KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bazı Kuadrik Yüzeylerin Lie Grup Yapıları Ve C^{∞}-Etkiler

ZEHRA ÇATALBAŞ

HAZİRAN 2015

ÖZET

BAZI KUADRİK YÜZEYLERİN LIE GRUP YAPILARI VE C^{∞}-ETKİLER

ÇATALBAŞ, Zehra
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Haziran 2015, 33 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında kısaca bilgi verilmiştir. İkinci bölümde bir sonraki bölümde kullanılacak temel kavramlar ele alınmıştır. Üçüncü bölümde kuadratik çarpımla bazı kuadrik yüzeyler elde edilmiş, bunların Lie grup yapıları ve Lie grup etkileri incelenmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diferensiyellenebilir Manifoldlar, Lie Grupları, Lie Grup Etkileri, Kuadratik Çarpım

ABSTRACT

Lie Group Structures Of Some Quadratics Surfaces
And C^{∞}-Actıons

ÇATALBAŞ Zehra
Kırıkkale University
Institue Of Sciences
Department Of Mathematics, Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN
June 2015, 33 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the aim of the thesis and a brief information about the resource are given. In the second chapter, basic concepts that will be used in the following sections are addressed. In the third chapter, some quadratic surfaces with multiply quadratic have been obtained, their Lie Group structures and Lie Group actions have been examined.The fourth chapter is devoted to discussion and conclusion.

Keywords: Differentiable Manifolds, Lie Groups, Lie Group Actions, Quadratic Multiplication

TEŞEKKÜR

Çalışmamın başlangıcında ve devamındaki destek ve yardımlarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Halit Gündoğan'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL Sayfa

1.GİRİŞ

1.1.Kaynak Özetleri

Temel Kavramlar için, Differentiable Manifolds, (R.S.Clark,F.Brickell) ve An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry (William M. Boothby) kitaplarından faydalanılmıştır. H.Gündoğan-B. Karakaş'ın ''Conics, Quadrics and Hiperquadrics'' adlı makalesinde Kuadratik Çarpım ve bu çarpımla elde edilen Kuadrik Yüzeyler ele alınmıştır. H. H. Uğurlunun doktora tezinde, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Lie Grup Yapıları ve C^{∞}-Etkiler gösterilmiştir.

1.2.Çalışmanın Amacı

Kuadratik çarpımla Kuadrik yüzeyler elde etmek ve bu Kuadrik yüzeylerin Lie grup yapılarını ve Lie grup etkilerini incelemektir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1. (Harita): M bir cümle olsun.

$$\varphi : M \to \mathbb{R}^n$$

dönüşümü için Dom φ = U olmak üzere aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyor ise (U,φ) ye M de bir n-boyutlu harita denir[1].

i) φ birebirdir,

ii) φ (U) $\mathbb{R}^n$ de açıktır.

Tanım 2.2. (Haritaların Bağdaşa bilirliği): (U, φ) ve (V, ψ) , M de $U \cap V \neq \phi$ olacak şekilde herhangi iki harita olsun.

$$\psi \text{ o } \varphi^{-1} : \varphi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$$

dönüşümü bir diffeomorfizm ise (U, φ) ile (V, ψ) haritaları bağdaşabilir denir[1].

Tanım 2.3. (C^∞ -Atlas) :A = $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, M nin haritalarının bir koleksiyonu olsun. Eğer, aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyor ise *A* ya M nin bir C^∞ - atlası denir[1].

i) $M = \bigcup_{i\in I} Ui$

ii) $\forall i, j \in I$ için (U_i, φ_i) ve (U_j , ψ_j) haritaları bağdaşabilir.

Tanım 2.4. (Tam Atlas): M cümlesinin bir C^∞ - atlası, M nin hiçbir C^∞ - atlası tarafından ihtiva edilmiyorsa *A* ya tam atlas'tır denir[1].

*Tanım 2.5. (Diferensiyellenebilir Manifold) :*Bir M cümlesinin bir C^∞ - tam atlasına, M de bir n-boyutlu C^∞ - yapı ve bu yapı ile birlikte M ye n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir [1].

Tanım 2.6.: M ve M' , sırasıyla, n ve n' boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold olsun. Bir

$$f : M \rightarrow M'$$

fonksiyonu verilsin. $m \in M$ ve $f(m)$ deki haritalar, sırasıyla, φ ve φ' olmak üzere

$$F = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

fonksiyonuna f nin koordinat temsilcisi denir [1].

2.2.Lie Grubu ve C^∞ -Etkiler

Tanım 2.7. (Lie Grubu) : G bir grup ve diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olsun.

$$\theta : G \times G \rightarrow G$$

$$(g_1, g_2) \rightarrow \theta(g_1, g_2) = g_1 g_2$$

Biçiminde tanımlı θ grup fonksiyonu diferensiyellenebilir ise G ye bir Lie grubu denir[1].

Tanım 2.8. (C^∞ -Etki): G bir Lie grubu ve M bir C^∞-manifold olsun.

$$\theta : G \times M \rightarrow M$$

dönüşümü C^∞ ve aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, G Lie grubu M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine C^∞ etki ediyor denir [2].

i) $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall\ p \in M$ için;

$$\theta(g_1, \theta(g_2, p)) = \theta(g_1 g_2, p)$$

ii) $e \in G$ birim eleman olmak üzere $\forall p \in M$ için;

$$\theta(e, p) = p \qquad \text{dir.}$$

Teorem 2.1. G bir Lie grubu ve M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\theta : G \times M \rightarrow M$$

C^∞ - etkisi verilsin. $\forall g \in G$ için

$$\theta : M \rightarrow M$$

$$p \rightarrow \theta_g(p) = \theta(g, p)$$

biçiminde tanımlanan θ_g dönüşümü bir diffeomorfizmdir[2].

Tanım 2.9. G bir Lie grubu ve M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\theta: G \times M \to M$$

C^∞ - etkisi verilsin. $P \subset M$ bir alt cümle olmak üzere GP,

$$GP = \{\theta(g, p) \mid g \in G, p \in P\}$$

biçiminde tanımlanır. Tek elemanlı $\{p\} \subset M$ alt cümlesi için

$$G\{p\} = \{\theta(g, p) \mid g \in G\}$$

dir.

$G\{p\}$, kısaca G_p ile gösterilir ve $p \in M$ noktasının, G nin θ C^∞ - etkisi altındaki yörüngesi olarak adlandırılır[2].

Tanım 2.10.(Geçişli Etki) : G bir Lie grubu ve M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\theta : G \times M \to M$ bir C^∞ - etki olmak üzere, eğer; $\forall$ m_1, m_2 için

$$m_2 = \theta(g, m_1)$$

olacak şekilde bir $g \in G$ varsa G, M üzerine geçişli olarak etki ediyor denir[2].

Sonuç 2.1. $\theta : G \times M \to M$ C^∞ - etkisi geçişli ise bir tek yörünge vardır ve bu yörünge M nin kendisidir.

Tanım 2.11. (Effective Etki) : G bir Lie grubu ve M diferensiyellenebilir manifold olsun. $\theta : G \times M \to M$ C^∞ - etkisi verilsin. $\forall m \in M$ için $\theta_g(m) = m$ eşitliği, yalnızca $g = e$ için sağlanıyor ise G, M üzerine etkili olarak etki ediyor denir[2].

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Kuadratik çarpım adı verilen bir çarpım tanımlandı. Bu çarpım kullanılarak bazı Kuadrik yüzeyler elde edildi. Bu Kuadrik yüzeylerin Lie grup yapıları ve C^{∞}-etkileri incelendi.

