T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ PARAMETREYE BAĞLI LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI(ORANI)

BARIŞ ÇEKİÇ

2015
KIRIKKALE

Matematik Anabilim Dalında Barış ÇEKİÇ tarafından hazırlanan İKİ PARAMETREYE BAĞLI LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI(ORANI) adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun oldugunu onaylarım.

Prof Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan	:	Doç.Dr. Ali OLGUN
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Ali ARAL
Üye	:	Yrd. Doç.Dr. Başar YILMAZ

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç.Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

İKİ PARAMETREYE BAĞLI LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER İNTEGRAL OPERATÖRLERİNİN YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI(ORANI)

ÇEKİÇ, Barış
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL
Ocak 2015, 48 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde d-noktası, Lebesgue noktası, Deltasal çekirdek kavramları verilmiş ve bazı özel deltasal çekirdekli singüler integral operatörler tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde $T_\lambda(f,x)$ operatörü ve bu operatörün çekirdeğinin sağlaması gereken şartları içeren A sınıfı tanımlanmıştır. Ayrıca $(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)$ iken $f \in L_1(a,b)$'nin bir μ-Genelleştirilmiş Lebesgue noktasında, noktasal yakınsaklığı ve noktasal yakınsaklık hızı (oranı) incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, lineer olmayan genel tipten singüler ingtegrallerin Fatou tipten yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Lineer Olmayan Singüler İntegral, d-noktası, Lebesgue noktası, Sınırlı salınımlı fonksiyon

ABSTRACT

CONVERGENCE AND RATE OF CONVERGENCE BY NONLINEAR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS DEPENDING ON TWO PARAMETERS

ÇEKİÇ, Barış
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
January 2015, 48 pages

This thesis consists of four chapter. The frist chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, the definition of d-point, Lebesgue point, Delta kernel have been given and some special singular integral operators are given.

In the third chapter, we have given the operator $T_\lambda(f,x)$ and A class including the conditions satisfied the operators. Also in the μ-Generalized Lebesgue point of $f \in L_1(a,b)$, the pointwise convergence and rate of pointwise convergence of the operators are investigated when $(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)$.

In the fourthy chapter, we have invastroated convergence properties Fatou-type of non-linear generial type singular integral operators.

Key Words: Non-Linear Singular Integrals, d-point, Lebesgue point, Bounded variation function

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunda bana her türlü destek vererek çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve önerilerini esirgemeyen hocam, Sayın Prof.Dr. Ali ARAL ile Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında beni yalnız bırakmayan ve destekleyen, sevgisini ve sabrını eksik etmeyen Sevim ÇEKİÇ, Hasan Ali ÇEKİÇ, Özlem GÜRBÜZ ile varlığı dahi benim için motivasyon kaynağı olan Aral KOCA'ya sonsuz teşekkür ederim.

Bu tezin her aşamasında anlayışla ve sabırla yanımda bulunarak bilgilerini eksik etmeyen Hüseyin Erhan ALTIN, Fikri KAPLAN, Mustafa AYDIN ve Yaşar ÖZER'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Barış ÇEKİÇ
Kırıkkale- 2015

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
L	Operatör
$D(T)$	T Operatörünün Tanım Kümesi
$\lVert\cdot\rVert_X$	X üzerindeki Bir Norm
$T_\lambda(f,x)$	$L_1(a,b)$ de bir operatör

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde amaç fonksiyonlara, daha basit ve daha kolay hesaplanabilen fonksiyonlar ile yaklaşabilmektir. Yaklaşım teorinin ilk sonuçlarından bazıları Fourier serileri teorisinde görülmektedir. Bunlar, örneğin L_2 yakınsaklıkta olduğu gibi, bir fonksiyonun Fourier serisinin noktasal veya düzgün yakınsaklığını garantileyen koşulları içerir. Fourier serileri teorisinde, Fourier serisinin kısmi toplamlarının fonksiyona yakınsayıp yakınsamadığı bilinmek istenir.

Yaklaşım teoride ilk sorulan soru, yaklaşımın olma olasılığıdır. Yaklaşmayı düşünülen fonksiyon kümesinin elemanları kullanılarak oluşan bir fonksiyon ailesi, yaklaşılmak istenen fonksiyonlar kümesinde yoğun mudur? Yani, kümedeki herhangi bir fonksiyona, verilen ailedeki fonksiyonlar kullanılarak istenildiği kadar iyi yaklaşılabilir mi?

İlk önemli yoğunluk sonuçları Weierstrass (1885) tarafından ispatlanmıştır. Bunlar; cebirsel polinomların kompakt bir aralıkta sürekli, reel değerli fonksiyonların sınıfında yoğunluğu ve trigonometrik polinomların $2\pi-$periyotlu sürekli, reel değerli fonksiyonların sınıfında yoğunluğudur (Bu iki sonuç birbirine denktir). Sonraki yıllarda Weierstrass teoreminin değişik ispatları dönemin en iyi analizcileri tarafından yapılmıştır. Weierstrass, Picard, Fejér, Landau ve de la Vallée Poussin tarafından yapılan ispatlarda singüler integraller kullanılmıştır. Fejér'in ispatı, aynı zamanda lineer operatörlerin özel bir dizisinin kullanıldığı ilk sonuçtur (Bu ispatlar ve kaynakları, Pinkus'un Weierstrass'ın yaklaşım teoriye katkılarını incelediği (Pinkus 2000) derlemesinde görülebilir). Weierstrass teoreminin ispatı için daha basit lineer yaklaşım operatörleri Bernstein (1912/13) tarafından inşa edilmiştir.

Yoğunluğu göstermek için bir yöntem de; lineer pozitif operatörleri kullanan, Bohman-Korovkin teoremi olarak bilinen teoremdir. Bu teoremin ilk şekli Bohman

(1952) tarafından verilmiştir. Bohman'ın ispatı ve temel düşüncesi, Bernstein'in Weierstrass teoreminin ispatının bir genelleştirilmesidir. Korovkin (1953) aynı teoremi integral tipli operatörler için ispatlamıştır. Korovkin'in orijinal sonucu pozitif singüler

integrallere dayanmaktadır. Korovkin daha sonra teorisini geliştirmiştir, büyük kısmı (Korovkin 1960) da görülebilir.

Çekirdeği negatif olmayan singüler integraller lineer pozitif operatörlerdir. Örneğin tek değişkenli Picard singüler integrali $\lambda > 0$ için

$$P_\lambda(f;x) = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-\frac{|t|}{\lambda}} dt$$

olarak tanımlanır ve f ye göre lineer pozitif operatördür. Burada, her $x \in \mathbb{R}$ için $P_\lambda(f;x) \in \mathbb{R}$ olacak şekildeki f fonksiyonları dikkate alınmaktadır (Anastassiou ve Gal 2000). Picard operatörlerinin $\lambda \to 0$ iken birim operatöre yakınsaklığı (Gal 1993) ve yakınsaklık derecesi incelenmiştir (Anastassiou ve Gal 2000).

Bu tezde parametreye bağlı lineer olmayan singüler integraller tanımlanacak ve genelleştirilmiş Lebesgue noktalarında birim operatöre noktasal yakınsaklık durumları ve noktasal yakınsaklık hızı incelenmiştir. Ayrıca noktasal yakınsaklığın derecesi belirlenmiştir.

Ayrıca Natonson ve Gadjiev lemmalarından yararlanılarak lineer olmayan genel tipten singüler integraller için Fatou lemmesi verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLERİ

Bu kısımda ihtiyacımız olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 ***(Deltasal Çekirdek)*** *Λ reel sayıların bir altkümesi, λ_0 bu kümenin bir yığılma noktası olsun. $\lambda \in \Lambda$ parametresine bağlı ve tüm reel eksende tanımlı $K_\lambda(t)$ fonksiyonuna aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde deltasal çekirdek denir.*

a) $K_\lambda(t)$ negatif olmayan, çift fonksiyondur. Her $\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(0)$ sonludur ve $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} K_\lambda(0) = \infty$ dur.

b) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)\,dt = 1$ dir.

c) Belirli her δ pozitif sayısı için

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\sup_{|t|\geq\delta} K_\lambda(t)\right) = 0 \qquad ve \qquad \lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_{\delta}^{\infty} K_\lambda(t)\,dt = 0$$

dır.

Tanım 2.2 ***(OperatörlerinYakınsaklığı)*** *X ve Y normlu uzaylar olsun. $L_n \in B(X,Y)$ operatörlerinden oluşan bir (L_n) dizisini gözönüne alalım. Eğer (L_n) dizisi $B(X,Y)$ üzerindeki norma göre yakınsak ise (L_n) operatörü düzgün yakınsaktır.*

Tanım 2.3 ***(Lebesgue Noktası)***

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|\,dt = 0 \tag{2.1}$$

ise bir x_0 noktasına karşılık gelen A noktası $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun Lebesgue Noktası olarak tanımlanır

Tanım 2.4 ***(Genelleştirilmiş Lebesgue Noktası)***

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{\alpha+1}}\int_0^h [f(x_0+t) - f(x_0)]\,dt = 0, \quad (0<\alpha<1) \tag{2.2}$$

ise, x_0 noktasına karşılık gelen A noktası $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun Genelleştirilmiş Lebesgue Noktası olarak tanımlanır.

Tanım 2.5 *(**μ Genelleştirilmiş Lebsgue Noktası**) μ mutlak sürekli $[0, b-a]$ aralığında tanımlı, artan bir fonksiyon ve $\mu(0) = 0$ olmak üzere*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\mu(h)} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt = 0 \tag{2.3}$$

ise, $x \in \mathbb{R}$ noktasına f fonksiyonunun μ-Genelleştirilmiş Lebesgue noktası denir

Tanım 2.6 ***(d-Noktası)***

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h [f(x_0+t) - f(x_0)]\, dt = 0 \tag{2.4}$$

ise, x_0 noktasına karşılık gelen A noktası $f \in L_1(a,b)$ fonksiyonunun d noktası olarak tanımlanır.

Tanım 2.7 ***(p-Lebesgue Noktası)***

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \tag{2.5}$$

ise x_0 noktasına karşılık gelen A noktası $f \in L_p(a,b)$ fonksiyonunun p-Lebesgue Noktası olarak tanımlanır.

Tanım 2.8 *(**Poisson Çekirdeği**) Birim dairede harmonik, yani Laplace denklemini sağlayan ve dairenin sınırında sürekli bir fonksiyona eşit olan bir u fonksiyonunu bulma problemine Dirichlet problemi adı verilir. Böyle bir problemin çözümü*

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\varphi)+r^2} u\left(e^{it}\right) dt, 0<r<1 \tag{2.6}$$

olarak elde edilir. Bu formül ile tanımlı $u\left(re^{i\theta}\right)$ fonksiyonunun harmonik olmasını görmek için Laplace operatörünün (r,θ) kutupsal koordinatlardaki şeklini kullanmak gerekir, yani u fonksiyonunun,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi^2}$$

olmak üzere,

$$\Delta u = 0$$

denkleminin sağlandığının göstermek yeterlidir. Bu ise türev almakla yapılabilir. İntegralin altındaki

$$P_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

ifadesine Poisson Çekirdeği denir.

