çözümü

$$X = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

olarak ifade edilir. Buradaki $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitlerdir.
(Lineer homojen sistemlerin genel çözümü teorisi)

$\mathbb{R}^3$ de bir eğri verildiği zaman $\{T, N, B\}$ bu eğrinin Frenet vektörleri olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

bir eğrinin Frenet çatısı olarak bilinir.

Tersine $\varkappa$ ve τ diferensiyellenebilir fonksiyonları verildiği zaman Frenet formülleri böyle olan eğriler bulunabilir. Bu da gösterir ki $\varkappa$ ve τ eğriler için belirleyici invaryantlardır.

Tıpkı yukarıda olduğu gibi $\mathbb{R}_1^4$ de bir spacelike yüzey verildiğinde bu yüzeyin üzerindeki çatı alanlarının yüzey boyunca türevleri alınarak 8 tane diferensiyellenebilir Γ_{ij}^k fonksiyonları bulunabilir.

Tersine 8 tane Γ_{ij}^k diferensiyellenebilir fonksiyonları verildiği zaman bu fonksiyonları kullanarak bir yüzey bulunabilir mi?
Aşağıdaki spacelike yüzeylerin temel teoremi bu duruma açıklık getirmek için verilecektir.
Şimdi bahsedilen teorem verilebilir:

Teorem 5.1 $v_1, v_2, \lambda, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu$ fonksiyonları $D \subset \mathbb{R}^2$ açık alt kümesinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlasınlar

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(\mu)_u}{2\mu\gamma_2+v_1\beta_2-\lambda\beta_1} > 0,\\
&\tfrac{(\mu)_v}{2\mu\gamma_1-\lambda\beta_2+v_2\beta_1} > 0,\\
&-\gamma_1\sqrt{E}\sqrt{G} = \left(\sqrt{E}\right)_v,\\
&-\gamma_2\sqrt{E}\sqrt{G} = \left(\sqrt{G}\right)_u,\\
&v_1v_2 - \lambda^2 + \mu^2 = \tfrac{1}{\sqrt{E}}(\gamma_2)_u + \tfrac{1}{\sqrt{G}}(\gamma_1)_v - \left((\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2\right),\\
&2\lambda\gamma_2 - \mu\beta_1 - (v_1 - v_2)\gamma_1 = \tfrac{1}{\sqrt{E}}(\lambda)_u - \tfrac{1}{\sqrt{G}}(v_1)_v,\\
&2\lambda\gamma_1 - \mu\beta_2 + (v_1 - v_2)\gamma_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{E}}(v_2)_u + \tfrac{1}{\sqrt{G}}(\lambda)_v,\\
&\gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2 + (v_1 - v_2)\mu = -\tfrac{1}{\sqrt{E}}(\beta_2)_u + \tfrac{1}{\sqrt{G}}(\beta_1)_v.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Burada

$$\sqrt{E} = \tfrac{(\mu)_u}{2\mu\gamma_2+v_1\beta_2-\lambda\beta_1}, \quad \sqrt{G} = \tfrac{(\mu)_v}{2\mu\gamma_1-\lambda\beta_2+v_2\beta_1}.$$

dır.
$p_0 \in \mathbb{R}_1^4$ noktasında bir ortonormal çatı $\{x_0, y_0, b_0, l_0\}$ olsun.
O zaman bir $D_0 \subset D$ açığı ve bir tek

$$M^2 = \{z(u,v) : (u,v) \in D_0\}$$

spacelike yüzeyi vardır öyleki M^2 herhangi bir noktadaki ortalama eğrilik vektörü sıfır olmayan spacelike vektördür.

Üstelik M^2 yüzeyi p_0 noktasından geçer. $v_1, v_2, \lambda, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu$ fonksiyonları M^2 nin geometrik fonksiyonlarıdır ve $\{x_0, y_0, b_0, l_0\}$ kümesi M^2 nin p_0 noktasındaki geometrik çatısıdır.

İspat Aşağıda kismi diferensiyel denklemler için $\mathbb{R}_1^4$ de bilinmeyen

$$x = x\left(u,v\right), \quad y = y\left(u,v\right), \quad b = b\left(u,v\right), \quad l = l\left(u,v\right)$$

vektör değerli fonksiyonlarını gözönüne alınsın.

$$\begin{array}{ll} x_u = \sqrt{E}\gamma_1 y + \sqrt{E}v_1 b, & x_v = -\sqrt{G}\gamma_2 y + \sqrt{G}\lambda b - \sqrt{G}\mu l, \\ y_u = -\sqrt{E}\gamma_1 x + \sqrt{E}\lambda b - \sqrt{E}\mu l, & y_v = \sqrt{G}\gamma_2 x + \sqrt{G}v_2 b, \\ b_u = -\sqrt{E}v_1 x - \sqrt{E}\lambda y - \sqrt{E}\beta_1 l, & b_v = -\sqrt{G}\lambda x - \sqrt{G}v_2 y - \sqrt{G}\beta_2 l, \\ l_u = -\sqrt{E}\mu y - \sqrt{E}\beta_1 b, & l_v = -\sqrt{G}\mu x - \sqrt{G}\beta_2 b. \end{array} \tag{5.6}$$

Gerçekten,

$$\begin{aligned} \nabla'_x x &= \nabla'_{\frac{Z_u}{\|Z_u\|}} x \\ &= \frac{1}{\|Z_u\|} \nabla'_{Z_u} x \\ &= \frac{1}{\|Z_u\|} x_u \\ \|Z_u\| \nabla'_x x &= x_u \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{array}{llll} \sqrt{E}\nabla'_x x = x_u, & \sqrt{E}\nabla'_x y = y_u, & \sqrt{E}\nabla'_x b = b_u, & \sqrt{E}\nabla'_x l = l_u, \\ \sqrt{G}\nabla'_y x = x_v, & \sqrt{G}\nabla'_y y = y_v, & \sqrt{G}\nabla'_y b = b_v, & \sqrt{G}\nabla'_y l = l_v, \end{array}$$

eşitlikleri elde edilebilir.