3.1. Kuadratik Çarpım

Tanım 3.1.(Kuadratik Çarpım **) :** I , $\mathbb{R}$ de bir açık aralık ve *f*: I → $\mathbb{R}$ bir sürekli birebir fonksiyon olmak üzere; C = { (x_1, x_2) | $x_2 = f(x_1)$, $x_1 \in$ I } eğrisini ve $\mathbb{R}^2$ de tek simetri merkezli ve non-dejenere bir K koniğini ele alalım.

$$\forall\ (x_1, x_2) \in C \text{ ve } \forall\ (y_1, y_2) \in K \text{ için}$$

$$\otimes : \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = (x_1 y_1 , x_1 y_2 , x_2)$$

ile tanımlı

$$\otimes : C \times K \to \mathbb{R}^3$$

fonksiyonuna bir Kuadratik Çarpım adı verilir[5].

$$\otimes (C \times K) \text{ cümlesi } \mathbb{R}^3 \text{te bir yüzeydir.}$$

$$\otimes (C \times K) = Q \text{ diyelim.}$$

Buna göre aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.1. $\otimes : C \times K \to Q$ fonksiyonu birebirdir[5].

Teorem 3.2. *0*∈I için $f(0) = k$ olmak üzere;

Q - {(0,0,k)} = Q* ve C - {(0,k)} = C* ile gösterilsin.

Bu durumda $\otimes^{-1}$ fonksiyonunun inversi vardır ve

$$\otimes^{-1} : Q^* \to C^* \times K$$

$$(u, v, w) \to \otimes^{-1}(u, v, w) = \Big(\big(f^{-1}(w), w\big), \Big(\frac{u}{f^{-1}(w)}, \frac{v}{f^{-1}(w)}\Big)\Big) \text{ dir. [5]}$$

Sonuç 3.1. K = S^1 = { $(y_1 , y_2) \in \mathbb{R}^2$ | $y_1^2 + y_2^2 = 1$ } olsun. Bu durumda

$\otimes\,(C \times S^1)$ bir dönel yüzeydir[5].

3.2. Koninin Lie Grup Yapısı

Tanım 3.1. de $C = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = x_1 ,\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ alalım.

Sonuçtan 3.1. den dolayı $\otimes\,(C \times S^1)$ bir dönel yüzeydir.

Bu dönel yüzeyi $\mathcal{K}$ ile gösterelim.

$$\forall\,(a, b) \in C \text{ ve } \forall\,(x, y) \in S^1 \text{ için}$$

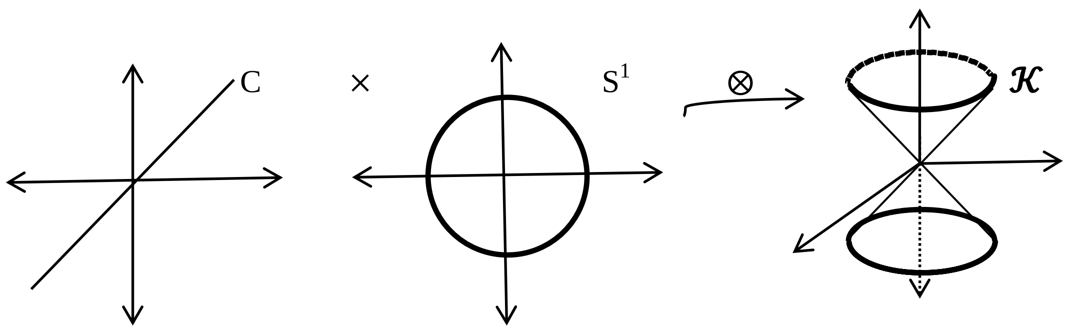
$$\otimes : C \times S^1 \to \mathcal{K}$$

$$((a, b), (x, y)) \to (ax, ay, b)$$

olmak üzere

$$\mathcal{K} = \{\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \,\}$$

dir ve bu bir konidir.



Şekil 3.1. Koni

Teorem 3.2.1. $C^* = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = x_1 ,\ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ olmak üzere

$$\forall\,(a, b)\,(c, d) \in C \text{ için}$$

$$(a, b) \,.\, (c, d) \to (a\cdot c,\ b\cdot d)$$

ile tanımlanan ‘‘·’’ İç işlemi ile birlikte C bir Abel grubudur.

İspat: · işlemi birleşimlidir.

· işlemine göre birim eleman $e=(1,1) \in C$ dir.

$\forall$ (a,b) $\in$ C için $(a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \in$ C dir.

· işlemi değişmelidir.

Buna göre (C ,·) bir Abel grubudur.

$\mathcal{K}^* = \mathcal{K}$ - {(0, 0, 0)} olmak üzere $\mathcal{K}^*$ üzerinde

$\forall X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{K}^*$ için;

$$(X, Y) \rightarrow (x_1y_1 - x_2y_2 , x_1y_2 + x_2y_1 , x_3y_3)$$

ile tanımlanan

$$\odot : \mathcal{K}^* \times \mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$$

iç işlemini ele alalım. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.2. ($\mathcal{K}^*$, $\odot$) ikilisi bir değişmeli gruptur.

İspat: i) Kapalılık Özelliği:

$\forall X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{K}^*$ için;

$$\odot (X, Y) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1, x_3y_3)$$

$$(x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 - (x_3y_3)^2 = 0$$

dır. O halde $X \odot Y \in \mathcal{K}^*$ olup $\odot$ işlemi kapalıdır.

ii) Birleşme Özelliği:

$\forall X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_1, z_3) \in \mathcal{K}^*$

$(X \odot Y) \odot Z = (x_3y_3z_3 , x_3y_3z_3) \odot$

$$\left(\frac{x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2}{x_3y_3z_3}, \frac{x_1y_1z_2 - x_2y_2z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1}{x_3y_3z_3}\right)$$

$= (x_1 (y_1z_1 - y_2z_2) - x_2 (y_2z_1 + y_1z_2) , x_1 (y_1z_2 + y_2z_1) + x_2 (y_1z_1 - y_2z_2) , x_3y_3z_3)$

$= (x_1, x_2, x_3) \odot (y_1z_1 - y_2z_2 , y_1z_2 + y_2z_1 , y_3z_3) = X \odot (Y \odot Z)$

iii) Birim Eleman:

$\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{K}^*$ için;

$$X \odot e = X$$

Olacak biçimde $e = (e_1, e_2, e_3) \in \mathcal{K}^*$ elemanını bulalım.

$$X \odot e = X$$

den;

$x_1e_1 - x_2e_2 = x_1$ $\quad\quad$ $x_1e_2 + x_2e_1 = x_2$ $\quad\quad$ $x_3e_3 = x_3$

sistemi elde edilir. Buradan; $e_3 = 1$, $e_2 = 0$ ve $e_1 = 1$ bulunur.

O halde $\odot$ işlemine göre birim eleman e = (1,0,1) $\in \mathcal{K}^*$ dır.

iv) Ters Eleman:

$\forall$ X = $(x_1, x_2, x_3) \in Q^*$ için;

$$X \odot X' = e$$

Olacak biçimdeki $X' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathcal{K}^*$ elemanını bulalım.

$$X \odot X' = e$$

den;

$x_1x'_1 - x_2x'_2 = 1$ $\quad\quad$ $x_1x'_2 + x_2x'_1 = 0$ $\quad\quad$ $x_3x'_3 = 1$

sistemi elde edilir. Buradan;

$x'_1 = \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$ $\quad\quad$ $x'_2 = \dfrac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ $\quad\quad$ $x'_3 = \dfrac{1}{x_3}$

bulunur. O halde $\odot$ işlemine göre X = $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{K}^*$ elemanının tersi

$$X' = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \, , \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \, , \frac{1}{x_3} \right) \in \mathcal{K}^*$$

dir.

v) Değişme Özelliği:

$X \odot Y = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1, x_3y_3) = (y_1x_1 - y_2x_2, y_1x_2 + y_2x_1, y_3x_3) = Y \odot X$

O halde $(\mathcal{K}^* , \odot)$ ikilisi bir değişmeli gruptur.