Tanım 2.9 ***(Abel-Poisson Çekirdeği)*** *Üst yarı düzlem için Dirichlet probleminin çözümü*

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{\varepsilon^2 + (t-x)^2}dt, \varepsilon > 0$$

biçiminde bir integral şeklinde verilmektedir. Gerçekten de türev alarak kolayca görülür ki

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_\varepsilon(x)}{\partial \varepsilon^2} = 0$$

elde edilir. Burada

$$A_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

ifadesine Abel-Poisson Çekirdeği denir.

Tanım 2.10 ***(Fejer Çekirdeği)*** 2π *periyotlu bir* f *fonksiyonunun Fourier serisinin n-yinci kısmi toplamının*

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

ifadesinde a_k *ve* b_k *Fourier katsayılarının*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt, \quad k = 0,1,2,... \\ b_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad k = 0,1,2,... \end{aligned}$$

değerleri $S_n(f,x)$*'de yerine yazılırsa*

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\right]dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt \end{aligned}$$

formülü elde edilir. Şimdi parentez içindeki ifadeyi ele alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha &= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos k\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\sin\frac{(t-x)}{2}}dt, n=0,1,2,...$$

elde edilir. Fejer bu kısmi toplamların şöyle bir ortalamasını ele almıştır.

$$\sigma_n(f,x)=\frac{S_0(f,x)+S_1(f,x)+...+S_{n-1}(f,x)}{n}$$

$S_n(f,x)$ *toplamlarının ifadesini kullanarak* $\sigma_n(f,x)$ *toplamını hesaplayalım. Son olarak alınan*

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{\sin\frac{n}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2dt$$

integraline Fejer integrali denir ve bundan dolayı

$$F_n(t)=\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right]^2$$

fonksiyonuna da Fejer çekirdeği denir. Fejer çekirdeği için

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)\,dt &= 1,\ \forall\ n=1,2,.. \\
\lim_{n\to\infty}F_n(t) &= 0,\ t\neq 0 \\
\lim_{n\to\infty}F_n(0) &= \infty
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır ve bu da Fejer çekirdeğinin bir deltasal çekirdek olduğunu gösterir.

Tanım 2.11 ***(Gauss-Weierstrass Çekirdeği)*** *Tüm reel eksende tanımlı ısı denkleminin, yani*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denkleminin, verilen bir f fonksiyonu için

$$u(x,0)=f(x)$$

başlangıç koşulunu sağlayan

$$u=u(x,\lambda)$$

çözümünün

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4t}}d\xi$$

biçiminde olduğu türev almakla görülebilir.Burada,

$$\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}}=\lambda \\ u(x,t)=u_\lambda(x) \end{cases}$$

yazılırsa

$$u_\lambda(x)=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\lambda^2(\xi-x)^2}d\xi, \quad \lambda>0$$

şeklinde bir integral elde edilir. Bu integrale Gauss-Weierstrasse integrali denir.

$$w_\lambda(x)=\frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}}e^{-\lambda^2x^2}$$

fonksiyonuna ise Gauss-Weierstrasse Çekirdeği denir. Gauss-Weierstrasse $w_\lambda(t)$ *çekirdeği için*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w_\lambda(t)\,dt &= 1, \quad \forall\ \lambda>0 \\ \lim_{\lambda\to\infty} w_\lambda(t) &= 0, \quad t\neq 0 \\ \lim_{\lambda\to\infty} w_\lambda(0) &= \infty \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu da $w_\lambda(t)$ *çekirdeğinin bir deltasal çekirdek olduğunu göstermektedir.*

Tanım 2.12 ***(Operatör)*** X *ve* Y *iki fonksiyon uzayı(aynı zamanda lineer uzaylarıdır) olsun.*

$$L:\ \underset{f\to L(f)=g}{X\to Y}$$

dönüşümüne operatör denir.

Tanım 2.13 ***(Lineer Operatör)*** *Eğer* $\forall\ f \geq 0$ *için* $L(f) \geq 0$ *oluyorsa* L *operatörüne pozitif operatör denir.* $\forall\ \alpha, \beta \in K\,(\mathbb{R}$ *ya da* $\mathbb{C})$ *ve* $\forall\ f_1, f_2\ \epsilon X$ *için*

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1) + \beta L(f_2)$$

eşitliği sağlanıyorsa L*'ye Lineer Operatör denir.*

Tanım 2.14 ***(Sınırlı Lineer Operatörler)*** X *ve* Y *lineer uzaylar ve* T

$$T : X \rightarrow Y$$

tanımlı lineer operatör olsun. $D(T)$*;* T*'nin tanım kümesi olmak üzere;* X *üzerindeki bir normu* $\|.\|_X$ *ile ve* Y *üzerindeki bir normu* $\|.\|_Y$ *ile gösterelim. Bir başka deyişle* X *ve* Y *normlu uzay olsun.* $\forall\ x \in D(T)$ *için*

$$\|T(x)\|_Y \leq M\,\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}^+$ *varsa* T *lineer operatörü sınırlıdır, denir.*

Teorem 2.1 (Weierstrass Yaklaşım Teorisi) *Bütün triogonometrik polinomların cümlesi* $X_{2\pi}$ *nin yoğun alt kümesidir. Özel olarak, eğer* $f \in C_{2\pi}$ *ise bu takdirde* $\forall\ \varepsilon > 0$ *için bir* $n = n(\varepsilon)$ *doğal sayısı mevcuttur ve* $\forall\ x$ *için*

$$|f(x) - t_n(x)| < \varepsilon$$

düzgün olacak şekilde n *dereceli bir* t_n *trigonometrik polinom mevcuttur.*

3. OPERATÖR AİLESİNİN YAKINSAKLIĞI VE YAKINSAKLIK HIZI

Bu kısımda (a,b) $\mathbb{R}$'de keyfi bir aralık olmak üzere

$$T_\lambda(f,x) = \int_a^b K_\lambda(t-x, f(t))\,dt, \quad x \in (a,b) \tag{3.1}$$

operatörünün $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ iken $f \in L_1(a,b)$'nin bir μ-Genelleştirilmiş Lebesg ue Noktasında noktasal yakınsaklığı ve noktasal yakınsaklık hızı (oranı) incelenecektir. Şimdi operatörün çekirdeğinin sağlaması gereken şartları veren ve A sınıfı olarak adlandıracağımız tanımı verelim.

Tanım 3.1 ***(A sınıfı):*** *Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $K_\lambda : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A sınıfına aittir, denir. $G \subset \mathbb{R}$ olmak üzere*

(a) $L_\lambda(t)$, herhangi bir $\lambda \in \Lambda$, her $t \in G$ ve $u, v \in \mathbb{R}$ için

$$|K_\lambda(t,u) - K_\lambda(t,v)| \leq L_\lambda(t)\,|u-v|$$

olacak şekilde integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(b) Her $u \in U(0)$ için $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_{G/U} L_\lambda(t)\,dt = 0$,

(c) Her $\delta > 0$ için $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \left[\sup_{|t|\geq\delta} L_\lambda(t)\right] = 0$,

(d) Her $u \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_G K_\lambda(t,u)\,dt = u$,

(e) $L_\lambda(t)$ her $\lambda \in \Lambda$ için $[0,\delta_0)$ aralığında artmayan ve $(-\delta_0, 0]$ aralığında azalmayan olacak şekilde bir $\delta_0 > 0$ vardır.

Teorem 3.1 $1 \leq p \leq \infty$ *olsun ve $K_\lambda(t,u)$ Tanım 3.1(a) şartını sağlasın.*

$$\text{Eğer } f \in L_p(a,b) \text{ ise } T_\lambda(f) \in L_p(a,b)$$

dir ve

$$\text{her } \lambda \in \Lambda \text{ için } \|T_\lambda(f)\|_{L_p(a,b)} \leq H(\lambda)\,\|f\|_{L_p(a,b)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2 *Kabul edelim ki $K_\lambda(t,u)$ çekirdek fonksiyonu A sınıfına ait olsun.*

$$0<\delta<\delta_0$$

için

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} L_\lambda\left(t-x\right)\mu'\left(\left|t-x_0\right|\right)dt+2L_\lambda\left(0\right)\mu\left(\left|x-x_0\right|\right) \tag{3.2}$$

ifadesi sınırlı olmak üzere (2.3)'ü sağlayan her x_0 noktasında

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)}\left|T_\lambda\left(f,x\right)-f(x_0)\right|=0 \tag{3.3}$$

sağlanır.

İspat. *Herhangi bir $0<\delta<\delta_0$ için*

$$x_0+\delta<b,\quad x_0-\delta>a \text{ ve } 0<x_0-x<\frac{\delta}{2}\,. \tag{3.4}$$

olsun

$$\left|I\left(x,\lambda\right)\right|:=\left|T_\lambda\left(f,x\right)-f\left(x_0\right)\right|$$

olarak tanımlayalım. Daha sonra (3.1) eşitliğinden

$$\left|I\left(x,\lambda\right)\right|=\left|\int\limits_a^b K_\lambda\left(t-x,f\left(t\right)\right)dt-f\left(x_0\right)\right|$$

eşitliğini elde ederiz. (a,b) $\mathbb{R}$'de keyfi bir aralık olmak üzere

$$\widetilde{f}\left(t\right)=\begin{cases} f\left(t\right), & t\in(a,b)\\ 0, & t\notin(a,b)\end{cases}$$

şeklinde bir $\widetilde{f}\in L_1\left(\mathbb{R}\right)$ fonkisyonunu tanımlayalım. Buna göre,

$$\left|I\left(x,\lambda\right)\right|=\left|\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}\left(t\right)\right)dt-f\left(x_0\right)\right|$$

ifadesini elde ederiz. Mutlak değer içine $\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}\left(x_0\right)\right)dt$ ifadesini çıkartıp toplarsak

$$\begin{aligned}\left|I\left(x,\lambda\right)\right| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}\left(t\right)\right)dt-\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}\left(x_0\right)\right)dt+\right.\\ &\quad \left.\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}\left(x_0\right)\right)dt-f\left(x_0\right)\right|\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan,

$$
\begin{aligned}
|I(x,\lambda)| &\le \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(t)\right)dt - \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right)dt \right| + \\
&\quad \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right)dt - f(x_0) \right|
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ifade

$$
\begin{aligned}
|I(x,\lambda)| &\le \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \left[K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(t)\right) - K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right)\right]dt \right| + \\
&\quad \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right)dt - f(x_0) \right|
\end{aligned}
$$

$$
\le \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \left[K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(t)\right) - K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right)\right] \right| dt + \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right)dt - f(x_0) \right|
$$

