KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SZASZ-MİRAKJAN- KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

MOHAMEDLEMİNE LİMAM

TEMMUZ 2015

Matematik Anabilim Dalında MOHAMEDLEMİNE LİMAM tarafından hazırlanan SZASZ-MİRAKJAN- KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun oldugunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ali Aral
Danışman

Jüri Üyeleri:

Başkan	:	Prof. Dr. Fatma Taşdelen Yeşildal
Üye (Danışman)	:	Prof. Dr. Ali Aral
Üye	:	Prof. Dr. Kazım İlarslan

.../..../2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Mustafa Yiğitoğlu
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

SZASZ-MİRAKJAN- KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

LİMAM, MOHAMEDLEMİNE
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL
Temmuz 2015, 78 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşturulmuştur. Birinci bölümünde çalışmaya temel olan konu ile ilgili yapılanlar hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde tezde kullanılacak tanımlar ve teoremlar açıklandı. Üçüncü bölümde Szasz-Mirakjan-Kantorovith operatörleri genelleştirilerek elde edilen operatörlerin özellikleri ve yakınsaklık hızı farklı birkaç uzayda incelendi. Son bölümde ise sonsuz aralıklarda yakınsaklık hızı incelenip bazı operatör için uygulanması verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Pozitif lineer operatörler, yakınsaklık hızı, ağırlıklı uzaylar, süreklilik modülü.

ABSTRACT

GENERALİZATİON OF SZASZ-MİRAKJAN-KANTOROVİCH OPERATORS

LİMAM, MOHAMEDLEMİNE
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master of Science Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ali ARAL
July 2015, 78 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, brief background information on fundamental concepts and previous similar studies on the subject are presented. The second chapter is composed of important fundamental definitions and theorems that were employed. Next, a sequence of positive linear operators which generalizes the Szasz-Mirakjan-Kantorovith operators is introduced in the third chapter. Furthermore, estimates of the rate of convergence by means of suitable moduli of smoothness are provided. Finally, in the fourth chapter, an estimation of the rate of approximation by positive linear operators of functions that have a finite limit at infinity is obtained.

Key Words: Szasz-Mirakjan-Kantorovith operators, positive approximation process, weited spaces, modulus of smoothness.

TEŞEKKÜR

Kırıkkale Üniversitesi Matematik bölümündeki yüksek lisans eğitimim süresince beni desteklediği ve bana yardımcı olduğu için danışman Hocam Prof. Dr. Ali ARAL’a teşekkür etmek istiyorum ve çalışmayı başarılı bir şekilde bitirebilmek için gerekli olan bilgi ve dökümanları sağladığı için Kırıkkale Üniversitesi'nde tüm öğretim üyelerine teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{C}\left([0,+\infty)\right)$	$[0,+\infty)$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$\left\|f\left(x\right)\right\|_{\mathcal{C}[a,b]}$	$\mathcal{C}\left[a,b\right]$ uzayında norm
$\mathcal{C}_{*}\left([0,+\infty)\right)$	$\mathcal{C}\left([0,+\infty)\right)$ uzayındaki limiti mevcut olan fonksiyonların altuzayı
$\mathcal{C}_{b}\left([0,+\infty)\right)$	$\mathcal{C}\left([0,+\infty)\right)$ uzayındaki fonksiyonların altuzayı
$w\left(f;\delta\right)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.
w_m	ağırlık fonksiyonu
E_m	w_m yardımıyla tanımlanan ağırlık uzayı
$\left\|f\right\|_m$	ağırlıkllı norm
E_m^*	E_m uzayındaki ağırlıklı limiti mevcut olan fonksiyonların altuzayı
E_m^*	E_m uzayındaki ağırlıklı limiti sıfır olan fonksiyonların altuzayı
B_n	Bernstien operatörleri
S_n	Szasz operatörleri
K_n	Kantorovich operatörleri
$B_\rho\left(\mathbb{R}\right)$	reel değerli ağırlıklı fonksiyonlar uzayı
$C_\rho\left(\mathbb{R}\right)$	$B_\rho\left(\mathbb{R}\right)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesi
$f_n \rightrightarrows f$	f_n fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsak
$\mathcal{L}\left([0,+\infty)\right)$	Borel ölçülbilir fonksiyonalrın uzayı
$L\left([0,+\infty)\right)$	integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$\left\|f\right\|_p$	L^p uzayındaki norm
C_n	genelleştirilmiş Szasz-Kantorovich operatörleri

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinin temeli 1885 yılında K. Weierstrass tarafından ispatlanan bir teoreme dayanır. Bu teoreme "$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlanan her sürekli fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinomların dizisi karşılık gelir". Weiestrass'ın bu teoremi çok karmaşık olduğundan bir çok matematikçi bu ispatı daha basit ve anlaşılır kılmak için uğraşmıştır. Bu teoremin en basit ve etkili ispatını1912 yılında S.N. Bernstein vermiştir. Günümüzde kendi adı ile anılan Bernsttein polinomlarını tanımlamış ve $[0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara bu polinomlarla düzgün yakınsaklığın sağlandığını göstermiştir. Bu operatör dizileri lineer ve pozitif sınıfına ait olduğundan, bu konu matematikçiler tarafından çok önemli bir araştırma alanı olmuştur ve bu tipten çalışmalar günümüzde de popilaritesini korumaktadır. 1950'li yıllara gelindiğinde ise lineer pozitif operatörler ile fonksiyona yaklaşımlar teorisi P.P. Korovkin'in ispatladığı teoremle ivme kazanmıştır. Kolay ve uygulanabilir kriterleri içeren ve lineer pozitif operatörlerle sürekli fonksiyona düzgün yaklaşımın şartlarını veren bu teoreme göre A_n dizisinin sürekli fonksiyona düzgün yakınsaması için yakınsaklığın $\{1, t, t^2\}$ fonksiyonları için sağlanması yeterlidir, denilmiştir. Bu teorem matematikçiler tarafından bir çok açıdan genişleştirilmiştir. Bu genişletmelerden bir teorisi de sürekli fonksiyonlar üzerindeki yakınsamanın integrallenebilen fonksiyonlar uzayına taşınmasına imkan veren bir genelleşmedir . Bu yöntem Bernstein-Kantorovich operatörünün tanımlanması ile mümkün olmuştur. Bizim bu tezde inceleyeceğimiz Szasz-Kantorovich operatörleri ise sürekli fonksiyonlar uzayı yerine integrallenebilen fonksiyonlar uzayı üzerinde çalışmaya imkan verdiği gibi aynı zaman da sınırsız aralıklar üzerinde çalışma imkanı elde edebileceğimiz bir genelleştirmedir. İlk olarak bu operatörlerin momentleri hesaplanarak ve uygun süreklilik modülleri ile yakınsaklık hızları verilecektir. Ayrıca integrallenebilen fonksiyonlar için düzgün yakınsaklığın şartları araştırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle lineer pozitif operatörler tanıtılacak ve sağladığı temel özellikler incelenecektir. Ayrıca daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilecek ve lineer operatörlerin önemine değinilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatör Disizi

Bilindiği gibi fonksiyonu fonksiyona dönüştüren bağıntılara "Operatör" denir.

Lineer operatör:

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere;

$$A : X \to Y$$

şeklindeki operatörü göz önüne alalım. Eğer her $f, g \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$$

koşulu sağlanıyor ise o taktirde A operatörüne lineer operatör denir.

Operatörün pozitifliği:

Eğer bir A operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli fonksiyona dönüştürüyor ise, yani;

f bir fonksiyon ve A bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ iken } \; A(f; x) \geq 0$$

oluyorsa A operatörüne pozitif operatör denir.

Hem linner hem de pozitif olan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

2.1.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Önerme 2.1 *Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani;*

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörü pozitif olduğundan;

$$L(g - f) \geq 0 \tag{2.1}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan L operatörü lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f)$$

olup bunun (2.1) de kullanmasıyla ispat tamamlanır.

Önerme 2.2 *L bir lineer pozitif operatör ise o taktirde*

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Her hangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.2}$$

dir. L operatörü lineer olduğundan Lemma**??**'den dolayı monoton artandır. O halde (2.2)'den;

$$L(-|f|) \leq L(f) \leq L(|f|) \tag{2.3}$$

yazabiliriz. L lineer olduğundan;

$$L(-|f|) = -L(|f|)$$

dir. Bu son eşitliğin, (2.3)'de kullanılmasıyla

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

Tanım 2.1 *X ve Y iki fonksiyon uzayı ve*

$$A_n : X \to Y$$

olmak üzere $A_n(f;x)$'e bir operatör dizisi denir ve (A_n) ile gösterilir.

Tanım 2.2 *Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $\mathcal{C}[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm*

$$\|f(x)\|_{\mathcal{C}[a,b]} = \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Gerçekten;

1. Her $f,g \in \mathcal{C}[a,b]$ için $f+g \in \mathcal{C}[a,b]$

2.Her $f,g \in \mathcal{C}[a,b]$ için $f+g = g+f$

3. Her $f,g,h \in \mathcal{C}[a,b]$ için $(f+g)+h = f+(g+h)$

4. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ için en az bir θ vardır ki $f+\theta = \theta+f = f$

5. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ için en az bir f' vardır ki $f+f' = f'+f = \theta$

6. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda f \in \mathcal{C}[a,b]$

7. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ için $(\lambda\mu) f = \lambda(\mu f)$

8. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ için $1f = f$

9. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ için $(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$

10.Her $f,g \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

11. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ için $\|f\| \geq 0$

12. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ için $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

13. Her $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için$\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$

14. Her $f,g \in \mathcal{C}[a,b]$ için $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$

sağlandığından $\mathcal{C}[a,b]$Lineer Normlu uzaydır.

Tanım 2.3 *Bir (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{C}[a,b]$ normunda düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart, her $x \in [a,b]$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{\mathcal{C}[a,b]} = 0$$

yada daha açık olarak:

$$\lim_{n\to\infty} \underset{a\leq x\leq b}{maks} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

2.1.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Alman Matematikçi Weierstrasse 1895 yılında sonlu aralıkta sürekli olan her fonksi yona bu aralıkta yakınsayan bir polinom dizisinin varlığını ispatlamıştır. 1912 yılında ise Rus Matematikçi S.N. Bernstein bu dizinin , $x \in [0,1]$ için:

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{2.4}$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştır,(Lorentz 1953).

1953 yılında P.P. Korovkin sürekli fonksiyonların sonlu aralıkta lineer pozitif operatörlerin yardımıyla yaklaştırılmasına ilişkin aşağıdaki teoremi vermiştir. Teorem bu konudaki çalışmalara büyük katkı sağlamıştır, (Korovkin 1960).

Teorem 2.1 *P.P.Korovkin Teoremi(1953). $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ve tüm reel eksende*

$$|f(x)| < M_f \tag{2.5}$$

olsun. Eğer $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatör dizisi her $x \in [a,b]$ için:

1. $L_n(1;x) \rightrightarrows 1$
2. $L_n(t;x) \rightrightarrows x$
3. $L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a,b]$ de $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $f \in \mathcal{C}[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımından dolayı her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki:

$$|t-x| \leq \delta$$

olduğunda;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

kalır. $|t-x| > \delta$ olduğunda ise (2.5) den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı:

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \tag{2.6}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer

$$|t-x|>\delta \text{ ise } \frac{|t-x|}{\delta}>1$$

olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2}>1 \tag{2.7}$$

sağlanır. (2.6) ve (2.7)den

$$|f(t)-f(x)|\leq 2M_f\leq 2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} |t-x| &\leq \delta \text{ için } |f(t)-f(x)|<\varepsilon \\ |t-x| &> \delta \text{ için } |f(t)-f(x)|<2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla her $t\in\mathbb{R}$ ve her $x\in[a,b]$ için:

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon+2M_f\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{2.8}$$

dir. Eğer teoremdeki koşulları sağlayan (L_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f(t);x)-f(x)\|_{\mathcal{C}[a,b]}=0$$

eşitliğini sağladığını gösterirsek ispat tamamlanır. Şimdi bunu gösterelim. Lineerlikten

$$\begin{aligned} |L_n(f(t);x)-f(x)| &= |L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)| \\ &= |L_n(f(t);x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)-f(x)| \\ &= |L_n((f(t)-f(x));x)+f(x)(L_n(1;x)-1)| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliğinin kullanmasıyla

$$|L_n(f(t);x)-f(x)|\leq|L_n((f(t)-f(x));x)|+|f(x)|\,|(L_n(1;x)-1)|$$

yazılabilir. Diğer taraftan Lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$(f(t)-f(x))\leq|f(t)-f(x)|$$

olduğundan

$$|L_n((f(t)-f(x));x)| \leq |L_n(|f(t)-f(x)|;x)|$$

olur. Operatör pozitif ve

$$|f(t)-f(x)| \geq 0$$

olduğundan

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)+|f(x)|\,|(L_n(1;x)-1)|$$

olduğunu göstermiş olduk. Buradan

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n(|f(t)-f(x)|;x)+M_f\,|(L_n(1;x)-1)|$$

yazılabilir. (L_n) monoton artan olduğundan (2.8)'ün kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)+M_f\,|(L_n(1;x)-1)| \tag{2.9}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
L_n\left(\varepsilon+\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= L_n(\varepsilon;x)+L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) \\
&= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}L_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right) \\
&= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[L_n\left(t^2;x\right)-x^2-x^2+2x^2\right. \\
&\quad \left.-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)-x^2\right] \\
&= \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)\right. \\
&\quad \left.+2x(x-L_n(t;x))\,x^2(L_n(1;x)-1)\right]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Son bulduğumuz ifadenin (2.9)'de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
|L_n(f(t);x)-f(x)| &\leq \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M_f}{\delta^2}\left[\left(L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right)+2x(x-L_n(t;x))\right. \\
&\quad \left. x^2(L_n(1;x)-1)\right]+M_f\,|(L_n(1;x)-1)|
\end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. 1, 2 ve 3 koşullarının (2.10)da kullanılmasıyla

$$|L_n(f(t);x)-f(x)| \leq \varepsilon$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\mathop{maks}_{a\leq x\leq b}|L_n(f(t);x)-f(x)|=0$$

dır. Bu da ispatı tamamlar ■

2.2. Süreklilik Modülü

Tanım 2.4 *Kabul edelim ki f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için*

$$w(f;\delta) = \sup_{\substack{|x-t|\leq\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f nin süreklilik modülü denir. Ve her $\delta > 0$ için $w(f;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

Önerme 2.3 *$w(f;\delta)$ fonksiyonu monoton artandır.*

İspat. $0 < \delta_1 < \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x-y| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (x,y) sayı çiftlerinin kümesi $|x-y| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı gözönüne alınarak süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$$

yazılabilir. ∎

Önerme 2.4 *f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\lim_{\delta\to 0} w(f;\delta) = 0$$

dır.

İspat. f fonksiyonu sürekli olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki

$$|t-x| < \eta \text{ olduğunda } |f(t) - f(x)| < \varepsilon \text{ dır.}$$

Süreklilik modülünde $\delta < \eta$ alındığında $w(f;\delta) < \varepsilon$ dır. Yani

$$\lim_{\delta\to 0} w(f;\delta) = 0$$

olur. ∎

Önerme 2.5 *Her $m \in \mathbb{N}$ için*

$$w(f;m\delta) \leq mw(f;\delta)$$

dir.

İspat.

$$w(f;\delta) = \sup_{\substack{|x-t|\leq\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(t) - f(x)|$$

ifadesinde $t = x + mh$ seçilirse

$$\begin{aligned} w(f;m\delta) &\leq \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(x+mh) - f(x)| \\ &= \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ t,x\in[a,b]}} \left| \sum_{k=1}^{m} [f(x+kh) - f(x+(k-1)h)] \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$w(f;m\delta) \leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{\substack{|h|\leq\delta \\ t,x\in[a,b]}} |[f(x+kh) - f(x+(k-1)h)]|$$

olur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü olması ile toplananların sayısı m tane olduğundan

$$w(f;m\delta) \leq mw(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Önerme 2.6 $\lambda > 0$ *reel sayısı için*

$$w(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\, w(f;\delta)$$

dir.

İspat. m, λ nın tam kısmı olsun. O taktirde $m \leq \lambda < m+1$ olur. w süreklilik modülünün monotonluk özelliği ve Lemma (2.6.3)den

$$w(f;\lambda\delta) \leq w(f;(m+1)\delta) \leq (m+1)\, w(f;\delta) \leq (\lambda+1)\, w(f;\delta)$$

olur. Dolayısıyla

$$w(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\, w(f;\delta)$$

olarak elde edilir. ■

Önerme 2.7 δ_n *sıfıra yakınsayan bir dizi olmak üzere*

$$w(f;\delta_n) \geq k_f\delta_n$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde f ' e bağlı bir k_f sabiti vardır.

İspat. Süreklilik modülünde $\delta = 1$ alınarak

$$w(f;1) = w\left(f; \frac{1}{\delta_n}\delta_n\right)$$

olarak yazılabilir. Lemma**??** den

$$\begin{aligned} w\left(f; \frac{1}{\delta_n}\delta_n\right) &\leq \left(\frac{1}{\delta_n} + 1\right) w(f;\delta_n) \\ &\leq \left(\frac{1+\delta_n}{\delta_n}\right) w(f;\delta_n) \end{aligned}$$

olur. δ_n nın yakınsak bir dizi olmasından dolayı $\delta_n + 1 \leq k$ şeklinde bir k sabiti vardır. O taktirde

$$w(f;1) = \frac{k}{\delta_n} w(f;\delta_n)$$

olur. $k_f = \frac{w(f;1)}{k}$ seçildiğinde

$$w(f;\delta_n) \geq k_f \delta_n$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir. ∎

Önerme 2.8 *f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon ise her $x, t \in [a,b]$ için*

$$|f(t) - f(x)| \leq w(f; |t-x|)$$

dır.

İspat. Süreklilik modülünün tanımı ve Lemma**??** dan

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq w\left(f; \frac{|t-x|}{\delta}\delta\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f;\delta) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. ∎

Önerme 2.9 *f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığının tüm noktalarında türevi sınırlı ise*

$$w(f;\delta) \leq c\delta$$

olacak şekilde $c \geq 0$ sabiti vardır.

İspat. f fonksiyonu, $[a,b]$ aralığının tüm noktalarında türevi sınırlı ise $|f'(x)| \leq M$ olur. Ortalama Değer Teoreminden

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{|t-x|} = f'(\xi)$$

olacak şekilde bir $\xi \in [a,b]$ noktası vardır. $f'(\xi) = c$ olarak alınırsa

$$w(f;\delta) \leq c|t-x| \leq c\delta$$

elde edilir. ■

2.3. Szasz Operatörleri

Tanım 2.5 *$x \in [0,\infty)$ ve $f \in \mathcal{C}([0,+\infty))$ olsun. Szazs operatörleri*

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlı olan lineer pozitif operatörlerdir.

Teorem 2.2 *Szasz operatörleri $A \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[0,A]$ kapalı aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende de sınırlı olan fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $f \in \mathcal{C}[0,A]$ ise;*

$$S_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \qquad x \in [0,A]$$

dir.

İspat. İspatı Korovkin teoremini kullanarak yapacağız. Bunun için öncelikle $S_n(f;x)$'in lineer ve pozitif bir operatör olduğunu gösterelim.

Lineerlik: $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $f,g \in \mathcal{C}[0,A]$ için,

$$\begin{aligned}
S_n((af(t)+bg(t));x) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\left[af\left(\frac{k}{n}\right)+bg\left(\frac{k}{n}\right)\right]\frac{(nx)^k}{k!} \\
&= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}af\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}+e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}bg\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} \\
&= ae^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}+be^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!} \\
&= aS_n(f(t);x)+bS_n(g(t);x)
\end{aligned}$$

olduğundan (S_n) lineer bir opetatördür.