Teorem 3.2.3. $\mathcal{K}^*$ bir 2-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

İspat: $\quad U_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{K}^* \mid x_3 > 0\}$

$\quad\quad U_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{K}^* \mid x_3 < 0\}$

cümlelerini ele alalım.

$$\varphi_1 : U_1 \subset \mathcal{K}^* \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$$

$$\varphi_2 : U_2 \subset \mathcal{K}^* \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$$

dönüşümleri için

- φ_1 ve φ_2 birebirdir.
- $\varphi_1\ (U_1) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ve $\varphi_2\ (U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

cümleleri $\mathbb{R}^2$ de birer açık olduğundan (U_1, φ_1) ve (U_2, φ_2) dönüşümleri $\mathcal{K}^*$ ın 2-boyutlu birer haritasıdır.

Ayrıca $U_1 \cup U_2 = \mathcal{K}^*$ ve $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ olduğundan

$\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ailesi $\mathcal{K}^*$ ın bir C^∞-atlasıdır.

Bu C^∞-yapı ile birlikte $\mathcal{K}^*$, bir 2-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Teorem 3.2.4. $\mathcal{K}^*$ bir Lie grubudur.

İspat: Teorem 3.2.2. den $(\mathcal{K}^*, \odot)$ bir değişmeli gruptur. Teorem 3.2.3. den $\mathcal{K}^*$ bir diferensiyellenebilir manifolddur. İspat için $\odot$ grup işleminin diferensiyellenebilir olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}^* \times \mathcal{K}^* \arrow[r, "\odot"] \arrow[d, "\varphi_i \times \varphi_j"] & \mathcal{K}^* \arrow[d, "\varphi_k"] \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \qquad 1 \leq i, j, k \leq 2$$

Şekil 3.2. ϕ dönüşümünün diyagramı

$\phi = \varphi_k \circ \odot \circ (\varphi_i \times \varphi_j)^{-1}$ dönüşümünün diferensiyellenebilir olduğunu göstereceğiz.

i = 1, j = 1 ve k = 2 alalım.

$\forall\, u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in (\varphi_i \times \varphi_j)(U_1 \times U_2)$ için

$\phi = \varphi_2\left(\odot\left(\left(u_1,\ u_2,\sqrt{u_1^2+u_2^2}\right),\left(v_1,\ v_2,\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)\right)\right)$

$\phi = \varphi_2\left(u_1v_1 - u_2v_2,\ u_1v_2 + u_2v_1,\ \sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2}\right)$

$\phi = (u_1v_1 - u_2v_2,\ u_1v_2 + u_2v_1)$

$\Rightarrow \phi$ diferensiyellenebilirdir

$\Rightarrow \odot$ diferensiyellenebilirdir

Buna göre $\mathcal{K}^*$ bir Lie grubudur.

Dayanak eğrisi $x_3 = 1$ düzleminde (0, 0, 1)-merkezli, r-yarıçaplı çember ve tepe noktası orijin olan koniği $\mathcal{K}_r$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\mathcal{K}_r = \{\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 r^2 = 0\ \}$$

dır. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.5. $\mathcal{K}_r^* = \mathcal{K}_r - \{\ (0, 0, 0)\ \}$ olmak üzere $\mathcal{K}_r^*$ bir diferansiyelenebilir manifolddur.

İspat:

$$U_1 = \{\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ x_3 > 0\}$$
$$U_2 = \{\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ x_3 < 0\}$$

cümlelerini ele alalım.

$$\Pi_1 : U_1 \subset \mathcal{K}_r^* \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$$

$$\Pi_2 : U_2 \subset \mathcal{K}_r^* \to \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$$

dönüşümleri için ;

$i)$ Π_1 ve Π_2 birebirdir.

ii) $\Pi_1(U_1) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ve $\Pi_2(U_2) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

cümleleri $\mathbb{R}^2$ de açık olduğundan (U_1 , Π_1) ve (U_2 , Π_2) dönüşümleri $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*}$ ın 2-boyutlu birer haritasıdır.

Ayrıca $U_1 \cup U_2 = \boldsymbol{\mathcal{K}}^*$ ve $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ olduğundan

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{(U_1 , \Pi_1) ,(U_2 , \Pi_2) \}$ ailesi $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*}$ ın bir C^∞-atlasıdır.

Bu C^∞-yapı ile birlikte $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*}$ bir 2-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

3.2.1. $\boldsymbol{\mathcal{K}}^*$ Lie Grubunun $\boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*}$ Manifoldu Üzerine Bir C^∞- Etkisi

Bu bölümde;

$$\Theta : \boldsymbol{\mathcal{K}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*}$$

dönüşümünü $\forall$ $X = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}^*$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*}$ için

$$\Theta\,(X, Y) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1, x_3y_3r)$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 3.2.6. Yukarıda tanımlanan Θ dönüşümü $\mathcal{K}^*$ Lie grubunun $\mathcal{K}_{\mathrm{r}}^{*}$ manifoldu üzerine bir C^∞- etkisidir.

İspat: i) Θ diferensiyellenebilirdir.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{K}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*} \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\varphi_i \quad \Pi_j"'] & \boldsymbol{\mathcal{K}}_{\mathbf{r}}^{*} \arrow[d, "\Pi_k"] \\
\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd} \qquad 1 \leq i, j, k \leq 2$$

Şekil 3.3. ϕ dönüşümünün diyagramı

$\phi = \Pi_k \circ \Theta \circ (\varphi_i \circ \Pi_j)^{-1}$ dönüşümünün diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim.

$i = 1 \quad j = 1$ ve $k = 2$ alalım.

$\phi = \Pi_2 \left((\Theta ((x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), (y_1, \; y_2, \; \frac{1}{r}\sqrt{y_1^2 + y_2^2})) \right)$

$\phi = \Pi_2 (x_1y_1 - x_2y_2 \, , \, x_1y_2 + x_2y_1 \, , \frac{1}{r} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \;)$

$\phi = (x_1y_1 - x_2y_2 \, , \, x_1y_2 + x_2y_1)$

$\Rightarrow \phi$ diferensiyellenebilirdir.

$\Rightarrow \Theta$ diferensiyellenebilirdir.

ii) $\forall \; X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{K}^*$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathcal{K}_{\mathbf{r}}^*$ için

$$\Theta (X , \Theta (Y, Z)) = \Theta (X \odot Y, Z)$$

eşitliği $\odot$ işleminin birleşme özelliğinden açıktır.

iii) $e = (1, 0, 0) \in \mathcal{K}^*$ ve $\forall \; P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{K}_{\mathbf{r}}^*$ için

$$(e, P) = P$$

dir. O halde Θ bir C^{∞}- etkidir.

Teorem 3.2.7. Θ C^{∞}- etkisi geçişlidir.

İspat: $\forall \; p, q \in \mathcal{K}_{\mathbf{r}}^*$ için

$$p = \Theta (X, q)$$

olacak şekilde $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{K}^*$ elemanını bulalım.

$p = \Theta (X, q)$ ise

$$x_1q_1 - x_2q_2 = p_1$$

$$x_1q_2 + x_2q_1 = p_2$$

$$x_3q_3r = p_3$$

sistemi elde edilir. Buradan;

$$x_1 = \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{q_1^2 + q_2^2}$$

$$x_2 = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{q_1^2 + q_2^2}$$

$$x_3 = \frac{p_3}{q_3r}$$

$X = (\frac{p_1q_1+p_2q_2}{q_1^2+q_2^2} \, , \frac{p_2q_1-p_1q_2}{q_1^2+q_2^2} \, , \frac{p_3}{q_3r}) \in \mathcal{K}^*$ bulunur.

O halde θ etkisi geçişlidir.