şeklinde de yazılabilir. Tanım 3.1 (*a*) *şartından*

$$
\left| K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(t)\right) - K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right) \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}} L_\lambda(t-x) \left| \widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0) \right|
$$

olacağından

$$
|I(x,\lambda)| \le \int\limits_{\mathbb{R}} L_\lambda(t-x) \left| \widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0) \right| dt + \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right) - f(x_0) \right|
$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.3) *eşitliğine göre* $I(x,\lambda)$*'yı*

$$
\begin{aligned}
|I(x,\lambda)| &\le \left\{ \int\limits_{t\notin(a,b)} + \int\limits_{\substack{|t-x_0|>\delta,\\ t\in(a,b)}} + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} + \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \right\} \left| \widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0) \right| L_\lambda(t-x)\,dt \\
&\quad + \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{f}(x_0)\right)dt - f(x_0) \right|
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada her bir integrali ayrı ayrı isimlendirelim.

$$\begin{aligned}
I_0(x,\lambda) \quad &: \quad = \left\{ \int\limits_{t \notin (a,b)} \right\} \left| \widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0) \right| L_\lambda (t-x)\, dt, \\
I_1(x,\lambda) \quad &: \quad = \left\{ \int\limits_{\substack{|t-x_0|>\delta, \\ t \in (a,b)}} \right\} \left| \widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0) \right| L_\lambda (t-x)\, dt, \\
I_2(x,\lambda) \quad &: \quad = \left\{ \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \right\} \left| \widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0) \right| L_\lambda (t-x)\, dt, \\
I_3(x,\lambda) \quad &: \quad = \left\{ \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} \right\} \left| \widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0) \right| L_\lambda (t-x)\, dt
\end{aligned}$$

ve

$$I_4(x,\lambda) = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda \left(t-x, \widetilde{f}(x_0) \right) dt - f(x_0) \right|$$

şeklinde yazarsak,

$$|I(x,\lambda)| \leq I_0(x,\lambda) + I_1(x,\lambda) + I_2(x,\lambda) + I_3(x,\lambda) + I_4(x,\lambda) \tag{3.5}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Tanım 3.1. (*d*)*' den*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int\limits_G K_\lambda(t,u)dt = u$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda \left(t-x, \widetilde{f}(x_0) \right) dt - f(x_0) \right| &= \left| \int\limits_G K_\lambda (t-x, f(x_0)) - f(x_0) \right| \\
&= |f(x_0) - f(x_0)| \\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Buna göre,$(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ *iken* $I_4(x,\lambda) \to 0$ *sağlandığını rahatlıkla görebiliriz.*

$$F(t) = \int\limits_t^{x_0} |f(y) - f(x_0)|\, dy$$

olacak şekilde bir F *fonksiyonu tanımlayalım. Burada,* 2.3*'ü yeniden yazalım.*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\mu(h)} \int\limits_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt = 0$$

Yani $h \to 0$ olduğundan yeterince küçük h'lar için

$$\frac{1}{\mu(h)} \int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt \leq \varepsilon$$

ve

$$\int_0^h |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt \leq \varepsilon \mu(h)$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre,

$$F(t) = \int_t^{x_0} |f(y) - f(x_0)|\, dy$$

olmak üzere

$$F(h) \leq \varepsilon \mu(h)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu integrale

$$\begin{cases} y = x_0 + t \\ dy = dt \end{cases}$$

değişken değiştirmesi yapılarak kısmi integrasyon uygulayalım. Bu durumda

$$F(t) = \int_{t-x_0}^{0} |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt$$

$$= -\int_0^{t-x_0} |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt$$

üst sınır sıfır olduğunda

$$F(t) \leq \varepsilon \mu(x_0 - t)$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde

$$\text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } 0 < x_0 - t \leq \delta \text{ olmak üzere } F(t) \leq \varepsilon \mu(x_0 - t) \tag{3.6}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcuttur. Şimdi bu sabit δ için I_2, I_3 ve I_1 integrallerini sırasıyla inceleyelim. Öncelikle,

$$F(t) = \int_{t-x_0}^{0} |f(x_0+t) - f(x_0)|\, dt$$

olduğundan

$$F^{'}(t) = -\left|f(t) - f(x_0)\right|$$

olarak bulunur. Buna göre

$$\left|I_2(x,\lambda)\right| = \left|\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left|\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x_0)\right| L_\lambda(t-x)\,dt\right|$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} \left|I_2(x,\lambda)\right| &= \left|\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} -F^{'}(t)\, L_\lambda(t-x)\,dt\right| \\ &= \left|\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F^{'}(t)\, L_\lambda(t-x)\,dt\right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadeye

$$\begin{aligned} L_\lambda(t-x) &= u \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda(t-x)\,dt = du \\ F^{'}(t) &= dv \ \ , \ \ F(t) = v \end{aligned}$$

şeklinde kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım.

$$\begin{aligned} \left|I_2(x,\lambda)\right| &= \left| \quad F(t)\, L_\lambda(t-x) \Big|_{x_0-\delta}^{x_0} - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F(t) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda(t-x)\,dt \quad \right| \\ &= \Big| F(x_0)\, L_\lambda(x_0-x) - F(x_0-x)\, L_\lambda(x_0-\delta-x) \\ &\quad - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F(t) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda(t-x)\,d(t) \Big| \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

$$F(t) = \int\limits_{t}^{x_0} \left|f(y) - f(x_0)\right| dy$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0} \left|f(y) - f(x_0)\right| dy$$

integralin sınırları eşit olduğundan

$$F(x_0) = 0$$

sonucunu elde ederiz. Buna göre

$$|I_2(x,\lambda)| = \left| -F\left(x_0-\delta\right) L_\lambda(x_0-\delta-x) - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right|$$

eşitliğini elde ederiz. Burada üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| -F\left(x_0-\delta\right) L_\lambda(x_0-\delta-x) - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right| \\ \leq \; & \left| -F\left(x_0-\delta\right) L_\lambda(x_0-\delta-x) \right| + \left| - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right| \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\left| - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right| = \left| \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right|$$

olacağından eşitsizliği

$$\begin{aligned} & \left| -F\left(x_0-\delta\right) L_\lambda(x_0-\delta-x) - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right| \\ \leq \; & \left| -F\left(x_0-\delta\right) L_\lambda(x_0-\delta-x) \right| + \left| \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right| \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. $L_\lambda(x_0-\delta-x)$ *daima pozitif olduğundan*

$$\begin{aligned} & \left| -F\left(x_0-\delta\right) L_\lambda(x_0-\delta-x) - \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right| \\ \leq \; & \left| -F\left(x_0-\delta\right) \right| L_\lambda(x_0-\delta-x) + \left| \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} F\left(t\right) \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt \right| \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. Sağ taraftaki integralde mutlak değeri integralin içine yazıp $L_\lambda\left(t-x\right)$ *nin pozitif olma özelliğini kullanırsak eşitsizliğimizi*

$$|I_2\left(x,\lambda\right)| \leq \left| -F\left(x_0-\delta\right) \right| L_\lambda(x_0-\delta-x) + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0} \left|F\left(t\right)\right| \frac{\partial}{\partial t} L_\lambda\left(t-x\right) dt$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan (3.6) *eşitsizliğinden*

$$F\left(t\right) \leq \varepsilon\mu\left(x_0-t\right)$$

$$\begin{aligned} F(x_0-\delta) &\leq \varepsilon\mu(x_0-(x_0-\delta)) \\ F(x_0-\delta) &\leq \varepsilon\mu(\delta) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği (3.7) *eşitsizliğinde kullanırsak*

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon\mu(\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x)+\varepsilon\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu(x_0-t)\frac{\partial}{\partial t}L_\lambda(t-x)\,dt$$

sağlanır.

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu(x_0-t)\frac{\partial}{\partial t}L_\lambda(t-x)\,dt$$

ifadesine

$$\begin{aligned} \mu(x_0-t) &= u \quad , \qquad \mu'(x_0-t)(-dt)=du \\ \frac{\partial}{\partial t}L_\lambda(t-x)\,dt &= dv \quad , \qquad\qquad L_\lambda(t-x)=v \end{aligned}$$

olacak şekilde tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu(x_0-t)\frac{\partial}{\partial t}L_\lambda(t-x)\,dt=\mu(x_0-t)L_\lambda(t-x)_{x_0-\delta}^{x_0}+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu'(x_0-t)L_\lambda(t-x)\,dt$$

$$=\mu(x_0-x_0)L_\lambda(x_0-x)-\mu(x_0-x_0+\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x)+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu'(x_0-t)L_\lambda(t-x)\,dt$$

$$=\mu(0)L_\lambda(x_0-x)-\mu(\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x)+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu'(x_0-t)L_\lambda(t-x)\,dt$$

$\mu(0)=0$ *olduğundan*

$$=-\mu(\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x)+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu'(x_0-t)L_\lambda(t-x)\,dt$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned} |I_2(x,\lambda)| &\leq \varepsilon\mu(\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x)+\varepsilon\Big\{-\mu(\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x) \\ &\quad +\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu'(x_0-t)L_\lambda(t-x)\,dt\Big\} \\ &\leq \varepsilon\mu(\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x)-\varepsilon\mu(\delta)L_\lambda(x_0-\delta-x) \\ &\quad +\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu'(x_0-t)L_\lambda(t-x)\,dt \\ &\leq \varepsilon\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0}\mu'(x_0-t)L_\lambda(t-x)\,dt \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$t = u + x$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \mu^{'}(x_0 - u - x) L_\lambda(u) \, du$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu kez de

$$u = t$$

değişken değiştirmesi yaplım. O halde

$$|I_2(x,\lambda)| \leq \varepsilon \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \mu^{'}(x_0 - t - x) L_\lambda(t) \, dt$$

eşitsizliğini elde ederiz. Tanım 3.1.(e) *şartından ve* (3.4) *eşitsizliğinden*

$$I_{2,1}(x,\lambda) := \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \mu^{'}(x_0 - t - x) L_\lambda(t) \, dt$$

ifadesini aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(x,\lambda) &= \int_{x_0-x-\delta}^{0} \left(\bigvee_{x_0-x-\delta \leq s \leq t} L_\lambda(s) \, \mu^{'}(x_0 - t - x) \right) dt \\
&\quad + \int_{0}^{x_0-x} \left(\bigvee_{x_0-x-\delta \leq s \leq t} L_\lambda(s) \, \mu^{'}(x_0 - t - x) \right) dt \\
&\quad + L_\lambda(x_0 - \delta - x) \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x} \mu^{'}(x_0 - t - x) \, dt. \\
&= \int_{x_0-x-\delta}^{0} (L_\lambda(t) - L_\lambda(x_0 - \delta - x)) \, \mu^{'}(x_0 - t - x) \, dt \\
&\quad + \int_{0}^{x_0-x} [(L_\lambda(0) - L_\lambda(x_0 - \delta - x)) + (L_\lambda(0) - L_\lambda(t))] \, \mu^{'}(x_0 - x - t) \, dt \\
&\quad + L_\lambda(x_0 - \delta - x) \int_{x_0-x}^{x_0} \mu^{'}(x_0 - t) \, dt.
\end{aligned}$$

Burada

$$\int_{0}^{x_0-x}\left[\left(L_\lambda(0)-L_\lambda(x_0-\delta-x)\right)+\left(L_\lambda(0)-L_\lambda(t)\right)\right]\mu^{'}(x_0-x-t)\,dt$$

ifadesinde $\mu^{'}(x_0-x-t)$ *değeri parantezin içine dağıtılır ve yerine yazılırsa,*