Pozitiflik: $k = 0, , 1, 2, ...n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathcal{C}[0, A]$ için,

$$e^{-nx}\frac{n^k}{k!}x^k \geq 0$$

olduğundan

$$f \geq 0 \quad \text{ise} \quad S_n(f(t); x) \geq 0$$

dır. Korovkin teoremi gereğince;

i)$S_n(1; x) \rightrightarrows 1$

ii)$S_n(t; x) \rightrightarrows x$

iii)$S_n(t^2; x) \rightrightarrows x^2$

olduğunu gösterirsek $S_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$ olduğu ispatlanmış olur. Şimdi bunları gösterelim.

$$S_n(1; x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} 1\frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx}e^{nx}$$

yani

$$S_n(1; x) = 1 \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
S_n(t; x) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^k x^k}{k!} \\
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^k x^k}{k!} \\
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}, \quad (k \to k+1) \\
&= xe^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!} = xe^{-nx}e^{nx} \\
&= x
\end{aligned}$$

yani

$$S_n(t; x) \rightrightarrows x \tag{2.13}$$

$$
\begin{aligned}
S_n\left(t^2;x\right) &= e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^k x^k}{k!} \\
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{n^k x^k}{k!} = e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-nx}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{1}{n}\right)\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!} \\
&= e^{-nx}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right) \\
&= e^{-nx}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right) \\
&= e^{-nx}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^{k-2}x^{k-2}x^2}{(k-2)!}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n^{k-1}x^{k-1}x}{(k-1)!}\right) \qquad \begin{array}{l} k\to k+2 \\ k\to k+1 \end{array} \\
&= e^{-nx}\left(x^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}-\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{k!}\right) \\
&= x^2 e^{-nx}e^{nx}+\frac{x}{n}e^{-nx}e^{nx} \\
&= x^2+\frac{x}{n}
\end{aligned}
$$

yani

$$
S_n\left(t^2;x\right)=x^2+\frac{x}{n} \tag{2.14}
$$

olup

$$
S_n\left(t^2;x\right)=x^2\ ,\ (n\to\infty)
$$

elde ederiz. Dolayısıyla (i), (ii) ve (iii) şartları sağlandığından Korovkin teoremi gereğince $\forall f\in C\left[0,A\right]$ için $\left[0,A\right]$ aralığında:

$$
S_n\left(f;x\right)\rightrightarrows f\left(x\right), \qquad (n\to\infty)
$$

bulunur. ■

2.4. Ağırlıklı Uzaylar

Tanım 2.6 *$\varphi\left(x\right)$ reel eksende sürekli monoton artan bir fonksiyon olmak üzere*

$$
\rho\left(x\right)=1+\left[\varphi\left(x\right)\right]^2
$$

şeklinde ρ fonksiyonu tanımlansın.

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \qquad M_f > 0$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesi $B_\rho(\mathbb{R})$ ile bu uzaydaki sürekli fonksiyonlarin kümesi ise $\mathcal{C}_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterelim.

Yani

$$B_\rho(\mathbb{R}) = \{f : |f(x)| \leq M_f.\rho(x)\}$$

ve

$$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}) : f \text{ sürekli}\}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayında, toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{array}{c} + : B_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R}) \\ (f, g) \to f + g. \end{array}$$

Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)| &= |f(x) + g(x)| \\ &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq M_f \rho(x) + M_g \rho(x) \end{aligned}$$

olur ve bu eşitsizlikte (2.4.2)den dolayı

$$|(f+g)(x)| = (M_f + M_g)\rho(x)$$

elde edilir. Buna göre her $f, g \in B_\rho(\mathbb{R})$ için $f + g \in B_\rho(\mathbb{R})$dir.

F her hangi bir cisim olmak üzere

$$\begin{array}{c} F \times B_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R}) \\ (\alpha, f) \to \alpha f \end{array}$$

$\forall x \in F$ için $(\alpha, f)(x) = \alpha.f(x)$ şeklinde tanımlansın. $f \in B_\rho(\mathbb{R})$ ise $(\alpha f)(x) = \alpha f$ dır. (2.4.2) ve $(\alpha f)(x) = \alpha f \leq \alpha.M_f.\rho(x) = M_f \rho(x)$ olduğundan $\forall f \in B_\rho(\mathbb{R})$ için $\alpha \in F$ olmak üzere$(\alpha f) \in B_\rho(\mathbb{R})$ dir.

$B_\rho(\mathbb{R})$ yukarıda tanımlanan toplam ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ lineer normlu uzaylardır. Burada ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ise ağırlık uzaylar denir. $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayında

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{\rho(x)}=k_f<\infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $\mathcal{C}_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{C}_\rho^k(\mathbb{R})$ ve $\mathcal{C}_\rho(\mathbb{R})$, $B_\rho(\mathbb{R})$nin alt uzayıdır.

2.5. Ston-Weierstrass Teoremi

Teorem 2.3 *(Lokal komppakt uzaylar)X lokal kompakt Hausdorff uzay ve $A, \mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ nin bir alt uzayı olsun. O taktirde A, $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ uzayında yoğun ancak ve ancak $\forall x\in X$ için en az bir $f\in A$ vardır öyle ki $f(x)\neq 0$ dir.*

Teorem 2.4 *$L, \mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$'nın bir Alt uzayı olsun. Eğer $\forall f,g\in L$ için maks $\{f,g\}$ ve $\min\{f,g\}\in L$ oluyorsa L alt uzayına latis denir.*

Teorem 2.5 *X lokal kompakt Hausdorff uzay ve L,*

$$\forall x,y\in X \text{ ve } \forall a,b\in\mathbb{R} \text{ için bir } f\in L \text{ vardır öyleki } f(x)=a \text{ ve } f(y)=b$$

şartını sağlayan $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ uzayında bir latis olsun. O taktirde L, $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$'de yoğundur.

3. SZASZ-KANTOROVİCH OPERATÖRLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

3.1. Giriş

1940 yıllarında G.M.Mirakjan [18], J.Favard [15], ve O.Szasz[22], ayrı bir şekilde $(S_n)_{n\geq 1}$lineer pozitif operatörler dizisini incelemişlerdir. Günümüzde bu dizi Szasz-Mirakjan operatörleri olarak bilinmekte ve

$$S_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (n \geq 1, x \geq 0)$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. Burada f fonksiyonunun $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve sağ taraftaki seri yakınsak olacak şekilde seçilmesi gereklidir.

$$\mathfrak{C}([0,+\infty)) := \begin{cases} f \mid f : [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } \forall M \geq 0 \text{ ve } \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ için} \\ \qquad |f(x)| \leq M \exp(\alpha x) \qquad (\ x \geq 0) \end{cases}$$

uzayı istenilen şartları sağlar. Daha sonra sınırsız aralıklar üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyon uzaylarında bir yaklaşım işlemi vermek ile ilgili Butzer'in incelediği S_n operatörlerinin bir integral versiyonu, $\forall\ n \geq 0$, $f \in \mathcal{L}([0,+\infty))$ ve $x \geq 0$ için

$$K_n(f)(x) := n\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt$$

eşitliği ile verilir. Burada $\mathcal{L}([0,+\infty))$ Borel ölçülebilir ve lokal integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Ve $f : [0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ öyleki f 'in antitürevi $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ $(x \geq 0)$, $\mathfrak{C}([0,+\infty))$ uzayına aittir. [23] de Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörleri olarak tanımlanan K_n operatörleri, Kantorovich'in, Bernstein operatörleri için yaptığı integral değişkliği ile benzer şekilde elde edilmektedir.

Sonraki yıllarda Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörleri ve onların genelleştir meleri üzerinde bazı matematikçiler bir çok çalışma yapmıştır. Bu konu ile ilgili çalışmalar [24], [13] ve [14] de bulunabilir.

$f \in \mathcal{L}([0,+\infty))$ ve $\forall n \geq 1$ için $0 \leq a_n < b_n \leq 1$ şartını sağlayan $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ iki reel sayılar dizisi olmak üzere

$$C_n(f)(x) := \frac{n}{b_n - a_n}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} f(t)\,dt \qquad (n \geq 1, x \geq 0)$$

eşitliği ile verilen pozitif lineer operatörlerin dizisini gözönüne alalım.

$\forall n \geq 1$ için $a_n = 0$ ve $b_n = 1$ ise C_n operatörleri, Szasz-Mirakjan-Kantorovich operatörlerine dönüşmektedir. C_n operatörlerini incelerken dikkat edilmeli ki: bu operatörleri kullanarak, sürekli veya integrallenebilen fonksiyonlar, $[0, +\infty)$ aralığının eşit uzunlukta olmayan altaralıklarında f'nin ortalama değerleri bilinmesi durumunda elde edilebilir.

$(C_n)_{n\geq 1}$ dizisinin yaklaşım teoremlerini farklı sürekli ve ağırlıklı sürekli fonksiyon uzaylarında ve aynı zamanda Lebesgue integrallenebilen fonksiyon uzaylarında inceleyeceğiz. Ve uygun süreklilik modülleri kullanarak bu dizinin yaklaşım hızı için bazı tahminler vereceğiz.

3.2. C_n Operatörlerinin Temel Özellikleri

Bu bölümde operatörümüzün temel özelliklerini vereceğiz. Bu tez boyunca, $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı $\mathcal{C}([0, +\infty))$ ile gösterilecek, $\mathcal{C}([0, +\infty))$ uzayındaki sınırlı fonksiyonların altuzayı $\mathcal{C}_b([0, +\infty))$ ile gösterilecektir. $\mathcal{C}_b([0, +\infty))$, $\|.\|_\infty$ normu ile bir Banach latistir. Sürekli ve sonsuzda limiti olan fonksiyonların uzayı $\mathcal{C}_*([0, +\infty))$ ile gösterilecek. Açıktır ki $\mathcal{C}_*([0, +\infty))$, $\mathcal{C}_b([0, +\infty))$'in bir Banach altlatisidir. Daha fazla $\mathcal{C}_0([0, +\infty))$ uzayı, sürekli reel değerli ve $[0, +\infty)$ aralığında sonsuzda sıfıra yakınsayan fonksiyonlardan oluşan $\mathcal{C}_*([0, +\infty))$ 'in bir altuzayıdır.Üstelik $\forall m \geq 1$ için ve $w_m(x) := (1 + x^m)^{-1}$ $(x \geq 0)$ olmak üzere

$$E_m := \left\{ f \in \mathcal{C}([0, +\infty)) \mid \sup_{x\geq 0} w_m(x) |f(x)| \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde tanımlanan E_m uzayı

$$\|f\|_m := \sup_{x\geq 0} w_m(x) |f(x)| \qquad (f \in E_m)$$

ağırlıklı normu ile bir Banach latistir. Ayrıca

$$E_m^* := \left\{ f \in E_m \mid \lim_{x\longrightarrow\infty} w_m(x) f(x) \in \mathbb{R} \right\}$$

ve

$$E_m^0 := \left\{ f \in E_m^* \mid \lim_{x\longrightarrow\infty} w_m(x) f(x) = 0 \right\},$$

ile tanımlanan uzaylar E_m'in birer Banach altlatisidir.

Notasyon 3.1 *Stone-Weierstrass teoreminden* $\mathcal{C}_0([0,+\infty))$ *uzayı, her* E_m^0 $(m \geq 1)$ *uzayında yoğundur.*

Alışıldığı gibi $(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere $[0,+\infty)$ aralığında Borel ölçülebilir plan ve $\|f\|_p := \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayını $L^p[0,+\infty)$ ile, $[0,+\infty)$ aralığında hemen hemen her yerde sınırlı fonksiyonlar uzayını $L^\infty([0,+\infty))$ ile göstereceğiz. Her $M \geq 0$, $\alpha \in R$ ve $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ öyleki $|f(x)| \leq M \exp(\alpha x)$ ($x \geq 0$) için

$$S_n(f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad (n \geq 1, x \geq 0) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan Szasz-Mirakjan operatörlerini gözönüne alalım. $[0,\infty)$ üzerinde lokal olarak integrallenebilen fonksiyonlar için Butzer tarafından bir integral versiyonu verilmiştir. Bu versiyon, Borel ölçülebilir fonksiyonlar uzayında ve $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ öyleki $F(x) := \int\limits_0^x f(t)\, dt$ $(x \geq 0)$, $\mathfrak{C}([0,+\infty))$ uzayına ait olma şartı ile aşağıdaki şekilde verilir

$$K_n(f)(x) := n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \int\limits_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \qquad (n \geq 1, x \geq 0)$$

dir. Dikkat edilmeli ki $\mathcal{L}([0,+\infty))$, $\mathfrak{C}([0,+\infty)) \cap \mathcal{C}([0,+\infty))$ (dolayısıyla E_m $(m \geq 1)$)'i içerir, aynı özellik $L^p([0,+\infty))$ $(1 \leq p < \infty)$ için geçerlidir. $(K_n)_{n\geq 1}$ operatörleri $\mathcal{L}([0,+\infty))$ uzayındaki fonksiyonlara yaklaşmak için $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ $(n \geq 1, k \geq 1)$ aralıklarında ortalama değerleri bilindiğinde anlamlıdır. Bu tezde kompakt aralıklar için, $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ $(n \geq 1, k \geq 1)$ aralıklarının daha küçük olabilecek altaralıkları üzerinde tanımlı fonksiyonların ortalama değerlerini bilindiğinde aşağıdaki genelleştirmeyi verebiliriz.

Daha açık bir şekilde $\forall n \geq 1$ için $0 \leq a_n < b_n \leq 1$ şartını sağlayan $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ iki reel sayılar dizisi olsun, ve $f \in \mathcal{L}([0,+\infty))$ olmak üzere

$$C_n(f)(x) := \frac{n}{b_n - a_n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \int\limits_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} f(t)\, dt \qquad (n \geq 1, x \geq 0) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlansın. C_n operatörleri, f fonksiyonunun $\left[\frac{k+a_n}{n}, \frac{k+b_n}{n}\right]$ aralıklarında ortalama değerleri bilindiği durumda tanımlıdır. Ayrıca $\left[\frac{k+a_n}{n}, \frac{k+b_n}{n}\right]$, $[0,+\infty)$ aralığını taramamaktadır. Tabiki $\forall n \geq 1$ için $a_n = 0$ ve $b_n = 1$ olduğunda C_n operatörleri K_n operatörleri ile denktir. Verilen $f \in \mathcal{L}([0,+\infty))$ için $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt \ \ (x \geq 0)$'i gözönüne alarak C_n operatörleri aşağıdaki şekilde de yazılabilir

$$\begin{aligned} C_n(f)(x) &= \frac{n}{b_n - a_n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \left[F\left(\frac{k+b_n}{n}\right) - F\left(\frac{k+a_n}{n}\right) \right] \\ &= \frac{n}{b_n - a_n} S_n(\delta_n(F))(x) \end{aligned} \tag{3.3}$$

burada δ_n

$$\delta_n(F)(x) := F\left(x + \frac{b_n}{n}\right) - F\left(x + \frac{a_n}{n}\right) \quad (x \geq 0) \tag{3.4}$$

eşitliği ile verilir. C_n operatörleri de aşağıdaki ifade ile verilebilir

$$C_n(f)(x) = \int_0^{\infty} f d\mu_{n,x} \qquad (n \geq 1,\ x \geq 0) \tag{3.5}$$

öyleki

$$\mu_{n,x} := \frac{n}{b_n - a_n} e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \mu_{n,k}$$

her $\mu_{n,k}$, $\left[\frac{k+a_n}{n}, \frac{k+b_n}{n}\right]$ aralığında karakteristik fonksiyondur. Bundan sonra $\forall m \geq 0$ için e_m sembolü $e_m(x) = x^m \ \ (x \geq 0)$ ifadesiyle tanımlanacak ve verilen $x \geq 0$ için $\Psi_x(y) := y - x \ \ (y \geq 0)$ şeklinde belirlenecektir.

Yukarıdaki belirlenen fonksiyonlar için Szasz-Mirakjan operatörlerinin davra nışını inceleyelim. $\forall n \geq 1$ ve $m \geq 0$ için

$$S_n(e_m) = \sum_{j=0}^{m} a_{m,j} n^{j-m} e_j \tag{3.6}$$

eşitliği geçerlidir. ve $a_{m,j}$ ler pozitif olmak üzere aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $j = 0, ...m$ için $a_{j,j} = 1$ ve $j \geq 1$ için $a_{j,0} = 0$;

(ii) $j = 1, ...m$ için $a_{j,1} = 1$;

(iii) $j = 1, ...m$ için $a_{j,j-1} = \frac{j(j-1)}{2}$;

(iv) $j = 1, ...m - 2$ için $a_{j+2,j+1} - 2\, a_{j+1,j} + a_{j,j-1} = 1$.

$\forall m \geq 1$ için $S_n(e_m)$ sabit kısma sahip olmayan ve m dereceli bir polinomdur. Örneğin:

$$\begin{aligned} S_n(1) &= 1, \qquad S_n(e_1) = e_1 \qquad \text{ve} \\ S_n(e_2) &= \sum_{j=0}^{2} a_{2,j} n^{j-2} e_j = a_{2,0} n^{0-2} e_0 + a_{2,1} n^{1-2} e_1 + a_{2,2} n^{2-2} e_2 \\ &= e_2 + \frac{1}{n} e_1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$\forall x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} S_n(\Psi_x)(x) &= S_n((t-x);x) = S_n(t;x) - xS_n(1;x) \\ &= x - x = 0 \end{aligned}$$

ve S_n operatörlerin lineerliğinden

$$\begin{aligned} S_n\left(\Psi_x^2\right)(x) &= S_n\left((t-x)^2;x\right) = S_n\left(t^2 - 2tx + x^2;x\right) \\ &= S_n\left(t^2;x\right) - 2xS_n(t;x) + x^2 S_n(1;x) \\ &= x^2 + \frac{x}{n} - 2x.x + x^2 \\ &= \frac{x}{n}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Şimdi $\lambda > 0$ olmak üzere

$$f_\lambda(x) := e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0) \tag{3.9}$$

fonksiyonunu gözönüne alırsak

$$\begin{aligned} S_n(f_\lambda)(x) &= e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda k}{n}} = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(nxe^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^k}{k!} \\ &= e^{-nx}.e^{nxe^{-\frac{\lambda}{n}}} \\ &= \exp\left(nx\left(e^{-\frac{\lambda}{n}} - 1\right)\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

ifadesini elde ederiz.

$f \in \mathcal{L}([0,+\infty))$, $x \geq 1$ ve $n \geq 1$ için

$$f_n(x) = \int_0^1 f\left(\left[x + \left((b_n - a_n)y + a_n\right)\right]/n\right) dy \tag{3.11}$$

olmak üzere

$$C_n(f) = K_n(f_n) \tag{3.12}$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten

$$\begin{aligned}
K_n(f_n)(x) &= n\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f_n(t)\,dt \\
&= n\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\int_0^1 f\left(\left[t+\left((b_n-a_n)y+a_n\right)\right]/n\right)dy\right)dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. $h = \frac{t+(b_n-a_n)y+a_n}{n}$ olarak seçilsin. O halde $y = \frac{nh-t-a_n}{b_n-a_n}$ olup

$$\begin{aligned}
y &= 0 \text{ ise } h = \frac{t+a_n}{n}, \\
y &= 1 \text{ ise } h = \frac{t+b_n}{n} \text{ ve } dy = \frac{n}{b_n-a_n}dh.
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$K_n(f_n)(x) = n\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\int_{\frac{t+a_n}{n}}^{\frac{t+b_n}{n}} f(h)\frac{n}{b_n-a_n}dh\right)dt$$

elde edilir. Fubini teoremini uygularsak

$$\begin{aligned}
K_n(f_n)(x) &= \frac{n^2}{b_n-a_n}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} f(t)\,dt\,\left[\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right] \\
&= \frac{n}{b_n-a_n}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} f(t)\,dt = C_n(f)(x)
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 3.1 *Her $n \geq 1$ ve $m \geq 0$ için*

$$\begin{aligned}
C_n(e_m) &= \frac{1}{(m+1)\,n^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k} b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j e_j \\
&= e_m + \frac{1}{n}F_{m-1,}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

burada $a_{k,j}$ (3.6)'da belirlenen katsayılar ve F_{m-1}, $m-1$ dereceli pozitif bir polinomdur. $\forall m \geq 0$ için $e_m \leq C_n(e_m)$ eşitsizliği doğrudur.