Sonuç 3.2.1. Herhangi bir p $\in$ $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}^{*}$ için $(\mathcal{K}^{*})_{\{p\}}$, θ etkisine göre p nin yörüngesini göstermek üzere

$$(\mathcal{K}^{*})_{\{p\}} = \mathcal{K}_{\mathbf{r}}^{*}$$

dir.

Teorem 3.2.8. $\mathcal{K}^{*}$ Lie grubu $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}^{*}$ manifoldu üzerine etkili olarak etki eder.

İspat: $g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathcal{K}^{*}$ ve $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{K}_{\mathbf{r}}^{*}$ için

$$\theta\,(\,g, m\,) = m$$

eşitliğinin sadece g = e için sağlandığını gösterelim.

$$\theta\,(\,g, m\,) = m \text{ ise}$$

$$g_1 m_1 - g_2 m_2 = m_1$$
$$g_1 m_2 + g_2 m_1 = m_2$$
$$g_3 m_3 = m_3$$

sistemi elde edilir. Buradan; $g_1 = 1$, $g_2 = 0$, $g_3 = 1$ bulunur.

Yani g = (1, 0, 1) = e $\in$ $\mathcal{K}^{*}$ olduğu görülür.

O halde θ etkisi etkilidir.

3.2.2. $\mathcal{K}^{*}$ Lie Grubunun $\mathbb{R}^{3}$ Üzerine Bir C^{∞}- Etkisi

Bölüm 3.3. te verilen

$$\theta : \mathcal{K}^{*} \times \mathcal{K}_{\mathbf{r}}^{*} \to \mathcal{K}_{\mathbf{r}}^{*}$$

C^{∞}- etkisini ele alalım.

$\forall\, r \in \mathbb{R}^{+}$ için $\mathcal{K}_{\mathbf{r}}^{*} \subset \mathbb{R}^{3}$ olduğundan

$$\theta'\,(\,X, Y\,) = \theta\,(\,X, Y\,)$$

olmak üzere;

$$\theta' : \mathcal{K}^{*} \times \mathbb{R}^{3} \to \mathbb{R}^{3}$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Açıkça görülür ki $\forall\, Y \in \mathbb{R}^{3}$ ve $\forall\, X \in \mathcal{K}^{*}$ için

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 r^2 = 0$$

olmak üzere;

$$\Theta'(X, Y) \in \mathcal{K}^* \subset \mathbb{R}^3 \text{ tür.}$$

Teorem 3.2.9. $\Theta' : \mathcal{K}^* \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\Theta'(X, Y) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1, x_3y_3r)$$

şeklinde tanımlanan Θ' dönüşümü bir C^∞ etkidir.

İspat: i) $\forall X \in \mathcal{K}^*$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2r^2 = 0$$

olmak üzere $Y \in \mathcal{K}_r^*$ olduğundan ve $\Theta'(X, Y) = \Theta(X, Y)$ biçiminde tanımlandığından teorem 3.2.6. dan Θ, C^∞ olduğundan Θ' de C^∞ dur.

i) $\forall X, Y \in \mathcal{K}^*$ ve $\forall P \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} \Theta'(X, \Theta'(Y, P)) &= \Theta'(X, \Theta(Y, P)) \\ &= \Theta(X, \Theta(Y, P)) \\ &= \Theta(X \odot Y, P) \\ &= \Theta'(X \odot Y, P) \end{aligned}$$

dir.

ii) $e = (1,0,1)$ ve $\forall p \in \mathbb{R}^3$ için

$$\Theta'(e, p) = \Theta(e, p) = p$$

dir. O halde Θ' de bir C^∞-etkidir.

Sonuç 3.2.2. Herhangi bir $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ noktasının Θ' etkisi altındaki yörüngesi $(\mathcal{K}^*)'_{\{p\}}$ ile gösterilmek ve $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2r^2 = 0$ olmak üzere

$$(\mathcal{K}^*)'_{\{p\}} = \mathcal{K}_r^*$$

dir.

İspat: $\forall p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2r^2 = 0$ olsun. $p \in \mathcal{K}_r^*$ dır. Θ, C^∞-etkisine göre sonuç 3.2.1.den;

$$(\mathcal{K}^*)_{\{p\}} = \mathcal{K}_r^*$$

idi. Buna göre,

$$(\mathcal{K}^*)_{\{p\}} = \{ q \in \mathcal{K}_r^* \mid q = \Theta(X, P), \forall X \in \mathcal{K}^* \}$$

$= \{ q \in \mathcal{K}^*_{\mathbf{r}} \mid q = \Theta' (X, P) , \forall X \in \mathcal{K}^* \}$

$= (\mathcal{K}^*)'_{\{p\}}$

dir.

Dolayısıyla,

$$(\mathcal{K}^*)'_{\{p\}} = \mathcal{K}^*_{\mathbf{r}}$$

dır.

3.3. Tek Kanatlı Hiperboloidin Lie Grup Yapısı

Tanım 3.1. de $C = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1 \}$ alalım.

$$\bar{C} = \{ (x_1, x_2) \in C \mid x_1 > 0\}$$

olmak üzere sonuç 3.1. den dolayı $\otimes (\bar{C} \times S^1)$ bir dönel yüzeydir.

Bu dönel yüzeyi $\mathcal{H}$ ile gösterelim.

$$\forall (a,b) \in \bar{C} \text{ ve } \forall (x,y) \in S^1 \text{ için}$$

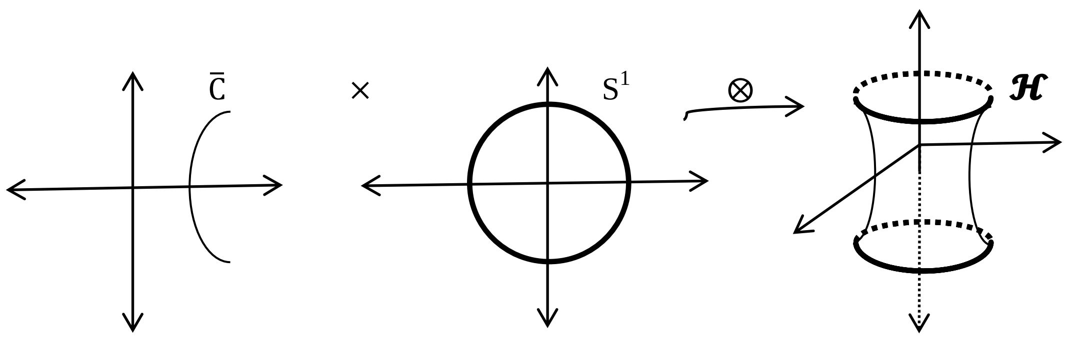
$$\otimes : \bar{C} \times S^1 \to \mathcal{H}$$

$$((a,b),(x,y)) \to (ax, ay, b)$$

olmak üzere

$$\mathcal{H} = \{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1 \}$$

dir ve bu bir tek kanatlı hiperboloiddir.



Şekil 3.4. Tek Kanatlı Hiperboloid

Tanım 3.3.1. $H = \{ a + hb \mid a, b \in \mathbb{R}, h^2 = 1 \}$ cümlesine Hiperbolik Sayılar cümlesi denir[3].

$\forall\, a = a_1 + h\, a_2$, $b = b_1 + h\, b_2 \in H$ için

$$a \cdot b = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) + h(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

iç işlemiyle birlikte $(H , \cdot)$ bir Abel grubudur.

$$C \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H$$

$$(a_1, a_2) \to (a_1, a_2) \to a_1 + h\, a_2$$

birebir dönüşümünü ele alalım.

H üzerindeki iç işlemden faydalanarak C üzerinde bir iç işlem tanımlayacağız.

$$C \times C \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow H \times H \longrightarrow H \longrightarrow$$

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \to (a_1, a_2), (b_1, b_2) \to (a_1 + h\, a_2), (b_1 + h\, b_2) \to (a_1 b_1 + a_2 b_2) + h(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow C$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 , a_1 b_2 + a_2 b_1) \to (a_1 b_1 + a_2 b_2 , a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

dönüşümü dikkate alınırsa

$$\cdot : C \times C \longrightarrow C$$

$$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \longrightarrow (a_1 b_1 + a_2 b_2 , a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

iç işlemini elde edilir.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.1. $(C , \cdot)$ bir Abel grubudur.