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(x,\lambda) &= \int_{x_0-x-\delta}^{0}L_\lambda(t)\,\mu^{'}(x_0-x-t)\,dt+2L_\lambda(0)\int_{0}^{x_0-x}\mu^{'}(x_0-x-t)\,dt\\
&\quad -L_\lambda(x_0-\delta-x)\left(\int_{x_0-x-\delta}^{0}\mu'(x_0-x-t)\,dt+\int_{0}^{x_0-x}\mu'(x_0-x-t)\,dt\right)\\
&\quad -\int_{0}^{x_0-x}L_\lambda(t)\,\mu^{'}(x_0-x-t)\,dt+L_\lambda(x_0-\delta-x)\int_{x_0-\delta}^{x_0}\mu^{'}(x_0-t)\,dt
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
I_{2,1}(x,\lambda) &\leq \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x}L_\lambda(t)\,\mu^{'}(x_0-x-t)\,dt+2L_\lambda(0)\int_{0}^{x_0-x}\mu^{'}(x_0-x-t)\,dt\\
&\quad +L_\lambda(x_0-\delta-x)\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0}\mu^{'}(x_0-t)\,dt-\int_{x_0-\delta}^{x_0}\mu^{'}(x_0-t)\,dt\right)\\
&= \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x}L_\lambda(t)\,\mu^{'}(x_0-x-t)\,dt+2L_\lambda(0)\,\mu(|x-x_0|)\\
&\quad \int_{x_0-x-\delta}^{x_0}L_\lambda(t-x)\,\mu^{'}(x_0-t)\,dt+2L_\lambda(0)\,\mu(|x-x_0|)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$|I_2(x,\lambda)|\leq\varepsilon\left(\int_{x_0-\delta}^{x_0}L_\lambda(t-x)\,\mu^{'}(x_0-t)\,dt+2L_\lambda(0)\,\mu(|x-x_0|)\right)\tag{3.8}$$

elde edilir.

$$|I_3(x,\lambda)|$$

için benzer yöntem kullanılırsa

$$|I_3(x,\lambda)|\leq\varepsilon\int_{x_0}^{x_0+\delta}L_\lambda(t-x)\,\mu^{'}(t-x)\,dt\tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} I_1(x,\lambda) &= \int\limits_{|t-x_0|>\delta} \left|\widetilde{f}(t)-\widetilde{f}(x_0)\right| L_\lambda(t-x)\,dt \\ &= \int\limits_a^{x_0-\delta} |f(t)-f(x_0)|\, L_\lambda(t-x)\,dt + \int\limits_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-f(x_0)|\, L_\lambda(t-x)\,dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$I_{1,1}(x,\lambda) := \int\limits_a^{x_0-\delta} |f(t)-f(x_0)|\, L_\lambda(t-x)\,dt$$

ve

$$I_{1,2}(x,\lambda) := \int\limits_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-f(x_0)|\, L_\lambda(t-x)\,dt$$

olarak tanımlansın. (3.4)*'ten*

$$\begin{aligned} I_{1,1}(x,\lambda) &= \int\limits_a^{x_0-\delta} |f(t)-f(x_0)|\, L_\lambda(t-x)\,dt \\ &\leq \sup_{t\epsilon\langle a,x_0-\delta]} L_\lambda(t-x) \int\limits_a^{x_0-\delta} |f(t)-f(x_0)|\,dt \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$t \in (a, x_0-\delta]$ *olmak üzere* $t \leq x_0-\delta$ *ve* $t \geq a$ *elde edilir.*

(3.4)*eşitsizliğinde eğer* $t \leq x_0-\delta$ *ise bu taktirde* $t-x \leq x_0-x-\delta < -\frac{\delta}{2}$ *dir ve böylece* $|t-x| > \frac{\delta}{2}$ *ifadesini elde ederiz. Böylece*

$$I_{1,1}(x,\lambda) \leq \sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} L_\lambda(u)\left(\left\|f_{L_1(a,b)}\right\| + |f(x_0)|\,(b-a)\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Aynı yolla

$$I_{1,2}(x,\lambda) \leq \sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} L_\lambda(u)\left(\left\|f_{L_1(a,b)}\right\| + |f(x_0)|\,(b-a)\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$I_1(x,\lambda) = I_{1,1}(x,\lambda) + I_{1,2}(x,\lambda)$$

olduğundan

$$I_1(x,\lambda) = 2\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} L_\lambda(u)\left(\left\|f_{L_1(a,b)}\right\| + |f(x_0)|(b-a)\right)$$

olarak bulunur. Burada Tanım 3.1.(c) *şartını yeniden yazalım.*

$$Her\ \delta > 0\ için\ \underset{\lambda\to\lambda_0}{lim}\sup_{|t|\geq\delta} L_\lambda(t) = 0.$$

Buna göre

$$I_1(x,\lambda) \leq 2\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} L_\lambda(u)\left(\left\|f_{L_1(a,b)}\right\| + |f(x_0)|(b-a)\right) \tag{3.10}$$

ifadesi $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ *iken sıfıra gider. Son olarak* $I_0(x,\lambda)$ *integralini göz önüne alalım.*

$$I_0(x,\lambda) = \int_{t\notin\langle a,b\rangle} \left|\widetilde{f}(t) - f(x_0)\right| L_\lambda(t-x)\,dt.$$

$t \notin (a,b)$ *iken* $\widetilde{f}(t) = 0$ *olduğunu biliyoruz. Buna göre*

$$\begin{aligned} I_0(x,\lambda) &= \int_{t\notin\langle a,b\rangle} |f(x_0)|\, L_\lambda(t-x)\,dt \\ &= |f(x_0)| \int_{t\notin\langle a,b\rangle} L_\lambda(t-x)\,dt \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $t \notin [a,b]$ *ise* $t < a$ *veya* $t > b$ *dir. Eğer* $t < a$ *ise bu durumda* (3.4) *eşitsizliğinden* $t < a < x_0 - \delta$ *ve*

$$t - x < a - x < x_0 - x - \delta < -\frac{\delta}{2} < 0$$

eşitsizliği sağlanır. $t > b$ *için yine* (3.4) *eşitsizliğinden* $t > b > x_0 + \delta$ *ve*

$$t - x > b - x > x_0 - x + \delta > \delta > 0$$

eşitsizlikleri sağlanır. Sonuç olarak herhangi $\delta > 0$ *için* $t - x < -\frac{\delta}{2}$ *ve* $t - x > \frac{\delta}{2}$ *bulunur. Buna göre,*

$$\int_{t\notin(a,b)} L_\lambda(t-x)\,dt \leq \int_{|t-x|>\frac{\delta}{2}} L_\lambda(t-x)\,dt = \int_{\mathbb{R}/U} L_\lambda(u)\,du$$

yazılabilir. Böylece,

$$I_0(x,\lambda) \leq |f(x_0)| \int_{\mathbb{R}/U} L_\lambda(u)\,d(u) \tag{3.11}$$

elde edilir. Bu ise $(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)$ *iken Tanım* 3.1.(b) *şartından* $I_0(x,\lambda)$ *ifadesinin sıfıra gittiğini gösterir.* , (3.8), (3.10) *ve* (3.11) *eşitsizlikleri* (3.5) *eşitsizliğinde birleştirilirse*

$$\begin{aligned}
|I(x,\lambda)| &\leq |f(x_0)|\int\limits_{\mathbb{R}/U} L_\lambda(u)\,du + 2\sup_{|u|>\frac{\delta}{2}} L_\lambda(u)\Big(\|f\|_{L_1\langle a,b\rangle} + |f(x_0)|(b-a)\Big) \\
&\quad +\varepsilon\left(\int\limits_{x_0+\delta}^{x_0-\delta} L_\lambda(t-x)\,\mu'(|t-x_0|) + 2L_\lambda(0)\,\mu(|x-x_0|)\right) \qquad (3.12) \\
&\quad +\left|\int\limits_{\mathbb{R}/U} K_\lambda\Big(t-x,\widetilde{f}(-x_0)\Big)\,dt - f(x_0)\right|
\end{aligned}$$

eşitsiziliği bulunur. (3.12) *eşitsizliğinin* $-\frac{\delta}{2}<x_0-x<0$ *için geçerli olduğu da gösterilebilir. Son olarak Tanım* 3.1.(b), (c) *şartları ve* (3.2) *ifadesinden*

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} T_\lambda(f,x) = f(x_0)$$

olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar. ■

4. BERNSTEIN TİPİNDEKİ LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLER VE BU OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

f, $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı fonksiyon olsun. f fonkisyonu için Bernstein operatörü

$$B_n(x) = (B_n f)(x) = \sum_{v=0}^{n} f\left(\frac{v}{n}\right)\binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \tag{4.1}$$

eşitliği ile tanımlanır. $B_n(x)$ derecesi n'den küçük ya da n'ye eşit olan bir polinomdur. (S. Bernstein 1912-13) makalesinde Bernstein polinomları Weierstrass teorminin basit bir ispatını vermek için tanımlanmıştır. Bu makalede yakınsaklığın düzgün olduğu gösterilmiştir. Bernstein operatörleri ile ortak özelliklere sahip birçok singüler integral de tanımlanmıştır. Bunlardan en iyi bilinenleri

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} dt \tag{4.2}$$

eşitliği ile verilen Dirichlet integralidir. Bu integral $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlı, integrallenebilir f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamı olarak tanımlanmıştır. Singüler integrallere bir diğer örnek de Fejer integralidir. Fejer integrali

$$\sigma_n = (s_0 + s_1 + ... + s_n) / (n+1)$$

eşitliği ile verilir ve yukarıdaki $S_n(x)$ dizisinin aritmetik ortalaması ile elde edilir. En genel singüler integraller

$$\Phi_n(x) = \int_a^b f(t) K_n(x,t)\, dt \tag{4.3}$$

eşitliği ile elde edilir. Burada $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ olmak üzere $K_n(x,t)$ fonksiyonuna singüler integral operatörünün çekirdeği denir. Biz biliyoruz ki uygun şartlar altında $\Phi_n(x)$ $n \to \infty$ için $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar. (4.1) ve (4.3) eşitlikleri göz önüne alındığında bu eşiklikler aslında singüler Stieltjes integralleridir. (4.1) ifadesi t değişkeninin Stieltjes integrali olarak

$$B_n(x) = \int_0^1 f(t)\, d_t K_n(x,t) \tag{4.4}$$

şeklinde ifade edilir. Burada çekirdek

$$K_n(x,t) = \sum_{v \le nt} \binom{n}{v} x^v (1-x)^{n-v} \quad , \quad 0 < t \le 1 \tag{4.5}$$

$$K_n(x,0) = 0$$

olacak şekilde tanımlanır. Bu durumda Beirnstein operatörü singüler integral teorisinin bir bölümü olarak düşünülebilir.