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ b \\ l \end{pmatrix},$$

$$A = \sqrt{E} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & v_1 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & \lambda & -\mu \\ -v_1 & -\lambda & 0 & -\beta_1 \\ 0 & -\mu & -\beta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \sqrt{G}\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_2 & \lambda & -\mu \\ \gamma_2 & 0 & v_2 & 0 \\ -\lambda & -v_2 & 0 & -\beta_2 \\ -\mu & 0 & -\beta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ile gösterilsin. Sistem (5.6) dan

$$\begin{aligned} Z_u &= AZ, \\ Z_v &= BZ \end{aligned} \tag{5.7}$$

yazılabilir. (5.6) nın integrallenebilme koşulu

$$Z_{uv} = Z_{vu} \tag{5.8}$$

dur. Daha açıkçası yüzey boyunca Z nın belirlenebilmesi için

$$\begin{aligned} x_{uv} &= x_{vu}, \\ y_{uv} &= y_{vu}, \\ b_{uv} &= b_{vu}, \\ l_{uv} &= l_{vu}, \end{aligned}$$

olması gerekir ki buradan $\{x, y, b, l\}$ dörtlüsü ve dolayısıyla Z bulunabilsin.
$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ olmak üzere (5.8) eşitliği

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial v} - \frac{\partial b_i^k}{\partial u} + \sum_{j=1}^{4}\left(a_i^j b_j^k - b_i^j a_j^k\right) = 0 \qquad i, k = 1, 2, 3, 4 \tag{5.9}$$

eşitliğine denktir. Burada a_i^j ve b_i^j A ve B matrislerinin elemanıdır.
(5.5) deki eşitlik kullanılarak (5.9) daki eşitliklerin yerine koyarak sağlatılabilinir.
(5.9) eşitliğini açtığımız zaman 16 ayrı eşitlik elde ederiz.
Gerçekten;
1) $i = 1$, $k = 1$ için

$$\frac{\partial a_1^1}{\partial v} - \frac{\partial b_1^1}{\partial u} + \left(a_1^1 b_1^1 - b_1^1 a_1^1\right) + \left(a_1^2 b_2^1 - b_1^2 a_2^1\right) + \left(a_1^3 b_3^1 - b_1^3 a_3^1\right) + \left(a_1^4 b_4^1 - b_1^4 a_4^1\right) = 0$$

buradan

$$\left(\sqrt{E}\gamma_1\sqrt{G}\gamma_2 - \sqrt{G}\gamma_2\sqrt{E}\gamma_1\right) + \left(-\sqrt{E}v_1\sqrt{G}\lambda + \sqrt{G}\lambda\sqrt{E}v_1\right) = 0$$

2) $i=1,\ k=2$ için

$$\frac{\partial a_1^2}{\partial v}-\frac{\partial b_1^2}{\partial u}+\left(a_1^1 b_1^2-b_1^1 a_1^2\right)+\left(a_1^2 b_2^2-b_1^2 a_2^2\right)+\left(a_1^3 b_3^2-b_1^3 a_3^2\right)+\left(a_1^4 b_4^2-b_1^4 a_4^2\right)=0$$

buradan

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{E}\gamma_1\right)_v+\left(\sqrt{G}\gamma_2\right)_u-\sqrt{E}v_1\sqrt{G}v_2+\sqrt{G}\lambda\sqrt{E}\lambda-\sqrt{G}\mu\sqrt{E}\mu &= 0\\
\left(\sqrt{E}\gamma_1\right)_v+\left(\sqrt{G}\gamma_2\right)_u+\sqrt{E}\sqrt{G}\left(-v_1v_2+\lambda^2-\mu^2\right) &= 0\\
\left(\sqrt{E}\right)_v\gamma_1+\left(\gamma_1\right)_v\sqrt{E}+\left(\sqrt{G}\right)_u\gamma_2+\left(\gamma_2\right)_u\sqrt{G}+\sqrt{E}\sqrt{G}\left(-v_1v_2+\lambda^2-\mu^2\right) &= 0\\
-\gamma_1^2\sqrt{E}\sqrt{G}-\gamma_2^2\sqrt{E}\sqrt{G}+\left(\gamma_1\right)_v\sqrt{E}+\left(\gamma_2\right)_u\sqrt{G}+\sqrt{E}\sqrt{G}\left(-v_1v_2+\lambda^2-\mu^2\right) &= 0\\
\sqrt{E}\sqrt{G}\left(-\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right)-v_1v_2+\lambda^2-\mu^2\right)+\left(\gamma_1\right)_v\sqrt{E}+\left(\gamma_2\right)_u\sqrt{G} &= 0\\
\left(-\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right)-v_1v_2+\lambda^2-\mu^2\right)+\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\gamma_1\right)_v+\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\gamma_2\right)_u &= 0
\end{aligned}$$

oda gerektirir ki

$$v_1v_2-\lambda^2+\mu^2=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\gamma_2\right)_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\gamma_1\right)_v-\left(\left(\gamma_1\right)^2+\left(\gamma_2\right)^2\right)$$

3) $i=1,\ k=3$ için

$$2\lambda\gamma_2-\mu\beta_1-\left(v_1-v_2\right)\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\lambda\right)_u-\frac{1}{\sqrt{G}}\left(v_1\right)_v$$

elde edilir.