İspat: $\cdot$ işlemi birleşimlidir.

$\cdot$ işlemine göre birim eleman $e = (1, 0) \in C$ dir.

$\forall\, (a, b) \in C$ için $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2} , - \frac{a_2}{a_1^2 - a_2^1} \right) \in C$ dir.

$\cdot$ işlemi değişmelidir.

Buna göre $(C ,\cdot)$ bir Abel grubudur.

$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ üzerinde;

$\forall\, X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}$ için;

$$\odot(X, Y) = \Big[\Big(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3 \Big) \Big(\frac{x_1y_1 - x_2y_2}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}} \Big),$$

$$\Big(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3 \Big) \Big(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}} \Big), \Big(y_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{1+y_3^2} \Big) \Big]$$

ile tanımlanan

$$\odot : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

iç işlemini ele alalım.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.2. ($\mathcal{H}$, $\odot$) ikilisi bir değişmeli gruptur.

İspat: i) Kapalılık Özelliği:

$\forall$ X = (x_1, x_2, x_3) ve Y = $(y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H}$ için;

$$\left(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3 \right)^2 \left(\frac{x_1y_1 - x_2y_2}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}} \right)^2$$

$$+ \left(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3 \right)^2 \left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}} \right)^2$$

$$- \left(y_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{1+y_3^2} \right)^2$$

$$= \left(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3 \right)^2$$

$$\left(\frac{x_1y_1 - x_2y_2}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}} \right)^2 + \left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}} \right)^2$$

$$- \left(y_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{1+y_3^2} \right)^2$$

$$= \left(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3 \right)^2 - \left(y_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{1+y_3^2} \right)^2 = 1$$

dir. O halde (X $\odot$ Y) $\in \mathcal{H}$ olup $\odot$ işlemi kapalıdır.

ii) Birleşme Özelliği:

$\forall$ X = (x_1, x_2, x_3) , Y = (y_1, y_2, y_3) ve Z = $(z_1, z_1, z_3) \in \mathcal{H}$

(X $\odot$ Y) $\odot$ Z =

$$\Bigg[\left(1+\frac{z_3\,(y_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{1+y_3^2})}{\sqrt{1+z_3^2}\sqrt{1+(y_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{1+y_3^2})^2}}\right)(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}+x_3y_3)$$

$$\left(\frac{x_1y_1z_1-x_1y_2z_2-x_2y_2z_1-x_2y_1z_2}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}}\right),$$

$$\left(1+\frac{z_3\,(y_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{1+y_3^2})}{\sqrt{1+z_3^2}\sqrt{1+(y_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{1+y_3^2})^2}}\right)(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}+x_3y_3)$$

$$\left(\frac{x_1y_2z_1+x_1y_1z_2+x_2y_1z_1-x_2y_2z_2}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}}\right),$$

$$z_3\sqrt{1+(y_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{1+y_3^2})^2}+\sqrt{1+z_3^2}\left(y_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{1+y_3^2}\right)\Bigg]$$

$$=\Bigg[\left(1+\frac{x_3\,(y_3\sqrt{1+z_3^2}+z_3\sqrt{1+y_3^2})}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+(y_3\sqrt{1+z_3^2}+z_3\sqrt{1+y_3^2})^2}}\right)(\sqrt{1+z_3^2}\sqrt{1+y_3^2}+z_3y_3)$$

$$\left(\frac{x_1y_1z_1-x_1y_2z_2-x_2y_2z_1-x_2y_1z_2}{\sqrt{1+z_3^2}\sqrt{1+y_3^2}}\right),$$

$$\left(1+\frac{x_3\,(y_3\sqrt{1+z_3^2}+z_3\sqrt{1+y_3^2})}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+(y_3\sqrt{1+z_3^2}+z_3\sqrt{1+y_3^2})^2}}\right)(\sqrt{1+z_3^2}\sqrt{1+y_3^2}+z_3y_3)$$

$$\left(\frac{x_1y_2z_1+x_1y_1z_2+x_2y_1z_1-x_2y_2z_2}{\sqrt{1+z_3^2}\sqrt{1+y_3^2}}\right),$$

$$x_3\sqrt{1+(y_3\sqrt{1+z_3^2}+z_3\sqrt{1+y_3^2})^2}\ \sqrt{1+x_3^2}\left(y_3\sqrt{1+z_3^2}+x_3\sqrt{1+y_3^2}\right)\Bigg]$$

$$= X \odot (Y \odot Z)$$

dir. O halde $\mathcal{H}$ işlemi birleşmelidir.

iii) Birim Eleman:

$\forall$ X = $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}$ için;

$$X \odot e = X$$

Olacak biçimde e = $(e_1, e_2, e_3) \in \mathcal{H}$ elemanını bulalım.

$$X \odot e = X$$

den;

$$(x_1e_1 - x_2e_2)\left(1+\frac{x_3e_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+e_3^2}}\right) = x_1$$

$$(x_1e_2 + x_2e_1)\left(1+\frac{x_3e_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+e_3^2}}\right) = x_2$$

$$e_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{1+e_3^2} = x_3$$

sistemi bulunur.

Son eşitlikten e_3=0 elde edilir. Bu değer 1. ve 2. eşitlikte yerine yazılırsa $e_2 = 0$ ve $e_1 = 1$ bulunur.

O halde $\odot$ işlemine göre birim eleman

e = (1,0,0) $\in \mathcal{H}$ dır.

iv)Ters eleman:

$\forall$ X = $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}$ için ;

$$X \odot X' = e$$

Olacak biçimdeki X′ = $(x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathcal{H}$ elemanını bulalım.

$$X \odot X' = e$$

den;

$$(x_1x'_1 - x_2x'_2)\left(1+\frac{x_3x'_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+x'^2_3}}\right) = 1$$

$$(x_1x'_2 + x_2x'_1)\left(1+\frac{x_3x'_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+x'^2_3}}\right) = 0$$

$$x_3\sqrt{1+x'^2_3} + x'_3\sqrt{1+x_3^2} = 0$$

sistemi bulunur.

Son eşitlikte $x'_3 = -x_3$ elde edilir. Bu değer ilk iki eşitlikte yerine yazılırsa $x'_1 = x_1$ ve $x'_2 = -x_2$ olduğu görülür.

O halde $\odot$ işlemine göre $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{H}$ elemanının tersi

$$X' = (x_1, -x_2, -x_3) \in \mathcal{H}$$

tır.

v) Değişme Özelliği:

$$X \odot Y = \Bigg[\left(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3\right)\left(\frac{x_1y_1 - x_2y_2}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2} + x_3y_3\right)\left(\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{1+y_3^2}}\right), \left(y_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{1+y_3^2}\right)\Bigg]$$

$$= \Bigg[\left(\sqrt{1+y_3^2}\sqrt{1+x_3^2} + y_3x_3\right)\left(\frac{y_1x_1 - y_2x_2}{\sqrt{1+y_3^2}\sqrt{1+x_3^2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{1+y_3^2}\sqrt{1+x_3^2} + y_3x_3\right)\left(\frac{y_1x_2 + y_2x_1}{\sqrt{1+y_3^2}\sqrt{1+x_3^2}}\right), \left(x_3\sqrt{1+y_3^2} + y_3\sqrt{1+x_3^2}\right)\Bigg]$$

$= Y \odot X$

O halde $(\mathcal{H}, \odot)$ ikilisi bir değişmeli gruptur.