Tanım 4.1 *(a,b) üzerinde ölçülebilir ve reel değerli f ve g fonksiyonlarının konvolusyonu*

$$(f * g)(x) = \int_a^b f(x-u)\, g(u)\, du \tag{4.6}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Lemma 4.1 *f fonksiyonu*

$$M = \sup \left\{ \frac{1}{h} \left| \int_\alpha^{\alpha+h} f(t)\, dt \right| \right\} < +\infty \tag{4.7}$$

özelliğini sağlayan, $[a,b]$ aralığında tanımlı, integrallenebilen bir fonkisyon olsun. $[a,b]$ aralığında integrallenebilen, negatif olmayan ve azalan g fonksiyonu için

$$\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \tag{4.8}$$

integrali mevcut ($t = a$ da genelleştirilmiş integral olabilir) ise

$$\left| \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \right| \le M \int_a^b g(t)\, dt \tag{4.9}$$

eşitsizliği geçerlidir. Not edelim ki lemmanın şartlarında $g(a) = +\infty$ durumunu göz önüne almayacağız. Ancak $g(a) < \infty$ ise g sınırlı ve (4.8) integrali Lebesgue anlamında mevcuttur.

İspat. *Genelliği bozmaksızın $g(b) = 0$ kabul edebiliriz. Gerçekten de eğer $g(b) \neq 0$ ise g fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi*

$$g^*(t) = \begin{Bmatrix} g(t), & a \le t \le b \\ 0 & , \ t = b \end{Bmatrix}$$

tanımlayabiliriz. Çünkü bu durumda g ile g^* fonksiyonlarının integralleri aynı sonucu verir. $a < w < b$ olsun. $[w, b]$ kapalı aralığında $g(t)$ sınırlıdır ve

$$\int_w^b f(t)\, g(t)\, dt \tag{4.10}$$

integrali mevcuttur. Eğer,

$$F(t) = \int_w^t f(u)\, du$$

ile F tanımlanırsa (4.10) ifadesi Stieltjes integrali formunda

$$\int_w^b f(t)\, g(t)\, dt = \int_w^b g(t)\, dF(t)$$

eşitliği ile gösterilebilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrale kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
g(t) &= u \quad , \quad dg(t) = du \\
dF(t) &= dv \quad , \quad F(t) = v \\
\int_w^b f(t)\, g(t)\, dt &= g(t)\, F(t)\Big|_w^b - \int_w^b F(t)\, dg(t) \\
&= g(b)\, F(b) - g(w)\, F(w) - \int_w^b F(t)\, dg(t)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $g(b) = 0$ olduğundan

$$\int_w^b f(t)\, g(t)\, dt = -g(w)\, F(w) - \int_w^b F(t)\, dg(t)$$

olarak bulunur.

$$-\int_w^b F(t)\, dg(t) = \int_w^b F(t)\, d[-g(t)]$$

olduğundan

$$\int_w^b f(t)\, g(t)\, dt = -g(w)\, F(w) + \int_w^b F(t)\, d[-g(t)]$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\int_w^b f(t)\, g(t)\, dt = -F(w)\, g(w) + \int_w^b F(t) d[-g(t)]$$

eşitliği elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_w^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leq |F(w)\,g(w)| + \left|\int_w^b F(t)d[-g(t)]\right|$$

elde edilir. Öncelikle $|F(w)\,g(w)|$ *ifadesini ele alalım.* (4.7) *eşitsizliğinden*

$$\frac{|F(t)|}{(t-a)} = \frac{1}{(t-a)}\left|\int_w^t f(u)\,du\right| \leq \sup_t \left\{\frac{1}{(t-a)}\left|\int_w^t f(u)\,du\right|\right\}$$

$t-a=h$ *olarak alınırsa*

$$\frac{|F(t)|}{(t-a)} = \frac{1}{(t-a)}\left|\int_w^t f(u)\,du\right| \leq \sup_h \left\{\frac{1}{h}\left|\int_w^{a+h} f(u)\,du\right|\right\}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$a < w \leq a+h$$

eşitsizliğine göre

$$\sup_h \left\{\frac{1}{h}\left|\int_w^{a+h} f(u)\,du\right|\right\} \leq \sup_h \left\{\frac{1}{h}\left|\int_a^{a+h} f(u)\,du\right|\right\} = M$$

olduğu görülür. Buna göre

$$\frac{|F(t)|}{(t-a)} \leq M$$

ve

$$|F(t)| \leq M(t-a) \tag{4.11}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$|F(w)| \leq M(w-a)$$

eşitsizliği sağlanır. g *negatif olmayan bir fonksiyol olduğundan*

$$|F(w)|\,g(w) \leq Mg(w)\,(w-a)$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca g *azalan olduğundan*

$$g(w)\,(w-a) \leq \int_a^w g(t)\,dt \tag{4.12}$$

yazılabilir. Buna göre

$$|F(w)|\, g(w) \leq M \int_a^w g(t)\, dt$$

elde edilir. Yine g fonkisyonunun negatif olmama özelliğinden

$$|F(w)\, g(w)| \leq M \int_a^w g(t)\, dt$$

yazabiliriz. Şimdi de $\left|\int_w^b F(t) d[-g(t)]\right|$ *ifadesini ele alalım. (4.11) eşitsizliğini yeniden yazalım.*

$$|F(t)| \leq M(t-a)$$

$-g$ *artan olacağından*

$$\left|\int_w^b F(t)\, d[-g(t)]\right| \leq M \int_w^b (t-a)\, d[-g(t)]$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integral için kısmi integrasyon uygulayalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
t-a &= u \quad , \qquad dt = du \\
d[-g(t)] &= dv \quad , \ -g(t) = v \\
\int_w^b (t-a)\, d[-g(t)] &= -(t-a)\, g(t)|_w^b - \int_w^b [-g(t)]\, dt \\
&= (a-t)\, g(t)|_w^b + \int_w^b g(t)\, dt \\
&= (a-b)\, g(b) - (a-w)\, g(w) + \int_w^b g(t)\, dt
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $g(b) = 0$ *olduğundan*

$$\int_w^b (t-a)\, d[-g(t)] = g(w)(w-a) + \int_w^b g(t)\, dt$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik (4.12) *eşitsizliği ile birlikte göz önüne alınırsa*

$$\int_w^b (t-a)\, d[-g(t)] \leq \int_a^w g(t)\, dt + \int_w^b g(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_{w}^{b} (t-a)\, d\left[-g(t)\right] \leq \int_{a}^{b} g(t)\, dt$$

ve

$$\left| \int_{w}^{b} F(t)\, d\left[-g(t)\right] \right| \leq M \int_{a}^{b} g(t)\, dt$$

elde edilir. O halde

$$\left| \int_{a}^{b} f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq M \int_{a}^{w} g(t)\, dt + M \int_{a}^{b} g(t)\, dt$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\left| \int_{a}^{b} f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq M \left\{ \int_{a}^{w} g(t)\, dt + \int_{a}^{b} g(t)\, dt \right\} \tag{4.13}$$

eşitsizliği yazılabilir. $a < w < b$ *eşitsizliğinde* w *ile* b *arasında bir* β *sayısı alalım. Buna göre* $a < w < \beta < b$ *eşitsizliğini elde ederiz.*

$$\left| \int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt \right| < \left| \int_{a}^{b} f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq M \left\{ \int_{a}^{w} g(t)\, dt + \int_{a}^{b} g(t)\, dt \right\}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buna göre

$$\left| \int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq M \left\{ \int_{a}^{w} g(t)\, dt + \int_{a}^{b} g(t)\, dt \right\}$$

ifadesi elde edilir. Burada b *yerine* b*'den daha küçük olan* β *sayısı alınırsa*

$$\left| \int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt \right| < M \left\{ \int_{a}^{w} g(t)\, dt + \int_{a}^{\beta} g(t)\, dt \right\}$$

eşitsizliği bulunur. $w \to a$ *ve* $\beta \to a$ *olacak şekilde limit alınırsa*

$$\lim \left| \int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt \right| < \lim M \left\{ \int_{a}^{a} g(t)\, dt + \int_{a}^{a} g(t)\, dt \right\}$$

$$\lim \left| \int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt \right| = 0$$

ve

$$\lim \int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt = 0$$

bulunur.

$$\int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt$$

ifadesinin limitinin sıfır olması ifadenin sonlu olduğunu gösterir. Bu ise

$$\int_{w}^{\beta} f(t)\, g(t)\, dt$$

integralinin mevcut olduğunu ispatlar. Ayrıca

$$\left| \int_{a}^{b} f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq M \left\{ \int_{a}^{w} g(t)\, dt + \int_{a}^{b} g(t)\, dt \right\}$$

eşitsizliğinde $w \to a$ *olacak şekilde limit alınırsa*

$$\left| \int_{a}^{b} f(t)\, g(t)\, dt \right| \leq M \int_{a}^{b} g(t)\, dt$$

elde edilir. Böylece (4.9) eşitsizliği elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur. ∎

Lemma 4.2 $0 < \eta < b - a$ *için* $\varphi(t) \in BV\,[a+\eta, b]$ $v(s) = \underset{s \leq t \leq b}{var}\, \varphi(t)$ *olsun.* $a \leq s \leq b$ *ve* $v(b) = 0$ *olduğundan*

$$\int_{a}^{b} v(s)\, ds < \infty$$

eşitsizliği geçerli olur. Eğer $f \in L_1\,[a,b]$ *için*

$$M = \sup_{0<h\leq b-a} \left\{ \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(t)\, dt \right\} < \infty \tag{4.14}$$

ise

$$I = \int_{a^+}^{b} f(t)\varphi(t)dt, \tag{4.15}$$

Lebesgue integrali mevcuttur ve

$$|I| \leq M \int_{a}^{b} [v(s) + |\varphi(b)|]\, ds \tag{4.16}$$

yazılabilir.