4) $i=1,\ k=4$ için " 0 " elde edilir.

5) $i=2,\ k=1$ için

$$v_1v_2-\lambda^2+\mu^2=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\gamma_2\right)_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\gamma_1\right)_v-\left(\left(\gamma_1\right)^2+\left(\gamma_2\right)^2\right)$$

elde edilir.

6) $i=2,\ k=2$ için " 0 " elde edilir.

7) $i=2,\ k=3$ için

$$2\lambda\gamma_1-\mu\beta_2+\left(v_1-v_2\right)\gamma_2=-\frac{1}{\sqrt{E}}\left(v_2\right)_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\lambda\right)_v$$

elde edilir.

8) $i=2,\ k=4$ için " 0 " elde edilir.

9) $i=3,\ k=1$ için

$$2\lambda\gamma_2-\mu\beta_1-\left(v_1-v_2\right)\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\left(\lambda\right)_u-\frac{1}{\sqrt{G}}\left(v_1\right)_v$$

elde edilir.

10) $i=3,\ k=2$ için

$$2\lambda\gamma_1-\mu\beta_2+(v_1-v_2)\,\gamma_2=-\frac{1}{\sqrt{E}}\,(v_2)_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\,(\lambda)_v$$

elde edilir.

11) $i=3,\ k=3$ için " 0 " elde edilir.

12) $i=3,\ k=4$ için

$$\gamma_1\beta_1-\gamma_2\beta_2+(v_1-v_2)\,\mu=-\frac{1}{\sqrt{E}}\,(\beta_2)_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\,(\beta_1)_v$$

elde edilir.

13) $i=4,\ k=1$ için " 0 " elde edilir.

14) $i=4,\ k=2$ için " 0 " elde edilir.

15) $i=4,\ k=3$ için

$$\gamma_1\beta_1-\gamma_2\beta_2+(v_1-v_2)\,\mu=-\frac{1}{\sqrt{E}}\,(\beta_2)_u+\frac{1}{\sqrt{G}}\,(\beta_1)_v$$

elde edilir.

16) $i=4,\ k=4$ için " 0 " elde edilir.

Sonuç olarak (5.5) deki eşitlik kullanılarak (5.9) daki eşitlıkleri elde edilebilir. Buradan $D_1\subset D$ ve $(u,v)\in D_1$ için bir tek

$$x=x\,(u,v)\,,\quad y=y\,(u,v)\,,\quad b=b\,(u,v)\,,\quad l=l\,(u,v)$$

fonksiyonları vardır ki (5.6) sistemini ve

$$x_0=x\,(u_0,v_0)\,,\quad y_0=y\,(u_0,v_0)\,,\quad b_0=b\,(u_0,v_0)\,,\quad l_0=l\,(u_0,v_0)$$

koşullarını sağlar.

Şimdi herbir $(u,v)\in D_1$ için $x=x\,(u,v)\,,\quad y=y\,(u,v)\,,\quad b=b\,(u,v)\,,\quad l=l\,(u,v)$ nin $\mathbb{R}^4_1$ de ortonormal çatı olduğunu gösterilecektir. Aşağıdaki fonksiyonlar gözönüne alınsın.

$$\begin{aligned}
&\varphi_1=\langle x,x\rangle-1, && \varphi_5=\langle x,y\rangle, && \varphi_8=\langle y,b\rangle,\\
&\varphi_2=\langle y,y\rangle-1, && \varphi_6=\langle x,b\rangle, && \varphi_9=\langle y,l\rangle,\\
&\varphi_3=\langle b,b\rangle-1, && \varphi_7=\langle x,l\rangle, && \varphi_{10}=\langle b,l\rangle.\\
&\varphi_4=\langle l,l\rangle+1, && &&
\end{aligned}$$

$x\left(u,v\right),\ y\left(u,v\right),\ b\left(u,v\right),\ l\left(u,v\right)$ (5.6) yı sağladığından aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\phi_i}{\partial u}=\alpha_i^j\varphi_j,\\ \frac{\partial\phi_i}{\partial v}=\beta_i^j\varphi_j;\end{array}\right\}\left(\ i=1,...,10.\right) \tag{5.10}$$

burada $(u,v)\in D_1$ için $(i,j=1,...,10)$ α_i^j β_i^j ler (u,v) nin fonksiyonlarıdır. (5.10) sistemi $\varphi_i\left(u,v\right)$ $(i=1,...,10)$ $(u,v)\in D_1$ fonksiyonları için kismi diferensiyel denklemler için bir lineer denklem sistemidir öyleki

$$\varphi_i\left(u_0,v_0\right)=0\quad(i=1,...,10)$$

dır. Hatırlatmadan yola çıkarak lineer homojen sistemlerinin genel teorisinin çözümünden

$$X^{'}=A\left(t\right)X$$

homojen sistemi verilsin. Bu sistemlerin

$$t_1<t<t_2$$

aralığında daima n-adet lineer bağımsız $x_1,x_2,...,x_n$ çözümleri vardır.
Şimdi $A\left(t\right)$ matrisi yerine

$$A=\alpha_i^j\left(u,v_0\right)$$

matrisini alalım. Burada α_i^j fonksiyonlarının sürekli olduğunu biliyoruz.

$$X^{'}=A\left(t\right)X$$

sisteminin çözümleri ele alınırsa yukarıdaki teoremden

$$X_1\left(u,v_0\right),\ X_2\left(u,v_0\right),...,\ X_{10}\left(u,v_0\right)$$

gibi lineer bağımsız çözümleri vardır. Bu sistemin genel çözümü

$$X\left(u,v_0\right)=c_1x_1\left(u,v_0\right)+c_2x_2\left(u,v_0\right)+...+c_{10}x_{10}\left(u,v_0\right)$$

şeklinde lineer kombinasyon olarak yazılabilir.
Şimdi φ_i lerin tanımından φ_i lerinde böyle bir sistemin çözümü olduğu söylenebilir.

