KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI İÇİN YİNELEME FORMÜLLERİ

SUSAN RIDHA SHAKOR AGHA

ARALIK 2014

Matematik Anabilim Dalında SUSAN RIDHA SHAKOR AGHA tarafından hazırlanan APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR İÇİN YİNELEME FORMÜLLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Peof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Doç. Dr. Ali OLGUN	____________________
Üye (Danışman)	: Yrd. Doç. Dr. Recep ŞAHİN	____________________
Üye	: Prof. Dr. Ali ARSL	____________________

08/01/2015

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

APPELL HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARI İÇİN YİNELEME FORMÜLLERİ

AGHA, Susan Ridha Shakor
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman : Yrd.Doç. Dr. Recep ŞAHİN
Aralık 2014, 40 Sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş ve tezin genelinde yapılan araştırmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, ön bilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Yine ikinci bölümde, Gauss Hipergeometrik Fonksiyonundan, Pochhammer sembolünün özelliklerinden bahsedilmiş ayrıca Appell Hipergeometrik Fonksiyonları tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, Appell Hipergeometrik Fonksiyonları için yineleme formülleri elde edilmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Pochhammer sembolü, Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu, Appell Hipergeometrik Fonksiyonlar, Yineleme Formülleri.

ABSTRACT

RECURSION FORMULAS FOR APPELL HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

AGHA, Susan Ridha Shakor
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor: Asst.Prof.Dr. Recep ŞAHİN
December 2014, 40 Pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is introduction and general researches have been mentioned. The second chapter, rudiments and some basic concepts which will be used in other sections is provided. Again the second chapters, Gauss hypergeometric function, the characteristic of the Pochhammer symbol has been mentioned, also Appell hypergeometric functions was introduced and some properties are given. The third chapter, recurrence formulas for Appell hypergeometric functions was investigated. The fourth chapter is devoted to discussion and conclusion.

Key Words: Gamma Function, Beta Function, Pochhammer Symbol, Gauss Hypergeometric Function, Appell Hypergeometric Function, Recursion Formulas.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Recep Şahin’e en içten saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca ailem ve bana bu fırsatı verdiği için Türkiye Cumhuriyeti’ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$(\alpha)_n$	Pochammer sembolü
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$B(x,y)$	Beta fonksiyonu
$F(\alpha,\beta;\gamma;x)$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
F_1, F_2, F_3, F_4	Appell hipergeometrik fonksiyonları

1. GİRİŞ

Özel fonksiyonların önemli bir bölümünü oluşturan hipergeometrik fonksiyonlar Matematik, Fizik, Mühendislik ve Olasılık Teoresinde sıklıkla yer alır. İlk olarak Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss tarafından ele alınmış olan bu fonksiyonlar

$$\{\theta(\theta+\gamma-1)-x(\theta+\alpha)(\theta+\beta)\}\,y=0 \tag{1.1}$$
$$\left(\theta=x\frac{d}{dx}\right)$$

şeklinde bir diferensiyel denklemin çözümü olarak ortaya çıkmıştır (Gauss 1866). İkinci basamaktan sadece üç tane düzgün aykırı noktaya sahip lineer diferensiyel denklemler belirli bir değişken değiştirmesmden sonra (1.1) denklemine dönüştürülebilmektedir. Bu diferansiyel denklemin çözümü olarak tanımlanan kuvvet serileri hipergeometrik fonksiyonlar olarak adlandırılır. Daha sonraki yıllarda bazı özellikleri kullanılarak Appell, Lauricella, Horn ve Srivastava tarafından bu hipergeometrik fonksiyonun çok değişkenli halleri tanımlanmıştır.

1.1. Kaynak Özetleri

$[1,4,5,6,7,10,11]$ numaralı kaynaklarda ilk olarak Gamma ve Beta fonksiyonlarının özelliklerinde bahsedilmiş daha sonra Gauss diferensiyel denklemi ve çözümü olan Gauss hipergeometrik fonksiyonunu detaylı bir şekilde incelenmiştir. $[2,3]$ numaralı kaynaklarda F_2 Appell hipergeometrik fonksiyonu bazı dönüşüm formülleri elde edililmiştir. [9] numaralı kaynakta genişletilmiş beta fonksiyonu yardımıyla genişletilmiş Appell fonksiyonları tanıtılmıştır. [8] numaralı kaynakta ise bu çalışmaya temel olan Appell hipergeometrik fonksiyonları için yineleme formülleri elde edilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada Gauss hipergeometrik fonksiyonu ve F_1, F_2, F_3, F_4 Appell hipergeometrik fonksiyonları incelenmiştir. Ayrıca F_1, F_2, F_3, F_4 Appell hipergeometrik fonksiyonlarının parametrelerine bir n doğal sayısı eklenir veya çıkarılırsa yine Appell hipergeometrik fonksiyonları cinsinden fonksiyonlar yazılıp yazılamayacağının analizi yapılmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEMLER

2.1. Bazı Özel Fonksiyonlar

Matematikte elemanter fonksiyonlar olarak tanımlayamadığımız pek çok fonksiyon vardır. Çoğu kez bu fonksiyonlar elemanter fonksiyonlardan daha kullanışlıdır. Bu kısımda bu tip fonksiyonlardan iki tanesini göreceğiz.

2.1.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Neden böyle denildiğini görmek için

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ut} dt = \frac{1}{u} \tag{2.2}$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım, $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leqslant u \leqslant d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. (2.2) den u ya göre türevler alarak elde edeceğimiz genelleştirilmiş integraller yine düzgün yakınsak olacağından aşağıdakiler yazılabilir.

$$\begin{aligned} -F'(u) &= \int_0^\infty t e^{-ut} dt = \frac{1}{u^2} \\ F''(u) &= \int_0^\infty t^2 e^{-ut} dt = \frac{2!}{u^2} \end{aligned}$$

Böylece u ya göre türev almaya devam ettiğimizde $n-$yinci türev için

$$(-1)^n F^n(u) = \int_0^\infty t^n e^{-ut} dt = \frac{n!}{u^{n+1}} \tag{2.3}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n! = \int_0^\infty t^{(n+1)-1} e^{-t} dt = \Gamma(n+1) \tag{2.4}$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Halbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır.Yani yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \Gamma(x+1) \tag{2.5}$$

yazılabilir. Buradan görülüyor ki -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı Gamma fonksiyonu genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılır. $x = 0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}|_0^\infty = -(0-1) = 1 \tag{2.6}$$

dır. Bu sonuç 0! in neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar.
Elemanter matematikte n faktöriyel,

$$n! = n(n-1)(n-2)...2.1 \tag{2.7}$$

çarpımı ile verilir. Bu özellik

$$n! = n(n-1)! \tag{2.8}$$

eşitliğini içerdiğine göre eğer $x = n$ bir tamsayı ise

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n) \tag{2.9}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \qquad (2.10) \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-t^x e^{-t}\right)|_0^b + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x) \end{aligned}$$

olduğundan Γ fonksiyonu

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.11}$$

eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri için gerçekler. Bu özellik yardımıyla Gama fonksiyonu için argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri kolayca hesaplanabilir.

Lemma 2.1 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ dir.

İspat.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

tanımından dolayı

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt$$

ve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du$$

yazılabilir. Bu eşitlikler tarafa çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \left(\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt\right)\left(\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u} du\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}-1} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-(t+u)} du dt \end{aligned}$$

olur. $t = x^2$, $u = y^2$ bölge dönüşümü yapılıp ve sonra da $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçilirse

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty 4re^{-r^2} dr d\theta = \pi$$

olur. Buradan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

elde edilir.

2.1.2. Beta Fonksiyonu

$B(x,y)$ ile gösterilen Beta fonksiyonu

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt; \\ \operatorname{Re}(x) &> 0, \operatorname{Re}(y)>0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

genelleştirilimiş intergral yardımıyla tanımlanan iki değişkenli bir fonksiyon olup

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,d\theta \tag{2.13}$$

$$B(x,y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \tag{2.14}$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.15}$$

biçimlerinde de ifade edilebilir. (2.12) eşitliğinde $t=\sin^2\theta$ alınırsa (2.13) eşitliği, $t=\frac{u}{1+u}$ alınırsa (2.14) eşitlği elde edilir. (2.15) eşitliğinde Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi verilmiştir. Bunu görmek için $\Gamma(x)$ in tanımlandığı integralde $t=s^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = 2\int_0^{\infty} s^{2x-1}e^{-s^2}ds \tag{2.16}$$

olur. $\Gamma(x)$ in bu ifadesinden dolayı

$$\Gamma(y) = 2\int_0^{\infty} t^{2y-1}e^{-t^2}dt \tag{2.17}$$

yazılabilir. Buradan

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} s^{2x-1}t^{2y-1}e^{-\left(s^2+t^2\right)}dtds$$

olup, $s=r\cos\theta$, $t=r\sin\theta$ kutupsal koordinatlarına geçilirse,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} r^{2(x+y)-2}e^{-r^2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,rdrd\theta \\
&= \left[2\int_0^{\infty}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\,d\theta\right]\left[2\int_0^{\infty} r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr\right] \\
&= B(x,y)\Gamma(x+y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu ise istenilendir. Ayrıca (2.15) eşitliğinden görülmektedir ki,

$$B(x,y) = B(y,x)$$

olup bu eşitlik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır.