Teorem 3.3.3. $\mathcal{H}$ bir 2-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

İspat:

$U_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0\}$

$U_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0\}$

$U_3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < 0\}$

$U_4 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 < 0\}$ cümlelerini ele alalım.

$\varphi_1 : U_1 \subset \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_3)$

$\varphi_2 : U_2 \subset \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_3)$

φ_3: $U_3 \subset \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_3)$

φ_4: $U_4 \subset \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$

$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_3)$

dönüşümlerinin her biri için $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere

i) φ_i birebirdir.

ii) $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^2$ dir.

Buna göre (φ_i, U_i) dönüşümleri $\mathcal{H}$ nin 2-boyutlu birer haritasıdır.

Ayrıca $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$, $(\varphi_4 \circ \varphi_3^{-1})$, $(\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1})$, $(\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1})$ dönüşümleri birer diffeomorfizmdir.

Örneğin; $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ dönüşümünü ele alalım.

$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x_1, x_2, x_3) = \varphi_2(\sqrt{1-(x_2^2 - x_3^2)}, x_2, x_3) = (\sqrt{1-(x_2^2 - x_3^2)}, x_3)$

olduğundan $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Benzer şekilde $(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ dönüşümünün de diferensiyellenebilir olduğu gösterilebilir. O halde $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})$ dönşümü bir diffeomorfizmdir.

Benzer şekilde $(\varphi_4 \circ \varphi_3^{-1})$, $(\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1})$, $(\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1})$ dönüşümleri de birer diffeomorfizmdir.

O halde $\mathcal{H}$ bir 2- boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur.

Teorem 3.3.4. $\mathcal{H}$ bir Lie grubudur.

İspat: Teorem 3.3.2 den $(\mathcal{H}, \odot)$ ikilisi bir değişmeli grup ve teorem 3.3.3. den $\mathcal{H}$ bir diferensiyellenebilir manifolddur. O halde $\odot$ işleminin diferensiyellenebilir olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H} & \times & \mathcal{H} & \xrightarrow{\ \odot\ } & \mathcal{H} \\ \downarrow \varphi_i & & \varphi_j \downarrow & & \downarrow \varphi_k \\ & & & \longrightarrow & \end{array} \qquad 1 \leq i, j, k \leq 4$$

$$\mathbb{R}^2 \quad \times \quad \mathbb{R}^2 \qquad \Phi \qquad \mathbb{R}^2$$

Şekil 3.5. Φ dönüşümünün diyagramı

$\Phi = \varphi_k$ o $(\varphi_i \times \varphi_j)^{-1}$ dönüşümünün diferensiyellenebilir olduğunu göstereceğiz.

i = 1, j =1 ve k = 2 alalım.

$\forall\, u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in (\varphi_i \times \varphi_j)(U_1 \times U_2)$ için

$$\Phi = \varphi_2\left[\odot\left(\left(\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}, u_2, u_3\right), \left(\sqrt{1-(v_2^2-v_3^2)}, v_2, v_3\right)\right)\right]$$

$$\Phi = \varphi_2\left[\left(1+\frac{u_3v_3}{\sqrt{1-u_3^2}\sqrt{1-v_3^2}}\right)\left(\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}\sqrt{1-(v_2^2-v_3^2)} - u_2v_2\right),\right.$$

$$\left(1+\frac{u_3v_3}{\sqrt{1-u_3^2}\sqrt{1-v_3^2}}\right)\left(u_2\sqrt{1-(v_2^2-v_3^2)} + v_2\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}\right),$$

$$\left.\left(u_3\sqrt{1-v_3^2} + v_3\sqrt{1-u_3^2}\right)\right]$$

$$\Phi = \left[\left(1+\frac{u_3v_3}{\sqrt{1-u_3^2}\sqrt{1-v_3^2}}\right)\left(\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}\sqrt{1-(v_2^2-v_3^2)} - u_2v_2\right),\right.$$

$$\left.\left(u_3\sqrt{1-v_3^2} + v_3\sqrt{1-u_3^2}\right)\right]$$

$\Rightarrow \Phi$ diferensiyellenebilirdir.

$\Rightarrow \odot$ diferensiyellenebilirdir.

O halde $\mathcal{H}$ bir lie grubudur.

Tanım 3.1. de $C^* := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = r^2 \}$ alarak elde edilen tek kanatlı hiperboloidi $\mathcal{H}_r$ ile gösterelim.

Bu durumda;

$$\mathcal{H}_r = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2 \}$$

dir.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.5. $\mathcal{H}_r$ bir diferensiyellenebilir manifolddur.

İspat:

$$U_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0\}$$

$$U_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0\}$$

$$U_3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 < 0\}$$

$$U_4 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 < 0\}$$

cümlelerini ele alalım.

$$\Pi_1 : U_1 \subset \boldsymbol{\mathcal{H}_r} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_3)$$

$$\Pi_2 : U_2 \subset \boldsymbol{\mathcal{H}_r} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_3)$$

$$\Pi_3 : U_3 \subset \boldsymbol{\mathcal{H}_r} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_3)$$

$$\Pi_4 : U_4 \subset \boldsymbol{\mathcal{H}_r} \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_3)$$

dönüşümlerinin her biri için $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere

i) Π_i birebirdir.

ii) $\Pi_i (U_i) \subset \mathbb{R}^2$ dir.

Buna göre (U_i , Π_i) dönüşümleri $\boldsymbol{\mathcal{H}}_r$ nin 2-boyutlu birer haritasıdır. Ayrıca $(\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1})$, $(\Pi_4 \circ \Pi_3^{-1})$, $(\Pi_4 \circ \Pi_1^{-1})$, $(\Pi_3 \circ \Pi_2^{-1})$ dönüşümleri birer diffeomorfizmdir.

Örneğin; $U1 \cap U_2 \neq \emptyset$ olmak üzere $(\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1})$ dönüşümünü ele alalım.

$$\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1} = \Pi_2 \left(\sqrt{r^2 - x_2^2 + x_3^2} , x_2 , x_3 \right)$$

$$= \left(\sqrt{r^2 - x_2^2 + x_3^2} , x_3 \right)$$

$(\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1})$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Benzer şekilde $(\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1})^{-1}$ dönüşümünün de diferensiyellenebilir olduğu gösterilebilir. O halde $(\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1})$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir. Buradan;

$\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{ (U_i , \Pi_i) \mid 1 \leq i \leq 4 \}$ ailesi $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ nin bir C^∞-atlasıdır.

Bu C^∞-yapı ile birlikte $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ bir diferensiyellenebilir manifolddur.

3.3.1. $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ Lie Grubunun $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ Manifoldu Üzerine C^∞- Etkisi

Bu bölümde

$$\theta : \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}_r} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{H}_r}$$

dönüşümünü

$$\forall\ X = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{\mathcal{H}} \text{ ve } Y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{\mathcal{H}_r}$$

için

$$\theta(X, Y) = \left[(x_1y_1 - x_2y_2)\left(1 + \frac{x_3y_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+y_3^2}}\right), (x_2y_1 + x_1y_2)\left(1 + \frac{x_3y_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+y_3^2}}\right), \right.$$
$$\left. y_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{r^2+y_3^2} \right]$$

şeklinde tanımlayalım.

Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.6. Yukarıda tanımlanan θ dönüşümü $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ Lie grubunun $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ manifoldu üzerine bir C^{∞}- etkisidir.

İspat: i) θ dönüşümü diferensiyellenebilirdir.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}_r} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "(\varphi_i \times \Pi_j)"'] & \boldsymbol{\mathcal{H}_r} \arrow[d, "\Pi_k"] \\
\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\Phi"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd} \qquad 1 \leq i, j, k \leq 4$$

Şekil 3.6. Φ Dönüşümünün Diyagramı

$\Phi = \Pi_k \circ \theta \circ (\varphi_i \times \Pi_j)^{-1}$ dönüşümünün diferensiyellenebilir olduğunu göstereceğiz.