Derecesi m sayısından küçük olan polinomlar uzayı P_m gösterilirse $\forall n,\ m \geq 1$ için

$$C_n\left(P_m\right) \subset P_m$$

kapsaması doğrudur. $\forall m \geq 1$, $n \geq 1$ ve $x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} w_m(x)\, C_n\left(e_m\right)(x) &= w_m(x)\, e_m(x) + w_m(x)\frac{1}{n}F_{m-1} \\ &\leq w_m(x)\, e_m(x) + \frac{d_m}{n} \end{aligned} \tag{3.14}$$

yazılabilir burada

$$d_m := \max_{x\geq 0} w_m(x)\left\{\sum_{j=0}^{m-1} a_{m,j}x^j + \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j}x^j\right\} \tag{3.15}$$

ve $w_m(x) := \left(1+x^m\right)^{-1}$ $(x \geq 0)$ dır. Dolayısıyla $\forall m \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|C_n\left(e_m\right)-e_m\right\|_m &= \lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0} w_m(x)\left|C_n\left(e_m\right)-e_m\right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sup_{x\geq 0}\frac{d_m}{n} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Son olarak $\forall m \geq 1$, $n \geq 1$ ve $x \geq 0$ için

$$\begin{aligned} C_n\left(\Psi_x^m\right) &= C_n\left((t-x)^m\right) = C_n\left(\sum_{h=0}^{m}\binom{m}{h}t^h(-x)^{m-h}\right) \\ &= \sum_{h=0}^{m}\binom{m}{h}(-x)^{m-h}C_n\left(t^h\right) \end{aligned}$$

eşitliğini kullanırsak (3.13) eşitliğinden

$$C_n\left(\Psi_x^m\right) = \sum_{h=0}^{m}\binom{m}{h}\frac{(-1)^{m-h}x^{m-h}}{(h+1)\,n^h}\sum_{k=0}^{h}\binom{h+1}{k}\sum_{p=0}^{h-k}b_n^p a_n^{h-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j e_j \tag{3.17}$$

eşitliğini elde ederiz. Özel olarak

$$C_n(1) = 1,$$

yine (3.13)'i kullanırsak

$$\begin{aligned}
C_n(e_1) &= \frac{1}{(1+1)\,n^1}\sum_{k=0}^{1}\binom{1+1}{k}\sum_{p=0}^{1-k}b_n^p a_n^{1-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j e_j \\
&= \frac{1}{2n}\left[\binom{2}{0}(a_n+b_n)+\binom{2}{1}(a_{1,0}+a_{1,1}ne_1)\right] \\
&= \frac{1}{2n}(a_n+b_n+2ne_1) \\
&= e_1+\frac{a_n+b_n}{2n} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

aynı şekilde

$$C_n(e_2)=e_2+\frac{b_n+a_n+1}{n}e_1+\frac{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}{3n^2}1 \qquad (3.19)$$

eşitliği gösterilebilir. Ve $\forall\ x\geq 0$ için (3.17) ifadesinden

$$\begin{aligned}
C_n(\Psi_x) &= \sum_{h=0}^{1}\binom{1}{h}\frac{(-1)^{1-h}x^{1-h}}{(h+1)\,n^h}\sum_{k=0}^{h}\binom{h+1}{k}\sum_{p=0}^{h-k}b_n^p a_n^{h-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j e_j \\
&= \binom{1}{0}\frac{-1x}{1}+\binom{1}{1}\frac{1}{2n}\left[\binom{2}{0}(a_n+b_n)+\binom{2}{1}(a_{1,0}+a_{1,1}ne_1)\right] \\
&= -x+\frac{1}{2n}(a_n+b_n+2nx) \\
&= \frac{a_n+b_n}{2n}
\end{aligned}$$

Aynı şekilde aşaığıdaki eşitlik elde edilebilir

$$C_n(\Psi_x)=\frac{a_n+b_n}{2n}, \qquad C_n\left(\Psi_x^2\right)(x)=\frac{x}{n}+\frac{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}{3n^2}. \qquad (3.20)$$

Önerme 3.2 *$\lambda>0$ ve $f_\lambda(x)=e^{-\lambda x}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu takdirde*

$$C_n(f_\lambda)=\frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}-e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)S_n(f_\lambda) \qquad (n\geq 1), \qquad (3.21)$$

eşitliği doğrudur. ve $\forall\ n\geq 1$ ve $\lambda>0$ için

$$C_n(f_\lambda)\leq S_n(f_\lambda)\leq S_1(f_\lambda). \qquad (3.22)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (3.21) ifadesini ispatlamak için f_λ fonksiyonu ve C_n operatörlerinin ifadelerini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
C_n(f_\lambda)(x) &= \frac{n}{b_n-a_n}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} e^{-\lambda t}dt \\
&= \frac{n}{b_n-a_n}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\left[\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} \\
&= \frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}-e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)e^{-\frac{\lambda k}{n}} \\
&= \frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}-e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)S_n(f_\lambda)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (3.22)'deki ilk eşitsizliği ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}-e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) &\leq \frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}e^{\frac{\lambda a_n}{n}}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}-e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) \\
&\leq \frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}\left(1-e^{-\left(\frac{\lambda b_n}{n}-\frac{\lambda a_n}{n}\right)}\right)
\end{aligned}$$

iyi bilinen $1-e^{-x}\leq x \quad (x\geq 0)$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}\left(1-e^{-\left(\frac{\lambda b_n}{n}-\frac{\lambda a_n}{n}\right)}\right)\leq 1;$$

dolayısıyla

$$\frac{n}{\lambda(b_n-a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}-e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)\leq 1$$

olup (3.21)'den istenilen sonuç elde edilir. Öte taraftan $(S_n(f))_{n\geq 1}$ dizisi konveks fonksiyonlar için azalan olduğundan ikinci eşitsizlik de doğrudur. ■

3.3. C_n Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Şimdi sürekli ve integrallenebilen fonksiyon uzaylarında $(C_n)_{n\geq 1}$ dizisinin bazı yaklaşım özelliklerini vereceğiz.

Teorem 3.1 $C_n \quad (n\geq 1)$ *operatörleri için* $n\geq 1$ *ve* $m\geq 1$ *olmak üzere aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(a) $C_n, \mathcal{C}_b([0,+\infty))$ uzayı üzerinde lineer pozitif ve sürekli bir operatördür ayrıca

$$\|C_n\|_{\mathcal{C}_b([0,+\infty))}=1$$

eşitliği sağlanır.

(b) $C_n(\mathcal{C}_0([0,+\infty))) \subset \mathcal{C}_0([0,+\infty))$;

(c) C_n, E_m uzayı üzerinde lineer pozitif ve sürekli operatördür ayrıca

$$\|C_n\|_{E_m} \leq 1 + d_m/n$$

eşitsizliği sağlanır. özel olarak

$$\sup_{n\geq 1} \|C_n\|_{E_m} \leq 1 + d_m; \tag{3.23}$$

eşitsizliği doğrudur.

(d) $C_n(E_m^0) \subset E_m^0$.

İspat. (a) için C_n operatörünün lineer pozitif ve sürekli olduğu açıktır. $C_n(1) = 1$ ve lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden $f \in \mathcal{C}_b([0,+\infty))$ olmak üzere

$$\|C_n(f)\|_b \leq C_n(\|f\|_b) = \|f\|_b C_n(1) = \|f\|_b$$

buradan

$$\|C_n\|_{\mathcal{C}_b([0,+\infty))} = \sup_{f\neq 0} \frac{\|C_n(f)\|_b}{\|f\|_b} = 1$$

dir. (b) ifadesini ispatlamak için $f \in \mathcal{C}_0([0,+\infty))$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde $x_1 \geq 0$ vardır öyleki $\forall x \geq [x_1]$ için $|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. $x_2 > x_1$ olduğunda $\forall x \geq x_2$ için

$$\frac{(nx)^h e^{-nx}}{h!} \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty (n[x_1]+1)}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu söyleyebiliriz. Burada $h = 0, ..., n[x_1]$ ve $[x_1]$, x'in tamdeğeridir. $\forall x \geq x_2$ için

$$\begin{aligned}|C_n(f)(x)| \quad \leq \quad & \frac{n}{b_n - a_n} \sum_{k=0}^{n[x_1]} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} |f(t)|\, dt \\ & + \frac{n}{b_n - a_n} \sum_{k=n[x_1]+1}^{\infty} e^{-nx} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} |f(t)|\, dt\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliklerden ve $|f(t)| \leq \|f\|_{\infty}$ olduğundan

$$\begin{aligned}|C_n(f)(x)| &\leq \frac{n}{b_n - a_n}\frac{\varepsilon}{2\|f\|_{\infty}(n[x_1]+1)}\left(\frac{b_n - a_n}{n}\right)\|f\|_{\infty}\sum_{k=0}^{n[x_1]} \\ &+\frac{n}{b_n - a_n}\left(\frac{b_n - a_n}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=n[x_1]+1}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!} = \varepsilon.\end{aligned}$$

elde edilir. (c) için (3.14) eşitsizliğinden $\forall f \in E_m$ için

$$\begin{aligned}w_m(x)|C_n(f)(x)| &\leq w_m(x)C_n(|f|)(x) = w_m(x)C_n(w_m(x)|f|(1+e_m))(x) \\ &\leq w_m(x)\|f\|_m C_n(1+e_m)(x) \\ &= \|f\|_m[w_m(x)C_n(1)(x) + w_m(x)C_n(e_m)(x)] \\ &\leq \|f\|_m\left(1+\frac{d_m}{n}\right)\end{aligned}$$

buradan

$$\|C_n\|_{E_m} \leq 1 + d_m/n$$

eşitsizliği doğrudur.(d) özelliğini ispatlamak için $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ ailesiyle doğurulan $\mathcal{D}$ altuzayı gözönüne alalım. Stone-Weierstrass theoremi gereğince $\mathcal{D}$ altuzayı, $\mathcal{C}_0([0,+\infty))$ 'da(dolayısıyla E_m^0'de) yoğundur. $f \in E_m^0$ olsun. Bu taktirde $(f_{\lambda_n})_{n\geq 1} \in \mathcal{D}$ dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} f_{\lambda_n} = f$$

buradan

$$C_n(f) = C_n\left(\lim_{n\to\infty} f_{\lambda_n}\right) \in \mathcal{C}_0([0,+\infty)) \subset E_m^0$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 3.1 $C_n(1) = 1$ *olduğundan Teorm 3.1 den görülür ki* $\forall n \geq 1$ *için*

$$C_n(\mathcal{C}_*([0,+\infty))) \subset \mathcal{C}_*([0,+\infty))$$

dur.

Ve (3.13)'den

$$\lim_{x\to\infty} w_m(x)C_n(e_m)(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^m}{1+x^m}+\frac{1}{n}\frac{F_{m-1}}{1+x^m}\right) \in \mathbb{R}$$

yani $C_n(e_m) \in E_m^*$ dir Buradan $C_n(1+e_m) = 1 + C_n(e_m) \in E_m^*$ olur.Şimdi $f \in E_m^*$ keyfi bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\lim_{x\to\infty} w_m(x) f(x) = L \in \mathbb{R}$$

Böylece

$$\lim_{x\to\infty} w_m(x)\left[f(x) - L(1+x^m)\right] = 0$$

olup dolayısıyla

$$g = f - L(1+x^m) \in E_m^0$$

dir. Teorem3.1'i tekrar kullanırsak (d)'den $C_n(g) \in E_m^0$ olur. O halde

$$\lim_{x\to\infty} w_m(x) C_n(g) = \lim_{x\to\infty} w_m(x) C_n(f(t) - L(1+t^m); x) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} w_m(x) C_n(f(t); x) = L \lim_{x\to\infty} w_m(x) C_n(1+e_m)$$

olup $C_n(1+e_m) \in E_m^*$ olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} w_m(x) C_n(f(t); x) = L * K$$

yazılabilir. Bu da $C_n(E_m^*) \subset E_m^*$ ifadesinin doğru olduğunu gösterir.

Şimdi önemli bir sonuç verelim. $\lambda > 0, n \geq 1$ ve $0 \leq a_n < b_n \leq 1$ olsun. O halde

$$0 \leq 1 - \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) \leq \frac{\lambda}{n}. \tag{3.24}$$

dir. Gerçekten, $1 - e^{-x} \leq x$, $1 - e^{-x} \geq x - \frac{x^2}{2}$ $(x \geq 0)$ eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
0 &\leq 1 - \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) \\
&= 1 - \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}\left(1 - e^{-\frac{\lambda(b_n - a_n)}{n}}\right) \\
&\leq 1 - \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}\left(\lambda\frac{b_n - a_n}{n} - \lambda^2\frac{(b_n - a_n)^2}{2n^2}\right) \\
&= 1 - e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} + \lambda\frac{b_n - a_n}{n} \leq \frac{\lambda}{2n}(a_n + b_n) \leq \frac{\lambda}{n}.
\end{aligned}$$

eşitzisliğini elde ederiz. Şimdi sınırlı ve sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 3.2 *$f \in C_*([0,+\infty))$ olsun. O halde $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün olarak*

$$\lim_{n\to+\infty} C_n(f) = f$$

dir. Ayrıca $f \in C_b([0,+\infty))$ ise $[0,+\infty)$ kompakt altkümeleri için

$$\lim_{n\to+\infty} C_n(f) = f$$

yakınsaması düzgündür.

İspat. $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ ailesinin doğurduğu $\mathcal{D}$ altuzayı, $\mathcal{C}_0([0,+\infty))$ uzayında yoğun ve $(C_n)_{n\geq 1}$ dizisi $\mathcal{C}_0([0,+\infty))$ uzayında alttan ve üstten sınırlı olduğundan teoremin ilk kısmını $f \in \mathcal{C}_0([0,+\infty))$ için göstermek yeterlidir. Şimdi $\forall x \geq 0$ ve $n \geq 1$ için (3.21) ve (3.24) kullanıldığında

$$\begin{aligned}
|C_n(f_\lambda)(x) - f_\lambda(x)| &= \left| \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} \left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}} \right) S_n(f_\lambda) - f_\lambda(x) \right| \\
&\leq \left| \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} \left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}} \right) - 1 \right| S_n(f_\lambda)(x) \\
&\quad + |S_n(f_\lambda)(x) - f_\lambda(x)|
\end{aligned}$$

olup $S_n(f_\lambda) = \exp\left(nx\left(e^{-\frac{\lambda}{n}} - 1\right)\right) \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|C_n(f_\lambda)(x) - f_\lambda(x)| &\leq \left(1 - \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} \left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}} \right)\right) + \|S_n(f_\lambda) - f_\lambda\|_\infty \\
&\leq \frac{\lambda}{n} + \|S_n(f_\lambda) - f_\lambda\|_\infty .
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. [3,bölüm5.3.9] den Szasz-Mirakjan operatörleri dizisi $(S_n)_{n\geq 1}$ 'nin $\mathcal{C}_0([0,+\infty))$ uzayında yakınsaktır. Buradan $f \in \mathcal{C}_0([0,+\infty))$ keyfi bir fonksiyon alındığında, $\mathcal{D}$ altuzayında bu fonksiyona yakınsayan $(f_{\lambda_n})_{n\geq 1}$ fonksiyon dizisi vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|C_n(f)(x) - f(x)| &= \left| C_n\left(\lim_{n\to\infty} f_{\lambda_n}\right)(x) - \lim_{n\to\infty} f_{\lambda_n}(x) \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} |C_n(f_{\lambda_n})(x) - f_{\lambda_n}(x)| = 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece istenilen sonuç elde edilir. Teoremin son kısmını ispatlamak için dikkat edilmeli ki (3.18) ve (3.19)'den $[0,+\infty)$ aralığın kompakt altkümeleri üzerinde $\forall h \in \{1, e_1, e_2\}$ için düzgün olarak $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n(h) = h$ dir. $\{1, e_1, e_2\} \subset E_2^*$ olduğundan ve [2.teorem 3.5] den sonuç elde edilir. ■

Şimdi E_m^0, E_m^* ve E_m ağırlıklı fonksiyon uzayları üzerinde C_n operatörlerinin yaklaşım özelliklerini verelim.

Teorem 3.3 *$m \geq 1$ olsun. $f \in E_m^*$(özellikle $f \in E_m^0$) ise $[0, +\infty)$ uzayında düzgün olarak*

$$\lim_{n \to +\infty} w_m \left(C_n \left(f \right) - f \right) = 0 \tag{3.25}$$

yani $\|.\|_m$ normuna göre

$$\lim_{n \to +\infty} C_n \left(f \right) = f.$$

$f \in E_m$ ise $[0, +\infty)$ uzayının kompakt altkümeleri üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \to +\infty} w_m \left(C_n \left(f \right) - f \right) = 0 \tag{3.26}$$

dir.

İspat. :$(f_\lambda)_{\lambda > 0}$ fonksiyon ailesini yeniden gözönüne alalım. Buradan $\|.\|_\infty$ normuna göre ve dolayısıyla $\|.\|_m$ normuna göre $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n \left(f_\lambda \right) = f_\lambda$ dir. $(C_n)_{n \geq 1}$ dizisi, E_m^0 uzayı üzerinde alttan ve üstten sınırlı olduğundan ve $(f_\lambda)_{\lambda > 0}$ fonksiyon ailesinin doğurduğu $\mathcal{D}$ lineer uzayı, E_m^0 uzayında yoğun olduğundan (3.25) ifadesi $\forall f \in E_m^0$ için doğrudur. Gerçekten

$$\begin{aligned} w_m \left| C_n \left(f \right) (x) - f (x) \right| &= w_m \left| C_n \left(\lim_{n \to \infty} f_{\lambda_n} \right) (x) - \lim_{n \to \infty} f_{\lambda_n} (x) \right| \\ &= \lim_{n \to \infty} w_m \left| C_n \left(f_{\lambda_n} \right) (x) - f_{\lambda_n} (x) \right| = 0 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $f \in E_m^*$ ise $f = g - \alpha_m \left(1 + e_m \right)$ olmak üzere

$$\alpha_m := \lim_{x \longrightarrow \infty} w_m (x) f (x) \in \mathbb{R}$$

$$g = f - \alpha_m \left(1 + e_m \right) \in E_m^0$$

ve (3.16) den

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| C_n \left(e_m \right) - e_m \right\|_m = 0$$

dir.Bu nedenle (3.25) ifadesi f için geçerlidir. Bir önceki sonuç ve $E_m \subset E_{m+1}^0$ içermesi, (3.26) ifadesini verir. Çünkü J, $[0, +\infty)$ uzayının bir kompakt altkümesi ise $\forall\ x \in J$ için

$$\begin{aligned} w_m (x) \left| C_n \left(f \right) (x) - f (x) \right| &= w_m (x) \frac{w_{m+1} (x)}{w_{m+1} (x)} \left| C_n \left(f \right) (x) - f (x) \right| \\ &\leq M \left\| C_n \left(f \right) - f \right\|_{m+1} \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $M := \sup\limits_{x\in J} \frac{w_m(x)}{w_{m+1}(x)}$ dir. ■

Son olarak bazı özel durumlarda C_n operatörleri $L^p([0,+\infty))_{1\leq p<\infty}$ uzayları için de bir yaklaşım operatörü olduğunu gösterelim.

Teorem 3.4 *$(C_n)_{n\geq 1}$, (3.2)'de verilen operatörler dizisi ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda*

$$C_n\left(L^p\left([0,+\infty)\right)\right) \subset L^p\left([0,+\infty)\right)$$

olur ve $\forall n \geq 1$ için

$$\|C_n\|_{L^p,L^p} \leq (b_n - a_n)^{-\frac{1}{p}}.$$

eşitsizliği sağlanır. $M > 0$ ve $\forall n \geq 1$ için $\frac{1}{b_n-a_n} \leq M$ olacak şekilde bir M mevcut ise $\forall f \in L^p([0,+\infty))$ için

$$L^p\left([0,+\infty)\right) \text{ uzayında} \lim_{n\to+\infty} C_n(f) = f$$

dir.