Tanım 2.1 α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\alpha)_n$ ifadesi

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1) \tag{2.18}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade "Pochhammer sembolü" olarak bilinir.

Lemma 2.2 Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i)

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.19}$$

ii)

$$(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n \tag{2.20}$$

İspat.

i) (2.11) eşitliği kullanılarak $\Gamma(\alpha+n)$ ifadesi

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+n) &= (\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1) \\
&= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)\Gamma(\alpha+n-2) \\
&\vdots \\
&= (\alpha+n-1)(\alpha+n-2)...(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha) \\
&= (\alpha)_n\Gamma(\alpha)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı $\Gamma(\alpha)$ ile bölünürse istenilen ifade elde edilebilir.

ii) (2.20) eşitliği ise

$$(\alpha)_{n+1} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha+n+1)}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \alpha\frac{\Gamma((\alpha+1)+n)}{\Gamma(\alpha+1)} = \alpha(\alpha+1)_n$$

den görülmektedir ki, özel olarak (2.19) da $n=0$ alınırsa $(\alpha)_0 = 1$ dir.

Lemma 2.3

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \quad , \quad |x| < 1 \tag{2.21}$$

dir.

İspat. (2.21) ifadesini ispat etmek için $f(x) = (1-x)^{-\alpha}$ fonksiyonunu $x=0$ noktası komşuluğunda Taylor serisine (Maclaurin serisi) açmak yeterlidir. $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ olması halinde (2.21) ifadesi sonlu binom açılımıdır. ■

2.2. Hipergeometrik Seri ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1 + \frac{\alpha\beta x}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)x^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + ... \tag{2.22}$$

olarak ifade edilen seriye Gauss hipergeometrik serisi veya hipergeometrik seri denir. (2.22) ifadesi $1+x+x^2+...$ geometrik serisinin bir geneleştirmesi olduğundan bu adı alır. (2.22) den görülmektedir ki γ değeri sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır. (2.22) hipergeometrik serisi $|x| < 1$ için yakınsak, $|x| > 1$ için ıraksaktır. $|x| = 1$ olduğu zaman $\gamma > \alpha + \beta$ ise mutlak yakınsaktır. $x = -1$ iken $\gamma > \alpha + \beta - 1$ ise seri yakınsaktır.

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)$$

Pochhammer sembolü ifadesi dikkate alınırsa (2.22) hipergeometrik serisi

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{2.23}$$

şekilde yazılabilir. (2.23) de görünen F nin altındaki 2 ve 1 alt indisleri F nin yapısında biri α ve β değeri γ olmak üzere iki tip parametreler bulunduğunu ifade eder. (2.23) in genelleştirilmiş ifadesi

$${}_pF_q\left(\alpha_1,...\alpha_p;\gamma_1,...\gamma_q;x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n ... (\alpha_p)_n}{(\gamma_1)_n ... \left(\gamma_q\right)_n} \frac{x^n}{n!} \tag{2.24}$$

dir. Hipergeometrik fonksiyonu ifade eden ${}_2F_1$ gösterim yerine genellikle F gösterimi kulanılır. Yani

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = F(\alpha,\beta;\gamma;x) $$

olup, bu fonksiyon Gauss hipergeometrik fonksiyonu veya hipergeometrik fonksiyon olarak bilinir.

Lemma 2.4 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ fonksiyonu

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}\,du \tag{2.25} $$

şeklinde bir integral gösterimine sahiptir.

İspat. Beta fonksiyonunun

$$ B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,du $$

tanımından ve Pochhammer sembolünün özelliklerinden dolayı

$$ \frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} = \frac{B(\beta+n,\gamma-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} = \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta+n-1}(1-u)^{\gamma+n-1}\,du \tag{2.26} $$

yazılabilir. Buradan, (2.26) ifadesi (2.23) de yerine yazılırsa

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n \int_0^1 u^{\beta+n-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du $$

olur. Seri düzgün yakınsak olduğundan toplam ile integral yer değiştirilirse

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) = \frac{1}{B(\beta,\gamma-\beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!}(ux^n) \right\} du $$

elde edilir. Diğer taraftan (2.21) dan

$$ (1-ux)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!}(ux^n) $$

olduğu dikkate alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

Hipergeometrik fonksiyonun bir integral gösterimini veren bu formül $|x| < 1$ ve $\alpha > \beta > 0$ için geçerlidir. ■

2.3. Gauss Diferensiyel Denklemi

İkinci basamaktan lineer diferensiyel denklemler içinde sadece üç tane düzgün aykırı noktaya sahip olan denklemler belirli değişken değiştirmelerden sonra

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0 \tag{2.27}$$

şekline dönüştürülebilmektedir. Bu denklem Gauss diferensiyel denklemi ya da hipergeometrik denklem olarak bilinir. (2.27) denkleminde α, β ve γ reel parametrelerdir. (2.27) denklemi 0,1 ve ∞ de olmak üzere üç düzgün aykırı noktaya sahiptir. Şimdi bu denklemi $x = 0$ düzgün aykırı noktası konuşuluğunda serilerle çözelim. (2.27) in Frobenius serisi çözümü

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m+n} = x^m \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + ...\right)$$

şeklinde olmalıdır.

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) c_n x^{m+n-1} = x^m \left[(m) c_0 x^{-1} + (m+1) c_1 + (m+2) c_2 x + ...\right] \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (m+n-1)(m+n) c_n x^{m+n-2} \\ &= x^m \left[(m-1)(m) c_0 x^{-2} + (m)(m+1) c_1 x^{-1} + (m+1)(m+2) c_2 + ...\right] \end{aligned}$$

türevleri (2.27) Gauss denkleminde yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} & x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (m+n-1)(m+n) c_n x^{m+n-2} \\ & + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x] \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) c_n x^{m+n-1} - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m+n} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (m+n-1)(m+n) c_n x^{m+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (m+n-1)(m+n) c_n x^{m+n} \\ & + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) c_n x^{m+n-1} - (\alpha+\beta+1) \sum_{n=0}^{\infty} (m+n) c_n x^{m+n} \\ & - \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m+n} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [m+n-1+\gamma](m+n) c_n x^{m+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} [m+n+\alpha+\beta](m+n) c_n x^{m+n} \\ & - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha\beta c_n x^{m+n} = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[(m+\gamma-1)(m+0)c_0x^{m-1}+(m+\gamma)(m+1)c_1x^m \\
&+(m+\gamma+1)(m+2)c_1x^{m+1}+...] \\
&+[-(m+\alpha+\beta)(m)c_0x^m-(m+1+\alpha+\beta)(m+1)c_1x^{m+1}-...] \\
&+[-\alpha\beta c_0x^m-\alpha\beta c_1x^{m+1}-\alpha\beta c_2x^{m+2}-...]=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m(m+\gamma-1)c_0x^{m-1}+\{(m+1)(m+\gamma)c_1 \\
&-[m(m+\alpha+\beta)-\alpha\beta]c_0\}x^m+\cdots \\
&+\{(m+n)(m+n+\gamma-1)c_n \\
&-[(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta]c_{n-1}\} \\
&\times x^{m+n+1}+...=0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $m(m+\gamma-1)=0$ indisel denklemini ve

$$c_n=\frac{(m+n-1)(m+n+\alpha+\beta-1)+\alpha\beta}{(m+n)(m+n+\gamma-1)}c_{n-1}$$

indirgeme formülünü elde ederiz. Bunlara karşılık gelen

$$
\begin{aligned}
Y(x,m) &= c_0x^m\left[1+\frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)}x\right. \\
&+\frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta(m+1)(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)(m+2)(m+\gamma+1)}x^2 \\
&+\frac{m(m+\alpha+\beta)+\alpha\beta(m+1)(m+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta}{(m+1)(m+\gamma)(m+2)(m+\gamma+1)} \\
&\left.\times\frac{(m+2)(m+\alpha+\beta+2)+\alpha\beta}{(m+3)(m+\gamma+2)}x^3+...\right]
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

fonksiyonu

$$
\begin{aligned}
& x(1-x)Y''(x,m)+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]Y'(x,m)-\alpha\beta Y(x,m) \\
=\ & m(m+\gamma-1)c_0x^{m-1}
\end{aligned}
$$

denklemini gerçekler. $m(m+\gamma-1)=0$ indisel denkleminin kökleri $m_1=0$ ve $m_2=1-\gamma$ olup, $m_1=0$ köküne karşılık gelen çüzüm (2.28) den $c_0=1$ alınarak,