Buna göre

$$X^{'}(u,v_0)=\begin{bmatrix}\varphi_1(u,v_0)\\ \varphi_2(u,v_0)\\ .\\ .\\ .\\ \varphi_{10}(u,v_0)\end{bmatrix}$$

de bir çözüm olup

$$X_1(u,v_0)\,,\ X_2(u,v_0)\,,...,\ X_{10}(u,v_0)$$

lineer bağımsız çözümlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılır. Yani

$$X^{'}(u,v_0)=\begin{bmatrix}\varphi_1(u,v_0)\\ \varphi_2(u,v_0)\\ .\\ .\\ .\\ \varphi_{10}(u,v_0)\end{bmatrix}=c_1x_1(u,v_0)+c_2x_2(u,v_0)+...+c_{10}x_{10}(u,v_0)$$

dır. φ_i lerin tanımından ve

$$x_0=x(u_0,v_0)\,,\quad y_0=y(u_0,v_0)\,,\quad b_0=b(u_0,v_0)\,,\quad l_0=l(u_0,v_0)$$

başlangıç koşulundan dolayı

$$\varphi_1(u,v_0)=\varphi_2(u,v_0)=...=\varphi_{10}(u,v_0)=0$$

yazılır. Buna göre

$$X^{'}(u,v_0)=0$$

dır. Buradan

$$c_1x_1(u,v_0)+c_2x_2(u,v_0)+...+c_{10}x_{10}(u,v_0)=0$$

elde edilir. $\{x_1,x_2,...,x_{10}\}$ lineer bağımsız(teoremden) olduğundan

$$c_1=c_2=...=c_{10}=0$$

olmak zorundadır. Buna göre

$$\begin{aligned} X^{'}(u,v_0) &= c_1x_1(u,v_0)+c_2x_2(u,v_0)+...+c_{10}x_{10}(u,v_0)=0 \\ \Rightarrow \quad X^{'}(u,v_0) &= \begin{bmatrix} \varphi_1(u,v_0) \\ \varphi_2(u,v_0) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_{10}(u,v_0) \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_i(u,v_0)=0,\ u\in I\subset\mathbb{R}, i=(1,2,..,10)$$

elde edilir. Benzer şekilde $J\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall\ v\in J$ için

$$\varphi_i(u_0,v)=0$$

olduğu gösterilebilir. Böylece $\forall\ (u,v)\in(I\times J)$ için

$$\varphi_i(u,v)=0,(i=1,2,...,10)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} &\varphi_1(u,v)=0, &&\varphi_5(u,v)=0, &&\varphi_8(u,v)=0, \\ &\varphi_2(u,v)=0, &&\varphi_6(u,v)=0, &&\varphi_9(u,v)=0, \\ &\varphi_3(u,v)=0, &&\varphi_7(u,v)=0, &&\varphi_{10}(u,v)=0 \\ &\varphi_4(u,v)=0, \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} &\langle x,x\rangle=1, &&\langle x,y\rangle=0, &&\langle y,b\rangle=0, \\ &\langle y,y\rangle=1, &&\langle x,b\rangle=0, &&\langle y,l\rangle=0, \\ &\langle b,b\rangle=1, &&\langle x,l\rangle=0, &&\langle b,l\rangle=0, \\ &\langle l,l\rangle=-1, \end{aligned}$$

dır. Buradan $\{x,y,b,l\}$ bir ortonormal bir bazdır. Bundan dolayı herbir $(u,v)\in D_1$ için

$$\varphi_i(u,v)=0,\quad (i=1,...,10)$$

dır. Sonuç olarak herbir $(u,v) \in D_1$ için $\mathbb{R}_1^4$ ün ortonormal çatısı $x(u,v)\,, y(u,v)\,,$ $b(u,v)\,, l(u,v)$ vektör değerli fonksiyonlarıdır.

$$\begin{aligned} z_u &= \sqrt{E}x, \\ z_v &= \sqrt{G}y \end{aligned} \tag{5.11}$$

dır. Şimdi $z(u,v)$ vektör değerli fonksiyonu için (5.11) daki kismi diferensiyel denklemi düşünelim. (5.5) ve (5.6) kullanılarak sistem (5.11) in integrallenebilme koşulu

$$Z_{uv} = Z_{vu}$$

elde edilerek yerine getirildi. Dolayısıyla

$$z(u_0, v_0) = p_0$$

karşılayan ve $(u,v) \in D_0$ için tanımlı bir tek vektör değerli fonksiyonu $z = z(u,v)$ ve bir $D_0 \subset D_1$ altcümlesi vardır. Sonuç olarak

$$M^2 = \{z = z(u,v)\,, (u,v) \in D_0\}$$

yüzeyi teoremin ispatını karşılar.

6.SPACELIKE YÜZEYLERDE ORTALAMA EĞRİLİK VEKTÖR ALANI TIMELIKE OLAN VEKTÖRLER

Bu bölümde spacelike yüzeylerin ortalama eğrilik vektör alanlarının herhangi bir noktasında sıfırdan farklı olan timelike vektörleri incelenecektir. Yani $H \neq 0$, $\langle H, H \rangle < 0$ dır.

x, y asli tanjant vektör alanı ve $l = -\frac{H}{\sqrt{-\langle H,H \rangle}}$ ile tanımlı l birim normal vektör alanı olsun.