İspat. $n \geq 1$ ve $f \in L^p([0,+\infty))$ olsun. Jensen's eşitsizliği $\forall x \geq 0$ iki kere kullanılırsa

$$\begin{aligned} |C_n(f)(x)|^p &\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\left|\frac{n}{b_n-a_n}\int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} f(t)\,dt\right|^p \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\frac{n}{b_n-a_n}\int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} |f(t)|^p\,dt \end{aligned}$$

olup x'e göre integral alıp

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx}x^k dx = \frac{k!}{n^{k+1}}\,(k \geq 0),$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} |C_n(f)(x)|^p \, dx &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{b_n - a_n} \int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} |f(t)|^p \, dt \right) \frac{n^k}{k!} \int_{0}^{+\infty} e^{-nx} x^k dx \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{b_n - a_n} \int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} |f(t)|^p \, dt \right) \\
&= \frac{1}{n} \frac{n}{b_n - a_n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\frac{k+a_n}{n}}^{\frac{k+b_n}{n}} |f(t)|^p \, dt \right) \leq \frac{1}{b_n - a_n} \|f\|_p^p ,
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$C_n(L^p([0,+\infty))) \subset L^p([0,+\infty))$$

dir. $M > 0$ ve $\frac{1}{b_n - a_n} \leq M$ olacak şekilde bir M sayısı olduğunu kabul edelim. $(C_n)_{n\geq 1}$ dizisi $L^p([0,+\infty))$ uzayında alttan ve üstten sınırlıdır. [3, önerme 4.2.5,(2)] ve [1, sonuç 8.9] den $\{f_\lambda | \lambda > 0\}$ altkümesi $L^p([0,+\infty))'$de Korovkin kümesidir. (Gerçekten $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ şartıyla herhangi bir $\{f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2}, f_{\lambda_3}\}$ altkümesi $L^p([0,+\infty))$ uzayında bir Korovkin altkümesidir). O zaman son iddiayı ispatlamak için, $\forall\lambda \geq 0$ için $L^p([0,+\infty))$ uzayında $C_n(f_\lambda) \to f_\lambda$ olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 3.2 gereğince biliyoruz ki $[0,+\infty)$ uzayı üzerinde mutlak olarak ve dolayısıyla noktasal $C_n(f_\lambda) \to f_\lambda$dir. Diğer taraftan (3.10) ve (3.22)'den elde ederiz ki

$$0 \leq |C_n(f_\lambda)|^p \leq |S_1(f_\lambda)|^p \in L^1([0,+\infty)) .$$

buradan

$$L^p([0,+\infty)) \text{ uzayında} \lim_{n\to+\infty} C_n(f) = f$$

dir. ■

3.4. Yakınsaklık Hızı için Üst Sınırlar

Burada uygun süreklilik modüleri yardımıyla $(C_n(f))_{n\geq 1}$ dizisinin f fonksiyonuna yakınsaklık hızı için bazı üst sınırlar verilecektir. Bu yakınsaklık hızını üç farklı durumda inceleyeceğiz.

3.4.1. Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık Hızı

Birince ve ikinci martebeden $w\left(f,\delta\right)$ ve $w_2\left(f,\delta\right)$ alışılmış süreklilik modüllerini kullanarak noktasal ve düzgün yakınsaklık hızı için bazı üst sınırlar vereceğiz. [19] de verilen bazı sonuçları kullanarak noktasal yakınsaklık hızını için üst sınırlar belirleyeceğiz.

Teorem 3.5 *$f\in\mathcal{C}_b\left([0,+\infty)\right)$, $n\geq 1$ ve $x\geq 0$ olsun. Bu halde*

$$\begin{aligned}\left|C_n\left(f\right)\left(x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq \frac{a_n+b_n}{2\sqrt{n}}w\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &+\left[1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}{3n}\right)\right]w_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.27)\end{aligned}$$

İspat. (3.5)'i gözönüne alarak [17,teorem2.2.1]'i kullanırsak ve (3.20)'den $\forall\delta\geq 0$ için

$$\begin{aligned}\left|C_n\left(f\right)\left(x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq \left|C_n\left(1\right)\left(x\right)-1\right|\left|f\left(x\right)\right|+\frac{1}{\delta}\left|C_n\left(\Psi_x\right)\left(x\right)\right|w\left(f,\delta\right)\\ &+\left[C_n\left(1\right)\left(x\right)+\frac{1}{\delta^2}C_n\left(\Psi_x^2\right)\left(x\right)\right]w_2\left(f,\delta\right)\end{aligned}$$

olur.

$$C_n\left(1\right)=1, C_n\left(\Psi_x\right)\left(x\right)=\frac{a_n+b_n}{2n} \text{ ve } C_n\left(\Psi_x^2\right)\left(x\right)=\frac{x}{n}+\frac{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}{3n^2}$$

olduğundan

$$\left|C_n\left(f\right)\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{\delta}\frac{a_n+b_n}{2n}w\left(f,\delta\right)+\left[1+\frac{1}{2\delta^2}\left(\frac{x}{n}+\frac{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}{3n^2}\right)\right]w_2\left(f,\delta\right)$$

olup $\delta=n^{\frac{-1}{2}}$ olduğunda (3.27)'i elde ederiz. ■

$\left(C_n\left(f\right)\right)_{n\geq 1}$ dizisinin $\mathcal{C}_b\left([0,+\infty)\right)$ uzayında yakınsaklık hızı için başka üst sınırlar verilebilir. Gerçekten (3.3)'den $\forall f\in\mathcal{C}_b\left([0,+\infty)\right)$,ve $x\geq 0$ için

$$\begin{aligned}\left|C_n\left(f\right)\left(x\right)-f\left(x\right)\right| &= \left|\frac{n}{b_n-a_n}S_n\left(\delta_n\left(F\right)\right)\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\\ &\leq \frac{n}{b_n-a_n}\left|S_n\left(\sigma_n\left(F\right)\right)\left(x\right)-\sigma_n\left(F\right)\left(x\right)\right|\\ &+\left|\frac{n}{b_n-a_n}\sigma_n\left(F\right)\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\end{aligned}$$

olur. Burada $\delta_n\left(F\right)\left(x\right):=F\left(x+\frac{b_n}{n}\right)-F\left(x+\frac{a_n}{n}\right)$ $(x\geq 0)$ ve F, f'in antitürevidir.

Ayrıca Szasz-Mirakjan operatörleri için elde edilen üst sınırlar benzer şekilde aşağıdaki lemmayı kullanarak $\left(C_n\left(f\right)\right)_{n\geq 1}$ dizisinin noktasal yakınsaklık hızı için bazı sayısal üst sınırlar elde edebiliriz.

Lemma 3.1 *$0 \leq a_n < b_n \leq 1$ $(n \geq 1)$, $f \in \mathcal{C}_b([0,+\infty))$ ve $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x \geq 0)$ olsun. Bu halde $\forall x \geq 0$ ve $n \geq 1$ için*

$$\left| \frac{n}{b_n - a_n} \sigma_n(F)(x) - f(x) \right| \leq w\left(f, \frac{b_n - a_n}{n}\right). \tag{3.28}$$

ve $\forall \delta > 0$ için

$$w(\sigma_n(F), \delta) \leq \frac{b_n - a_n}{n} w\left(f, \delta + \frac{b_n - a_n}{n}\right) \tag{3.29}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat. $x \geq 0$ ve $n \geq 1$ olsun. F fonksiyonu için $\left[x + \frac{a_n}{n}, x + \frac{b_n}{n}\right]$ aralığında Lagrange teoremini uygularsak

$$\frac{F\left(x + \frac{b_n}{n}\right) - F\left(x + \frac{a_n}{n}\right)}{x + \frac{b_n}{n} - x - \frac{a_n}{n}} = \frac{n}{b_n - a_n} \sigma_n(F)(x) = f\left(\zeta_{n,x}\right)$$

olacak şekilde $\zeta_{n,x} \in \left[x + \frac{a_n}{n}, x + \frac{b_n}{n}\right]$ sayısı vardır. $x + \frac{a_n}{n} \leq \zeta_{n,x} \leq x + \frac{b_n}{n}$ olduğundan $\left|\zeta_{n,x} - x\right| \leq \frac{b_n - a_n}{n}$ olup

$$\left| \frac{n}{b_n - a_n} \sigma_n(F)(x) - f(x) \right| = \left| f\left(\zeta_{n,x}\right) - f(x) \right| \leq w\left(f, \left|\zeta_{n,x} - x\right|\right) \leq w\left(f, \frac{b_n - a_n}{n}\right)$$

dir. Şimdi $\delta > 0$ ve $x, y \geq 0$ öyle ki $|x - y| < \delta$ olsun. Yine de Lagrange teoreminden

$$|\sigma_n(F)(x) - \sigma_n(F)(y)| = \frac{b_n - a_n}{n} \left| f\left(\zeta_{n,x}\right) - f\left(\eta_{n,y}\right) \right| \leq \frac{b_n - a_n}{n} w\left(f, \left|\zeta_{n,x} - \eta_{n,y}\right|\right),$$

burada $\eta_{n,y}$, $\left[y + \frac{a_n}{n}, y + \frac{b_n}{n}\right]$ aralığında uygun bir sayı ve $\zeta_{n,x}$ yukarıdaki gibidir. $x + \frac{a_n}{n} \leq \zeta_{n,x} \leq x + \frac{b_n}{n}$ ve $y + \frac{a_n}{n} \leq \eta_{n,y} \leq y + \frac{b_n}{n}$ olduğundan

$$\left|\zeta_{n,x} - \eta_{n,y}\right| \leq |x - y| + \frac{b_n - a_n}{n} \leq \delta + \frac{b_n - a_n}{n}$$

olup böylece ispat tamamlanır. ∎

Teorem 3.6 *$f \in \mathcal{C}_b([0,+\infty))$, $n \geq 1$ ve $x \geq 0$ olsun. Bu halde*

$$|C_n(f)(x) - f(x)| \leq \left(2 + \sqrt{x}\right) w\left(f, \frac{\sqrt{n} + b_n - a_n}{n}\right) \tag{3.30}$$

ve f fonksiyonu $[0,+\infty)$ uzayında türevlenebilir ve $f' \in \mathcal{C}_b([0,+\infty))$ ise

$$|C_n(f)(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{x}{n}} \left(1 + \sqrt{x}\right) w\left(f', \frac{\sqrt{n} + b_n - a_n}{n}\right) + \|f'\|_\infty \frac{b_n - a_n}{n} \tag{3.31}$$

dir.

İspat. biliyoruz ki $\forall\delta > 0$ için

$$|S_n(f)(x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x}{n}}\right) w(f, \delta)$$

olup (3.3), (3.28) ve (3.29)'den

$$\begin{aligned}
|C_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\frac{n}{b_n - a_n} S_n(\sigma_n(F))(x) - f(x)\right| \\
&= \left|\frac{n}{b_n - a_n} S_n(\sigma_n(F))(x) - \frac{n}{b_n - a_n}\sigma_n(F)(x)\right. \\
&\quad \left. + \frac{n}{b_n - a_n}\sigma_n(F)(x) - f(x)\right| \\
&\leq \frac{n}{b_n - a_n}|S_n(\sigma_n(F))(x) - \sigma_n(F)(x)| \\
&\quad + \left|\frac{n}{b_n - a_n}\sigma_n(F)(x) - f(x)\right| \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\frac{n}{b_n - a_n} w(\sigma_n(F), \delta) + w\left(f, \frac{b_n - a_n}{n}\right) \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x}{n}}\right) w\left(f, \delta + \frac{b_n - a_n}{n}\right) + w\left(f, \frac{b_n - a_n}{n}\right) \\
&\leq \left(2 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x}{n}}\right) w\left(f, \delta + \frac{b_n - a_n}{n}\right).
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ olduğnda (3.30) elde edilir. (3.31)'i göstermek için f fonksiyonu $[0, \infty)$ uzayında türevlenebilir ve $f' \in \mathcal{C}_b([0, +\infty))$ olduğunu kabul edelim. Lagrange teoreminden

$$\begin{aligned}
w\left(f, \frac{b_n - a_n}{n}\right) &= \sup_{|t-x| \leq \frac{b_n - a_n}{n}} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t - x|}.|t - x| \leq \sup_{\xi \geq 0} f'(\xi)\frac{b_n - a_n}{n} \\
&\leq \|f'\|_\infty \frac{b_n - a_n}{n}
\end{aligned}$$

dir. [3, Teorem5.2.4]'den $\forall\delta > 0$ için

$$|S_n(f)(x) - f(x)| \leq \sqrt{\frac{x}{n}}\left(1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x}{n}}\right) w(f', \delta).$$

eşitsizliğini elde ederiz. f fonksiyonu gibi $\sigma_n(F)$ fonksiyonu türevlenebilir ve sınırlı sürekli bir türeve sahiptir. Ayrıca $\forall\ x \geq 0$ ve $n \geq 1$ için

$$\sigma_n(F)'(x) = f\left(x + \frac{b_n}{n}\right) - f\left(x + \frac{a_n}{n}\right).$$

olur. Şimdi $x,\ y \geq 0$ öyleki $|x-y| < \delta$ olsun. Lemma4.2'in ispatında olduğu gibi f fonksiyonu için Lagrange teoremini uygularsak

$$\begin{aligned}\left|\sigma_n(F)'(x)-\sigma_n(F)'(y)\right| &= \left|f\left(x+\frac{b_n}{n}\right)-f\left(x+\frac{a_n}{n}\right)-f\left(y+\frac{b_n}{n}\right)\right.\\ &\quad\left.+f\left(y+\frac{a_n}{n}\right)\right|\\ &= \frac{b_n-a_n}{n}\left|f'(\zeta_{n,x})-f'(\eta_{n,y})\right|\\ &\leq \frac{b_n-a_n}{n}w\left(f',\delta+\frac{b_n-a_n}{n}\right).\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $\zeta_{n,x} \in \left[x+\frac{a_n}{n}, x+\frac{b_n}{n}\right]$ ve $\eta_{n,y}$, $\left[y+\frac{a_n}{n}, y+\frac{b_n}{n}\right]$ sayıları vardır. Bu halde

$$w\left(\sigma_n(F)',\delta\right)=\sup_{|x-y|\leq\delta}\left|\sigma_n(F)'(x)-\sigma_n(F)'(y)\right| \leq \frac{b_n-a_n}{n}w\left(f',\delta+\frac{b_n-a_n}{n}\right)$$

eşitsizşiği ellde edilir. Son olarak (3.28)'den

$$\begin{aligned}\left|C_n(f)(x)-f(x)\right| &\leq \frac{n}{b_n-a_n}\left|S_n(\sigma_n(F))(x)-\sigma_n(F)(x)\right|\\ &\quad+\left|\frac{n}{b_n-a_n}\sigma_n(F)(x)-f(x)\right|\\ &\leq \frac{n}{b_n-a_n}\sqrt{\frac{x}{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)w\left(\sigma_n(F)',\delta\right)+w\left(f,\frac{b_n-a_n}{n}\right)\\ &\leq \sqrt{\frac{x}{n}}\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)w\left(f',\delta+\frac{b_n-a_n}{n}\right)+\|f'\|_\infty\frac{b_n-a_n}{n}.\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edip $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ olduğnda (3.31)'i görebiliriz. ∎

Düzgün yakınsaklık hızı için üst sınırlar vermek üzere öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2 $(C_n)_{n\geq 1}$ *dizisini gözönüne alalım.* $\forall\lambda > 0, n \geq 1$ *ve* $0 < x \leq 1$ *için*

$$\left|C_n(f_\lambda)(-\log x)-x^\lambda\right| \leq \frac{5\lambda}{4n} \tag{3.32}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ *dir.*

İspat. $0 < x \leq 1$ olduğunda $x = e^{-s}$ olacak şeikilde bir $s > 0$ sayısı var olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca [17, lemma3.1] den

$$x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)}-x^\lambda \leq \frac{\lambda}{2ne}.$$

buradan $\forall\lambda > 0, n \geq 1$ ve $0 < x \leq 1$ için (3.21), (3.10), (3.24) ve $1 - e^{-x} \leq x$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\left|C_n(f_\lambda)(-\log x) - x^\lambda\right| &= \left|\frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) S_n(f_\lambda)(-\log x) - x^\lambda\right| \\
&= \left|\frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)\right. \\
&\quad \left.\exp\left(-n \log x\left(e^{-\frac{\lambda}{n}} - 1\right)\right) - x^\lambda\right| \\
&= \left|\frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)} - x^\lambda\right| \\
&= \left|\frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)} - \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\right. \\
&\quad \left.\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) x^\lambda + \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) x^\lambda - x^\lambda\right| \\
&= \left|\frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)\left(x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)} - x^\lambda\right)\right. \\
&\quad \left.+x^\lambda\left(\frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) - 1\right)\right|
\end{aligned}$$

$1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \leq \frac{\lambda}{n}$ ve

$$\begin{aligned}
\frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right) &= \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}\left(1 - e^{-\frac{\lambda(b_n - a_n)}{n}}\right) \\
&\leq \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} \frac{\lambda(b_n - a_n)}{n} = e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} \leq 1
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|C_n(f_\lambda)(-\log x) - x^\lambda\right| &\leq \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)\left(x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)} - x^\lambda\right) \\
&\quad +x^\lambda\left(1 - \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)}\left(e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} - e^{-\frac{\lambda b_n}{n}}\right)\right) \\
&\leq \frac{n}{\lambda(b_n - a_n)} e^{-\frac{\lambda a_n}{n}}\left(1 - e^{-\frac{\lambda(b_n - a_n)}{n}}\right)\frac{\lambda}{2ne} + \frac{\lambda}{n} \\
&\leq e^{-\frac{\lambda a_n}{n}} \frac{\lambda}{2.2n} + \frac{\lambda}{n} \leq \frac{\lambda}{4n} + \frac{\lambda}{n} \leq \frac{5\lambda}{4n}.
\end{aligned}$$

olup böylece ispatı tamamlamış oluruz. ■

Şimdi düzgün yakınsaklık için benzerlik yöntemini kullanacağız. Yani X Banach uzayı üzerinde L_n tanımlı yaklaşım operatörü olduğunda eğer Y bir Banach uzayı ve $\Phi : X \to Y$ bir izometrik izomorfizim ise

$$L_n^* := \Phi \circ L_n \circ \Phi^{-1} \qquad (n \geq 1)$$

eşitliği ile tanımlanan operatör Y uzayı üzerinde bir yaklaşım operatörüdür. Bu halde $(L_n)_{n\geq 1}$ ve $(L_n^*)_{n\geq 1}$ operatörlerine benzer veya izometrik denir. $\forall u \in X$ için

$$\begin{aligned} \|L_n^*(\Phi(u)) - \Phi(u)\|_Y &= \left\|\Phi \circ L_n \circ \Phi^{-1}(\Phi(u)) - \Phi(u)\right\|_Y \\ &= \|\Phi(L_n(u) - u)\|_Y = \|L_n(u) - u\|_X \end{aligned} \tag{3.33}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik yardımıyla X uzayındaki $(L_n)_{n\geq 1}$ dizisinin yakınsaklık hızı problemini daha kolay olabilecek Y uzayındaki $(L_n^*)_{n\geq 1}$ dizisine dönüştürürüz. Bu yöntemi uygulamak için $\Phi : \mathcal{C}_*([0,+\infty)) \to \mathcal{C}([0,1])$ tanımlı ve

$$\Phi(f)(t) = \begin{cases} f(-\log t) & 0 < t \leq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) & t = 0 \end{cases} \qquad f \in \mathcal{C}_*([0,+\infty))$$

şeklinde tanımlanan operatörü izometrik izomorfizm olduğunu gösterelim.
$f \in \mathcal{C}_*([0,+\infty))$ olsun

$$\|\Phi(f)\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]} |\Phi(f)(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |f(-\log t)\ |$$

$u = -\log t$ seçersek $\left\{\begin{smallmatrix} t=0 & \text{iken} & u=+\infty \\ t=1 & \text{iken} & u=0 \end{smallmatrix}\right.$ olup

$$\|\Phi(f)\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \sup_{u\in[0,+\infty)} |f(u)\ | = \|f\|_{\mathcal{C}_*([0,+\infty))}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla Φ bir izometrik izomorfizmdir. Bu durumda

$$\Phi^{-1} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}_*([0,+\infty))$$

tanımlı ve $\forall g \in \mathcal{C}([0,1])$ ve $t \geq 0$ için

$$\Phi^{-1}(g)(t) := g\left(e^{-t}\right)$$

olur. Gerçekten $g \in \mathcal{C}([0,1])$ olduğunda

$$\left(\Phi \circ \Phi^{-1}\right)(g)(t) = \Phi\left(g\left(e^{-t}\right)\right)(t) = g\left(e^{-(-\log t)}\right) = g(t)$$

dir. Şimdi $\forall g \in \mathcal{C}([0,1])$ ve $n \geq 0$ için

$$C_n^*(g) := \Phi\left(C_n\left(\Phi^{-1}(g)\right)\right) \tag{3.34}$$

şeklinde tanımlanan operatörü gözönüne alalım.

$$C_n^*(1) = \Phi\left(C_n\left(\Phi^{-1}(1)\right)\right) = \Phi(C_n(1)) = \Phi(1) = 1$$

olur. $\psi_x = t - x$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C_n^*(\psi_x)(t) &= \Phi\left(C_n\left(\Phi^{-1}(\psi_x)(t)\right)\right) = \Phi\left(C_n\left(\Phi^{-1}(u-x)(t)\right)\right) \\ &= \Phi\left(C_n\left(e^{-t} - x\right)\right)(t) = C_n(f_1 - x)(-\log t) \end{aligned}$$

$$C_n^*(\psi_x)(t) = \begin{cases} C_n(f_1 - x1)(-\log t) & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \tag{3.35}$$

ve

$$\begin{aligned} C_n^*\left(\psi_x^2\right)(t) &= \Phi\left(C_n\left(\Phi^{-1}\left(\psi_x^2\right)(t)\right)\right) = \Phi\left(C_n\left(\Phi^{-1}(u-x)^2(t)\right)\right) \\ &= \Phi\left(C_n\left(e^{-t} - x\right)^2\right)(t) \\ &= \Phi\left(C_n\left(e^{-2t} - 2xe^{-t} + x^2\right)\right)(t) \\ &= C_n\left(f_2 - 2xf_1 + x^2\right)(-\log t) \end{aligned}$$

$$C_n^*\left(\psi_x^2\right)(t) = \begin{cases} C_n(f_2 - 2xf_1 + x^2 1)(-\log t) & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

ifadelerini elde ederiz. Burada $x \in [0,1]$ ve $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda = 1, 2$ dir.