$$Y(x,0)=y_1=1+\frac{\alpha\beta}{1\gamma}x+\frac{(\alpha+1)+\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+...$$

olarak elde edilir. $m_2 = 1-\gamma$ kökü karşılık gelen çözüm ise, yine (2.28) de $c_0 = 1,\ m = 1-\gamma$ konularak

$$Y(x,1-\gamma) = y_2 = x^{1-\gamma}\left[\begin{array}{c} 1+\frac{(\alpha-y+1)(\beta-\gamma+1)}{1(2-\gamma)}x \\ +\frac{(\alpha-y+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)}{1.2.(2-\gamma)(3-\gamma)}x^2+... \end{array}\right]$$

olarak bulunacaktır. Önceden tanımlanan hipergeometrik fonksiyonu dikkate alınarak y_1 ve y_2 çözümlerini bu fonksiyon cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$y_1 = F(\alpha,\beta;\gamma;x) \tag{2.29}$$

$$y_2 = x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;x) \tag{2.30}$$

Böylece, γ parametresi sıfır ya da herhangi bir pozitif tamsayı olmamak üzere (2.27) Gauss diferensiyel denkleminin genel çözümü F hipergeometrik fonksiyonu cinsinden

$$y = AF(\alpha,\beta;\gamma;x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;x) \tag{2.31}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. (2.31) genel çözümü $|x| < 1$ için geçerlidir.

2.4. Önemli Bazı İfadeler

Bu kısımda ilerdeki bölümlerde ihtiyaç duyacağımız bazı ifadeler verilecektir.

Lemma 2.5 $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$ için,

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{B(\beta,\gamma-\alpha-\beta)}{B(\beta,\gamma-\beta)} \tag{2.32}$$

dır.

İspat. Lemma 2.4 te $x = 1$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen elde edilebilir.

Lemma 2.6

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n-k) \tag{2.33}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} B(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,n+k) \tag{2.34}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Lemma 2.7 $|x| < \frac{1}{2}$ için

$$ {}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x) = (1-x)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;-\frac{x}{1-x}\right) \tag{2.35}$$

dir.

İspat. (2.35) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;-\frac{x}{1-x}\right) &= (1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n x^n (1-x)^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n x^n (1-x)^{-(\alpha+n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n x^n \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_r}{r!}x^r \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_r}{r!}x^{n+r}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (2.33) eşitliği göz önüne alınarak r yerine $r-n$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;-\frac{x}{1-x}\right) &= \sum_{n=0}^{r}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(-1)^n \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_{r-n}}{(r-n)!}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{r}\frac{(\alpha)_n(\alpha)_r(\beta)_n(-1)^n}{(\alpha)_n(\gamma)_n n!}\frac{(-r)_n(-1)^n}{r!}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}\sum_{n=0}^{r}\frac{(-r)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}F(-r,\beta;\gamma;1)\,x^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r}{r!}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\beta+r)}{\Gamma(\gamma+r)\Gamma(\gamma-\beta)}x^r \\
&= {}_2F_1(\alpha,\gamma-\beta;\gamma;x)
\end{aligned}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 2.2 n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\alpha)_{-n} &= \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)} \\
&= \frac{(-1)^n}{(1-\alpha)_n}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.8

$$(\alpha)_{2r} = \left(\frac{1}{2}\alpha\right)_r \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right)_r \left(2^2\right)^r \tag{2.37}$$

dır.

İspat. (2.37) nin sağ yanındaki ifadede Pochhammer sembolü kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen elde edilir.

Lemma 2.9 $n \geq r$ için

$$(\alpha + r)_{n-r} = \frac{(\alpha)_n}{(\alpha)_r} \tag{2.38}$$

dır.

İspat. Pochhammer sembolünün tanımı kullanılarak ispatı yapılabilir.

Lemma 2.10

$$(-n)_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k n!}{(n-k)!} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases} \tag{2.39}$$

$$(k, n = 0, 1, 2, ...)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} (-n)_k &= (-n)(-n+1)...(-n+k-1) \\ &= (-1)^k (n)(n-1)...(n-k+1) \\ &= \frac{(-1)^k (n)(n-1)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...3.2.1}{(n-k)(n-k-1)...3.2.1} \\ &= \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} \qquad , \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

dir. $k > n$ için $(-n)_k = (-n)(-n+1)...(-n+k-1)$ eşitliğinin sağ tarafı mutlaka sıfır olacaktır. ■

2.5. Appell Hipergeometrik Fonksiyonları

Parametrelerin sayısı artırılarak hipergeometrik serilerinin iki değişkenli hipergeometrik serilere genelleştirebileceği Appell Kampé dé Fériet ve Horn tarafından gösterilmiştir. Şimdi

$$ {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_2; x),\ {}_2F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; y) $$

hipergeometrik serilerini gözönüne alalım. Bu iki serinin çarpılmasıyla x ve y değişkenlerine bağlı

$$ {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_2; x)_2 F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_n (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \tag{2.40} $$

serisi elde edilir. $(\alpha)_{m+n} = (\alpha)_m (\alpha + m)_n$ özelliği dikkate alınır ve α_2, β_2 ve γ_2 değerleri yerine $\alpha_2 = \alpha_1 + m, \beta_2 = \beta_1 + m, \gamma_2 = \gamma_1 + m$ konulursa, bu durumda

$$ (\alpha_1)_m (\alpha_2)_n, (\beta_1)_m (\beta_2)_n, (\gamma_1)_m (\gamma_2)_n $$

ikili çarpım ifadelerinin yerine sırasıyla

$$ (\alpha_1)_{m+n}, (\beta_1)_{m+n}, (\gamma_1)_{m+n} $$

geleceklerinden

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_2; x)_2 F_1(\alpha_2, \beta_2; \gamma_2; y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_1+m)_n (\beta_1)_m (\beta_1+m)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_1+m)_n} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m+n} (\beta_1)_{m+n}}{(\gamma_1)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_N (\beta_1)_N}{(\gamma_1)_N} \frac{x^m}{m!} \frac{y^{N-m}}{m(N-m)!} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_N (\beta_1)_N}{(\gamma_1)_N N!} \left(\sum_{M=0}^{N} \frac{N!}{m!(N-m)!} x^m y^{N-m} \right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_N (\beta_1)_N (x+y)^N}{(\gamma_1)_N N!} \\ &=_2 F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; x+y) \end{aligned} $$

elde edilir. Yukarıdaki ifadelerde $N = m + n$ alınmış ve (2.34) özelliği kullanılmıştır. (2.40) de $\alpha_2 = \alpha_1 + m, \gamma_2 = \gamma_1 + m$ alınarak elde edilen iki değişkenli hipergeometrik fonksiyona birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu denilmektedir ki bu fonksiyonun serisel ifadesi

$$F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.41}$$

olur. Benzer şekilde (2.40) de $\alpha_2=\alpha_1+m$ konularak F_2 ikinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu, yine (2.40) de $\gamma_2=\gamma_1+m$ konularak F_3 üçüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu ve son olarak (2.40) de $\alpha_2=\alpha_1+m$, $\beta_2=\beta_1+m$ konularak F_3 üçüncü çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu elde edilmektedir. Bu fonksiyonların açık ifadeleri aşağıda verilmektedir.

$$F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.42}$$

$$F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.43}$$

$$F_4(\alpha_1,\beta_1,;\gamma_1,\gamma_2;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_{m+n}}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \tag{2.44}$$

Bu seriler sırasıyla

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x,y):|x|<1,|y|<1\} \quad , \quad D_2=\{(x,y):|x|+|y|<1\} \\ D_3 &= \{(x,y):|x|<1,|y|<1\} \quad , \quad D_4=\left\{(x,y):|x|^{\frac{1}{2}}+|y|^{\frac{1}{2}}<1\right\} \end{aligned}$$

bölgeleri için yakınsaktır.