$i = 1$, $j = 1$ ve $k = 2$ alalım.

$\forall\ u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in (\boldsymbol{\varphi_i} \times \Pi_{\mathbf{j}})(U_1 \times U_2)$ için

$$\Phi = \Pi_2\left[\theta\left(\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}, u_2, u_3\right), \left(\sqrt{r^2-(v_2^2-v_3^2)}, v_2, v_3\right)\right]$$

$$= \Pi_2\left[\left(\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}\sqrt{r^2-(v_2^2-v_3^2)} - u_2v_2\right)\left(1 + \frac{u_3v_3}{\sqrt{1+u_3^2}\sqrt{r^2+v_3^2}}\right), \right.$$

$v_2\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}$ + $u_2\sqrt{r^2-(v_2^2-v_3^2)}\left(1+\frac{u_3v_3}{\sqrt{1+u_3^2}\sqrt{r^2+v_3^2}}\right)$,

$v_3\sqrt{1+u_3^2}$ + $u_3\sqrt{r^2+v_3^2}$)]

$$=\left[\left(\sqrt{1-(u_2^2-u_3^2)}\sqrt{r^2-(v_2^2-v_3^2)}-u_2v_2\right)\left(1+\frac{u_3v_3}{\sqrt{1+u_3^2}\sqrt{r^2+v_3^2}}\right),\right.$$

$$\left. v_3\sqrt{1+u_3^2}+u_3\sqrt{r^2+v_3^2}\right]$$

$\Longrightarrow$ Φ diferensiyellenebilirdir.

$\Longrightarrow$ Θ diferensiyellenebilirdir.

ii) $\forall$ X = (x_1, x_2, x_3) ve Y = (y_1, y_2, y_3) $\in$ $\mathcal{H}$ ve Z = (z_1, z_2, z_3) $\in$ $\mathcal{H}_r$ için

Θ (X , Θ (Y, Z)) = Θ (X ⨀ Y, Z)

eşitliği ⨀ işleminin birleşme özelliğinden açıktır.

iii) e = (1, 0, 0) $\in$ $\mathcal{H}$ ve $\forall$ P = (p_1, p_2, p_3) $\in$ $\mathcal{H}_r$ için

(e, P) = P dir. O halde Θ bir C^∞- etkidir.

Teorem 3.3.7. Θ C^∞- etkisi geçişlidir.

İspat: $\forall$ p, q $\in$ $\mathcal{H}_r$ için

p = Θ (X, q)

olacak şekilde X = (x_1, x_2, x_3) $\in$ $\mathcal{H}$ elemanını bulalım.

p = Θ (X, q) ise

$$p=\left[(x_1q_1-x_2q_2)\left(1+\frac{x_3q_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+q_3^2}}\right),\ (x_2q_1+x_1q_2)\left(1+\frac{x_3q_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+q_3^2}}\right),\right.$$

$$\left. q_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{r^2+q_3^2}\right]$$

Buradan;

$$(x_1q_1-x_2q_2)\left(1+\frac{x_3q_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+q_3^2}}\right)=p_1$$

$$(x_2q_1+x_1q_2)\left(1+\frac{x_3q_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+q_3^2}}\right)=p_2$$

$$q_3\sqrt{1+x_3^2}+x_3\sqrt{r^2+q_3^2}=p_3$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse

$$X = \left[\left(\frac{p_1q_1+p_2q_2}{q_1^2+q_2^2} \right) \frac{\sqrt{r^2+q_3^2}\sqrt{r^2+\left[p_3\sqrt{r^2+q_3^2}-q_3\sqrt{r^2+p_3^2}\right]^2}}{\sqrt{r^2+q_3^2}\sqrt{r^2+\left[p_3\sqrt{r^2+q_3^2}-q_3\sqrt{r^2+p_3^2}\right]^2}+q_3\left[p_3\sqrt{r^2+q_3^2}-q_3\sqrt{r^2+p_3^2}\right]}, \right.$$

$$\left(\frac{p_2q_1-p_1q_2}{q_1^2-q_2^2} \right) \frac{\sqrt{r^2+q_3^2}\sqrt{r^2+\left[p_3\sqrt{r^2+q_3^2}-q_3\sqrt{r^2+p_3^2}\right]^2}}{\sqrt{r^2+q_3^2}\sqrt{r^2+\left[p_3\sqrt{r^2+q_3^2}-q_3\sqrt{r^2+p_3^2}\right]^2}+q_3\left[p_3\sqrt{r^2+q_3^2}-q_3\sqrt{r^2+p_3^2}\right]}$$

$$\left., \frac{p_3\sqrt{r^2+q_3^2}-q_3\sqrt{r^2+p_3^2}}{r} \right]$$ bulunur.

O halde Θ C^{∞}- etkisi geçişlidir.

Sonuç 3.3.1. Herhangi bir $p \in \mathcal{H}_r$ için $(\mathcal{H})_{\{p\}}$, Θ etkisine göre p nin yörüngesini göstermek üzere

$$(\mathcal{H})_{\{p\}} = \mathcal{H}_r$$

dir.

Teorem 3.3.8. $\mathcal{H}$ Lie grubu $\mathcal{H}_r$ manifoldu üzerine etkili olarak etki eder.

İspat: $g = (g_1, g_2, g_3) \in \mathcal{H}$ ve $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{H}_r$ için

$$\Theta(g, m) = m$$

eşitliğinin sadece g = e için sağlandığını gösterelim.

$\Theta(g, m) = m$ ise

$$(g_1m_1 - g_2m_2)\left(1 + \frac{g_3m_3}{\sqrt{1+g_3^2}\sqrt{r^2+m_3^2}}\right) = m_1$$

$$(g_2m_1 + g_1m_2)\left(1 + \frac{g_3m_3}{\sqrt{1+g_3^2}\sqrt{r^2+m_3^2}}\right) = m_2$$

$$m_3\sqrt{1+g_3^2} + g_3\sqrt{r^2+m_3^2} = m_3$$

olmalıdır. Buradan $g_1 = 1$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$ bulunur. Buna göre

$g = (1,0,0) = e \in \mathcal{H}$ olduğu görülür.

O halde Θ etkisi etkilidir.

3.3.2. $\mathcal{H}$ Lie grubunun $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir C^{∞}-Etkisi

$\forall\, r \in \mathbb{R}^+$ için $\mathcal{H}_r \subset \mathbb{R}^3$ olduğundan

$\theta' : \mathcal{H} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

fonksiyonunu düşünelim.

$\theta'(X, Y) = \theta(X, Y)$

olacak şekilde

$$\theta'(X, Y) = \theta(X, Y) = \Big((x_1y_1 - x_2y_2)\Big(1 + \frac{x_3y_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+y_3^2}}\Big),$$

$$(x_2y_1 + x_1y_2)\Big(1 + \frac{x_3y_3}{\sqrt{1+x_3^2}\sqrt{r^2+y_3^2}}\Big),\ y_3\sqrt{1+x_3^2} + x_3\sqrt{r^2+y_3^2}\Big)$$

olsun.

Teorem 3.3.9. θ' $\mathcal{H}$ Lie grubunun $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir C^∞ etkisidir.

İspat: i) $\forall\, X \in \mathcal{H}$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = r^2$

olmak üzere $Y \in \mathcal{H}_r$ olduğundan ve $\theta'(X, Y) = \theta(X, Y)$ biçiminde tanımlandığından teorem 3.3.6. dan θ , C^∞ olduğundan θ' de C^∞ dur.

i) $\forall\, X, Y \in \mathcal{H}$, ve $\forall\, P \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}\theta'(X, \theta'(Y, P)) &= \theta'(X, \theta(Y, P)) \\ &= \theta(X, \theta(Y, P)) \\ &= \theta(X \odot Y, P) \\ &= \theta'(X \odot Y, P)\end{aligned}$$

dir.

ii) $e = (1,0,1)$ ve $\forall\, p \in \mathbb{R}^3$ için

$\theta'(e, p) = \theta(e, p) = p$

dir. O halde θ' de bir C^∞-etkidir.