Teorem 3.7 *$\forall n \geq 1$ ve $f \in \mathcal{C}_*([0,+\infty))$ için*

$$\|C_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{5}{4\sqrt{n}} w\left(\Phi(f), \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{7}{2} w_2\left(\Phi(f), \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\|C_n(f) - f\|_\infty = \|C_n^*(\Phi(f)) - \Phi(f)\|_\infty$ eşitliğini kullanarak $\|C_n^*(\Phi(f)) - \Phi(f)\|_\infty$ hesaplamaya geçebiliriz. Bu halde [19, Teorem 2.2.1]'den $\forall n \geq 1,\ f \in \mathcal{C}_*([0,+\infty))\,,\ 0 < x \leq 1$ ve $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \left|C_n^*(\Phi(f))(x) - \Phi(f)(x)\right| \leq\ & \left|C_n^*(1)(x) - 1\right| \left|\Phi(f)(x)\right| \\ & + \frac{1}{\delta}\left|C_n^*(\psi_x)(x)\right| w(\Phi(f), \delta) \\ & + \left(C_n^*(1)(x) + \frac{1}{2\delta^2} C_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)\right) w_2(\Phi(f), \delta) \end{aligned}$$

eşitsiliğini elde ederiz. Şimdi (3.35) ve (3.32)'den

$$\begin{aligned} \left|C_n^*(\psi_x)(x)\right| &= \left|C_n(f_1 - x)(-\log x)\right| \\ &= \left|C_n(f_1)(-\log x) - xC_n(1)(-\log x)\right| \\ &= \left|C_n(f_1)(-\log x) - x\right| \leq \frac{5}{4n} \end{aligned}$$

olup (3.36)'den

$$\begin{aligned} C_n^*\left(\psi_x^2\right)(x) &= C_n\left(f_2 - 2xf_1 + x^2\right)(-\log x) \\ &= C_n\left(f_2\right)(-\log x) - 2xC_n\left(f_1\right)(-\log x) + x^2 + x^2 - x^2 \\ &= C_n\left(f_2\right)(-\log x) - x^2 - 2x\left(C_n\left(f_1\right)(-\log x) - x\right) \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} \left|C_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)\right| &\leq \left|C_n\left(f_2\right)(-\log x) - x^2\right| + 2x\left|C_n\left(f_1\right)(-\log x) - x\right| \leq \frac{5.2}{4n} + 2x\frac{5.1}{2n} \\ &\leq \frac{5}{2n} + \frac{5}{2n} = \frac{5}{n} \end{aligned}$$

olur. $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$seçilirse ispat tamamlanmış olur. ■

3.4.2. Ağırlıklı Düzgün Yakınsaklık Hızı

Burada

$$\lim_{n\to+\infty} w_m\left(C_n(f) - f\right) = 0$$

ifadesindeki yakınsaklık hızı için bazı üst sınırlar vereceğiz. Bunun için öncelikle $\forall n \geq 1$ ve $\forall x \geq 0$ için $[0, +\infty)$ aralığında

$$v_{n,x} := w_m(x)\frac{n}{b_n - a_n}e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}v_{n,k}$$

Borel ölçüsünü gözönüne alalım. Burada her $v_{n,k}$, $\left[\frac{k+a_n}{n}\frac{k+b_n}{n}\right]$ aralığında karakteristik fonksiyondur. Açık görülebilir ki $\mathcal{C}_b([0, +\infty)) \subset L^1\left(\mu_{n,x}, [0, +\infty)\right)$ dir. Ayrıca $\forall g \in L^1\left(\mu_{n,x}, [0, +\infty)\right)$ için

$$V_n^*(g)(x) := \int_0^{+\infty} g dv_{n,x} \in \mathbb{R}$$

olsun. Şimdi

$$\Theta_m : E_m \to \mathcal{C}_b([0, +\infty))$$

tanımlı ve $\forall f \in E_m$ için

$$\Theta_m(f) = w_m f$$

şeklinde tanımlanan operatörü izometrik izomerfizm olduğunu gösterelim. $f \in E_m$ olsun. Bu halde

$$\|\Theta_m(f)\|_{\mathcal{C}_b([0,+\infty))} = \sup_{x\geq 0}|w_m f(x)| = \sup_{x\geq 0} w_m(x)|f(x)| = \|f\|_{E_m}$$

olup buradan Θ_m izometrik izomerfizmdir.

$$\Theta_m^{-1} : \mathcal{C}_b\left([0, +\infty)\right) \rightarrow E_m$$

tanımlı ve $\forall g \in \mathcal{C}_b\left([0, +\infty)\right)$ için

$$\Theta_m^{-1}(g) = w_m^{-1} g$$

olur. Gerçekten

$$g = \Theta_m(f) = w_m f \implies f = w_m^{-1} g$$

buradan $\forall g \in \mathcal{C}_b\left([0, +\infty)\right)$ için $\Theta_m^{-1}(g) = w_m^{-1} g$ dir. Son olarak $\forall n \geq 1$ için

$$L_n^* : \mathcal{C}_b\left([0, +\infty)\right) \rightarrow \mathcal{C}_b\left([0, +\infty)\right)$$

tanımlı ve $\forall g \in \mathcal{C}_b\left([0, +\infty)\right)$ için

$$L_n^*(g) := \Theta_m C_n\left(\Theta_m^{-1}(g)\right)$$

şeklinde tanımlanan lineer pozitif operatörünü gözönüne alalım. $\forall n \geq 1$, $x \geq 0$ ve $g \in \mathcal{C}_b\left([0, +\infty)\right)$ için

$$L_n^*(g)(x) = V_n^*(g)(x) := \int_0^{+\infty} g dv_{n,x} \tag{3.37}$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca $\forall x \geq 0$ ve $f \in E_m$ için

$$\begin{aligned} w_m(x)\left|C_n(f)(x) - f(x)\right| &= \left|\Theta_m\left(C_n(f)\right)(x) - \Theta_m(f)(x)\right| \\ &= \left|L_n^*\left(\Theta_m(f)\right)(x) - \Theta_m(f)(x)\right| \end{aligned}$$

olup bu takdirde (3.26)'deki dizinin yakınsaklık hızı yerine $\left(L_n^*\left(\Theta_m(f)\right)(x)\right)_{n\geq 1}$ $(x \geq 0)$ dizisinin yakınsaklık hızını inceleyebiliriz.

Teorem 3.8 *$\forall f \in E_m, n \geq 1$ ve $x \geq 0$ için*

$$\begin{aligned} w_m(x)\left|C_n(f)(x) - f(x)\right| &\leq \frac{d_m}{n} w_m(x) f(x) + \frac{K_m}{\sqrt{n}} w\left(w_m f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &+ \left[1 + \frac{d_m}{n} + \frac{x + k_m'}{2}\right] w_2\left(w_m f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \tag{3.38}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada K_m ve $K_m^{'}$, sadece m'e bağlı uygun sabit sayılar ve d_m (3.15)'deki gibidir.

İspat. (3.37) ve [17,teorem2.2.1]'den $\forall x \geq 0,\ f \in E_{m},\ n \geq 1$ ve $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \left|L_n^*\left(\Theta_m\left(f\right)\right)\left(x\right)-\Theta_m\left(f\right)\left(x\right)\right| &\leq \left|L_n^*\left(1\right)\left(x\right)-1\right|\left|\Theta_m\left(f\right)\left(x\right)\right| \\ &+\frac{1}{\delta}\left|L_n^*\left(\psi_x\right)\left(x\right)\right|w\left(\Theta_m\left(f\right),\delta\right) \\ &+\left[L_n^*\left(1\right)\left(x\right)+\frac{1}{2\delta^2}L_n^*\left(\psi_x^2\right)\left(x\right)\right]w_2\left(\Theta_m\left(f\right),\delta\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde ederiz,

$$\begin{aligned} L_n^*\left(1\right)\left(x\right) &= \Theta_m C_n\left(\Theta_m^{-1}\left(1\right)\right)=w_m\left(x\right)C_n\left(w_m^{-1}\right)\left(x\right) \\ &= w_m C_n(1+e_m)\left(x\right)=w_m\left(x\right)+w_m\left(x\right)C_n(e_m)\left(x\right) \end{aligned}$$

(3.14)'den

$$L_n^*\left(1\right)\left(x\right)\leq w_m\left(x\right)+w_m\left(x\right)e_m\left(x\right)+\frac{d_m}{n}=\frac{1+x^m}{1+x^m}+\frac{d_m}{n}=1+\frac{d_m}{n}$$

olup buradan

$$\left|L_n^*\left(1\right)\left(x\right)-1\right|\leq\frac{d_m}{n}. \tag{3.39}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} L_n^*\left(\psi_x\right)\left(x\right) &= \Theta_m C_n\left(\Theta_m^{-1}\left(\psi_x\right)\right)=w_m\left(x\right)C_n\left(w_m^{-1}\psi_x\right)\left(x\right) \\ &= w_m\left(x\right)C_n((1+e_m)\,\psi_x)\left(x\right) \\ &= w_m\left(x\right)\left(C_n(\psi_x)\left(x\right)+C_n(e_m\left(t-x\right))\left(x\right)\right) \\ &= w_m\left(x\right)\left(C_n\left(\psi_x\right)\left(x\right)+C_n\left(e_{m+1}\right)\left(x\right)-xC_n\left(e_m\right)\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.13) ve (3.20)'den

$$\begin{aligned} C_n\left(\Psi_x\right) &= \frac{a_n+b_n}{2n}, \\ C_n\left(e_{m+1}\right)\left(x\right) &= \frac{1}{(m+2)\,n^{m+1}}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+2}{k}\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^p a_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^j, \end{aligned}$$

ve

$$xC_n\left(e_m\right)\left(x\right)=\frac{1}{(m+1)\,n^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k}b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^{j+1}$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} L_n^*(\psi_x)(x) &= w_m(x)\left(\frac{a_n+b_n}{2n}+\frac{1}{(m+2)\,n^{m+1}}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+2}{k}\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^p a_n^{m+1-k-p}\right. \\ &\quad \times\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^j-\frac{1}{(m+1)\,n^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} \\ &\quad \left.\sum_{p=0}^{m-k}b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^{j+1}\right) \end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(m+2)\,n^{m+1}}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+2}{k}\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^p a_n^{m+1-k-p}\times\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^j \\ &= \frac{1}{n^{m+1}}\sum_{j=0}^{m+1}a_{m+1,j}n^j x^j+\frac{1}{(m+2)\,n^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+2}{k} \\ &\quad \times\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^p a_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^j \\ &= nx^{m+1}+\frac{1}{n^m}\sum_{j=0}^{m}a_{m+1,j}n^j x^j+\frac{1}{(m+2)\,n^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+2}{k} \\ &\quad \times\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^p a_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^j \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{(m+1)\,n^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k}b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^{j+1} \\ &= -\frac{1}{n^m}\sum_{j=0}^{m}a_{m,j}n^j x^{j+1}-\frac{1}{(m+1)\,n^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k} \\ &\quad \times\sum_{p=0}^{m-k}b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^{j+1}) \\ &= -nx^{m+1}-\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}a_{m,j}n^j x^{j+1}-\frac{1}{(m+1)\,n^{m-1}} \\ &\quad \times\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k}b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^j x^{j+1}) \end{aligned}$$

yazarsak

$$\begin{aligned}
L_n^*(\psi_x)(x) &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+x^m}\left(\frac{a_n+b_n}{2n}+\frac{1}{n^m}\sum_{j=0}^{m}a_{m+1,j}n^jx^j\right.\\
&+\frac{1}{(m+2)\,n^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+2}{k}\times\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^pa_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^jx^j\\
&-\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}a_{m,j}n^jx^{j+1}-\frac{1}{(m+1)\,n^{m-1}}\\
&\left.\times\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k}b_n^pa_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^jx^{j+1})\right)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan elde edebiliriz ki $\forall x\geq 0$ için

$$|L_n^*(\psi_x)(x)|\leq\frac{K_m}{n}. \tag{3.40}$$

eşitsizliğini sağlayan $K_m\geq 0$ sayısı vardır. Son olarak $\forall m\geq 1$, $n\geq 1$ ve $x\geq 0$ için

$$\begin{aligned}
\left|L_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)\right| &= \Theta_mC_n\left(\Theta_m^{-1}\left(\psi_x^2\right)(x)\right)=w_m(x)\,C_n(\psi_x^2(1+e_m))(x)\\
&= w_m(x)\,C_n(\psi_x^2)(x)+w_m(x)\,C_n(\psi_x^2e_m)(x)\\
&\leq \frac{(x+K_m')}{n}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

eşitsizliğini sağlayan $K_m'\geq 0$ sabit sayısı var olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$\psi_x^2e_m=e_{m+2}-2xe_{m+1}+x^2e_m$$

eşitliğinden, (3.6) ve (3.13)'den

$$\begin{aligned}
C_n\left(\psi_x^2 e_m\right)(x) &= \frac{1}{(m+3)\,n^{m+2}}\sum_{k=0}^{m+2}\binom{m+3}{k}\sum_{p=0}^{m+2-k} b_n^p a_n^{m+2-k-p}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^j \\
&\quad -\frac{2}{(m+2)\,n^{m+1}}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+2}{k}\sum_{p=0}^{m+1-k} b_n^p a_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^{j+1} \\
&\quad +\frac{1}{(m+1)\,n^{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k} b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^{j+2} \\
&= \frac{1}{n^{m+2}}\sum_{j=0}^{m+2} a_{m+2,j} n^j x^j + \frac{1}{(m+3)\,n^{m+2}}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+3}{k} \\
&\quad \times \sum_{p=0}^{m+2-k} b_n^p a_n^{m+2-k-p}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^j - \frac{2}{n^{m+1}} \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{m+1} a_{m+1,j} n^j x^{j+1} - \frac{2}{(m+2)\,n^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+2}{k} \\
&\quad \times \sum_{p=0}^{m+1-k} b_n^p a_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^{j+1} + \frac{1}{n^m}\sum_{j=0}^{m} a_{m,j} n^j x^{j+2} \\
&\quad +\frac{1}{(m+1)\,n^{m}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k} b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^{j+2}
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^{m+2}}\sum_{j=0}^{m+2} a_{m+2,j} n^j x^j &= \frac{1}{n^{m+2}} a_{m+2,m+2} n^{m+2} x^{m+2} + \frac{1}{n^{m+2}} a_{m+2,m+1} n^{m+1} x^{m+1} \\
&\quad +\frac{1}{n^{m+2}}\sum_{j=0}^{m} a_{m+2,j} n^j x^j \\
&= x^{m+2} + \frac{1}{n}\frac{(m+2)(m+1)}{2} x^{m+1} + F_{m_1}(x) \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(m+3)\,n^{m+2}}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+3}{k}\sum_{p=0}^{m+2-k} b_n^p a_n^{m+2-k-p}\times\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^j \\
&= \frac{1}{(m+3)\,n^{m+2}}\binom{m+3}{m+1}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p}\left(a_{m+1,m+1} n^{m+1} x^{m+1} + \sum_{j=0}^{m} a_{k,j} n^j x^j\right) \\
&\quad +\frac{1}{(m+3)\,n^{m+2}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+3}{k}\sum_{p=0}^{m+2-k} b_n^p a_n^{m+2-k-p}\times\sum_{j=0}^{k} a_{k,j} n^j x^j \\
&= \frac{1}{n}\frac{1}{(m+3)}\binom{m+3}{m+1}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p} x^{m+1} + F_{m_2}(x) \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

$$-\frac{2}{n^{m+1}}\sum_{j=0}^{m+1}a_{m+1,j}n^{j}x^{j+1} = \frac{-2}{n^{m+1}}a_{m+1,m+1}n^{m+1}x^{m+2}-\frac{-2}{n^{m+1}}a_{m+1,m}n^{m}x^{m+1}$$
$$-\frac{2}{n^{m+1}}\sum_{j=0}^{m-1}a_{m+1,j}n^{j}x^{j+1}$$
$$= -2x^{m+2}-\frac{1}{n}\left(m+1\right)mx^{m+1}+F_{m_3}\left(x\right) \tag{3.44}$$

$$-\frac{2}{\left(m+2\right)n^{m+1}}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+2}{k}\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^p a_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^{j}x^{j+1}$$
$$= \frac{-2}{\left(m+2\right)n^{m+1}}\binom{m+2}{m}\sum_{p=0}^{1}b_n^p a_n^{1-p}\left(a_{m,m}n^{m}x^{m+1}+\sum_{j=0}^{m-1}a_{k,j}n^{j}x^{j+1}\right)$$
$$-\frac{2}{\left(m+2\right)n^{m+1}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+2}{k}\sum_{p=0}^{m+1-k}b_n^p a_n^{m+1-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^{j}x^{j+1}$$
$$= \frac{1}{n}\frac{-2}{m+2}\binom{m+2}{m}\sum_{p=0}^{1}b_n^p a_n^{1-p}x^{m+1}+F_{m_4}\left(x\right) \tag{3.45}$$

$$\frac{1}{n^{m}}\sum_{j=0}^{m}a_{m,j}n^{j}x^{j+2} = \frac{1}{n^{m}}a_{m,m}n^{m}x^{m+2}+\frac{1}{n}a_{m,m-1}n^{m-1}x^{m+1}+\frac{1}{n^{m}}\sum_{j=0}^{m-2}a_{m,j}n^{j}x^{j+2}$$
$$= x^{m+2}+\frac{1}{n}\frac{m\left(m-1\right)}{2}x^{m+1}+F_{m_5}\left(x\right) \tag{3.46}$$

ve

$$\frac{1}{\left(m+1\right)n^{m}}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k}b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^{j}x^{j+2}$$
$$= \frac{1}{\left(m+1\right)n^{m}}\binom{m+1}{m-1}\sum_{p=0}^{1}b_n^p a_n^{1-p}\left(a_{m-1,m-1}n^{m-1}x^{m+1}+\sum_{j=0}^{m-2}a_{k,j}n^{j}x^{j+2}\right)$$
$$+\frac{1}{\left(m+1\right)n^{m}}\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m+1}{k}\sum_{p=0}^{m-k}b_n^p a_n^{m-k-p}\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}n^{j}x^{j+2}$$
$$= \frac{1}{n}\frac{1}{\left(m+1\right)}\binom{m+1}{m-1}\sum_{p=0}^{1}b_n^p a_n^{1-p}x^{m+1}+F_{m_6}\left(x\right) \tag{3.47}$$

burada F_{m_1}, F_{m_2}, F_{m_3}, F_{m_4}, F_{m_5} ve F_{m_6}, m dereceli polinomlardır. (3.42), (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) ve (3.47)'i toplarsak

$$\begin{aligned} C_n\left(\psi_x^2 e_m\right)(x) &= \frac{1}{n}\left((\frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{1}{m+3}\binom{m+3}{m+1}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p} - m(m+1) \right. \\ &\quad - \frac{2}{m+2}\binom{m+2}{m}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p} + \frac{(m-1)m}{2} \\ &\quad \left. + \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{m-1}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p})x^{m+1} + F_m(x) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $F_m(x)$, m dereceli bir polinomdur. Ayrıca