2.5.1. Appell Hipergeometrik Fonksiyonları Tarafından Sağlanan Kısmi Türevli Denklemler

F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonunun (2.41) deki ifadesinde $x^m y^m$ teriminin önündeki katsayılar $A_{m,n}$ olmak üzere

$$z=F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{m,n}x^m y^n \tag{2.45}$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada $A_{m,n}$ katsayısı

$$\begin{aligned} A_{m+1,n} &= \frac{(\alpha_1+m+n)(\beta_1+m)}{(m+1)(\gamma_1+m+n)} A_{m,n} \\ A_{m+1,n} &= \frac{(\alpha_1+m+n)(\beta_2+m)}{(n+1)(\gamma_1+m+n)} A_{m,n} \end{aligned}$$

rekürans bağıntılarını sağlar. $\psi = x\frac{\partial}{\partial x}$, $\phi = y\frac{\partial}{\partial y}$ olmak üzere F_1 fonksiyonunun sağladığı kapalı formdaki kısmi türevli denklem sistemi

$$\begin{aligned} \left\{(\psi+\phi+\alpha_1)(\psi+\beta_1) - \frac{1}{x}\psi(\psi+\phi+\gamma_1-1)\right\} z &= 0 \qquad (2.46) \\ \left\{(\psi+\phi+\alpha_1)(\psi+\beta_2) - \frac{1}{x}\psi(\psi+\phi+\gamma_1-1)\right\} z &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Birinci ve ikinci basamaktan kısmi türevler için

$$p = \frac{\partial}{\partial x} \ , \ q = \frac{\partial}{\partial y} \ , \ r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ , \ s = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ , \ t = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

gösterimlerinin kullanılmasıyla F_1 in sağladığı yukarıdaki kısmi türevli denklem sistemi

$$F_1 : \begin{cases} x(1-x)r + y(1-x)s + \{\gamma_1 - (\alpha_1+\beta_1+1)x\}p - \beta_1 yq - \alpha_1\beta_1 z = 0 \\ x(1-y)t + y(1-y)s + \{\gamma_1 - (\alpha_1+\beta_2+1)x\}q - \beta_2 xp - \alpha_1\beta_2 z = 0 \end{cases} \qquad (2.47)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde diğer iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyonlarının sağladığı kısmi türevli denklem sistemleride bulunabilir ki bunlar

$$F_2 : \begin{cases} x(1-x)r - xys + \{\gamma_1 - (\alpha_1+\beta_1+1)x\}p - \beta_1 yq - \alpha_1\beta_1 z = 0 \\ x(1-y)t - xys + \{\gamma_2 - (\alpha_1+\beta_2+1)x\}q - \beta_2 xp - \alpha_1\beta_2 z = 0 \end{cases} \qquad (2.48)$$

$$F_3 : \begin{cases} x(1-x)r + ys + \{\gamma_1 - (\alpha_1+\beta_1+1)x\}p - \alpha_1\beta_1 z = 0 \\ x(1-y)t + ys + \{\gamma_1 - (\alpha_2+\beta_2+1)x\}q - \alpha_2\beta_2 z = 0 \end{cases} \qquad (2.49)$$

$$F_4 : \begin{cases} x(1-x)r - y^2 t - 2xys + \{\gamma_1 - (\alpha_1+\beta_1+1)x\}p - (\alpha_1+\beta_1+1)yq \\ \qquad -\alpha_1\beta_1 z = 0 \\ x(1-y)r - x^2 r - 2xys + \{\gamma_2 - (\alpha_1+\beta_1+1)y\}q - (\alpha_1+\beta_1+1)xp \\ \qquad -\alpha_1\beta_1 z = 0 \end{cases} \qquad (2.50)$$

dır.

2.5.2. Appell Hipergeometrik Fonksiyonların İntegral Gösterimleri

F_1, F_2 ve F_3 Appell hipergeometrik fonksiyonlarının çift katlı integraller yardımıyla integral gösterimleri elde edilebilir. Birinci çeşit Appell hipergeometrik fonksiyonu için bir integral gösterimi,

$$F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1-\beta_1-\beta_2)} \times \iint_D u^{\beta_1-1}v^{\beta_2-1}(1-u-v)^{\gamma_1-\beta_1-\beta_2-1}(1-ux-vy)^{-\alpha_1}\,dudv \tag{2.51}$$

şeklindedir. Buradaki çift katlı integral $D = \{(u,v) : u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$ üçgensel bölgesi üzerindedir. Benzer şekilde F_2 ve F_3 Appell hipergeometrik fonksiyonlarının integral gösterimleri

$$F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1-\beta_1)\Gamma(\gamma_2-\beta_2)} \times \int_0^1\int_0^1 u^{\beta_1-1}v^{\beta_2-1}(1-u)^{\gamma_1-\beta_1-1}(1-v)^{\gamma_2-\beta_2-1}(1-ux-vy)^{-\alpha_1}\,dudv \tag{2.52}$$

$$F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1-\beta_1-\beta_2)} \times \iint_D u^{\beta_1-1}v^{\beta_2-1}(1-u-v)^{\gamma_1-\beta_1-\beta_2-1}(1-ux)^{-\alpha_1}(1-vy)^{-\alpha_2}\,dudv \tag{2.53}$$

şeklidedir. Son integralde yine yukarıda tanımlanan D üçgensel bölgesi üzerinden hesap edilir. F_4 Appell hipergeometrik fonksiyonu için benzer bir integral gösterimi elde edilemez. Ayrıca F_1 fonksiyonunun

$$F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\gamma_1-\alpha_1)} \times \int_0^1 u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\gamma_1-\alpha_1-1}(1-ux)^{-\beta_1}(1-uy)^{-\beta_2}\,du \tag{2.54}$$

şeklinde tek katlı integral yardımıyla ifade edilen bir başka integral gösterimi de vardır.

2.5.3. Appell Hipergeometrik Fonksiyonların Arasındaki İlişkiler

Appell hipergeonetrik fonksiyonların arasındaki ilşkiyi görmek için aşağıdaki bazı teoremler verilmiştir.

Teorem 2.1 F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)$$

$$=(1-x)^{-\beta_1}(1-y)^{-\beta_2}F_1\left(\gamma_1-\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;-\frac{x}{1-x},-\frac{y}{1-y}\right)$$

$$=\quad(1-x)^{-\alpha_1}F_1\left(\alpha_1,\gamma_1-\beta_1-\beta_2,\beta_2;\gamma_1;-\frac{x}{1-x},\frac{y-x}{1-x}\right)$$

$$=\quad(1-y)^{-\alpha_1}F_1\left(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1-\beta_1-\beta_2;\gamma_1;\frac{x-y}{1-y},-\frac{y}{1-y}\right) \tag{2.55}$$

$$=(1-x)^{\gamma_1-\alpha_1-\beta_1}(1-y)^{-\beta_2}F_1\left(\gamma_1-\alpha_1,\gamma_1-\beta_1-\beta_2,\beta_2;\gamma_1;x,\frac{x-y}{1-y}\right) \tag{2.56}$$

$$=\quad(1-x)^{-\beta_1}(1-y)^{\gamma_1-\alpha_1-\beta_2}F_1\left(\gamma_1-\alpha_1,\beta_1,\gamma_1-\beta_1-\beta_2;\gamma_1;\frac{y-x}{1-x},y\right)$$

İspat. (2.54) eşitliğindeki

$$\int_0^1 u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\gamma_1-\alpha_1-1}(1-ux)^{-\beta_1}(1-uy)^{-\beta_2}\,du$$

integralini göz önüne alalım. Bu integralde sırasıyla

$$u=1-v,u=\frac{v}{1-x+vx},u=\frac{v}{1-y+vy},u=\frac{1-v}{1-vx},u=\frac{1-v}{1-vy}$$

dönüşümleri yapılırsa istenilen sonuçlar elde edilir.

Teorem 2.2 F_2 Appell hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y) \tag{2.57}$$
$$=(1-x)^{-\alpha_1}F_2\left(\alpha_1,\gamma_1-\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;-\frac{x}{1-x},\frac{y}{1-x}\right)$$

$$= (1-y)^{-\alpha_1} F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2-\beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \frac{x}{1-y}, -\frac{y}{1-y}\right)$$
$$= (1-x-y)^{-\alpha_1} F_2\left(\alpha_1, \gamma_1-\beta_1, \gamma_2-\beta_2; \gamma_1, \gamma_2; -\frac{x}{1-x-y}, -\frac{y}{1-x-y}\right)$$

İspat. (2.52) formülüyle verilen

$$F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\Gamma(\gamma_1-\beta_1)\Gamma(\gamma_2-\beta_2)}$$
$$\times \int_0^1 \int_0^1 u^{\beta_1-1} v^{\beta_2-1} (1-u)^{\gamma_1-\beta_1-1} (1-v)^{\gamma_2-\beta_2-1} (1-ux-vy)^{-\alpha_1}\, dudv$$

eşitliğinin ikinci yanındaki çift katlı integrale

$$\begin{aligned} u &= 1-u' \quad , \quad v = v' \\ u &= u' \quad\quad , \quad v = 1-v' \\ u &= 1-u' \quad , \quad v = 1-v' \end{aligned}$$

dönüşümleri sırasıyla uygulanırsa istenilen sonuçlar elde edilir.

Uyarı 2.1 F_3 ve F_4 fonksiyonları için benzer dönüşümler açıkça görülemez. Ayrıca, (2.54) ile verilen

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\gamma_1-\alpha_1)} \\ &\quad \times \int_0^1 u^{\alpha_1-1} (1-u)^{\gamma_1-\alpha_1-1} (1-ux)^{-\beta_1} (1-uy)^{-\beta_2}\, du \end{aligned}$$

integral gösteriminde $u = \dfrac{1}{v}$ dönüşümü yapılırsa, F_1 fonksiyonunun

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= \frac{\Gamma(\gamma_1)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\gamma_1-\alpha_1)} \\ &\quad \times \int_1^\infty v^{\beta_1+\beta_2-\gamma_1} (v-1)^{\gamma_1-\alpha_1-1} (v-x)^{-\beta_1} (v-y)^{-\beta_2}\, dv \end{aligned}$$

şeklinde bir başka integral gösterimi elde edilmiş olur.