İspat. *$a \leq t \leq b$ için*

$$F(t) = \int_a^t f(u)du$$

olarak tanımlansın.

$$I_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

integralinin varlığından bahsedebilmek için $\varphi(t)$'nin sonlu olduğu aralığı göz önüne alalım.

$$I_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta f(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(t)\,\varphi(t)\,dt$$

Burada $F'(t) \in L_1$ dir. Ayrıca $\varphi(t) \in BV[\alpha,\beta]$ ise $\varphi(t)$ sınırlıdır ve $1 \leq p < \infty$ aralığında $\varphi(t) \in L_P(\alpha,\beta)$ olduğu ve $\varphi(t)$'nin sürekli olduğu görülür. Üstelik diferensiyel hesabın temel teoreminden $f(t) = F'(t)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta} &= \int_\alpha^\beta f(t)\,\varphi(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta F'(t)\,\varphi(t)\,dt \end{aligned}$$

yazılabilir.Şimdi de $I_{\alpha,\beta}$ integrali Lebesgue Stieljies integral formuna dönüştürelim.

$$I_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dF(t)$$

Burada kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= u \quad , \quad d\varphi(t) = du \\ dF(t) &= dv \quad , \quad F(t) = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &= \varphi(t)\,F(t)\big|_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)\,d\varphi t \\
&= \varphi(t)\,F(t)\big|_{\alpha}^{\beta} + \int\limits_{\alpha}^{\beta} -F(t)\,d\varphi(t) \\
&= \varphi(\beta)\,F(\beta) - \varphi(\alpha)\,F(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} -F(t)\,d\varphi(t)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada üçgen eşitsizliğinden

$$|I_{\alpha,\beta}| \le |\varphi(\beta)\,F(\beta) - \varphi(\alpha)\,F(\alpha)| + \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} -F(t)\,d\varphi(t)\right|$$

elde edilir. $\varphi(t) \le v(t)$ *ve* v *azalan bir fonksiyon olduğundan*

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} -F(t)\,d\varphi(t)\right| &= \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)\,d[-\varphi(t)]\right| \\
&\le \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)\,d[-v(t)]\right|
\end{aligned}$$

ve

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} -F(t)\,d\varphi(t)\right| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} |F(t)|\,d[-v(t)]$$

yazılabilir. Burada F *fonksiyounun değeri yerine yazılıp integralin içerisi* $t-a$ *değeri ile çarpılıp bölünürse*

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} -F(t)\,d\varphi(t)\right| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} t-a.\frac{1}{t-a}\left|\int\limits_{a}^{t} f(u)\,du\right| d[-v(t)]$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $t-a=h$ *olarak alınır ve* h *üzerinden supremum alınırsa*

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)\,d\varphi(t)\right| \le M\int\limits_{\alpha}^{\beta} (t-a)\,d[-v(t)]$$

olarak bulunur. Sağ taraftaki integrale kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım.

$$\begin{aligned}
t-a &= u \quad , \qquad dt = du \\
d[-v(t)] &= d\xi \quad , \quad -v(t) = \xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d\varphi(t)\right| &\leq M\int_{\alpha}^{\beta} (t-a)\, d[-v(t)] \\
&= M\left[[(a-t)\, v(t)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, dt\right] \\
&= M\left[(a-\beta)\, v(\beta) - (a-\alpha)\, v(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, dt\right] \\
&= M\left[(a-\beta)\, v(\beta) + (\alpha-a)\, v(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, dt\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. v fonksiyonu azalan olduğundan

$$(\alpha-a)\, v(\alpha) \leq \int_{a}^{\alpha} v(t)\, dt$$

dir. Buna göre

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d\varphi(t)\right| \leq M\left[(a-\beta)\, v(\beta) + \int_{a}^{\alpha} v(t)\, dt + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, dt\right]$$

ifadesi bulunur ve

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d\varphi(t)\right| \leq M\left[(a-\beta)\, v(\beta) + \int_{a}^{\beta} v(t)\, dt\right]$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Bu son eşitsizliği

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq |\varphi(\beta)\, F(\beta) - \varphi(\alpha)\, F(\alpha)| + \left|\int_{\alpha}^{\beta} - F(t)\, d\varphi(t)\right|$$

ifadesinde değerlendirirsek

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq |\varphi(\beta)\, F(\beta) - \varphi(\alpha)\, F(\alpha)| + M\left[(a-\beta)\, v(\beta) + \int_{a}^{\beta} v(t)\, dt\right]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $F(\beta)$ ve $F(\alpha)$ değerlerini yerine yazalım. Buna göre

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \left|\varphi(\beta)\int_{a}^{\beta} f(u)\, du - \varphi(\alpha)\int_{a}^{\alpha} f(u)\, du\right| + M\left[(a-\beta)\, v(\beta) + \int_{a}^{\beta} v(t)\, dt\right]$$

ifadesini elde ederiz. Burada $\beta \to b$ olacak şekilde limit alınırsa

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \left|\varphi(b)\int_a^b f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right| + M\left[(a-b)\,v(b) + \int_a^b v(t)\,dt\right]$$

eşitsizliği elde edilir. $v(b) = 0$ *olduğundan*

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \left|\varphi(b)\int_a^b f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right| + M\int_a^b v(t)\,dt$$

ifadesi bulunur.

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \left|\varphi(b)(b-a)\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right| + M\int_a^b v(t)\,dt$$

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)\,du$$

ifadesinde $b - a = h$ şeklinde ifade edilerek supremum alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(u)\,du &= \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(u)\,d(u)\\ &\leq M\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \left|\varphi(b)(b-a)M - \varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right| + M\int_a^b v(t)\,dt$$

elde edilir. Burada $\alpha \to a$ olacak şekilde limit alınırsa

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq |\varphi(b)(b-a)M| + M\int_a^b v(t)\,dt$$

elde edilir. $b - a$ ve M pozitif sayılar olduğundan

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq |\varphi(b)|(b-a)M + M\int_a^b v(t)\,dt$$

ifadesi elde edilmiş olur.

$$b - a = \int_a^b dt$$

olduğundan

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq |\varphi(b)|\, M \int\limits_a^b dt + M \int\limits_a^b v(t)\, dt$$

elde edilir. Son olarak

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq M \left[|\varphi(b)| \int\limits_a^b dt + \int\limits_a^b v(t)\, dt \right]$$

ve

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq M \int\limits_a^b \left[v(t) + |\varphi(b)| \right] dt$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur. ■

Lemma 4.3 *μ $[0, b-a]$ aralığında tanımlı artan, mutlak sürekli ve $\mu(0) = 0$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. $0 < \mu < b-a$ için $\varphi(t)$ $[a+\mu, b]$ aralıklarında sınırlı salınımlı bir fonksiyon olmak üzere*

$$\int\limits_a^b [\mu(t-a)]_t' \, v(t)\, dt < \infty, \tag{4.17}$$

geçerli olsun.

$$v(t) = \underset{t \leq s \leq b}{var} \varphi(s), \quad (a \leq t \leq b).$$

Eğer

$$M = \sup_{0<h\leq b-a} \frac{1}{\mu(h)} \left| \int\limits_a^{a+h} f(t)\, dt \right| < \infty, \ f \in L_1[a,b], \tag{4.18}$$

ise

$$\left| \int\limits_{a^+}^b f(t)\, \varphi(t)\, dt \right| \leq M \int\limits_a^b \left[v(t) + |\varphi(b)| \right] [\mu(t-a)]_t' \, dt \tag{4.19}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat.

$$F(t) = \int\limits_a^t f(u)\, du, \quad (a \leq t \leq b)$$

ve

$$I_{\alpha,\beta} = \int\limits_\alpha^\beta f(t)\, \varphi(t)\, dt, (a < \alpha < \beta \leq b)$$

fonkisyonlarını tanımlayalım. $f \in L_1$ ve $\varphi(t) \in BV[\alpha, \beta]$ olduğundan $\varphi(t)$ sınırlıdır. $\varphi \in L_\infty(\alpha, \beta)$ ile L_1 birbirinin dualidir ve buna göre $I_{\alpha,\beta}$ anlamlıdır.

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F'(t)\,\varphi(t)\,dt$$

Burada $F' \in L_1$ ve $\varphi \in L_\infty(\alpha, \beta)$'dır. Ayrıca $I_{\alpha,\beta}$ Lebesgue-Steiljies integralinin formunda yazılabilir. v fonksiyonu pozitif ve azalan olduğundan

$$v^*(t) = \begin{Bmatrix} v(t) \ , & a \leq t \leq b \\ 0 & , \ t = b \end{Bmatrix}$$

şeklinde tanımlanabilir.

$$I_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dF(t)$$

integraline kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım.

$$\begin{aligned} u &= \varphi(t) \quad , \quad du = d\varphi(t) \\ dF(t) &= dv \qquad , \quad F(t) = v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta} &= \varphi(t)\,F(t)|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(t)\,d\varphi(t) \\ &= \varphi(t)\,F(t)|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta -F(t)\,d\varphi(t) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada üçgen eşitisizliğinden

$$|I_{\alpha,\beta}| \leq \left|\varphi(t)\,F(t)|_\alpha^\beta\right| + \left|\int_\alpha^\beta -F(t)\,d\varphi(t)\right|$$

eşitsizliği bulunur. Her zaman $I_{\alpha,\beta} \leq |I_{\alpha,\beta}|$ olduğundan

$$I_{\alpha,\beta} \leq \left|\varphi(t)\,F(t)|_\alpha^\beta\right| + \left|\int_\alpha^\beta -F(t)\,d\varphi(t)\right|$$

yazılabilir. Burada öncelikle $\left|\int_\alpha^\beta -F(t)\,d\varphi(t)\right|$ ifadesini inceleyelim.

$$v(t) = \underset{t \leq s \leq b}{var}\,\varphi(s) \ , \qquad a \leq t \leq b$$

olarak tanımlanmıştı. Burada t'nin değerleri arttıkça $[t, b]$ aralığı küçülecektir. Buna göre v azalan bir fonksiyon ve $-v$ artan bir fonksiyondur. Buna göre

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} -F(t)\, d\varphi(t)\right| \leq \left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d(-v(t))\right|$$

elde edilir.

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d(-v(t))\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)|\, d(-v(t))$$

Burada sağ taraftaki integralin içerisi $\mu(t-a)$ ifadesi ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d(-v(t))\right| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)|\, d(-v(t)) \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \mu(t-a) \frac{1}{\mu(t-a)} \left|\int_{a}^{t} f(u)\, du\right| d(-v(t))
\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz.

$$\frac{1}{\mu(t-a)} \left|\int_{a}^{t} f(u)\, du\right|$$

ifadesinde $t - a = h$ alınırsa

$$\frac{1}{\mu(t-a)} \left|\int_{a}^{t} f(u)\, du\right| = \frac{1}{\mu(h)} \left|\int_{a}^{a+h} f(u)\, du\right|$$

elde edilir. Buna göre

$$\frac{1}{\mu(h)} \left|\int_{a}^{a+h} f(u)\, du\right| \leq \sup \frac{1}{\mu(h)} \left|\int_{a}^{a+h} f(u)\, du\right|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(h)} \left|\int_{a}^{a+h} f(u)\, du\right| &\leq M \\
\mu(t-a) \frac{1}{\mu(t-a)} \left|\int_{a}^{t} f(u)\, du\right| &\leq \mu(t-a)\, M
\end{aligned}$$

ve

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d(-v(t))\right| \leq M \int_{\alpha}^{\beta} \mu(t-a)\, d(-v(t))$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integrale kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım.

$$\begin{aligned} u &= \mu(t-a) \quad , \quad du = d\mu(t-a) \\ dv &= d(-v(t)) \quad , \quad v = -v(t) \end{aligned}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mu(t-a)\, d(-v(t)) = \mu(t-a)(-v(t))\big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, d\mu(t-a)$$

ve

$$M\int_{\alpha}^{\beta} \mu(t-a)\, d(-v(t)) = M\left[\mu(t-a)(-v(t))\big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, d\mu(t-a)\right].$$

eşitliği elde edilir. Eğer

$$\int_{a}^{b} [\mu(t-a)]_t'\, v(t)\, dt < \infty$$

ise $\mu(t-a)$ sürekli olduğundan $\mu(t-a) \in BV[\alpha,\beta]$ ve $[\mu(t-a)]_t'$ mevcut, sonlu ve toplanabilirdir. $v(t) \in L_\infty(\alpha,\beta)$ olduğundan $v(t)$ süreklidir. Buna göre

$$M\left[\mu(t-a)(-v(t))\big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, d\mu(t-a)\right] =$$

$$M\left[\mu(t-a)(-v(t))\big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, [\mu(t-a)]_t'\, dt\right] =$$

$$M\left[-\mu(\beta-a)\, v(\beta) + \mu(\alpha-a)\, v(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, [\mu(t-a)]_t'\, dt\right]$$

eşitliğini elde ederiz. O halde

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} F(t)\, d(-v(t))\right| \le M\left[-\mu(\beta-a)\, v(\beta) + \mu(\alpha-a)\, v(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\, [\mu(t-a)]_t'\, dt\right].$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \left|\varphi(t)\, F(t)\big|_{\alpha}^{\beta}\right| &= |\varphi(\beta)\, F(\beta) - \varphi(\alpha)\, F(\alpha)| \\ &= \left|\varphi(\beta)\int_{a}^{\beta} f(u)\, du - \varphi(\alpha)\int_{a}^{\alpha} f(u)\, du\right| \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Buna göre $I_{\alpha,\beta}$ ifadesini yeniden yazalım.