$\langle l, l \rangle = -1$ ve l birim normal vektör alanı $\sigma(x, x)$ ve $\sigma(y, y)$ ile lineer bağımlıdır.

b birim normal vektör alanı ($\langle b, b \rangle = 1$) öyleki $\mathbb{R}^4_1$ ün pozitif yönlü ortonormal çatı alanı $\{x, y, b, l\}$ dörtlüsüdür.

Böylece geometrik olarak her $p \in M^2$ noktasında$\{x, y, b, l\}$ ortonormal çatı alanını belirlenebilir.

$\{x, y, b, l\}$ ortonormal çatı alanına göre aşağıdaki formüller verilebilir:

$$\begin{aligned} \sigma(x, x) &= -v_1 l, \\ \sigma(x, y) &= \mu b - \lambda l, \\ \sigma(y, y) &= -v_2 l. \end{aligned}$$

Burada v_1, v_2, λ, μ invaryant fonksiyonlardır ve

$$\begin{aligned} v_1 &= \langle \sigma(x, x), l \rangle, \quad v_2 = \langle \sigma(y, y), l \rangle, \\ \lambda &= \langle \sigma(x, y), l \rangle, \quad \mu = \langle \sigma(x, y), b \rangle \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

M^2 nin K gauss eğriliği ve k ve $\varkappa$ invaryantları v_1, v_2, λ, μ fonksiyonları ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$k = -4v_1.v_2\mu^2, \quad \varkappa = (v_1 - v_2)\mu, \quad K = -v_1.v_2 + \lambda^2 - \mu^2. \tag{6.1}$$

$\varkappa^2 - k > 0$ olduğundan (6.1) eşitliğinden $\mu \neq 0$ dır.

M^2 nin normal ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = -\frac{v_1 + v_2}{2} l$$

ile verilebilir.

Allied ortalama vektör alanı

$$a(H) = \frac{v_1 + v_2}{2}\lambda\mu b.$$

Bir önceki bölümden bilinmektedir ki

M^2 non-trival Chen yüzeyidir $\Leftrightarrow \lambda = 0$ dır.

Geometrik olarak $\{x, y, b, l\}$ çatı alanından ortonormal çatı alanı ile belirlenen aşağıdaki M^2 nin frenet tipi türev formülleri verilebilinir:

$$\begin{array}{ll} \nabla'_x x = \gamma_1 y - v_1 l, & \nabla'_x b = -\mu y - \beta_1 l, \\ \nabla'_x y = -\gamma_1 x + \mu b - \lambda l, & \nabla'_y b = -\mu x - \beta_2 l, \\ \nabla'_y x = -\gamma_2 y + \mu b - \lambda l, & \nabla'_x l = -v_1 x - \lambda y - \beta_1 b, \\ \nabla'_y y = \gamma_2 x - v_2 l, & \nabla'_y l = -\lambda x - v_2 y - \beta_2 b. \end{array} \tag{6.2}$$

Burada

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 = -y\left(\ln\sqrt{E}\right), & \gamma_2 = -x\left(\ln\sqrt{G}\right), \\ \beta_1 = \langle \nabla'_x b, l\rangle, & \beta_2 = \langle \nabla'_y b, l\rangle \end{array}$$

eşitlikleridir.

$\mathbb{R}^4$ ün standart konneksiyona göre eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır olduğundan

$$\begin{aligned} R'(x, y, x) &= 0, \\ R'(x, y, y) &= 0, \\ R'(x, y, b) &= 0 \end{aligned}$$

ve (6.2) den aşağıdaki integrallenebilme koşullarını elde edilir.

$$\begin{aligned} -v_1 v_2 + \lambda^2 - \mu^2 &= x(\gamma_2) + y(\gamma_1) - \left((\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2\right), \\ 2\mu\gamma_2 + v_1\beta_2 - \lambda\beta_1 &= x(\mu), \\ 2\mu\gamma_1 - \lambda\beta_2 + v_2\beta_1 &= y(\mu), \\ 2\lambda\gamma_2 - \mu\beta_1 - (v_1 - v_2)\gamma_1 &= x(\lambda) - y(v_1), \\ 2\lambda\gamma_1 - \mu\beta_2 + (v_1 - v_2)\gamma_2 &= -x(v_2) + y(\lambda), \\ \gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2 + (v_1 - v_2)\mu &= -x(\beta_2) + y(\beta_1) \end{aligned}$$

Tekrardan, $(\mu)_u\,(\mu)_v \neq 0$ olduğundan

$$\left(2\mu\gamma_2 + v_1\beta_2 - \lambda\beta_1\right).\left(2\mu\gamma_1 - \lambda\beta_2 + v_2\beta_1\right) \neq 0$$

dır. Bu yüzden eğer $(\mu)_u\,(\mu)_v \neq 0$ ise

$$\sqrt{E} = \tfrac{(\mu)_u}{2\mu\gamma_2+v_1\beta_2-\lambda\beta_1}, \quad \sqrt{G} = \tfrac{(\mu)_v}{2\mu\gamma_1-\lambda\beta_2+v_2\beta_1}$$

dir.

Bir önceki bölümde olduğu gibi benzer şekilde $\mathbb{R}^4_1$ de spacelike yüzeylerde timelike ortalama eğrilik vektör alanı olan teoremin ifadesi verilecektir. İspatı benzer yolla yapılabilir.