Teorem 2.3 F_1, F_2, F_3 Appell hipergeometrik fonksiyonları

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \tag{2.58}$$
$$= (1-y)^{-\beta_2} F_3\left(\alpha_1, \gamma_1-\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, \frac{y}{y-1}\right)$$
$$= (1-x)^{-\beta_1} F_3\left(\gamma_1-\alpha_1, \alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; \frac{x}{x-1}, y\right)$$

$$F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \tag{2.59}$$
$$= \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta_2} F_2\left(\beta_1+\beta_2,\alpha_1,\beta_2,\gamma_1,\beta_1+\beta_2;x,1-\frac{x}{y}\right)$$
$$= \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta_1} F_2\left(\beta_1+\beta_2,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\beta_1+\beta_2;y,1-\frac{y}{x}\right)$$

$$F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)$$
$$= (1-x)^{-\alpha_1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\gamma_1-\beta_1+n)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}\,m!n!}\left(\frac{x}{x-1}\right)^m\left(\frac{y}{1-x}\right)^n \tag{2.60}$$

bağıntılarını gerçekler.

İspat. F_1 in (2.41) tanımından

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_1+m)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_1+m)_n\,m!n!}x^my^n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m\,m!}\;{}_2F_1(\alpha_1+m,\beta_2;\gamma_1+m;y)\,x^m \end{aligned}$$

dir. Eşitliğin sağ yanındaki ${}_2F_1$ fonksiyonuna Lemma 2.7 deki (2.35) eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ = \;& \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m\,m!}(1-y)^{-\beta_2}\;{}_2F_1\left(\gamma_1-\alpha_1,\beta_2;\gamma_1+m;-\frac{y}{1-y}\right)x^m \\ = \;& (1-y)^{-\beta_2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\gamma_1-\alpha_1)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}\,m!n!}x^m\left(-\frac{y}{1-y}\right)^n \\ = \;& (1-y)^{-\beta_2}F_3\left(\alpha_1,\gamma_1-\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,-\frac{y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenilendir. (2.59) ifadesi, eşitliğin sağ tarafındaki hipergeometrik fonksiyonların serisel ifadeleri yerine yazılır ve basit serisel işlemler yapılırsa kolaylıkla elde edilebilir. (2.60) eşitliği de benzer işlemler yapılarak bulunabilir. ■

2.5.4. Appell Hipergeometrik Fonksiyonları ile Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu Arasındaki İlişkiler

Appell Hipergeometrik fonksiyonları ile Gauss hipergeometrik fonksiyonu arasındaki ilişkileri görmek için bu fonksiyonların parametrelerinin ve değişkenlerinin özel durumlarını seçmek yeterlidir. (2.56) de $y = x$, (2.55) de $\beta_1 + \beta_2 = \gamma_1$ ve (2.57) de $\gamma_1 = \beta_1$ alınarak sırasıyla

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= (1-x)^{\gamma_1-\alpha_1-\beta_1-\beta_2} F(\gamma_1-\alpha_1, \gamma_1-\beta_1-\beta_2; \gamma_1; x) \\ &= F(\alpha_1, \beta_1+\beta_2; \gamma_1; x) \qquad (2.61) \end{aligned}$$

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = (1-y)^{-\alpha_1} F\left(\alpha_1, \beta_1; \beta_1+\beta_2; \frac{x-y}{1-y}\right) \qquad (2.62)$$

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_2; x, y) = (1-x)^{-\alpha_1} F\left(\alpha_1, \beta_2; \gamma_2; \frac{y}{1-x}\right) \qquad (2.63)$$

eşitliklerinin varlığı kolaylıkla gösterilebilir. (2.58) eşitliğinden

$$F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) = (1-y)^{-\beta_2} F_3\left(\alpha_1, \gamma_1-\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, \frac{y}{y-1}\right)$$

olduğundan bilinmektedir. Dolayısıyla F_1 fonksiyonu her zaman F_3 fonksiyonu cinsinden elde edilebilir. Tersine (2.58) ifadesinde $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ alınırsa F_3 fonksiyonu F_1 fonksiyonu cinsinden ifade edilmiş olur. (2.62) den, $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_2$ alınarak F_1 fonksiyonunun hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla ifade edilebileceği görülmektedir. Bu nedenle F_3 fonksiyonlarının ${}_2F_1$ fonksiyonları cinsinden ifadesini elde etmek için (2.58) ifadesinde $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ alınırsa

$$F_3(\alpha_1, \gamma_1-\alpha_1, \beta_1, \gamma_1-\beta_1; \gamma_1; x, y) = (1-y)^{\alpha_1+\beta_1-\gamma_1} {}_2F_1(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; x+y-xy) \qquad (2.64)$$

elde edilir. Şimdi de F_2 fonksiyonunun F_1 fonksiyonu cinsinden ifade edilebileceğini gösterelim. (2.42) ile tanımlanan F_2 fonksiyonunda $\gamma_2 = \alpha_1$ ve $y = -\dfrac{y}{1-y}$ alınıp elde edilen bu hipergeometrik seri $(1-y)^{-\beta_2}$ ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$(1-y)^{-\beta_2} F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \alpha_1; x, -\frac{y}{1-y}\right)$$

Daha sonra F_2 nin serisel ifadesi yerine yazılır ve hipergeometrik fonksiyonlar için bilinen bazı özellikler kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&(1-y)^{-\beta_2} F_2\left(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\alpha_1;x,-\frac{y}{1-y}\right) \\
&= (1-y)^{-\beta_2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\alpha_1)_n m!n!}x^m\left(-\frac{y}{1-y}\right)^n \\
&= (1-y)^{-\beta_2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!}x^m\ {}_2F_1\left(\alpha_1+m,\beta_2;\alpha_1;-\frac{y}{1-y}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!}x^m\ {}_2F_1(\beta_2,-m;\alpha_1;y) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!}x^m\frac{(\alpha_1-\beta_2)_m}{(\alpha_1)_m}\ {}_2F_1(\beta_2,-m;1+\beta_2-\alpha_1-m;1-y) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\beta_1)_m}{(\gamma_1)_m m!}x^m\frac{(\alpha_1-\beta_2)_m}{(\alpha_1)_m}\sum_{n=0}^{m}\frac{(\beta_2)_n(-m)_n}{(1+\beta_2-\alpha_1-m)_n}\frac{(1-y)^n}{n!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(\beta_1)_m(-m)_n(\beta_2)_n(\alpha_1-\beta_2)_m}{m!n!(\gamma_1)_m(1+\beta_2-\alpha_1-m)_n}x^m(1-y)^n
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. $m\to n+s$ alınırsa bu ifadenin eşiti

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_{n+s}(-1)^n(\beta_2)_n(\alpha_1-\beta_2)_{n+s}}{s!n!(\gamma_1)_{n+s}(1+\beta_2-\alpha_1-n-s)_n}x^{n+s}(1-y)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(\beta_1)_{n+s}(\alpha_1-\beta_2)_s(\beta_2)_n}{s!n!(\gamma_1)_{n+s}}x^{n+s}(1-y)^n \\
&= F_1(\beta_1,\alpha_1-\beta_2,\beta_2;\gamma_1;x,x(1-y))
\end{aligned}
$$

olur ki, buradan da

$$
(1-y)^{-\beta_2} F_2\left(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\alpha_1;x,-\frac{y}{1-y}\right) = F_1(\beta_1,\alpha_1-\beta_2,\beta_2;\gamma_1;x,x(1-y)) \tag{2.65}
$$

yazılır. Bunun yanısıra, (2.65) in sağ yanındaki F_1 fonksiyonunda $\gamma_1=\alpha_1$ alınarak ${}_2F_1$ fonksiyonuna indirgenebilir. Ayrıca, (2.65) de $\gamma_1=\gamma_2=\alpha_1$ alınırsa,

$$
F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\alpha_1,\alpha_1;x,y) = (1-x)^{-\beta_1}(1-y)^{-\beta_2}\ {}_2F_1\left(\beta_1,\beta_2;\alpha_1;\tfrac{xy}{(1-x)(1-y)}\right)
$$

elde edilir. Bu eşitliğin, sağ yanındaki ifade x ve y nin kuvvetleri cinsinden seriye açıldığında birinci yandaki F_2 nin elde edileceği de görülebilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Appell Hipergeometrik Fonksiyonları İçin Yineleme Formülleri

Bu kısımda Appell hipergeometrik fonksiyonlarının her bir parametresine bir n tam sayısı ekleyerek yada çıkararak yine Appell hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yineleme formülleri elde edilecektir. Bu işlemler yapılırken (2.18) Pochhammer sembolünün özellikleri sıkça kullanılacaktır. İkinci bölümde (2.41), (2.42), (2.43) ve (2.44) formülleri ile verilen F_1, F_2, F_3, F_4 fonksiyonlarını tekrar hatırlayalım.