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} - m(m+1) + \frac{(m-1)m}{2} = 1;$$

$$\frac{1}{m+3}\binom{m+3}{m+1}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p} = \frac{1}{m+3}\frac{(m+3)!}{2(m+1)!}(a_n+b_n) = \frac{m+2}{2}(a_n+b_n);$$

$$\frac{2}{m+2}\binom{m+2}{m}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p} = (m+1)(a_n+b_n);$$

ve

$$\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{m-1}\sum_{p=0}^{1} b_n^p a_n^{1-p} = \frac{m}{2}(a_n+b_n)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} C_n\left(\psi_x^2 e_m\right)(x) &= \frac{1}{n}((1+\frac{m+2}{2} - (m+1) + \frac{m}{2})(a_n+b_n)x^{m+1} + F_m(x)) \\ &= \frac{1}{n}\left(x^{m+1} + F_m(x)\right) \end{aligned}$$

eşitliğini elde edebiliriz. Son olarak (2.20)'den

$$\begin{aligned} L_n^*\left(\psi_x^2\right)(x) &= w_m(x)\, C_n(\psi_x^2(1+e_m))(x) \\ &= w_m(x)\, C_n(\psi_x^2)(x) + w_m(x)\, C_n(\psi_x^2 e_m)(x) \\ &= \frac{1}{n}\left(w_m(x)\left(x + \frac{a_n^2 + a_n b_n + b_n^2}{3n}\right) + w_m(x)\left(x^{m+1} + F_m(x)\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{n}(x + K_m'), \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan K_m' sayısı vardır. (3.39), (3.40) ve (3.41) ifadelerini gözö nüne alırsak $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ olduğunda istenilen sonucu elde ederiz. ■

Yakınsaklık hızını için $\|.\|_m$ ağırlık normuna göre üst sınırlar verebilmek üzere $\forall\ f \in E_m^*$ için

$$\Phi_m : E_m^* \to \mathcal{C}\left([0,1]\right)$$

tanımlı ve

$$\Phi_m\left(f\right)\left(t\right) = \begin{cases} \left(w_m f\right)\left(-\log t\right) & 0 < t \leq 1, \\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(w_m f\right)\left(x\right) & t = 0 \end{cases} \tag{3.48}$$

şeklinde verilen operatörü izometrik izomorfizim olduğunu gösterelim. $f \in E_m^*$ olsun. O halde

$$\left\|\Phi_m\left(f\right)\right\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]}\left|\Phi_m\left(f\right)\left(t\right)\right| = \sup_{t\in[0,1]}\left|\left(w_m f\right)\left(-\log t\right)\right|$$

$u = -\log t$ seçersek $\left\{\begin{smallmatrix} t=0 & \text{iken} & u=+\infty \\ t=1 & \text{iken} & u=0 \end{smallmatrix}\right.$ olup

$$\left\|\Phi_m\left(f\right)\right\|_{\mathcal{C}([0,1])} = \sup_{u\geq 0}\left|\left(w_m f\right)\left(u\right)\ \right| = \left\|f\right\|_m$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla Φ_m bir izometrik izomorfizmdir. Bu durumda

$$\Phi^{-1} : \mathcal{C}\left([0,1]\right) \to E_m^*$$

tanımlı ve $\forall g \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$ ve $t \geq 0$ için

$$\Phi_m^{-1}\left(g\right)\left(t\right) := w_m^{-1}(t)g\left(e^{-t}\right)$$

olur. Gerçekten $g \in \mathcal{C}\left([0,1]\right)$ olduğunda

$$\left(\Phi_m \circ \Phi_m^{-1}\right)\left(g\right)\left(t\right) = \Phi_m\left(w_m^{-1}(t)g\left(e^{-t}\right)\right)\left(t\right) = w_m(t)w_m^{-1}(t)g\left(e^{-(-\log t)}\ \right) = g\left(t\right)$$

dir. Şimdi $\forall\ n \geq 1$ için $W_n^* : \mathcal{C}\ \left([0,1]\right) \to \mathcal{C}\ \left([0,1]\right)$ ve $\forall g \in \mathcal{C}\ \left([0,1]\right)$ için

$$W_n^*\left(g\right) := \Phi_m\left(C_n\left(\Phi_m^{-1}\left(g\right)\right)\right). \tag{3.49}$$

eşitsizliği ile tanımlanan pozitif lineer operatörünü gözönüne alalım.

Teorem 3.9 *$\forall\ n \geq 1$ ve $f \in E_m^*$ için*

$$\begin{aligned} \left\|C_n\left(f\right) - f\right\|_m \ \leq\ & \frac{H_{1,m}}{n}\left\|\Phi_m\left(f\right)\right\|_\infty + H_{2,m}w\left(\Phi_m\left(f\right), \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ & + \left(1 + \frac{d_m + H_{3.m}\sqrt{n}}{n}\right)w_2\left(\Phi_m\left(f\right), \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

öyleki d_m (3.15)'de belirlenen sayı ve $H_{1,m}$, $H_{2,m}$ ve $H_{3,m}$, m sayısına bağlı uygun pozitif sayılardır.

İspat. (3.33)'i kullanırsak $\|W_n^*(\Phi_m(f)) - \Phi_m(f)\|_\infty$'i hesaplamakla teoremi ispatlayabiliriz. [17,teorem 2.2.1]'den $\forall\ n \geq 1,\ f \in E_m^*,\ 0 \leq x \leq 1$ ve $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned}
|W_n^*(\Phi_m(f))(x) - \Phi_m(f)| &\leq |W_n^*(1)(x) - 1|\,|\Phi_m(f)| + \frac{1}{\delta}\,|W_n^*(\psi_x)(x)| \\
&\quad \times w(\Phi_m(f), \delta) \\
&\quad + \left(W_n^*(1)(x) + \frac{1}{2\delta^2} W_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)\right) w_2(\Phi_m(f), \delta).
\end{aligned}$$

elde ederiz. (3.49), (3.48) ve Önerme2.1 den

$$W_n^*(1)(x) = \begin{cases} (w_m C_n(1 + e_m))(-\log x) & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$W_n^*(\psi_x)(x) = \begin{cases} (w_m C_n((1 + e_m)(f_1 - x1)))(-\log x) & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ifadelerini elde ederiz. Gerçekten

$$\begin{aligned}
W_n^*(1) &= \Phi_m\left(C_n\left(\Phi_m^{-1}(1)\right)\right) = \Phi_m\left(C_n\left(w_m^{-1}(t)\right)\right) \\
&= w_m C_n\left(w_m^{-1}(t)\right)(-\log x)
\end{aligned}$$

olup $w_m^{-1}(t) = 1 + t^m = 1 + e^m$ olduğundan

$$W_n^*(1) = (w_m C_n(1 + e_m))(-\log x)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
W_n^*(\psi_x) &= \Phi_m\left(C_n\left(\Phi_m^{-1}(\psi_x)\right)\right) = \Phi_m\left(C_n\left(\Phi_m^{-1}(u - x)(t)\right)\right) \\
&= \Phi_m\left(C_n\left(w_m^{-1}(t)\left(e^{-t} - x\right)\right)\right) \\
&= (w_m C_n((1 + e_m)(f_1 - x1)))(-\log x)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Aynı şekilde

$$W_n^*\left(\psi_x^2\right)(x) = \begin{cases} (w_m C_n((1 + e_m)(f_2 - 2xf_1 + x^2 1)))(-\log x) & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ifadesini gösterebiliriz. Burada $f_\lambda = e^{-\lambda t}, \lambda = 1, 2$ dir. Şimdi (3.13)'den ve $0 < x \leq 1$ seçildiğinde

$$C_n(1 + e_m) = 1 + C_n(e_m) = 1 + e^m + \frac{1}{n} F_{m-1}$$

olduğundan

$$\left|w_m(-\log x)\,C_n(1+e_m)(-\log x)-1\right|=\frac{1}{n}w_m(-\log x)\,F_{m-1}(-\log x)$$

burada F_{m-1}, $m-1$ dereceli bir pozitif polinomdur. Dolayısıyla $H_{1,m}$ sabitsayısı vardır öyle ki

$$\left\|W_n^*(1)-1\right\|_\infty\leq\frac{H_{1,m}}{n}$$

dir. Ayrıca $\forall\ 0<x\leq 1$ için Cauchy-Shwartz eşitsizliğini kullanarak (3.36)'den

$$\begin{aligned}
\left|W_n^*(\psi_x)(x)\right| &\leq w_m(-\log x)\,C_n\left(\left|(1+e_m)(f_1-x)\right|\right)(-\log x)\\
&\leq w_m(-\log x)\sqrt{C_n\left((1+e_m)^2\right)(-\log x)}\sqrt{C_n\left((f_1-x)^2\right)(-\log x)}\\
&= w_m(-\log x)\sqrt{C_n\left((1+e_m)^2\right)(-\log x)}\sqrt{C_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)}.
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. Teorem 4.5'in ispatında olduğu gibi (3.13)'den ve

$$L_m:=\sup_{0<x\leq 1}w_m(-\log x)\sqrt{C_n\left((1+e_m)^2\right)(-\log x)}\in\mathbb{R}$$

olduğundan

$$\left|W_n^*(\psi_x)(x)\right|\leq\frac{H_{2,m}}{\sqrt{n}}$$

eşitsizliği sağlayan $H_{2,m}>0$ sabit sayısı vardır. Son olarak $\forall\ 0<x\leq 1$ için

$$\begin{aligned}
W_n^*\left(\psi_x^2\right)(x) &= w_m(-\log x)\,C_n\left((1+e_m)\left(f_2-2xf_1+x^2\right)\right)(-\log x)\\
&\leq w_m(-\log x)\sqrt{C_n\left((1+e_m)^2\right)(-\log x)}\\
&\quad\times\sqrt{C_n\left(\left(f_2-2xf_1+x^2\right)^2\right)(-\log x)}\\
&\leq L_m\sqrt{C_n^*\left(\psi_x^4\right)(x)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Lemma4.4 den

$$\begin{aligned}
C_n^*\left(\psi_x^4\right)(x) &= C_n(f_4)(-\log x)-x^4-4x\left(C_n(f_3)(-\log x)-x^3\right)\\
&\quad+6x^2\left(C_n(f_2)(-\log x)-x^2\right)-4x^3\left(C_n(f_3)(-\log x)-x\right)\\
&\leq \frac{K_3}{n}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan $K_3>0$ sayısı vardır. O halde sadece m'e bağlı ve

$$W_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)\leq\frac{H_{3,m}}{\sqrt{n}}$$

eşitsizliğini sağlayan $H_{3,m} > 0$ sayısı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \left| W_n^* \left(\Phi_m (f) \right) (x) - \Phi_m (f) (x) \right| &\leq \frac{H_{1,m}}{n} \left| \Phi_m (f) (x) \right| + \frac{1}{\delta} \frac{H_{2,m}}{\sqrt{n}} w \left(\Phi_m (f), \delta \right) \\ &+ \left(1 + \frac{d_m}{n} + \frac{1}{\delta^2} \frac{H_{3,m}}{\sqrt{n}} \right) w_2 \left(\Phi_m (f), \delta \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ seçersek istenilen sonucu elde etmiş oluruz. ■

3.4.3. L^p uzayında yakınsaklık hızı

Teorem3.4 deki yakınsaklık hızını $L^p([0,1])$ uzayında $w_2(f,\delta)_p$ yardımıyla benzerlik yöntemini kullanarak inceleyeceğiz. Bundan sonra $\left(\frac{1}{b_n - a_n} \right)_{n \geq 1}$ dizisinin sınırlı olduğunu kabul edeceyiz. Öncelikle

$$\Phi_p : L^p([0,+\infty)) \to L^p([0,1])$$

tanımlı ve $\forall f \in L^p([0,+\infty))$ için

$$\Phi_p (f)(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}} f(-\log t) & 0 < t \leq 1 \\ S_1 (f)(0) & t = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilen operatör izometrik izomorfizim olduğunu gösterelim. Burada S_1 $(n = 1)$ Szasz-Mirakjan operatörüdür. $f \in L^p([0,+\infty))$ olsun. Bu halde

$$\left\| \Phi_p (f) \right\|_{L^p([0,1])}^p = \int_0^1 \left| \Phi_p (f)(t) \right|^p dt = \int_0^1 \left| t^{-\frac{1}{p}} f(-\log t) \right|^p dt$$

$u = -\log t$ seçersek $\left\{ \begin{smallmatrix} t=0 & \text{iken} & u=+\infty \\ t=1 & \text{iken} & u=0 \end{smallmatrix} \right.$, $t = e^{-u}$ ve $dt = -e^{-u} du$ olup

$$\begin{aligned} \left\| \Phi_p (f) \right\|_{L^p([0,1])}^p &= \int_\infty^0 \left| e^{\frac{u}{p}} f(u) \right|^p \left(-e^{-u} \right) du = \int_0^\infty \left| f(u) \right|^p e^u e^{-u} du \\ &= \int_0^\infty \left| f(u) \right|^p du = \| f \|_{L^p([0,\infty))}^p \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla Φ_p bir izometrik izomorfizmdir. Diğer taraftan

$$\Phi_p^{-1} L^p([0,1]) \to L^p([0,+\infty))$$

tanımlı ve $\forall g \in L^p([0,1])$ ve $t \geq 0$ için

$$\Phi_p^{-1}(g)(t) = e^{-\frac{t}{p}} g\left(e^{-t} \right)$$

eşitliği ile verilir. Gerçekten $g \in L^p([0,+\infty))$ olduğunda

$$\begin{aligned}\left(\Phi_p^{-1} \circ \Phi_p\right)(g)(t) &= \Phi_p^{-1}\left(t^{-\frac{1}{p}} g(-\log t)\right) = e^{-\frac{t}{p}}\left(t^{-\frac{1}{p}} g(-\log t)\right)\left(e^{-t}\right) \\ &= e^{-\frac{t}{p}} e^{\frac{t}{p}} g\left(-\log e^{-t}\right) = g(t)\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\forall n \geq 1$ için

$$P_n^* : L^p([0,1]) \to L^p([0,1])$$

tanımlı ve $\forall g \in L^p([0,1])$ için

$$P_n^*(g) = \Phi_p\left(C_n\left(\Phi_p^{-1}(g)\right)\right) \tag{3.50}$$

lineer pozitif operatörünü tanımlayalım.

Lemma 3.3 *$\forall\ n \geq 1$, $\lambda > 0$ ve $x \in [0,1]$ için*

$$0 < x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)-\lambda} - 1 \leq \frac{\lambda^2}{2n} x^{-\frac{\lambda^2}{2}} \log \frac{1}{x} \tag{3.51}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca

$$\lambda^2 p < 2 \tag{3.52}$$

şartı sağlandığında $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$g_\lambda = x^{-\frac{\lambda^2}{2}} \log \frac{1}{x}$$

fonksiyonu $L^p([0,1])$ uzayına aittir.

İspat. $1 - e^{-x} \geq x - \frac{x^2}{2}$ ve $e^x - 1 \leq x e^x$ $(x \geq 0)$ eşitsizliklerini kullanırsak

$$1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \geq \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{2n^2}$$

$\Longrightarrow$

$$n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) - \lambda \geq -\frac{\lambda^2}{2n}$$

olup $x \in [0,1]$ olduğundan

$$x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)-\lambda} \leq x^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$$

olur. Buradan

$$0 \leq x^{n\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)-\lambda} - 1 \leq e^{\frac{\lambda^2}{2n}\log\frac{1}{x}} - 1 \leq \frac{\lambda^2}{2n} x^{-\frac{\lambda^2}{2n}} \log \frac{1}{x} \leq \frac{\lambda^2}{2n} x^{-\frac{\lambda^2}{2}} \log \frac{1}{x}.$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.4 *$\forall p \in [1,+\infty)$, $x \in [0,1]$, $k \geq 1$ ve $n \geq \frac{\left(\frac{1}{p}+k\right)^2}{k}$ için*

$$x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)}\right)-\frac{1}{p}} - x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+k} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)^2 \log\frac{1}{x}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Öncelikle dikkat edilmeli ki $\forall k, n \geq 1$ ve $p \in [1,+\infty)$ için $1 - e^{-x} \leq x$ eşitsizliğini kullanırsak

$$1 - e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)$$

ve

$$1 - e^{-\frac{1}{np}} \leq \frac{1}{np}$$

olup

$$n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)}\right) - \frac{1}{p} \leq n\left(1 - e^{-\frac{1}{np}}\right) - \frac{1}{p} + k$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $n \geq \frac{\left(\frac{1}{p}+k\right)^2}{k}$ olmak üzere

$$n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)}\right) - \frac{1}{p} \geq \frac{k}{n} - \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{p}+k\right)^2 \geq 0$$

$$n\left(1 - e^{-\frac{1}{np}}\right) - \frac{1}{p} + k \geq \frac{1}{np^2} + k \geq 0.$$

ve eşitsizlikleri doğrudur. Buradan $\forall\ x \in [0,1]$, $k \geq 1$ ve $n \geq \frac{\left(\frac{1}{p}+k\right)^2}{k}$ için $1 - e^{-x} \geq x - \frac{x^2}{2}$ ve $e^x - 1 \leq x$ $(x \geq 0)$ eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
& x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)}\right)-\frac{1}{p}} - x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+k} \\
= \ & e^{-n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)}-\frac{1}{p}\right)\log\frac{1}{x}} - e^{-\left(n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+k\right)\log\frac{1}{x}} \\
\leq \ & \log\frac{1}{x}\left(n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right) - \frac{1}{p} + k - n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)}\right) + \frac{1}{p}\right) \\
\leq \ & \log\frac{1}{x}\left(\frac{1}{p} + k - n\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right) - \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{p}+k\right)^2\right)\right) \\
= \ & \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+k\right)^2 \log\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edip böylece ispatı tamamlamış oluruz. ∎

Teorem 3.10 *$p \in [0. +\infty)$ olsun. $\forall f \in L^p([0. +\infty))$ ve $n \geq \frac{\left(\frac{1}{p}+2\right)^2}{2}$ için*

$$\|C_n(f) - f\|_p \leq K_p \left(n^{-\frac{2p}{2p+1}} \|\Phi_p(f)\|_p + w_2\left(\Phi_p(f), n^{-\frac{2p}{2p+1}}\right)_p \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada K_p, sadece p ye bağlı bir sabit sayıdır.