Teorem 6.1 $v_1, v_2, \lambda, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \mu$ diferensiyellenebilir fonksiyonları $D \subset \mathbb{R}^2$ açık alt kümesinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlasınlar

$$\begin{aligned}
&\tfrac{(\mu)_u}{2\mu\gamma_2+v_1\beta_2-\lambda\beta_1} > 0,\\
&\tfrac{(\mu)_v}{2\mu\gamma_1-\lambda\beta_2+v_2\beta_1} > 0,\\
&-\gamma_1\sqrt{E}\sqrt{G} = \left(\sqrt{E}\right)_v,\\
&-\gamma_2\sqrt{E}\sqrt{G} = \left(\sqrt{G}\right)_u,\\
&-v_1v_2 + \lambda^2 - \mu^2 = \tfrac{1}{\sqrt{E}}(\gamma_2)_u + \tfrac{1}{\sqrt{G}}(\gamma_1)_v - \left((\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2\right),\\
&2\lambda\gamma_2 - \mu\beta_1 - (v_1 - v_2)\gamma_1 = \tfrac{1}{\sqrt{E}}(\lambda)_u - \tfrac{1}{\sqrt{G}}(v_1)_v,\\
&2\lambda\gamma_1 - \mu\beta_2 + (v_1 - v_2)\gamma_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{E}}(v_2)_u + \tfrac{1}{\sqrt{G}}(\lambda)_v,\\
&\gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2 - (v_1 - v_2)\mu = -\tfrac{1}{\sqrt{E}}(\beta_2)_u + \tfrac{1}{\sqrt{G}}(\beta_1)_v.
\end{aligned}$$

Burada

$$\sqrt{E} = \tfrac{(\mu)_u}{2\mu\gamma_2+v_1\beta_2-\lambda\beta_1}, \quad \sqrt{G} = \tfrac{(\mu)_v}{2\mu\gamma_1-\lambda\beta_2+v_2\beta_1}$$

$p_0 \in \mathbb{R}^4_1$ noktasında bir ortanormal çatı $\{x_0, y_0, b_0, l_0\}$ olsun. O zaman bir $D_0 \subset D$ açığı ve bir tek

$$M^2 = \{(z(u,v) : (u,v) \in D_0)\}$$

spacelike yüzeyi vardır öyleki M^2 herhangi bir noktadaki ortalama eğrilik vektör alanı sıfır olmayan timelike vektördür.

Üstelik M^2 yüzeyi p_0 noktasından geçer. v_1, v_2, λ, β_1, β_2, γ_1, γ_2, μ fonksiyonları M^2 nin geometrik fonksiyonlarıdır ve $\{x_0, y_0, b_0, l_0\}$ kümesi M^2 nin p_0 noktasındaki geometrik çatısıdır.

7. ÖRNEKLER

Bu bölümde yukarıda elde edilen çalışma $\mathbb{R}_1^4$ deki spacelike yüzeyler için uygulanacaktır.

$\mathbb{R}^4$ de verilen aşağıdaki yüzey gözönüne alınsın.

$$M = z(u,v) = (f(u)\cos\alpha v,\ f(u)\sin\alpha v,\ g(u)\cos\beta v,\ g(u)\sin\beta v) \tag{7.1}$$

burada $u \in J \subset \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$, $f(u)$ ve $g(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2 > 0,\ \left(f'\right)^2 + \left(g'\right)^2 > 0$$

şartaları şağlansın ve α, β pozitif sabitlerdir.

$\mathbb{R}_1^4$ de (7.1) e benzeyen spacelike yüzeylerini gözönüne alalım.

Örnek 7.1

$$M_1 = z(u,v) = (f(u)\cos\alpha v,\ f(u)\sin\alpha v,\ g(u)\cosh\beta v,\ g(u)\sinh\beta v)$$

ile parametrize edilen M_1 yüzeyini alalım. Burada $u \in J \subset \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi)$, $f(u)$ ve $g(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2 > 0,\ \left(f'\right)^2 + \left(g'\right)^2 > 0$$

şartları sağlansın ve α, β pozitif sabitlerdir.

M_1 in tanjant uzayı

$$\begin{aligned} z_u &= \left(f'(u)\cos\alpha v,\ f'(u)\sin\alpha v,\ g'(u)\cosh\beta v,\ g'(u)\sinh\beta v\right) \\ z_v &= (-\alpha f(u)\sin\alpha v,\ \alpha f(u)\cos\alpha v,\ \beta g(u)\sinh\beta v,\ \beta g(u)\cosh\beta v) \end{aligned}$$

vektör alanları tarafından verilsin.

M_1 in birinci temel form katsayıları

$$E = \left(f'(u)\right)^2 + \left(g'(u)\right)^2,\quad F = 0,\quad G = \alpha^2 f^2(u) - \beta^2 g^2(u).$$

M_1, $\mathbb{R}_1^4$ de bir spacelike yüzeydir.

M_1 in aşağıdaki normal çatı alanını seçelim.

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}\left(g'\cos\alpha v,\ g'\sin\alpha v,\ -f'\cosh\beta v,\ -f'\sinh\beta v\right),$$

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2}} \left(-\beta g \sin \alpha v,\ \beta g \cos \alpha v,\ \alpha f \sinh \beta v,\ \alpha f \cosh \beta v\right).$$

Burada

$$\langle n_1, n_1 \rangle = 1,\ \langle n_2, n_2 \rangle = -1$$

dir.