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},\\
F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},\\
F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!},\\
F_4(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_{m+n}}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}
\end{aligned}$$

dir.

3.1.1. F_1 için yineleme formülleri

Bu kısımda ilk olarak F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonu için α_1 parametresine göre bir yineleme formülü elde edilecektir. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1+n,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)\\
&+\frac{\beta_1 x}{\gamma_1}\sum_{k=1}^{n}F_1(\alpha_1+k,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y)\\
&+\frac{\beta_2 y}{\gamma_1}\sum_{k=1}^{n}F_1(\alpha_1+k,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)
\end{aligned}\tag{3.1}$$

dir. Bu ifadenin doğruluğunu görmek için ilk olarak F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonunun tanımında α_1 yerine α_1+1 yazılır ve

$$(\alpha_1+1)_{m+n}=(\alpha_1)_{m+n}\left(1+\frac{m}{\alpha_1}+\frac{n}{\alpha_1}\right)$$

Pochhammer sembolünün özelliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1+1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}\left(1+\frac{m}{\alpha_1}+\frac{n}{\alpha_1}\right)(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}+\sum_{n=0,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{m}{a_1}\frac{x^m}{m(m-1)!}\frac{y^n}{n!}\\
&+ \sum_{n=1,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{n}{\alpha_1}\frac{y^n}{n(n-1)!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikteki ikinci toplamda m yerine $m+1$, üçüncü toplamda da n yerine $n+1$ indis dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\\
&+\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n+1}(\beta_1)_{m+1}(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n+1}}\frac{1}{\alpha_1}\frac{x^{m+1}}{m!}\frac{y^n}{n}\\
&+\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n+1}(\beta_1)_m(\beta_2)_{n+1}}{(\gamma_1)_{m+n+1}}\frac{1}{\alpha_1}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Pochhammer sembolünün

$$(\lambda)_{m+1}=\lambda(\lambda+1)_m$$

özelliği kullanılırsa ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)\\
&+\frac{\beta_1x}{\gamma_1}F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y)\\
&+\frac{\beta_2y}{\gamma_1}F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) de α_1 yerine α_1+1 alınıp (3.2) tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1+2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\
&+\frac{\beta_1 x}{\gamma_1}F_1(\alpha_1+2,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \\
&+\frac{\beta_2 y}{\gamma_1}F_1(\alpha_1+2,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y) \\
&= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\
&+\frac{\beta_1 x}{\gamma_1}\left[F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y)\right. \\
&\left.+F_1(\alpha_1+2,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y)\right] \\
&+\frac{\beta_2 y}{\gamma_1}\left[F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)\right. \\
&\left.+F_1(\alpha_1+2,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir . Bunu işlem n kez tekrarlanırsa istenilen sonuç elde edilebilir.
(3.2) de α_1 yerine α_1-1 yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1-1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\
&+\frac{\beta_1 x}{\gamma_1}F_1(\alpha_1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \\
&+\frac{\beta_2 y}{\gamma_1}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1-1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\
&-\frac{\beta_1 x}{\gamma_1}F_1(\alpha_1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \\
&-\frac{\beta_2 y}{\gamma_1}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3) de tekrar α_1 yerine α_1-1 alınırsa

$$\begin{aligned}
F_1(\alpha_1-2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\
&-\frac{\beta_1 x}{\gamma_1}\left[F_1(\alpha_1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y)\right. \\
&\left.+F_1(\alpha_1-1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y)\right] \\
&-\frac{\beta_2 y}{\gamma_1}\left[F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)\right. \\
&\left.+F_1(\alpha_1-1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu işlem $n-1$ kez tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1-n,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &-\frac{\beta_1 x}{\gamma_1}\sum_{k=0}^{n-1}F_1(\alpha_1-k,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \\ &-\frac{\beta_2 y}{\gamma_1}\sum_{k=0}^{n-1}F_1(\alpha_1-k,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y) \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir.

(3.1) ve (3.4) ifadelerinin bir diğer gösterimi

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1+n,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}} \\ &\times x^i y^k F_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1-n,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}} \\ &\times(-x^i)\left(-y^k\right)F_1(\alpha_1,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y) \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklindedir.

Bu ifadelerin doğruluğunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanalım. Aynı yöntemi kullanarak (3.6) bağıntısının ispatıda benzer şekilde yapılabilir. $n=1$ için ifadenin doğruluğu görülebilir. $n=t$ için doğru olduğunu kabul edelim. $n=t+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1+t,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}} \\ &\times x^i y^k F_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y) \end{aligned}$$

dir. α_1 yerine α_1+1 yazılırsa

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1+t+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}} \\ &\times x^i y^k F_1(\alpha_1+i+k+1,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y) \end{aligned}$$

olur. Son eşitliğin sağ yanındaki ifadede bulunan F_1 fonksiyonuyla (3.2) eşitliği karşılaştırılırsa, α_1 yerine α_1+i+k, β_1 yerine β_1+i, β_2 yerine β_2+k, γ yerine

γ_1+i+k geldiği görülür. (3.2) göz önüne alınarak bu fonksiyon tekrar yazılırsa

$$F_1(\alpha_1+t+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}}x^iy^k$$
$$\times\Big[F_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y)$$
$$+\tfrac{(\beta_1+i)x}{\gamma_1+i+k}F_1(\alpha_1+i+k+1,\beta_1+i+1,\beta_2+k;\gamma_1+i+k+1;x,y)$$
$$+\tfrac{(\beta_2+k)y}{\gamma_1+i+k}F_1(\alpha_1+i+k+1,\beta_1+i,\beta_2+k+1;\gamma_1+i+k+1;x,y)\Big]$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$F_1(\alpha_1+t+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=$$
$$\sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}}x^iy^kF_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y)$$
$$+\sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_1+i)(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}(\gamma_1+i+k)}x^{i+1}y^k$$
$$F_1(\alpha_1+i+k+1,\beta_1+i+1,\beta_2+k;\gamma_1+i+k+1;x,y)$$
$$+\sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k(\beta_2+k)}{(\gamma_1)_{i+k}(\gamma_1+i+k)}x^iy^{k+1}$$
$$F_1(\alpha_1+i+k+1,\beta_1+i,\beta_2+k+1;\gamma_1+i+k+1;x,y)$$

olduğu görülür. İkinci toplamda i yerine $i-1$, üçüncü toplamda k yerine $k-1$ indis dönüşümü yapılır ve

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{m} = 0 \quad , \qquad (m>n \text{ veya } m<0 \ \text{ ise})$$

özellikleri kullanılırsa

$$F_1(\alpha_1+t+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) = \sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}}x^iy^k$$
$$F_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y)$$
$$+\sum_{i=1}^{t+1}\sum_{k=0}^{t-i+1}\binom{t}{i-1}\binom{t-i+1}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}}x^iy^k$$
$$F_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y)$$
$$+\sum_{i=0}^{t}\sum_{k=0}^{t-i}\binom{t}{i}\binom{t-i}{k-1}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}}x^iy^k$$
$$F_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y)$$
$$=\sum_{i=0}^{t+1}\sum_{k=0}^{t-i+1}\binom{t+1}{i}\binom{t+1-i}{k}\frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_{i+k}}x^iy^k$$
$$\times F_1(\alpha_1+i+k,\beta_1+i,\beta_2+k;\gamma_1+i+k;x,y)$$

elde edilir. Bu ise istenilendir.

Eğer $F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)$ fonksiyonundaki β_1 parametresine n doğal sayısı eklenirse

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1,\beta_1+n,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1 x}{\gamma_1}\sum_{k=1}^{n} F_1(\alpha_1+1,\beta_1+k,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \end{aligned} \tag{3.7}$$

formülü, n doğal sayısı çıkarılırsa

$$\begin{aligned} F_1(a_1,\beta_1-n,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &-\frac{\alpha_1 x}{\gamma_1}\sum_{k=0}^{n-1} F_1(\alpha_1+1,\beta_1-k,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \end{aligned} \tag{3.8}$$

formülü elde edilir.