İspat. $(P_n^*)_{n\geq 1}$ dizisini gözönüne alalım.

$$\mu_{n,p} := \left(\max\left\{ \|P_n^*(1) - 1\|_p, \|\alpha_n\|_p, \|\beta_n\|_p^{\frac{2p}{2p+1}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ifadesinde $\alpha_n(x) := P_n^*(\psi_x)(x)$ ve $\beta_n(x) := P_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ dir. [18, teorem1]'de Swetits ve Wood'in sonucu gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{n,p} = 0$$

olduğnu gösterirsek $\forall f \in L^p([0. +\infty))$ için

$$\|C_n(f) - f\|_p = \|P_n^*(\Phi_p(f)) - \Phi_p(f)\|_p \leq K_p \left(\mu_{n,p}^2 \|\Phi_p(f)\|_p + w_2\left(\Phi_p(f), \mu_{n,p}\right)_p \right)$$

eşitsizliğini göstermiş oluruz. P_n^* operatörü ile 1, ψ_x ve ψ_x^2 noktaların görüntüleri ile hesaplayalım. (3.50), (3.7) ve (3.8) ifadelerini kullanırsak

$$P_n^*(1)(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}} C_n\left(f_{\frac{1}{p}}\right)(-\log t) & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

$$P_n^*(\psi_x)(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}} C_n\left(f_{\frac{1}{p}+1} - x f_{\frac{1}{p}}\right)(-\log t) & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

ifadelerini elde ederiz. Gerçekten

$$\begin{aligned} P_n^*(1)(t) &= \Phi_p\left(C_n\left(\Phi_p^{-1}(1)\right)\right) = \Phi_p\left(C_n\left(e^{-\frac{t}{p}}\right)\right) \\ &= t^{-\frac{1}{p}} C_n\left(f_{\frac{1}{p}}\right)(-\log t) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} P_n^*(\psi_x)(t) &= \Phi_p\left(C_n\left(\Phi_p^{-1}(\psi_x)\right)\right) = \Phi_p\left(C_n\left(\Phi_p^{-1}(u-x)(t)\right)\right) \\ &= \Phi_p\left(C_n\left(e^{-\frac{t}{p}}\left(e^{-t} - x\right)(t)\right)\right) \\ &= t^{-\frac{1}{p}} C_n\left(e^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)t} - x e^{-\frac{t}{p}}\right)(-\log t) \\ &= t^{-\frac{1}{p}} C_n\left(f_{\frac{1}{p}+1} - x f_{\frac{1}{p}}\right)(-\log t) \end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde

$$P_n^*\left(\psi_x^2\right)(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}} C_n \left(f_{\frac{1}{p}+2} - 2x f_{\frac{1}{p}+1} + x^2 f_{\frac{1}{p}} \right) (-\log t) & 0 \le t \le 1 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

ifadesini elde edebiliriz. Burada (3.9)'daki $f_\lambda = e^{-\lambda t}$, $\lambda = \frac{1}{p}$, $\frac{1}{p}+1$ ve $\frac{1}{p}+2$ dir. $\lambda = \frac{1}{p}$ olduğunda (3.51) ve (3.24)'den

$$\begin{aligned} \left|P_n^*(1) - 1\right| &= \left| \frac{np}{b_n - a_n} \left(e^{-\frac{a_n}{np}} - e^{-\frac{b_n}{np}} \right) x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}} - 1 \right| \\ &\le \frac{np}{b_n - a_n} \left(e^{-\frac{a_n}{np}} - e^{-\frac{b_n}{np}} \right) \left(x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}} - 1 \right) \\ &\quad +1 - \frac{np}{b_n - a_n} \left(e^{-\frac{a_n}{np}} - e^{-\frac{b_n}{np}} \right) \\ &\le \frac{1}{2np^2} x^{-\frac{1}{2p^2}} \log \frac{1}{x} + \frac{1}{np} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\left|P_n^*(1) - 1\right|^p \le 2^{p-1} \left(\left(\frac{1}{2np^2} \right)^p x^{-\frac{1}{2p}} \log^p \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{np} \right)^p \right)$$

olup $\lambda = \frac{1}{p}$ oldudduğndan (3.52) gereğince

$$\left\|P_n^*(1) - 1\right\|_p \le \frac{A_p}{n}$$

eşitsizliğni sağlayan A_p pozitifsabit sayısı vardır. Şimdi $0 < x \le 1$ ve $n \ge p^{-2}$ olsun. $k = 1$ olduğunda Lemma 3.4 , (3.35) ve (3.3)'den

$$\begin{aligned} \left|\alpha_n(x)\right| &= \left| \frac{n}{\left(\frac{1}{p}+1\right)(b_n - a_n)} \left(e^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)\frac{a_n}{n}} - e^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)\frac{b_n}{n}} \right) x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right)-\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{np}{b_n - a_n} \left(e^{-\frac{a_n}{np}} - e^{-\frac{b_n}{np}} \right) x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+1} \right| \\ &\le \left(1 - \frac{n}{\left(\frac{1}{p}+1\right)(b_n - a_n)} \left(e^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)\frac{a_n}{n}} - e^{-\left(\frac{1}{p}+1\right)\frac{b_n}{n}} \right) \right) x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right)-\frac{1}{p}} \\ &\quad + x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right)-\frac{1}{p}} - x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+1} \\ &\quad + \left(1 - \frac{np}{b_n - a_n} \left(e^{-\frac{a_n}{np}} - e^{-\frac{b_n}{np}} \right) \right) x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+1} \\ &\le \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{p} + 1 \right)^2 \log \frac{1}{x} + \frac{1}{np}, \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$|\alpha_n(x)|^p \le 2^{2(p-1)}\frac{1}{n^p}\left(\left(\frac{1}{p}+1\right)^p+\left(\frac{1}{p}+1\right)^{2p}\log^p\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{p}\right)^p\right)$$

olup dolayısıyla

$$\|\alpha_n(x)\|_p \le \frac{B_p}{n}$$

eşitsizliğni sağlayan B_p pozitif sabit sayısı vardır. Tekrar $k=2$ olduğunda Lemma3.4 ve (3.24)'den $\forall\ x\in[0,1]$ ve $n\ge\frac{\left(\frac{1}{p}+2\right)^2}{2}$ için

$$\begin{aligned}
\left|P_n^*\left(\psi_x^2\right)(x)\right| &= x^{-\frac{1}{p}}\Big|C_n\left(f_{\frac{1}{p}+2}\right)(-\log x)-x^2C_n\left(f_{\frac{1}{p}}\right)(-\log x)\\
&\quad -2x\left(C_n\left(f_{\frac{1}{p}+1}\right)(-\log x)-xC_n\left(f_{\frac{1}{p}}\right)(-\log x)\right)\Big|\\
&\le \Bigg|\frac{n}{\left(\frac{1}{p}+2\right)(b_n-a_n)}\left(e^{-\left(\frac{1}{p}+2\right)\frac{a_n}{n}}-e^{-\left(\frac{1}{p}+2\right)\frac{b_n}{n}}\right)x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+2\right)}\right)-\frac{1}{p}}\\
&\quad -\frac{np}{b_n-a_n}\left(e^{-\frac{a_n}{np}}-e^{-\frac{b_n}{np}}\right)x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+2}\Bigg|+2\left|P_n^*(\psi_x)(x)\right|\\
&\le \left(1-\frac{n}{\left(\frac{1}{p}+2\right)(b_n-a_n)}\left(e^{-\left(\frac{1}{p}+2\right)\frac{a_n}{n}}-e^{-\left(\frac{1}{p}+2\right)\frac{b_n}{n}}\right)\right)\\
&\quad x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+2\right)}\right)-\frac{1}{p}}+x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+2\right)}\right)-\frac{1}{p}}-x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+2}\\
&\quad +\left(1-\frac{np}{b_n-a_n}\left(e^{-\frac{a_n}{np}}-e^{-\frac{b_n}{np}}\right)\right)x^{n\left(1-e^{-\frac{1}{np}}\right)-\frac{1}{p}+2}+2\left|P_n^*(\psi_x)(x)\right|\\
&\le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+2\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+2\right)^2\log\frac{1}{x}+\frac{1}{np}+2\left|P_n^*(\psi_x)(x)\right|,
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\|\beta_n\|_p^{\frac{2p}{2p+1}} \le C_pn^{-\frac{2p}{2p+1}}$$

eşitsizliğiini sağlayan C_p pozitif sayısı vardır. Son eşitsizlikleri toplarsak $\forall n\ge\frac{\left(\frac{1}{p}+2\right)^2}{2}$

$$\mu_{n,p}\le M_pn^{-\frac{p}{2p+1}},$$

olcak şekilde sadece p'e bağlı M_p sayısını elde ederiz. $n\to+\infty$ iken $\mu_{n,p}\to 0$ olduğundan ispat tamamlanır. ■

4. SINIRSIZ ARALIKLARDA YAKINSAKLIK HIZI

Bu bölümde sonsuzda limite sahip olan fonksiyonların uzayında tanımlanan lineer pozitif operatörler dizilerini inceleyeceğiz. Ve daha sonra bu dizilerin yakınsaklık hızı elde edebilmeyi sağlayan bazı üst sınırlar vereceğiz. Aşagıdaki teorem [7]'de ispatlanmıştır.

Teorem 4.1 $A_n : C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ *pozitif lineer operatörler dizisi,* $[0,\infty)$ *uzayında mutlak olarak*

$$\lim_{n\to\infty} A_n\left(e^{-kt}, x\right) = e^{-kx}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

şartını sağlarsa $\forall f \in C^*[0,\infty)$ *için* $[0,\infty)$ *uzayında mutlak olarak*

$$\lim_{n\to\infty} A_n f(x) = f(x),$$

dir.

Yukarıdaki teorem [3]'de daha genel bir şekilde ispatlanmıştı. Ve aynı kitapta Szasz-Mirakjan, Baskakov ve Bernstien-Chlodovsky operatörleri için bu teoremin uygulaması vardır. Burada yukarıdaki teoremdeki şartı sağlayan operatörler dizisi için üst sınırlar vereceğiz. ve dah sonra bazı yukarıdaki geçen operatörler üzerine uygulayacağız. Bunun için öncelikle aşağıdaki süreklilik modülünü kullanacağız

$$w^*(f,\delta) = \sup_{\substack{x,t\ge 0\\ |e^{-x}-e^{-t}|\le\delta}} |f(x) - f(t)|,$$

burada $\delta \ge 0$ bir sayı ve $f \in C^*[0,\infty)$ dir. Bu süreklilik modülü alışılmış süreklilik modülü ifadesiyle verilebilir. Gerçekten f^*, $[0,1]$ aralığında tanımlı ve

$$f^*(x) = \begin{cases} f(-\ln x), & x \in (0,1] \\ \lim\limits_{t\to\infty} f(t), & x = 0. \end{cases}$$

şeklinde sürekli fonksiyonnu gözönüne alalım. Buradan

$$w(f^*,\delta) = \sup_{\substack{x,t\in[0,1]\\ |x-t|\le\delta}} |f^*(x) - f^*(t)| = \sup_{\substack{x,t\in[0,1]\\ |x-t|\le\delta}} |f(-\ln x) - f(-\ln t)|$$

$u=-\ln x$ ve $v=-\ln t$ seçersek $x=e^{-u}$ ve $t=e^{-v}$ olup

$$\begin{aligned} w\left(f^{*},\delta\right) &= \sup_{\substack{x,t\in[0,1]\\ |x-t|\leq\delta}} |f(x)-f(t)| = \sup_{\substack{u,v\geq 0\\ |e^{-u}-e^{-v}|\leq\delta}} |f(u)-f(v)| \\ &= w^{*}(f,\delta) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Yani

$$w^{*}(f,\delta)=w\left(f^{*},\delta\right)$$

dir.

Uyarı 4.1 *$\forall t,x\geq 0$ için $|e^{-t}-e^{-x}|\leq|t-x|$ eşitsizliğinden*

$$\sup_{\substack{x,t\in[0,1]\\ |x-t|\leq\delta}} |f^{*}(x)-f^{*}(t)| \leq \sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |e^{-x}-e^{-t}|\leq\delta}} |f(x)-f(t)|$$

olup

$$w(f,\delta)\leq w^{*}(f,\delta),$$

eşitsizliği her $\delta\geq 0$ için sağlanır. Ortalama değer teoremini $[0,M]$ aralığında uygularsak

$$\left|e^{-t}-e^{-x}\right|=e^{-\theta}|t-x|\geq e^{-M}|t-x|$$

$\forall t,x\in[0,M]$ için sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} w^{*}(f,\delta) &= \sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |e^{-x}-e^{-t}|\leq\delta}} |f(x)-f(t)| \leq \sup_{\substack{x,t\geq 0\\ e^{-M}|t-x|\leq\delta}} |f(x)-f(t)| \\ &= \sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |t-x|\leq\delta e^{M}}} |f(x)-f(t)| = w\left(f,e^{M}\delta\right)\leq\left(1+e^{M}\right).w(f,\delta) \end{aligned}$$

olup

$$w^{*}(f,\delta)\leq\left(1+e^{M}\right).w(f,\delta)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4.1. Ana Sonuç

Teorem 4.2 $A_n : C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ *pozitif lineer operatörler dizisi,*

$$\begin{aligned} \|A_n 1 - 1\|_\infty &= a_n, \\ \left\|A_n\left(e^{-t},x\right) - e^{-x}\right\|_\infty &= b_n, \\ \left\|A_n\left(e^{-2t},x\right) - e^{-2x}\right\|_\infty &= c_n, \end{aligned}$$

şartnını sağlarsa $\forall f \in C^*[0,\infty)$ *için*

$$\|A_n f - f\|_\infty \le \|f\|_\infty a_n + (2+a_n).w^*\left(f, \sqrt{a_n + 2b_n + c_n}\right),$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $a_{n,}$ b_n *ve* c_n *sonsuzda sıfra yaklaşan dizilerdir.*

İspat.

$$|F(u) - F(v)| \le \left(1 + \frac{(u-v)^2}{\delta^2}\right) w(F,\delta),$$

alışılmış süreklili modülünün özelliğini $F = f^*$, $u = e^{-t}$ ve $v = e^{-x}$ için ve $f^*\left(e^{-t}\right)$ $= f(t)$, $w^*(f,\delta) = w(f^*,\delta)$ eşitliklerini kullanırsak

$$\left|f^*\left(e^{-t}\right) - f^*\left(e^{-x}\right)\right| \le \left(1 + \frac{\left(e^{-t} - e^{-x}\right)^2}{\delta^2}\right) w(f^*,\delta)$$

olup buradan

$$|f(t) - f(x)| \le \left(1 + \frac{\left(e^{-t} - e^{-x}\right)^2}{\delta^2}\right) w^*(f,\delta)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} A_n\left(\left(e^{-t} - e^{-x}\right)^2, x\right) &= A_n\left(e^{-2t} - 2e^{-t}.e^{-x} + e^{-2x}, x\right) \\ &= A_n\left(e^{-2t},x\right) - 2e^{-x}A_n\left(e^{-t},x\right) + e^{-2x}A_n(1,x) \\ &\quad +2e^{-2x} - 2e^{-2x} \\ &= \left[A_n\left(e^{-2t},x\right) - e^{-2x}\right] - 2e^{-x}\left[A_n\left(e^{-t},x\right) - e^{-x}\right] \\ &\quad +e^{-2x}\left[A_n(1,x) - 1\right] \\ &\le a_n + 2b_n + c_n \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} A_n(|f(t) - f(x)|, x) &\le \left(A_n(1,x) + \frac{A_n\left(\left(e^{-t} - e^{-x}\right)^2, x\right)}{\delta^2}\right) w^*(f,\delta) \\ &\le \left(1 + a_n + \frac{a_n + 2b_n + c_n}{\delta^2}\right) w^*(f,\delta) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi $\delta = \sqrt{a_n + 2b_n + c_n}$ seçip

$$\begin{aligned} |A_n(f(t), x) - f(x)| &= |A_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)| \\ &\leq |A_n(f(t) - f(x), x)| + |f(x)| . |A_n(1, x) - 1| \\ &\leq |f(x)| . |A_n(1, x) - 1| + A_n(|f(t) - f(x)|, x) \end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanırsak teoremdeki eşitsizliğielde ederiz. ■

Uyarı 4.2 *L bir pozitif lineer operatör olmak üzere $\acute{L} = \frac{1}{L1} Lf$ şeklinde tanımlanan operatör tüm sabit fonksiyonları koruyan L 'in bir versiyonudur. Bu sonucu gözönüne alarak yukarıdaki teoremde $\acute{L}(1) = 1$ olduğundan $a_n = 0$ olup*

$$\|A_n f - f\|_\infty \leq 2.w^*\left(f, \sqrt{2b_n + c_n}\right),$$

eşitsizliğni elde ederiz.

Uyarı 4.3 *$[0, M]$ kompakt aralığında çalışıp [Uyarı4.2]'i ve*

$$w^*(f, \delta) \leq \left(1 + e^M\right).w(f, \delta)$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\|A_n f - f\|_\infty \leq C.w\left(f, \sqrt{2b_n + c_n}\right)$$

üst sınırını alışılmış süreklilik modülü yardımı ile elde edebiliriz.