$z(u,v)$ nin ikinci dereceden kismi türevini hesaplayarak M_1 in c_{ij}^k fonksiyonu ve L, M, N ikinci temel formun katsayılarını elde edilebilir. Buradan

$$\begin{aligned}
L &= \frac{2\alpha\beta \left(gf' - fg'\right)\left(g'f'' - f'g''\right)}{\left((f')^2 + (g')^2\right)\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)}, \\
M &= 0, \\
N &= \frac{2\alpha\beta \left(gf' - fg'\right)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'\right)}{\left((f')^2 + (g')^2\right)\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)}.
\end{aligned}$$

Sonuçta M_1 in K ve k, $\varkappa$ invaryantları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
k &= \frac{4\alpha\beta \left(gf' - fg'\right)^2\left(g'f'' - f'g''\right)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'\right)}{\left((f')^2 + (g')^2\right)^3\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)^3}, \\
\varkappa &= \frac{\alpha\beta \left(gf' - fg'\right)}{\left((f')^2 + (g')^2\right)^2\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)^2} \\
&\quad . \frac{\left[\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)\left(g'f'' - f'g''\right) + \left((f')^2 + (g')^2\right)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'\right)\right]}{\left((f')^2 + (g')^2\right)^2\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)^2}, \\
K &= \frac{-\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'\right)\left(g'f'' - f'g''\right)}{\left((f')^2 + (g')^2\right)^2\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)^2}. \\
&\quad + \frac{\alpha^2\beta^2 \left((f')^2 + (g')^2\right)\left(gf' - fg'\right)^2}{\left((f')^2 + (g')^2\right)^2\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)^2}
\end{aligned}$$

H ortalama eğrilik vektör alanı n_1 ile lineer bağımlıdır. M_1 spacelike yüzeyinin ortalama eğrilik vektör alanının herhangi bir noktasında spacelike vektörü sıfırdan farklıdır.

Dikkat edilirse M_1 (u,v) asli parametreleri ile parametrize edilir.

$$x = \frac{z_u}{\sqrt{\left(f'(u)\right)^2 + \left(g'(u)\right)^2}},\ y = \frac{z_v}{\sqrt{\alpha^2 f^2(u) - \beta^2 g^2(u)}}$$

ile belirtilir.

M_1 in frenet tipi türev formüllerinden geometrik invaryant fonksiyonları elde edilebilir.

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= \frac{-\alpha^2 f f' - \beta^2 g g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)}, \\
v_1 &= \frac{\left(g' f'' - f' g''\right)}{\left((f')^2 + (g')^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad v_2 = \frac{-\alpha^2 f g' + \beta^2 g f'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)}, \\
\lambda &= 0, & \mu &= \frac{\alpha\beta\left(g f' - f g'\right)}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)}, \\
\beta_1 &= 0, & \beta_2 &= \frac{\alpha\beta\left(g g' + f f'\right)}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}\left(\alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2\right)}.
\end{aligned}
$$

λ invaryantı sıfır olduğundan M_1 yüzeyi bir Chen yüzeyidir.

M_1 yüzeyinin daha özel hali ve Chen yüzeyinin bir alt sınıfı

$$
f(u) = \cos u, \ g(u) = \sin u, \ \alpha = \beta = 1
$$

şeklinde alınırsa spacelike yüzeyde yatan De sitter uzayı elde edilir.

$$
S_1^3 = \left\{x \in \mathbb{R}_1^4 : \langle x, x \rangle = 1\right\}
$$

ile invaryant

$$
k = \tfrac{-4}{\cosh^2 2u}, \quad \varkappa = 0, \quad K = \tfrac{\cos^2 2u + 1}{\cos^2 2u}
$$

elde edilir.

Sonuç 7.1 Bu örnek flat normal konneksiyonlu spacelike yüzey ve spacelike ortalama eğrilik vektör alanı için yapıldı.

Örnek 7.2

$$
M_2 = z(u,v) = \left(f(u)\cos\alpha v, \ f(u)\sin\alpha v, \ g(u)\sinh\beta v, \ g(u)\cosh\beta v\right)
$$

ile parametrize edilen M_2 yüzeyini alalım. Burada $U \in J \subset \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi), f(u)$ ve $g(u)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$
\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2 > 0, \quad \left(f'\right)^2 - \left(g'\right)^2 > 0
$$

şartaları sağlansın ve α, β pozitif sabitlerdir.

M_2 nin tanjant uzayı

$$\begin{aligned} z_u &= \left(f'(u)\cos\alpha v,\ f'(u)\sin\alpha v,\ g'(u)\cosh\beta v,\ g'(u)\sinh\beta v\right), \\ z_v &= (-\alpha f(u)\sin\alpha v,\ \alpha f(u)\cos\alpha v,\ \beta g(u)\sinh\beta v,\ \beta g(u)\cosh\beta v) \end{aligned}$$

vektör alanları tarafından verilsin.

M_2 in birinci temel form katsayıları

$$E = \left(f'(u)\right)^2 - \left(g'(u)\right)^2, \quad F = 0, \quad G = \alpha^2 f^2(u) + \beta^2 g^2(u)$$

M_2, $\mathbb{R}^4_1$ de bir spacelike yüzeydir.

M_2 nin normal çatı alanını aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2}} (\beta g\sin\alpha v,\ -\beta g\cos\alpha v,\ \alpha f\cosh\beta v,\ \alpha f\sinh\beta v), \\ n_2 &= \frac{1}{\sqrt{(f')^2 - (g')^2}} \left(g'\cos\alpha v,\ g'\sin\alpha v,\ f'\sinh\beta v,\ f'\cosh\beta v\right). \end{aligned}$$

Burada

$$\langle n_1, n_1\rangle = 1, \quad \langle n_2, n_2\rangle = -1$$

dir. $z(u,v)$ nin ikinci dereceden kismi türevini hesaplayarak M_2 nin c^k_{ij} fonksiyonu ve L, M, N ikinci temel formun katsayılarını elde edilebilir.

$$\begin{aligned} L &= \frac{2\alpha\beta\left(gf' - fg'\right)\left(g'f'' - f'g''\right)}{\left((f')^2 - (g')^2\right)\left(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2\right)}, \\ M &= 0, \\ N &= \frac{2\alpha\beta\left(gf' - fg'\right)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'\right)}{\left((f')^2 - (g')^2\right)\left(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2\right)}. \end{aligned}$$