Gerçekten, F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonunun tanımı kullanılır ve Pochhammer sembolünün $(\beta_1+1)_m=(\beta_1)_m\left(1+\frac{m}{\beta_1}\right)$ özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1+1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\tfrac{x^m}{m!}\tfrac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m\left(1+\frac{m}{\beta_1}\right)(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\tfrac{x^m}{m!}\tfrac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\tfrac{x^m}{m!}\tfrac{y^n}{n!}+\sum_{n=0,m=1}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\tfrac{m}{\beta_1}\tfrac{x^m}{m(m-1)!}\tfrac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\tfrac{x^m}{m!}\tfrac{y^n}{n!}+\sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1)_{m+n+1}(\beta_1)_{m+1}(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n+1}}\tfrac{x^{m+1}}{m!}\tfrac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\tfrac{x^m}{m!}\tfrac{y^n}{n!}+\gamma\sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1+1)_{m+n}(\beta_1+1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1+1)_{m+n}}\tfrac{x^m}{m!}\tfrac{y^n}{n!} \\ &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)+\tfrac{\alpha_1 x}{\gamma_1}F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Yukarıdaki ifadenin üçüncü eşitliğinde ikinci toplamında m yerine $m+1$ indis dönüşümü yapılmıştır.

Şimdi (3.9) de β_1 yerine β_1-1 yazılırsa

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1-1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1 x}{\gamma_1}F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1,\beta_1-1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &-\frac{\alpha_1 x}{\gamma_1}F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.10) de bir kez daha β_1 yerine $\beta_1 - 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1 - 2, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= F_1(\alpha_1, \beta_1 - 1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \\ &\quad - \frac{\alpha_1 x}{\gamma_1} F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1 - 1, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y) \\ &= F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \\ &\quad - \frac{\alpha_1 x}{\gamma_1} [F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y) \\ &\quad + F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1 - 1, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y)] \end{aligned}$$

olur. Bu işlem $n - 1$ kez tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1 - n, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \\ &\quad - \frac{\alpha_1 x}{\gamma_1} \sum_{k=0}^{n-1} F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1 - k, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.(3.7) ve (3.8) nin farklı bir ifadeleri de

$$F_1(\alpha_1, \beta_1 + n, \beta_2; \gamma_1; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \frac{(\alpha_1)_k}{(\gamma_1)_k} x^k F_1(\alpha_1 + k, \beta_1 + k, \beta_2; \gamma_1 + k; x, y) \tag{3.11}$$

ve

$$F_1(\alpha_1, \beta_1 - n, \beta_2; \gamma_1; x, y) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \frac{(\alpha_1)_k}{(\gamma_1)_k} \left(-x^k\right) F_1(\alpha_1 + k, \beta_1, \beta_2; \gamma_1 + k; x, y) \tag{3.12}$$

dir.

(3.11) i ispat etmek için (3.9) ifadesi kullanılır ve β_1 yerine $\beta_1 + 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1, \beta_1 + 2, \beta_2; \gamma_1; x, y) &= F_1(\alpha_1, \beta_1 + 1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \\ &\quad + \frac{\alpha_1 x}{\gamma_1} F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1 + 2, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y) \\ &= F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \\ &\quad + \frac{\alpha_1 x}{\gamma_1} F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1 + 1, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y) \\ &\quad + \frac{\alpha_1 x}{\gamma_1} \Big[F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1 + 1, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y) \\ &\quad + \frac{(\alpha_1 + 1)\, x}{(\gamma_1 + 1)} F_1(\alpha_1 + 2, \beta_1 + 2, \beta_2; \gamma_1 + 2; x, y)\Big] \\ &= F_1(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1; x, y) \\ &\quad + 2\frac{\alpha_1 x}{\gamma_1} F_1(\alpha_1 + 1, \beta_1 + 1, \beta_2; \gamma_1 + 1; x, y) \\ &\quad + \frac{(\alpha_1)_2}{(\gamma_1)_2} x F_1(\alpha_1 + 2, \beta_1 + 2, \beta_2; \gamma_1 + 2; x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu işlem n kez tekrarlanırsa

$$F_1(\alpha_1,\beta_1+n,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(\alpha_1)_k}{(\gamma_1)_k}x^kF_1(\alpha_1+k,\beta_1+k,\beta_2;\gamma_1+k;x,y)$$

bulunur. Şimdi de $F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)$ fonksiyonunun γ_1 parametresi için bir gösterim

$$\begin{aligned}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-n;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\alpha_1\beta_1x\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+2-k;x,y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)} \\ &+\alpha_1\beta_2y\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+2-k;x,y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)}\end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklindedir.

Bu ifadenin doğruluğunu görmek için

$$\frac{1}{(\gamma_1-1)_{m+n}}=\frac{1}{(\gamma_1)_{m+n}}\left(1+\frac{m}{(\gamma_1-1)}+\frac{n}{(\gamma_1-1)}\right)$$

özelliği göz önüne alınıp F_1 Appell hipergeometrik fonksiyonunun tanımında γ_1 yerine γ_1-1 alınırsa

$$\begin{aligned}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1;x,y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1-1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{(\gamma_1)_{m+n}}\left(1+\frac{m}{(\gamma_1-1)}+\frac{n}{(\gamma_1-1)}\right) \\ &\quad\times(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ &\quad+\sum_{n=0,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{m}{(\gamma_1-1)}\frac{x^m}{m(m-1)!}\frac{y^n}{n!} \\ &\quad+\sum_{n=1,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n}(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{n}{(\gamma_1-1)}\frac{y^n}{n(n-1)!}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikteki ikinci toplamda m yerine $m+1$, üçüncü toplamda n yerine $n+1$ indis dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_1-1}\frac{(\alpha_1)_{m+n+1}(\beta_1)_{m+1}(\beta_2)_n}{(\gamma_1)_{m+n+1}}\frac{x^{m+1}}{m!}\frac{y^n}{n!} \\ &+\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_1-1}\frac{(\alpha_1)_{m+n+1}(\beta_1)_m(\beta_2)_{n+1}}{(\gamma_1)_{m+n+1}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}(\alpha_1)_{m+n+1} &= \alpha_1 (\alpha_1+1)_{m+n} \\ (\beta_1)_{m+1} &= \beta_1 (\beta_1+1)_m \\ (\gamma_1)_{m+n+1} &= \gamma_1 (\gamma_1+1)_{m+n}\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikleri yukarıda yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_1 x}{\gamma_1(\gamma_1-1)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_2 y}{\gamma_1(\gamma_1-1)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur. (3.14) de tekrar γ_1 yerine γ_1-1 alalım. Bu durumda (3.14)

$$\begin{aligned}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-2;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_1 x}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_2 y}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1;x,y) \\ &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_1 x}{\gamma_1(\gamma_1-1)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_1 x}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_2 y}{\gamma_1(\gamma_1-1)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y) \\ &+\frac{\alpha_1\beta_2 y}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)}F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1;x,y)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu işlem n kez tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-n;x,y) &= F_1(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\ &+\alpha_1\beta_1 x\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+2-k;x,y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)} \\ &+\alpha_1\beta_2 y\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(\alpha_1+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+2-k;x,y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)}\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.2. F_2 için yineleme formülleri

Birinci kısımda F_1 hipergeometrik fonksiyonu için elde edilen formüller bu kısımda F_2 Appell hipergeometrik fonksiyonu için elde edilecekdir. İlk olarak

$$F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right)$$

fonksiyonundaki α_1 parametresi için

$$\begin{aligned} F_2\left(\alpha_1+n, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right) &= F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right) \\ &+\frac{\beta_1 x}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{n} F_2\left(\alpha_1+k, \beta_1+1, \beta_2; \gamma_1+1, \gamma_2; x, y\right) \\ &+\frac{\beta_2 y}{\gamma_2} \sum_{k=1}^{n} F_2\left(\alpha_1+k, \beta_1, \beta_2+1; \gamma_1, \gamma_2+1; x, y\right) \end{aligned} \tag{3.15}$$

ve

$$\begin{aligned} F_2\left(\alpha_1-n, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right) &= F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right) \\ &-\frac{\beta_1 x}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{n-1} F_2\left(\alpha_1-k, \beta_1+1, \beta_2; \gamma_1+1, \gamma_2; x, y\right) \\ &-\frac{\beta_2 y}{\gamma_2} \sum_{k=1}^{n-1} F_2\left(\alpha_1-k, \beta_1, \beta_2+1; \gamma_1, \gamma_2+1; x, y\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

formülleri mevcuttur. Bu ifadenin ispatı için $F_2\left(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right)$ fonksiyonunun tanımı ve

$$\left(\alpha_1+1\right)_{m+n}=\left(\alpha_1\right)_{m+n}\left(1+\frac{m}{\alpha_1}+\frac{n}{\alpha_1}\right)$$

özelliği kullanılır, (3.1) in ispatındaki işlemler tekrarlanırsa istenilen sonuç elde edilebilir. (3.15) ve (3.16) eşitliklerinin farklı bir gösterim şekli ise

$$F_2\left(\alpha_1+n, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right)=\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k} \frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_k} \tag{3.17}$$
$$x^i y^k F_2\left(\alpha_1+i+k, \beta_1+i, \beta_2+k; \gamma_1+i, \gamma_2+k; x, y\right)$$

$$F_2\left(\alpha_1-n, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y\right)=\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k} \frac{(\beta_1)_i(\beta_2)_k}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_k} \tag{3.18}$$
$$\left(-x^i\right)\left(-y^k\right) F_2\left(\alpha_1, \beta_1+i, \beta_2+k; \gamma_1+i, \gamma_2+k; x, y\right)$$

şeklindedir. Bu ifadeyi ispatlamak için, (3.5) ve (3.6) ispatındaki benzer yollar takip edilebilir.