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &\leq \left|\varphi(t)\,F(t)|_{\alpha}^{\beta}\right| + \left|\int_{\alpha}^{\beta} -F(t)\,d\varphi(t)\right| \\
&= \left|\varphi(\beta)\int_{a}^{\beta} f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_{a}^{\alpha} f(u)\,du\right| + \\
&\quad M\left[-\mu(\beta-a)\,v(\beta) + \mu(\alpha-a)\,v(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right] \\
&\leq \left|\varphi(\beta)\int_{a}^{\beta} f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_{a}^{\alpha} f(u)\,du\right| + \\
&\quad M\left[-\mu(\beta-a)\,v(\beta) + \int_{a}^{\alpha} v(t)\,d\mu(t-a) + \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right] \\
&= \left|\varphi(\beta)\int_{a}^{\beta} f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_{a}^{\alpha} f(u)\,du\right| + \\
&\quad M\left[-\mu(\beta-a)\,v(\beta) + \int_{a}^{\beta} v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right]
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &\leq \left|\varphi(\beta)\int_{a}^{\beta} f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_{a}^{\alpha} f(u)\,du\right| + \\
&\quad M\left[-\mu(\beta-a)\,v(\beta) + \int_{a}^{\beta} v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\beta \to b$ olacak şekilde limit alınırsa

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &\leq \left|\varphi(b)\int_{a}^{b} f(u)\,du - \varphi(\alpha)\int_{a}^{\alpha} f(u)\,du\right| + \\
&\quad M\left[-\mu(b-a)\,v(b) + \int_{a}^{b} v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &\leq \left|\varphi(b)\,\mu(b-a)\,\frac{1}{\mu(b-a)}\int_a^b f(u)\,du-\varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right|+ \\
&\quad M\left[-\mu(b-a)\,v(b)+\int_a^b v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right] \\
&= \left|\varphi(b)\,\mu(b-a)\,\frac{1}{\mu(h)}\int_a^{a+h} f(u)\,du-\varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right|+ \\
&\quad M\left[-\mu(b-a)\,v(b)+\int_a^b v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right] \\
&\leq \left|\varphi(b)\,\mu(b-a)\,M-\varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right|+ \\
&\quad M\left[-\mu(b-a)\,v(b)+\int_a^b v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right]
\end{aligned}$$

Şimdi de $\alpha \to a$ olacak şekilde limit alınırsa

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &\leq \left|\varphi(b)\,\mu(b-a)\,M-\varphi(\alpha)\int_a^\alpha f(u)\,du\right|+ \\
&\quad M\left[-\mu(b-a)\,v(b)+\int_a^b v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right] \\
&= \left|\varphi(b)\,\mu(b-a)\,M-\varphi(a)\int_a^a f(u)\,du\right|+ \\
&\quad M\left[-\mu(b-a)\,v(b)+\int_a^b v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right] \\
&= |\varphi(b)\,\mu(b-a)\,M|+M\left[-\mu(b-a)\,v(b)+\int_a^b v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt\right]
\end{aligned}$$

elde ederiz. $v(b)=0$ olduğundan

$$I_{\alpha,\beta} \leq |\varphi(b)\,\mu(b-a)\,M|+M\int_a^b v(t)\,[\mu(t-a)]_t'\,dt$$

bulunur.

$$\mu(b-a)=\int_a^b d\mu(t-a)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta} &\leq \left|\varphi(b)\int_a^b d\mu(t-a)\,M\right| + M\int_a^b v(t)\left[\mu(t-a)\right]_t^{\prime}dt \\ &= M\left|\varphi(b)\right|\int_a^b d\mu(t-a) + M\int_a^b v(t)\left[\mu(t-a)\right]_t^{\prime}dt \\ &= M\int_a^b \left[v(t)+\left|\varphi(b)\right|\right]\left[\mu(t-a)\right]_t^{\prime}dt \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta} &\leq M\int_a^b \left[v(t)+\left|\varphi(b)\right|\right]\left[\mu(t-a)\right]_t^{\prime}dt \\ \int_\alpha^\beta f(t)\,\varphi(t)\,dt &\leq M\int_a^b \left[v(t)+\left|\varphi(b)\right|\right]\left[\mu(t-a)\right]_t^{\prime}dt \end{aligned}$$

Bu ise, $a < \alpha < \beta \leq b$ olduğundan

$$\int_{a^+}^b f(t)\,\varphi(t)\,dt \leq M\int_a^b \left[v(t)+\left|\varphi(b)\right|\right]\left[\mu(t-a)\right]_t^{\prime}dt$$

anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4.1. Lineer Olmayan Singüler İntegral Operatörlerinin Yüksek Mertebeden Türevlerinin Fatou Tipli Yakınsaklığı

Λ bir topolojik uzay ve λ_0, Λ kümesinin bir yığılma noktası olsun. $U(\theta)$ ile $\mathbb{R}$'nin θ elemanının bütün komşuluklarının ailesini ve x_0 ile $\mathbb{R}$'nin sabit yığılma noktasını belirtelim. Her $t \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \Lambda$ için $K_\lambda(t,0) = 0$ olacak şekilde $K_\lambda : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $\mathcal{K}$ ailesini alalım. Burada $K_\lambda(t,u)$, λ indislerinin bütün değerleri ve u değişkeni için Lebesgue anlamında t'ye göre $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilirdir. Ek olarak $K_\lambda(t,u)$ çekirdek fonksiyonu her $t \in \mathbb{R}$ için $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ise bu çekirdek fonksiyonu Kategori çekirdek fonksiyonu olarak tanımlanır.

Bu bölümde K_λ uygun kabulleri sağlayan çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$(I_\lambda f)(x) = \int_a^b K_\lambda (t-x, f(t))\, dt, \quad x \in (a,b) \tag{4.20}$$

eşitliği ile verilen lineer olmayan singüler integral operatör ailesinin r.ve $(r+1)$. türevlerinin Fatou tipli noktasal yakınsaklığını göstereceğiz. Bu yakınsama teoremleri düzlemin bazı alt kümeleri için sınırlandırılmıştır. Yani Fatou tipli yakınsaklıklarda r. ve $(r+1)$. türeve sahip f fonksiyonu için 1. parametre x_0 yığılma noktasına, 2. parametre de Λ kümesinin λ_0 noktasına yakınsaması durumunda incelenir. Özel olarak

$$(I_\lambda f)(x) = \int_a^b K_\lambda (t-x, f(t))\, dt, \quad x \in (a,b)$$

lineer olmayan singüler integral operatör ailesi için yakınsaklık hızı elde edeceğiz. Bu yakınsaklık hızı x_0, f 'nin r. ve $(r+1)$. türevlerinin mevcut olduğu nokta olmak üzere $(x,\lambda) \to (x_0,\lambda_0)$ yakınsaması için elde edilecektir. Bu bölümde her $t,\ u, v \in \mathbb{R}$ ve herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ için

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} K_\lambda (t-x, u) - \frac{\partial}{\partial x} K_\lambda (t-x, v)\right] = \frac{\partial}{\partial x} L_\lambda (t-x)\,[u-v]$$

eşitliğinin sağlandığını kabul edeceğiz.

Bu bölüm boyunca $K_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığını kabul ederiz.

a) $L_\lambda (t)$, sabit $r \in \mathbb{N}$ için $t,\ u,\ v \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere

$$\left[\frac{\partial^r}{\partial x^r} K_\lambda (t-x, u) - \frac{\partial^r}{\partial x^r} K_\lambda (t-x, v)\right] = \frac{\partial^r}{\partial x^r} L_\lambda (t-x)\,[u-v]$$

eşitliğini sağlayan integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

b) Her $U \in U(0)$ için $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus U} L_\lambda (t)\, dt = 0$ dır.

c) Her $\delta > 0$ için $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \left[\sup\limits_{|t| \geq \delta} L_\lambda (t)\right] = 0$ dır.

d) $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \int\limits_{\mathbb{R}} L_\lambda (t)\, dt = 1$

(a) ya göre $K_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nin çekirdek fonksiyon olduğu kolaylıkla görülür.

$$\widetilde{f}(t) = \left\{ \begin{matrix} f(t), & t \in (a,b) \\ 0\ \ , & t \notin (a,b) \end{matrix} \right\}$$

olacak şekilde $f \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Teorem 4.1 *$1 \leq p < \infty$ olsun ve $K_\lambda(t,u)$ Kategori çekirdek fonksiyonu olsun. $f \in L_p(a,b)$ ise $(I_\lambda f) \in L_p(a,b)$ ve her $\lambda \in \Lambda$ için $\|I_\lambda f\|_{L_p(a,b)} \leq H(\lambda)\|f\|_{L_p(a,b)}$ eşitsizliği sağlanır.*

İspat. Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğini ve a) yı değerlendirirsek

$$H(\lambda)^p = \int_a^b |L_\lambda(t-x)|^p\, dx$$

iken

$$\begin{aligned}
\|I_\lambda f\| &= \left\| \int_a^b K_\lambda(t-x, f(t))\, dt \right\|_p \\
&\leq \int_a^b \|K_\lambda(t-x, f(t))\|_p\, dt \\
&\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K_\lambda(t-x, f(t))|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq \int_a^b \left(\int_a^b (|L_\lambda(t-x)|\,|f(t)|)^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_a^b \left(|f(t)|^p \int_a^b |L_\lambda(t-x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dt \\
&\leq H(\lambda)\|f\|_{L_p(a,b)}
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür. ■

4.2. Operatörlerin Türevlerinin Yakınsaması

$I = (a,b)$ $\mathbb{R}$ de keyfi bir aralık olmak üzere $v = 1, 2, ..., r$ değerleri için herhangi bir $C_v > 0$ sabiti için

$$D_r := \left\{ (x,\lambda) \in Ix\Lambda : |x - x_0|^v \int_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |t|^{r-v} \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt < C_v \right\} \tag{4.21}$$

kümesini tanımlayalım. Şimdi $L_1(I)$ de $(I_\lambda f)$ operatörünün r. sonlu türevlerinin yaklaşımlarını araştırmak için hazırız.