İkinci temel formun katsayıları L, M, N hesaplanılarak $f(u)$ ve $g(u)$ fonksiyonları ve onların aşağıdaki türev formülleri ile ifade edilen M_2 nin K ve $k, \varkappa$ invaryantlarını elde edilir.

$$\begin{aligned} k &= \frac{4\alpha^2\beta^2\left(gf' - fg'\right)^2\left(g'f'' - f'g''\right)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'\right)}{\left((f')^2 - (g')^2\right)^3\left(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2\right)^3}, \\ \varkappa &= \frac{\alpha\beta\left(gf' - fg'\right)}{\left((f')^2 - (g')^2\right)^2\left(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2\right)^2}\Big[\left(\alpha^2 f^2 + \beta^2 g^2\right)\left(g'f'' - f'g''\right) \\ &\quad + \left(\left(f'\right)^2 - \left(g'\right)^2\right)\left(\alpha^2 fg' + \beta^2 gf'\right)\Big], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{\left(\alpha^2 f^2+\beta^2 g^2\right)\left(\alpha^2 f g^{'}+\beta^2 g f^{'}\right)\left(g^{'} f^{''}-f^{'} g^{''}\right)}{\left(\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2\right)^2\left(\alpha^2 f^2+\beta^2 g^2\right)^2} \\
&\quad -\frac{\alpha^2 \beta^2\left(\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2\right)\left(g f^{'}-f g^{'}\right)^2}{\left(\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2\right)^2\left(\alpha^2 f^2+\beta^2 g^2\right)^2}.
\end{aligned}
$$

H ortalama eğrilik vektör alanı n_2 ile lineer bağımlıdır. Bundan dolayı M_2 timelike ortalama vektör alanlı spacelike yüzeydir.

M_2 (u, v) asli parametreleri ile parametrize edilmiştir.

M_2 nin frenet tipi türev formüllerinden geometrik invaryant fonksiyonları

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= \frac{-\alpha^2 f f^{'}+\beta^2 g g^{'}}{\sqrt{\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2}\left(\alpha^2 f^2+\beta^2 g^2\right)}, \\
v_1 &= \frac{\left(g^{'} f^{''}-f^{'} g^{''}\right)}{\left(\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & v_2 &= \frac{-\alpha^2 f g^{'}+\beta^2 g f^{'}}{\sqrt{\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2}\left(\alpha^2 f^2+\beta^2 g^2\right)}, \\
\lambda &= 0, & \mu &= \frac{\alpha \beta\left(f g^{'}-g f^{'}\right)}{\sqrt{\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2}\left(\alpha^2 f^2+\beta^2 g^2\right)}, \\
\beta_1 &= 0, & \beta_2 &= \frac{\alpha \beta\left(g g^{'}-f f^{'}\right)}{\sqrt{\left(f^{'}\right)^2-\left(g^{'}\right)^2}\left(\alpha^2 f^2+\beta^2 g^2\right)}.
\end{aligned}
$$

λ invaryantı sıfır olduğundan M_2 Chen yüzeyidir.

$$
f(u)=\sinh u, \quad g(u)=\cosh u, \qquad \alpha=\beta=1
$$

özel durumu için spacelike yüzeyde yatan birim hiperbolik küre

$$
H_1^3=\left\{x \in \mathbb{R}_1^4:\langle x, x\rangle=-1\right\}
$$

ile invaryant

$$
k=\tfrac{-4}{\cosh^2 2u}, \qquad \varkappa=0, \quad K=\tfrac{-\cosh^2 2u+1}{\cosh^2 2u}
$$

elde edilir.

Sonuç 7.2 Bu örnek flat normal konneksiyonlu spacelike yüzey ve timelike ortalama eğrilik vektör alanlı spacelike yüzeyler için yapıldı.

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Ganchev ve Miloushave (2010) tarafından elde edilen karakterizasyonlar detaylı bir şekilde incelenmişitir. Üçüncü bölümde Weingarten tipli dönüşümün invaryantları incelenmiş ve bunların yüzeyin sınıflandırılmasında nasıl bir rol oynadığı gösterilmiştir. Ortalama eğrilik vektörünün timelike veya spacelike olmasına göre yüzey için varlık ve teklik teoremi verilmiştir.
Ayrıca,Weingarten tipli dönüşümün yardımıyla asli eğrilikler ve asli eğrilik doğrultuları verilmiştir. İleri çalışmalar için, burada bulunan sonuçlar $\mathbb{R}^4_2$ deki yüzeyler için de yeni sonuçlar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoglu, H. H. 1983. Diferensiyel Geometri, Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi

[2] Chen B.-Y., Geometry of submanifolds. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[3] B. O'neill, 1983, Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativity,Academic Press, New York.

[4] Do Carmo, Manfredo Perdigao.1992.Riemannian Geometry,Boston.

[5] Do Carmo, Manfredo Perdigao. 1976. Differential Geometry Of Curves And Surfaces, vol. 2. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

[6] Ganchev G. and V. Milousheva. On the theory of surfaces in the four-dimensional Euclidean space.Kodai Math. J., 31 (2008), 183-198.

[7] Ganchev G, V.Milousheva . An invariant theory of spacelike surfaces in the four-dimensional Minkowski space.Mediterr J Math 2012; 9: 267-294.

[8] Bulca, B. 2012. $\mathbb{E}^4$ deki Yüzeylerin bir Karakterizasyonu. Doktora Tezi, UÜ FenBilimleri, Bursa.

[9] F. Aceff-Sanchez, L. Del Riego SeniorGeometry of the conics on the Minkowski plane.Mathematical Physics, (2007), arXiv:0712.2234v1