Sonuç 3.3.2. Herhangi bir $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ noktasının θ' etkisi altındaki yörüngesi $(\mathcal{H})'_{\{p\}}$ ile gösterilmek ve $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = r^2$ olmak üzere

$(\mathcal{H})'_{\{p\}} = \mathcal{H}_r$

dir.

İspat: $\forall$ p = $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = r^2$ olsun. $p \in \mathcal{H}_r$ dır. Θ , C^∞-etkisine göre sonuç 3.3.1. den

$$(\mathcal{H})_{\{p\}} = \mathcal{H}_r$$

idi. Buna göre,

$$\begin{aligned}(\mathcal{H})_{\{p\}} &= \{ q \in \mathcal{H}_r \mid q = \Theta (X, P) , \forall X \in \mathcal{H} \} \\ &= \{ q \in \mathcal{H}_r \mid q = \Theta' (X, P) , \forall X \in \mathcal{H} \} \\ &= (\mathcal{H})'_{\{p\}}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$(\mathcal{H})'_{\{p\}} = \mathcal{H}_r$$

dır.

3.4. İki Kanatlı Hiperboloidin Lie Grubu Olup Olmadığının İncelenmesi

3.1.Tanım da C = $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ alalım.

3.1.Sonuçtan dolayı $\otimes (C \times S^1)$ bir dönel yüzeydir.

Bu dönel yüzeyi $\boldsymbol{Q}$ ile gösterelim.

$$\forall (a,b) \in C \text{ ve } \forall (x,y) \in S^1 \text{ için}$$

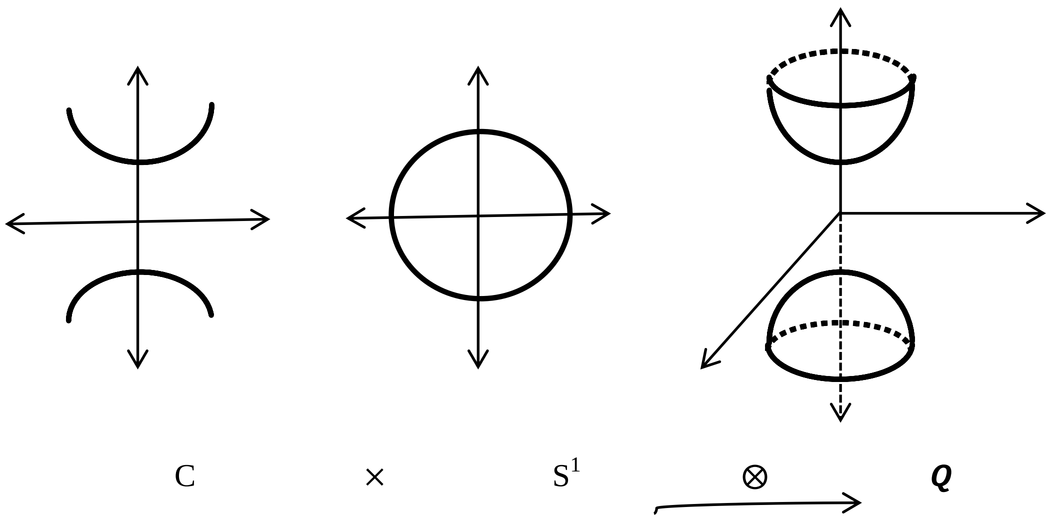
$$\otimes : C \times S^1 \rightarrow \boldsymbol{Q}$$

$$((a, b), (x, y)) \rightarrow (ax, ay, b)$$

olmak üzere;

$$\boldsymbol{Q} = \{ x=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$$

dir ve bu bir ikikanatlı hiperboloiddir.



Şekil 3.7. İki Kanatlı Hiperboloid

Teorem 3.4.1. $\boldsymbol{Q}$ 2-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifoldur.

İspat : $$U_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$$

$$U_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 < 0\}$$

cümlelerini ele alalım.

$$\varphi_1 : U_1 \subset \boldsymbol{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$$
$$\varphi_2 : U_2 \subset \boldsymbol{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$$

dönüşümleri için

i) φ_1 ve φ_2 birebirdir.

ii) $\varphi_1(U_1) = \mathbb{R}^2$ ve $\varphi_2(U_2) = \mathbb{R}^2$

olduğundan (φ_1, U_1) ve (φ_2, U_2) dönüşümleri $\boldsymbol{Q}$ nun 2-boyutlu birer haritasıdır. Ayrıca ; $\mathcal{A} = \{ (\varphi_1, U_1) , (\varphi_2, U_2) \}$ ailesi $\boldsymbol{Q}$ nin bir C^∞-atlasıdır.

Bölüm 3.2. ve 3.3. te sırasıyla koni ve tek kanatlı hiperboloid için elde edilen Lie grup yapılarına ilişkin düşünceyi iki kanatlı hiperboloid için ele alacağız.

$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{Q} - \{(0,0,1)\}$ olmak üzere $\boldsymbol{Q}^*$ üzerinde

$\forall$ X = (x_1, x_2, x_3) ve Y = $(y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{Q}^*$ için ;

$$\odot (X, Y) = \Bigg[\left(\sqrt{x_3^2 - 1}\sqrt{y_3^2 - 1} + x_3 y_3 \right) \left(\frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{\sqrt{x_3^2-1}\sqrt{y_3^2-1}} \right),$$

$$\left(\sqrt{x_3^2 - 1}\sqrt{y_3^2 - 1} + x_3 y_3 \right) \left(\frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{\sqrt{x_3^2-1}\sqrt{y_3^2-1}} \right), \left(y_3\sqrt{x_3^2 - 1} + x_3\sqrt{y_3^2 - 1} \right) \Bigg]$$

ile tanımlanan $\odot$ işlemini göz önüne alalım.

X =$\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}, \frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}, \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}} \right) \in \boldsymbol{Q}^*$ ve Y = $\left(\frac{-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}, \frac{-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}, \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}} \right) \in \boldsymbol{Q}^*$

için $(X \odot Y) \notin \boldsymbol{Q}^*$ dır.

O halde $\odot$ fonksiyonu $\odot : \boldsymbol{Q}^* \times \boldsymbol{Q}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ olup $\boldsymbol{Q}^*$ üzerinde bir iç işlem değildir.

Buna göre $(\boldsymbol{Q}^*, \odot)$ bir grup değildir. Dolayısıyla $\boldsymbol{Q}^*$ iki kanatlı hiperboloidi bir Lie grubu değildir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde, $\mathbb{R}^3$ te tanımlanan kuadratik çarpım kullanılarak kuadrik yüzeyler elde edilmiştir. Bunlardan koni ve tek kanatlı hiperboloidin Lie grup yapısı ve C^∞-etkileri incelenmiş, fakat iki kanatlı hiperboloidin lie grubu olmadığı görülmüştür.

Benzer şekilde, bu kuadrik çarpım kullanılarak yeni kuadrik yüzeyler elde edilip edilemeyeceği, elde edilen kuadrik yüzeylerin Lie grup yapıları ve C^∞-etkileri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Clark, R.S., Brickell, F., Differentiable Manifolds,Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

[2] Boothby, William M., An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, New York, San Francisco, London,1975.

[3] Yaglom, I.M., A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag, New York, 1979

[4] Uğurlu, H. H. ,$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski 3-Uzayında Lie Grup Yapıları ve C^∞-Etkiler, Doktora Tezi,Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1992.

[5] Gündoğan, H. , Karakaş, B., Conics, Quadrics and Hyperquadrics, Hadronic Journal, Volume 29, Issue Number 3, June 2006.