Burada $\{1, e^{-x}, e^{-2x}\}$ Korovkin altkümesini kullandık. Fakat [3]'te önerildiği gibi her hangi bir Korovkin altkümesini kullanabiliriz. Örneğin $\left\{1, \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{(1+x)^2}\right\}$ Korovkin altkümesini kullanabiliriz. Bu durumda $\forall\delta \geq 0$ ve $f \in C^*[0, \infty)$ için

$$w^{\#}(f, \delta) = \sup_{\substack{x, t \geq 0 \\ \left|\frac{x}{1+x} - \frac{t}{1+t}\right| \leq \delta}} |f(x) - f(t)|,$$

süreklilik modülünü tanımlayabiliriz. Bu süreklilik modülü alışılmış süreklilik mo dülü yardımı ile aşağıdaki şekilde verilebilir

$$w^{\#}(f, \delta) = w\left(f^{\#}, \delta\right).$$

burada $f^{\#}$, $[0,1]$ aralığında tanımlı ve

$$f^{\#}(x)=\begin{cases} f\left(\frac{x}{1-x}\right), & x\in[0,1) \\ \lim\limits_{t\to\infty} f(t), & x=1. \end{cases}$$

şeklinde verilir. $\forall x,t\geq 0$ için $\frac{x}{1+x}\leq x$ ve $\frac{t}{1+t}\leq t$ olduğundan

$$\left|\frac{x}{1+x}-\frac{t}{1+t}\right|\leq |x-t|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\sup_{\substack{x,t\geq 0 \\ |t-x|\leq\delta}} |f(x)-f(t)| \leq \sup_{\substack{x,t\geq 0 \\ \left|\frac{x}{1+x}-\frac{t}{1+t}\right|\leq\delta}} |f(x)-f(t)|$$

olup

$$w(f,\delta)\leq w^{\#}(f,\delta)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan $\forall x,t\in[0,M]$ için

$$\left|\frac{x}{1+x}-\frac{t}{1+t}\right|=\left|\frac{x-t}{(1+x)(1+t)}\right|\geq\frac{|x-t|}{(1+M)^2}$$

olduğundan $\forall M\geq 0$ tamsayısı için

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x,t\geq 0 \\ \left|\frac{x}{1+x}-\frac{t}{1+t}\right|\leq\delta}} |f(x)-f(t)| &\leq \sup_{\substack{x,t\geq 0 \\ \frac{|x-t|}{(1+M)^2}\leq\delta}} |f(x)-f(t)| \\ &= \sup_{\substack{x,t\geq 0 \\ |x-t|\leq(1+M)^2\delta}} |f(x)-f(t)| \\ &= w\left(f,(1+M)^2\delta\right)\leq(1+M)^2.w(f,\delta) \end{aligned}$$

olup

$$w^{\#}(f,\delta)\leq(1+M)^2.w(f,\delta)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Teorem 4.3 *$A_n : C^*[0,\infty)\to C^*[0,\infty)$ lineer fonksiyonları koruyan bir pozitif lineer operatörler dizisi ve*

$$\sup_{x\geq 0}\frac{|A_n(t^2,x)-x^2|}{(1+x)^2}=d_n,$$

sonsuzda sıfra yakınsayan bir dizi olsun. Bu halde $\forall f\in C^{*}\left[0,\infty\right)$ *için*

$$\left\|A_nf-f\right\|_{\infty}\leq 2.w^{\#}\left(f,\sqrt{d_n}\right),$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$\left|F\left(u\right)-F\left(v\right)\right|\leq\left(1+\frac{\left(u-v\right)^{2}}{\delta^{2}}\right)w\left(F,\delta\right),$$

alışılmış süreklili modülünün özelliğini $F=f^{\#}$, $u=\frac{t}{1+t}$ ve $v=\frac{x}{1+x}$ için ve $f^{\#}\left(\frac{t}{1+t}\right)=f\left(t\right)$, $w^{\#}\left(f,\delta\right)=w\left(f^{\#},\delta\right)$ eşitliklerini kullanırsak

$$\left|f^{\#}\left(\frac{t}{1+t}\right)-f^{\#}\left(\frac{x}{1+x}\right)\right|\leq\left(1+\frac{\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^{2}}{\delta^{2}}\right)w\left(f^{\#},\delta\right)$$

olup

$$\begin{aligned}\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right| &\leq \left[1+\frac{1}{\delta^{2}}\left(\frac{t}{1+t}-\frac{x}{1+x}\right)^{2}\right]w^{\#}\left(f,\delta\right)\\ &\leq \left(1+\frac{\left(t-x\right)^{2}}{\delta^{2}\left(1+x\right)^{2}}\right)w^{\#}\left(f,\delta\right).\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}A_n\left(\left(t-x\right)^{2},x\right) &= A_n\left(t^{2}-2xt+x^{2},x\right)\\ &= A_n\left(t^{2},x\right)-2xA_n\left(t,x\right)+x^{2}\\ &= A_n\left(t^{2},x\right)-2x^{2}+x^{2}\\ &= A_n\left(t^{2},x\right)-x^{2}\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}\left|A_nf\left(x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq A_n\left(\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|,x\right)\leq A_n\left(1+\frac{\left(t-x\right)^{2}}{\delta^{2}\left(1+x\right)^{2}}\right)w^{\#}\left(f,\delta\right)\\ &\leq \left(1+\sup_{x\geq 0}\frac{\left|A_n\left(t^{2},x\right)-x^{2}\right|}{\left(1+x\right)^{2}}\right)w^{\#}\left(f,\delta\right)\\ &= \left(1+\frac{d_n}{\delta^{2}}\right)w^{\#}\left(f,\delta\right)\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son olarak $\delta=\sqrt{d_n}$ seçildiğinde ispat tamamlanmış olur. ■

4.2. Uygulamalar

Özel sonuçlar elde edebilmek için aşağıdaki lemmayı kullanacağız

Önerme 4.1 $\forall\ x > 0$ *için*

$$e^{-x\alpha_n} - e^{-x} < \frac{x_n}{2e}, \qquad n \geq 1$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\forall n \geq 1$ *için* $\alpha_n = \frac{1-e^{-x_n}}{x_n}$ *ve* $x_n > 0$ *dir.*

İspat. $\forall t > 0$ ve $c > 0$ için $t = \frac{1}{c}$, $f(t) = te^{-ct}$ fonksiyonunun bir maksimum noktası olduğu için

$$\max_{x>0} xe^{-cx} = \frac{1}{ec} \tag{4.1}$$

eşitliği doğrudur. $\forall x \neq 0$ için $1 - e^{-x} < x$ olduğundan $\forall n \geq 1$ için $0 < \alpha_n < 1$ dir. Şimdi

$$\sqrt{uv} < \frac{u-v}{\ln u - \ln v} < \frac{u+v}{2} \qquad 0 < v < u$$

geometrik, logaritmik ve aritmetik eşitsizliğini $u = e^{-x\alpha_n} > v = e^{-x} > 0$ için uygularsak

$$\frac{e^{-x\alpha_n} - e^{-x}}{\ln e^{-x\alpha_n} - \ln e^{-x}} = \frac{e^{-x\alpha_n} - e^{-x}}{-x\alpha_n + x} < \frac{e^{-x\alpha_n} + e^{-x}}{2}$$

olup

$$\begin{aligned} e^{-x\alpha_n} - e^{-x} &< \frac{e^{-x\alpha_n} + e^{-x}}{2}.x\left(1-\alpha_n\right) \\ &= \frac{1-\alpha_n}{2}\left(xe^{-x\alpha_n} + xe^{-x}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz, (4.1)'den

$$e^{-x\alpha_n} - e^{-x} \leq \frac{1-\alpha_n}{2}\left(\frac{1}{e\alpha_n} + \frac{1}{e}\right) = \frac{1-\alpha_n^2}{2e\alpha_n}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\frac{1-\alpha_n^2}{\alpha_n} < x_n$ olduğunu ispatlamamız kalıyor ve bu da

$$\frac{1-\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^2}{\frac{1-e^{-x}}{x}} < x \qquad (x > 0)$$

eşitsizliğinin bir özel halidir. Bu eşitlik

$$1 - \left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^2 < 1 - e^{-x}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2-(1-2e^{-x}+e^{-2x})}{x^2}<1-e^{-x}$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2-\left(1-2e^{-x}+e^{-2x}\right)<x^2-x^2e^{-x}$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2e^{-x}+2e^{-x}-1-e^{-2x}<0$$

şeklinde yazıp direkt hesaplama ile elde edebiliriz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1 *$S_n : C^*[0,\infty) \to C^*[0,\infty)$ tanımlı*

$$S_nf(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

şeklinde verilen Szasz-Mirrakjan operatörlerini gözönüne alalım. Bu halde $\forall f \in C^*[0,\infty)$ için

$$\|S_nf-f\|_\infty \le 2.w^*\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n\ge 1,$$

ve

$$\|S_nf-f\|_\infty \le 2.w^{\#}\left(f,\frac{1}{2\sqrt{n}}\right), \qquad n\ge 1,$$

üst sınırlarını elde edebiliriz.

İspat. Biliyoruz ki $S_n(1,x)=1$ ve buradan $a_n=0$ olur. Diğer taraftan lemma4.1'de

$$S_n\left(e^{-\lambda t},x\right)=e^{-\lambda x\frac{1-e^{\frac{-\lambda}{x}}}{\frac{\lambda}{n}}}$$

eşitliğini kullanırsak

$$\left|S_n\left(e^{-\lambda t},x\right)-e^{-\lambda x}\right|\le\frac{\lambda}{2en}.$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$b_n\le\frac{\lambda}{2en} \qquad \text{ve} \qquad c_n\le\frac{\lambda}{en} \qquad (n\ge 1)$$

dir. Şimdi $\forall n\ge 1$ için

$$a_n+2b_n+c_n\le\frac{2}{2en}+\frac{1}{en}\le\frac{1}{n}$$

olduğundan teoremdeki üst sınırını elde ederiz.

$$S_n(t,x)=x \quad \text{ve } S_n\left(t^2,x\right)=x^2+\frac{x}{n}$$

olduğundan

$$d_n=\sup_{x\geq 0}\frac{\left|S_n\left(t^2,x\right)-x^2\right|}{\left(1+x^2\right)}=\sup_{x\geq 0}\frac{x}{\left(1+x\right)^2}=\frac{1}{4n}$$

eşitliğğini elde ederiz. ■

Sonuç 4.2 $V_n: C^*[0,\infty)\to C^*[0,\infty)$ *tanımlı ve*

$$V_nf(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

eşklinde verilen Baskakov oeratörlerini gözönüne alalım. Bu halde $\forall f\in C^*[0,\infty)$ *için*

$$\left\|V_nf-f\right\|_\infty\leq 2.w^*\left(f,\frac{5}{2\sqrt{n}}\right),\qquad n\geq 2,$$

ve

$$\left\|V_nf-f\right\|_\infty\leq 2.w^{\#}\left(f,\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\qquad n\geq 1,$$

üst sınırlarını elde ederiz.

İspat. $V_n(1,x)=1$ olduğundan $a_n=0$. Diğer taraftan

$$V_n\left(e^{-\lambda t},x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}\left(-xe^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^k(1+x)^{-n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(-xe^{-\frac{\lambda}{n}}+1+x\right)^{-n},$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left|V_n\left(e^{-\lambda t},x\right)-e^{-\lambda x}\right| &= \left|\left[1+x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right]^{-n}-e^{-\lambda x}\right|\\ &= e^{-\lambda x}\left|e^{-n\ln\left(1+x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right)+\lambda n}-1\right|\\ &\leq \left[-n\ln\left(1+x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right)+\lambda n\right].e^{-n\ln\left(1+x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right)}\end{aligned}$$

eşitzisliğini elde ederiz. Burada

$$t=-n\ln\left(1+x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right)+\lambda n\geq -nx\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)+\lambda x\geq -nx.\frac{\lambda}{n}+\lambda x=0$$

eşitsizliğini elde etmek için $e^t-1\leq te^t$ eşitsizliiğini kullandık. Şimdi $\ln(1+t)\geq\frac{t}{1+t}$ olduğundan $\forall t\geq 0$ için

$$\begin{aligned}\left|V_n\left(e^{-\lambda t},x\right)-e^{-\lambda x}\right| &\leq \frac{-nx\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)+\lambda x+\lambda x^2\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)}{\left(1+x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)\right)^{n+1}} \\ &\leq \frac{-nx\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)+\lambda x+\lambda x^2\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)}{1+(n+1)x\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)+\frac{n(n+1)}{2}x^2\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^2}.\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\geq\frac{\lambda}{n}-\frac{\lambda^2}{2n^2}$ ve bir öceki eşitsizlikten

$$\sup_{x\geq 0}\left|V_n\left(e^{-\lambda t},x\right)-e^{-\lambda x}\right|\leq\frac{2\lambda}{n(n+1)\left(1-e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Aynı eşitliği kullanarak

$$b_n=\sup_{x\geq 0}\left|V_n\left(e^{-t},x\right)-e^{-x}\right|\leq\frac{2}{n(n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)}\leq\frac{2}{n}\qquad(n\geq 1)$$

eşitsiliğini elde ederiz. Şimdi $1-e^{-\frac{2}{n}}\geq\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{3n^2}-\frac{2}{3n^4}$ eşitsizliğinden

$$c_n=\sup_{x\geq 0}\left|V_n\left(e^{-2t},x\right)-e^{-2x}\right|\leq\frac{4}{n(n+1)\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{3n^2}-\frac{2}{3n^4}\right)}=\frac{h(n)}{n},$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $h(t)=\frac{6t^4}{(t+1)(3t^3-3t^2+2t-1)}$ şekline tamımlanan bir fonksiyondur. Bu halde

$$h'(t)=\frac{6t^3}{(t+1)^2(3t^3-3t^2+2t-1)}\left(-2t^2+3t-4\right)<0,\qquad t\geq 1$$

dir. Buradan $h(n)\leq h(2)=\frac{32}{15}$, $(n\geq 2)$. Son olarak

$$\sqrt{a_n+b_n+c_n}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{4+\frac{32}{15}}\leq\frac{5}{2\sqrt{n}}$$

elde ederiz. Ve buradan $V_n(t,x)=x$ ve $V_n(t^2,x)=x^2+\frac{x(1+x)}{n}$ eşitliklerini kullanarak

$$d_n=\sup_{x\geq 0}\frac{V_n(t^2,x)-x^2}{(1+x)^2}=\sup_{x\geq 0}\frac{x}{n(1+x)}=1$$

elde edip böylece ispatı tamamlamış oluruz. ■

Sonuç 4.3 $C_n:C^*[0,\infty)\to C^*[0,\infty)$ *tanımlı ve*

$$C_nf(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\beta_n\right)\binom{n}{k}\left(\frac{x}{\beta_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{\beta_n}\right)^{n-k}$$

şelinde tanımlanan Bernsteinn-Choldovsy operatörlerini gözönüne alalım.

$0 \leq x \leq \beta_n$ *ve* $C_n f(x) = f(x)$ *için,* $x \geq \beta_n$ *için* $\forall f \in C^*[0,\infty)$ *için*

$$\|C_n f - f\|_\infty \leq 2.w^*\left(f, \sqrt{\frac{\beta_n}{n}}\right), \qquad n \geq 1,$$

ve

$$\|C_n f - f\|_\infty \leq 2.w^\#\left(f, \sqrt{\frac{\beta_n}{4n}}\right), \qquad n \geq 1$$

üstsınırları sağlanır. Burada β_n*,*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{n} = 0,$$

eşitliklerini sağlayan bir pozitif dizidir.

İspat. $C_n(1,x) = 1$ eşitliğinden $a_n = 0$ olur.

$$C_n\left(e^{-\lambda t}, x\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{\beta_n} e^{-\lambda \frac{\beta_n}{n}}\right)^k \left(1 - \frac{x}{\beta_n}\right)^{n-k} = \left(e^{-\lambda \frac{\beta_n}{n}} \frac{x}{\beta_n} + 1 - \frac{x}{\beta_n}\right)^n,$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|C_n\left(e^{-\lambda t}, x\right) - e^{-\lambda x}\right| &= \left| \left(1 - \lambda x \frac{1 - e^{-\lambda \frac{\beta_n}{n}}}{\lambda \beta_n}\right)^n - e^{-\lambda x} \right| \\
&= \left| e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{\beta_n}\left(1 - e^{-\lambda \frac{\beta_n}{n}}\right)\right)} - e^{-\lambda x} \right| \\
&\leq e^{-\lambda x \frac{1 - e^{-\lambda \frac{\beta_n}{n}}}{\lambda \frac{\beta_n}{n}}} - e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

eşitsizliğni elde ederiz. Lemma3.1'den ve $\forall t \in (0,1)$ $\ln(1-t) \leq -t$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\left|C_n\left(e^{-\lambda t}, x\right) - e^{-\lambda x}\right| \leq \frac{\lambda \beta_n}{2en}$$

eşitsizliğni elde ederiz. Buradan

$$b_n \leq \frac{\beta_n}{2en} \text{ ve } C_n \leq \frac{\beta_n}{en}$$

olup $a_n + b_n +$ $C_n \leq \frac{\beta_n}{en}$ eşitsizliğisağlanır. Son olarak

$$C_n(t,x) = x \text{ ve } C_n\left(t^2, x\right) = x^2 + \frac{x(\beta_n - x)}{n}$$

eşitliklerinden

$$d_n = \sup_{x\geq 0} \frac{|C_n(t^2,x) - x^2|}{(1+x^2)} = \sup_{x\in[0,\beta_n]} \frac{x(\beta_n - x)}{n(1+x^2)} = \frac{\beta_n^2}{4n(1+\beta_n)} \leq \frac{\beta_n}{4n}$$

üst sınırını elde ederiz. ■

Sonuç 4.4 *$L_n : C^* [0,\infty) \to C^* [0,\infty)$ tanımlı ve*

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n-k+1}\right)$$

şelinde tanımlanan Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerini gözönüne alalım. Bu halde $\forall f \in C^* [0,\infty)$ için

$$\|L_n f - f\|_\infty \leq 2.w^{\#}\left(f, \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right), \qquad n \geq 1,$$

üst sınırı sağlanır.

İspat. Bu teoremi ispatlamak için Teorem3.1 de e^{-kx} yerine $\frac{x^k}{(x+1)^k}$'i ve $w^{\#}(f,\delta)$ yerine $w^*(f,\delta)$'i kullanacağız. $L_n(1,x) = 1$ eşitliğinden $a_n = \|L_n 1 - 1\|_\infty = 0$ dir.

$$L_n\left(\frac{t}{1+t}, x\right) = \frac{nx}{(1+n)(1+x)}$$

$$L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2, x\right) = \frac{n^2x^2}{(1+n)^2(1+x)^2} + \frac{nx}{(1+n)^2(1+x)^2}$$

eşitliklerinden ([5]'e bakabilirsiniz)

$$b_n = \sup_{x\geq 0}\left|L_n\left(\frac{t}{1+t}, x\right) - \frac{x}{1+x}\right| = \frac{1}{n+1}$$

ve

$$c_n = \sup_{x\geq 0}\left|L_n\left(\left(\frac{t}{1+t}\right)^2, x\right) - \left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right| = \sup_{x\geq 0}\left|\frac{nx - x^2(2n+1)}{(1+n)^2(1+x)^2}\right|$$

eşitliklerini elde ederiz. Bazı hesaplamalardan sonra $c_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ gösterip

$$a_n + 2b_n + c_n \leq \frac{4}{n+1}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

KAYNAKLAR

[1] Gadjiev,A. D. ,Akar O. Ç, On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semiaxis, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 19, no. 5, 21-26, 1999.

[2] Altomare F.: Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators. Surv. Approx. Theory 5, 92–164 2010 free available online at http://www.math.techmion.ac.il/sat/papers/13/

[3] Altomare, F., Campiti, M.: Korovkin-type approximation theory and its applications, de Gruyter Studies in Mathematics 17. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1994

[4] Altomare, F., Cappelletti Montano, M., Leonessa, V.: On a generalization of Kantorovich operators on simplices and hypercubes. Adv. Pure Appl. Math.1(3), 359–385 (2010)

[5] Altomare, F., Leonessa, V. On a sequence of positive linear operators associated with a continuous selection of Borel measures. Mediterr.J.Math.3, 363–382 2006

[6] Bauer, H.: Probability theory, de Gruyter Studies in Mathematics 23. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1996

[7] B. D. Boyanov, V. M. Veselinov, A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum., 14(62) , no. 1, 9-13, 1970.

[8] Becker, M. Global approximation theorems for Szasz–Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces. Indiana Univ. Math. J. 27(1), 127– 142 (1978)

[9] Bustamante, J., Morales de la Cruz, L.: Korovkin type theorems for weighted approximation. Int. J. Math. Anal. 26(1), 1273–1283 2007.

[10] Butzer, P.L. On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval. Proc. Amer. Math. Soc. 5, 547–553 1954

[11] Cheney, E.W., Sharma, A.: Bernstein power series. Canadian J. of Math. 16(2), 241–264 1964

[12] DeVore, R.A., Lorentz, G.G.: Constructive Approximation, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 303. Springer, Berlin 1993

[13] Ditzian, Z., Totik, V.: Moduli of smoothness, Springer Series in Computational Mathematics 9. Springer, New-York 1987

[14] Duman, O., ¨ Ozarslan, M.A., Della Vecchia, B.: Modified Sz´asz–Mirakjan–Kantorovich operators preserving linear functions. Turk. J. Math. 33, 151–158 2009 Vol. 63 (2013) On a Generalization of Sz´asz–Mirakjan–Kantorovich Operators 863

[15] Favard, J. Sur les multiplicateurs d'interpolations. J. Math. Pures Appl. 23(9), 219–247 1944

[16] Gonska, H. Positive operators and approximation of functions: selected topics. Conf. Semin. Mat. Univ. Bari 288, 28 2002

[17] Holhoş, A. The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators. Stud. Univ. Babeş–Bolyai Math. 55(2), 133–142 2010

[18] Mirakjan, G.M.: Approximation of continuous functions with the aid of polynomials. (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 31, 201–205 1941

[19] Paltanea, R. Approximation theory using positive linear operators. Birkh¨auser, Boston 2004

[20] S. Ersan, O. Dogru, Statistical approximation properties of q-Bleimann, Butzer and Hahn operators, Math. Comput. Modelling, 49 2009, 1595-1606.

[21] Swetits, J.J., Wood, B.: Quantitative estimates fo Lp approximation with positive linear operators. J. Approx. Theory 38, 81–89 1983

[22] Szasz, O. Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval. J. Res. Nat. Bur. Stds. 45, 239–245 1950

[23] Totik, V. Approximation by Szász–Mirakjan type operators. Acta Math. Hungarica 41, 291–307 1983

[24] Totik, V. Approximation by Szász–Mirakjan–Kantorovich operators in Lp(p $>$ 1). Analysis Math. 9, 147–167 1983