Teorem 4.2 *$L_\lambda(t)$ fonksiyon, onun türevleri olan $\frac{\partial^v}{\partial t^v} L_\lambda(t)$ ifadesi $v = 1, 2, ..., r$ değerleri için $(-\infty, \infty)$ aralığında t ye göre sürekli ve her sabit $\lambda \in \Lambda$ için $L_\lambda(t)$ t ye göre integrallenebilir olsun. (c) ve (d) koşullarıyla birlikte her $\delta > 0$ için*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |t|^r \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt < \infty \text{ ve } \lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{0<\delta\le|t|} \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| = 0 \tag{4.22}$$

ifadesi geçerli olduğunu varsayalım. Varsayalım ki $f \in L_1(I)$ fonksiyonu x_0 noktasında sonlu sayıda r. türeve sahip olsun. Bu durumda $(x, \lambda) \to (x_0, \lambda_0)$ ve $(x, \lambda) \in D_r$ iken

$$\lim \frac{\partial^r}{\partial x^r} (I_\lambda f)(x) = f^{(r)}(x_0) \tag{4.23}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $a < x_0 < b$ ve $\delta > 0$ için $0 < |x_0 - x| < \delta$ olduğunu kabul edelim.

$$g(t) = f(x_0) + (t - x_0) f'(x_0) + ... + \frac{(t - x_0)^r}{r!} f^{(r)}(x_0) \tag{4.24}$$

olacak şekilde bir fonksiyon alalım ve böylece $g^{(r)}(t) = f^{(r)}(x_0)$ dır. İlk olarak bu teoremi $g(t)$ fonksiyonu için ispatlayalım.Bunun için

$$\widetilde{g}(t) := \begin{cases} g(t), & t \in (a, b) \\ 0, & t \notin (a, b) \end{cases} \tag{4.25}$$

olacak şekilde $\widetilde{g} \in L_1(\mathbb{R})$ fonksiyonunu tanımlayalım. $g(t)$ fonksiyonuna I_λ operatörünü uygulayalım. Böylelikle

$$(I_\lambda g)(x) = \int\limits_a^b K_\lambda(t - x, g(t))\, dt$$

eşitliğini elde ederiz ve (4.25) eşitliğine göre son eşitliği aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$(I_\lambda g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t - x, \widetilde{g}(t)\right) dt = \left(I_\lambda \widetilde{g}\right)(x)$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x) &= \frac{\partial^r}{\partial x^r}\int\limits_{\mathbb{R}} K_\lambda\left(t-x,\widetilde{g}(t)\right)dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial^r}{\partial x^r}K_\lambda\left(t-x,\widetilde{g}(t)\right)dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial^r}{\partial x^r}K_\lambda\left(t-x,\widetilde{g}(t)\right)-\frac{\partial^r}{\partial x^r}K_\lambda(t-x,0)\right]dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial^r}{\partial x^r}L_\lambda(t-x)\left[\widetilde{g}(t)-0\right]dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial^r}{\partial x^r}L_\lambda(t-x)\left[\widetilde{g}(t)\right]dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(t)\frac{\partial^r}{\partial x^r}L_\lambda(t-x)\,dt
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada r defa kısmi interasyon yöntemi uygulanırsa

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{g}^{(r)}(t)\,L_\lambda(t-x)\,dt$$

eşitliği elde edilir.(4.25) eşitliğinden

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x) = \int\limits_a^b g^{(r)}(t)\,L_\lambda(t-x)\,dt$$

yazabiliriz. $g^{(r)}(t)=f^{(r)}(x_0)$ olduğundan

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x) = \int\limits_a^b f^{(r)}(x_0)\,L_\lambda(t-x)\,dt$$

eşitliği sağlanır. Buna göre,

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x)-f^{(r)}(x_0)\right| = \left|\int\limits_a^b f^{(r)}(x_0)\,L_\lambda(t-x)\,dt-f^{(r)}(x_0)\right|$$

ve

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x)-f^{(r)}(x_0)\right| = \left|f^{(r)}(x_0)\right|\left|\int\limits_a^b L_\lambda(t-x)\,dt-1\right|$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\int\limits_a^b L_\lambda(t-x)\,dt$$

integralinde $u = t + x$ olacak şekilde değişken değiştirmesi gerçekleştirelim. Buna göre

$$\int_a^b L_\lambda(t-x)\,dt = \int_{a+x}^{b+x} L_\lambda(t)\,dt$$

d) şartından

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_{\mathbb{R}} L_\lambda(t)\,dt = 1$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_{a+x}^{b+x} L_\lambda(t)\,dt = 1$$

elde edilir. $(a+x, b+x)$, $\mathbb{R}$'de bir aralık olduğundan

$$\int_a^b L_\lambda(t-x)\,dt = 1$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \left| \frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x) - f^{(r)}(x_0) \right| = 0$$

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} \frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x) = f^{(r)}(x_0) \tag{4.26}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.26) sayesinde teoremin ispatını tamamlamak için

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} |I_\lambda(x)| = 0$$

eşitliğini göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} |I_\lambda(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\,dt - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\,dt \right| \\ &= \left| \int_a^b [f(t) - g(t)] \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\,dt \right| \end{aligned}$$

eşitliğini, daha sonra da

$$\begin{aligned} |I_\lambda(x)| \leq\; & \int_a^{x_0-\delta} |f(t)-g(t)| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x) \right| dt \\ & + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t)-g(t)| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x) \right| dt \\ & + \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-g(t)| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x) \right| dt \end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığını kolayca görebiliriz. Burada her üç integrali de isimlendirelim.

$$
\begin{aligned}
I_1(x,\lambda) &:= \int_a^{x_0-\delta} |f(t)-g(t)| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt \\
I_2(x,\lambda) &:= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t)-g(t)| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt \\
I_3(x,\lambda) &:= \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-g(t)| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt
\end{aligned}
$$

olsun. $I_1(x,\lambda)$ ve $I_3(x,\lambda)$ için aşağıdaki metodu kullanarız. Öncelikle $I_1(x,\lambda)$ için

$$
\begin{aligned}
I_1(x,\lambda) &= \int_a^{x_0-\delta} |f(t)-g(t)| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt \\
&\leq \sup_{0<\delta\leq|t|} \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| \int_a^b |f(t)-g(t)|\, dt
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Daha sonra da $I_3(x,\lambda)$ için

$$
\begin{aligned}
I_3(x,\lambda) &= \int_{x_0+\delta}^{b} |f(t)-g(t)| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt \\
&\leq \sup_{0<\delta\leq|t|} \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| \int_a^b |f(t)-g(t)|\, dt
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi $I_2(x,\lambda)$ yı aşağıdaki gibi yeniden yazalım.

$$
I_2(x,\lambda) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left|\frac{f(t)-g(t)}{(t-x_0)^r}\right| |(t-x_0)^r| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt
$$

$$
I_2(x,\lambda) \leq \varepsilon \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |(t-x_0)^r| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt
$$

olacak şekilde her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integrali yeniden isimlendirelim.

$$
I_{2,1}(x,\lambda) := \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |(t-x_0)^r| \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| dt
$$

olsun. Burada $t = t + x$ şeklinde değişken değiştirmesi yaparak $I_{2,1}(x,\lambda)$ integralini yeniden yazalım.

$$\begin{aligned} I_{2,1}(x,\lambda) &= \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |(t+x-x_0)^r - t^r + t^r| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt \\ &\leq \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |(t+x-x_0)^r - t^r| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt + \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |t|^r \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt \end{aligned}$$

Son eşitsizlikteki integralleri de yeniden adlandıralım.

$$I_{2,1,1}(x,\lambda) := \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |(t+x-x_0)^r - t^r| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt$$

$$ve$$

$$I_{2,1,2}(x,\lambda) := \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |t|^r \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt$$

olsun. (4.22) ifadesinden $I_{2,1,2}(x,\lambda)$ sonludur. Üstelik bu $I_{2,1,1}(x,\lambda)$ nın sonlu olduğunu göstermek için yeterlidir.e

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \tag{4.27}$$

tanımını kullanarak $I_{2,1,1}(x,\lambda)$ yı ele alalım.

$$\begin{aligned} I_{2,1,1}(x,\lambda) &= |x-x_0| \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} \left|(t+x-x_0)^{r-1} + \ldots + t^{r-1}\right| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt \\ &\leq |x-x_0| \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} \left|(t+x-x_0)^{r-1}\right| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt \\ &\quad + |x-x_0| \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} \left|(t+x-x_0)^{r-2}\, t\right| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad + |x-x_0| \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} \left|(t+x-x_0)\, t^{r-2}\right| \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt \\ &\quad + |x-x_0| \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |t|^{r-1} \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t) \right| dt \end{aligned} \tag{4.28}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.28) ifadesinin sağ tarafına art arda (4.27) formülünü uygularsak $I_{2,1,1}(x,\lambda)$ nın

$$|x-x_0|^v \int\limits_{x_0-x-\delta}^{x_0-x+\delta} |t|^{r-v} \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t)\right| dt \ , \quad (v=1,2,...,r)$$

ifadesinin lineer kombinasyonlarına eşit ya da ondan daha az sayıda olduğunu görebiliriz. (4.21) ve (4.22) yi dikkate alarak $I_{2,1}(x,\lambda)$ nın D_r düzlemsel kümesi üzerinde sınırlı olduğunu gösterebiliriz. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |I_\lambda(x)| &\le I_1(x)+I_2(x)+I_3(x) \\ &\le \varepsilon I_2(x) + 2 \sup_{0<\delta\le|t|} \left|\frac{\partial^r}{\partial t^r} L_\lambda(t-x)\right| \int\limits_a^b |f(t)-g(t)|\, dt \end{aligned}$$

eştisizliğini elde ederiz. (4.21) ve (4.22) ifadelerinin görünümünde ve c) şartında $f(t)-g(t)$, $L_1(a,b)$ ye aittir ve

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} |I_\lambda(x)| = 0$$

eşitliğini elde ederiz, yani,

$$\lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} \frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda f)(x) = \lim_{(x,\lambda)\to(x_0,\lambda_0)} \frac{\partial^r}{\partial x^r}(I_\lambda g)(x)$$

dir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. ■

KAYNAKLAR

[1] H. Karsli, Convergence and Rate of Convergence by Nonlinear Singular Integral Operators Depending on two Parameters, Applicable Analysis 85(6,7), (2006),781-791

[2] H. Karsli, On approximation properties of a class of convolution type nonlinear singular integral operators, Georgian Math. Jour., Vol. 15, No. 1, (2008),77-86.

[3] H. Karsli and V. Gupta, Rate of convergence by nonlinear integral operators for functions of bounded variation, Calcolo, Vol. 45, 2, (2008), 87-99.

[4] H.Karsli and E. Ibikli, On convergence of convolution type singular integral operators depending on two parameters, FasciculiMathematici, No:38, (2007), pp.25-39.

[5] Karsli H., Convergence of the derivatives of nonlimear singular integral operators, J. Math. Anal. Approx. Theory 2 (2007), no. 1, 53-61.

[6] S. Bernstein, Demenstration du theoreme de Weierstrass, fondee sur le calcul des probabilities, Commun. Soc. Math. Kharkow (2); 13 (1912-13), 1-2.