$F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y)$ nin β_1 ve β_2 parametreleri için

$$\begin{aligned}
F_2(\alpha_1, \beta_1+n, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) &= F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) \\
&+ \tfrac{\alpha_1 x}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{n} F_2(\alpha_1+1, \beta_1+k, \beta_2; \gamma_1+1, \gamma_2; x, y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \tfrac{(\alpha_1)_k}{(\gamma_1)_k} x^k F_2(\alpha_1+k, \beta_1+k, \beta_2; \gamma_1+k, \gamma_2; x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(\alpha_1, \beta_1-n, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) &= F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) \\
&- \tfrac{\alpha_1 x}{\gamma_1} \sum_{k=0}^{n-1} F_2(\alpha_1+1, \beta_1-k, \beta_2; \gamma_1+1, \gamma_2; x, y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \tfrac{(\alpha_1)_k}{(\gamma_1)_k} \left(-x^k\right) F_2(\alpha_1+k, \beta_1, \beta_2; \gamma_1+k, \gamma_2; x, y)
\end{aligned}$$

formülleri mevcuttur. Şimdi, $F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y)$ nin γ_1 parametresi için

$$\begin{aligned}
F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1-n, \gamma_2; x, y) &= F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; x, y) \\
&+ \alpha_1 \beta_1 x \sum_{k=1}^{n} \frac{F_2(\alpha_1+1, \beta_1+1, \beta_2; \gamma_1+2-k, \gamma_2; x, y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \tfrac{(\alpha_1)_k (\beta_1)_k x^k}{(\gamma_1)_k (\gamma_1-n)_k} \\
&\times F_2(\alpha_1+k, \beta_1+k, \beta_2; \gamma_1+k, \gamma_2; x, y)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

eşitliğini ispatlayalım. Bunun için F_2 Appell hipergeometrik fonksiyonunun tanımı ve

$$\frac{1}{(\gamma_1-1)_m} = \frac{1}{(\gamma_1)_m}\left(1+\frac{m}{\gamma_1-1}\right)$$

özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_2(\alpha_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1-1, \gamma_2; x, y) &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \tfrac{(\alpha_1)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1-1)_m (\gamma_2)_n} \tfrac{x^m}{m!} \tfrac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \tfrac{1}{(\gamma_1)_m} \left(1+\tfrac{m}{\gamma_1-1}\right) (\alpha_1)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n \tfrac{x^m}{m!} \tfrac{y^n}{n!} \\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty} \tfrac{(\alpha_1)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n} \tfrac{x^m}{m!} \tfrac{y^n}{n!} \\
&+ \sum_{n=0,m=1}^{\infty} \tfrac{(\alpha_1)_{m+n} (\beta_1)_m (\beta_2)_n}{(\gamma_1)_m (\gamma_2)_n} \tfrac{1}{(\gamma_1-1)} \tfrac{x^m}{(m-1)!} \tfrac{y^n}{n!}
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikteki ikinci toplamda m yerine $m+1$ dönüşümü yapılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, ayrıca

$$\begin{aligned}(\alpha_1)_{m+n+1} &= \alpha_1(\alpha_1+1)_{m+n}\\ (\beta_1)_{m+1} &= \beta_1(\beta_1+1)_m\\ (\gamma_1)_{m+1} &= \gamma_1(\gamma_1+1)_m\end{aligned}$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1,\gamma_2;x,y) &= F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\\ &+\tfrac{\alpha_1\beta_1 x}{\gamma_1(\gamma_1-1)}\sum_{n,m=0}^{\infty}\tfrac{(\alpha_1+1)_{m+n}(\beta_1+1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma_1+1)_m(\gamma_2)_n}\tfrac{x^m}{m!}\tfrac{y^n}{n!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1,\gamma_2;x,y) &= F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\\ &+\tfrac{\alpha_1\beta_1 x}{\gamma_1(\gamma_1-1)}F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1,\gamma_2;x,y)\end{aligned}\tag{3.20}$$

elde edilir. (3.20) de γ_1 yerine γ_1-1 yazılır ve (3.20) tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned}F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-2,\gamma_2;x,y) &= F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1,\gamma_2;x,y)\\ &+\tfrac{\alpha_1\beta_1 x}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)}F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\\ &= F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\\ &+\tfrac{\alpha_1\beta_1 x}{\gamma_1(\gamma_1-1)}F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1,\gamma_2;x,y)\\ &+\tfrac{a_1 b_1 x}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)}F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\end{aligned}$$

olur. Bu işlem n kez takrarlanırsa

$$\begin{aligned}F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-n,\gamma_2;x,y) &= F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\\ &+\alpha_1\beta_1 x\sum_{k=1}^{n}\tfrac{F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+2-k,\gamma_2;x,y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (3.20) de γ_1 yerine $\gamma_1 - 1$ alınır ve sağ taraftaki iki F_2 fonksiyonuna yine (3.20) uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
& F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-2,\gamma_2;x,y) = F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-1,\gamma_2;x,y) \\
& +\frac{\alpha_1\beta_1 x}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)} F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y) \\
& \qquad\qquad = F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y) \\
& +\frac{\alpha_1\beta_1 x}{\gamma_1(\gamma_1-1)} F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1,\gamma_2;x,y) \\
& +\frac{\alpha_1\beta_1 x}{(\gamma_1-1)(\gamma_1-2)} \left[F_2(\alpha_1+1,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1,\gamma_2;x,y)\right. \\
& \left.+\frac{(\alpha_1+1)(\beta+1)x}{\gamma_1(\gamma_1+1)} F_2(\alpha_1+2,\beta_1+2,\beta_2;\gamma_1+2,\gamma_2;x,y)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu işlem n kez tekrarlanırsa

$$
\begin{aligned}
F_2(\alpha_1,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-n,\gamma_2;x,y) &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \frac{(\alpha_1)_k(\beta_1)_k x^k}{(\gamma_1)_k(\gamma_1-n)_k} \\
& \times F_2(\alpha_1+k,\beta_1+k,\beta_2;\gamma_1+k,\gamma_2;x,y)
\end{aligned}
$$

elde ederiz.

3.1.3. F_3 için yineleme formülleri

Bu kısımda $F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)$ Appell hipergeometrik fonksiyonu için α_1 ve γ_1 parametreleri için yineleme formülleri elde edilecektir. Diğer parametrelerin yineleme formülleri önceki kesimlerdeki benzer işlemler uygulanarak kolaylıkla elde edilebilir. İlk olarak α_1 paramatresine göre yineleme formüllerini ispatsız olarak verelim. Bu formüller

$$
\begin{aligned}
F_3(\alpha_1+n,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\
& +\tfrac{\beta_1 x}{\gamma_1} \sum_{k=1}^{n} F_3(\alpha_1+k,\alpha_2,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+1;x,y) \\
F_3(\alpha_1-n,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) &= F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y) \\
& -\tfrac{\beta_1 x}{\gamma_1} \sum_{k=0}^{n-1} F_3(\alpha_1-k,\alpha_2,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+1;x,y)
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

şeklindedir. Ayrıca (3.21) formüllerinin bir diğer gösterimi

$$F_3(\alpha_1+n,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\beta_1)_k}{(\gamma_1)_k}x^kF_3(\alpha_1+k,\alpha_2,\beta_1+k,\beta_2;\gamma_1+k;x,y)$$

$$F_3(\alpha_1-n,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\beta_1)_k}{(\gamma_1)_k}\left(-x^k\right)F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1+k,\beta_2;\gamma_1+k;x,y)$$

biçimindedir. γ_1 parametresine göre yineleme formülü

$$\begin{aligned}F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1-n;x,y)&=F_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2;\gamma_1;x,y)\\&+\alpha_1\beta_1x\sum_{k=1}^{n}\tfrac{F_3(\alpha_1+1,\alpha_2,\beta_1+1,\beta_2;\gamma_1+2-k;x,y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)}\\&+\alpha_2\beta_2y\sum_{k=1}^{n}\tfrac{F_3(\alpha_1,\alpha_2+1,\beta_1,\beta_2+1;\gamma_1+2-k;x,y)}{(\gamma_1-k)(\gamma_1-k+1)}\end{aligned}$$

biçimindedir.

3.1.4. F_4 için yineleme formülleri

$F_4(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y)$ Appel hipergeometrik fonksiyonunun α parametresine göre yineleme formülü

$$\begin{aligned}F_4(\alpha_1+n,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y)&=F_4(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\\&+\frac{\beta_1x}{\gamma_1}\sum_{k=1}^{n}F_4(\alpha_1+k,\beta_1+1;\gamma_1+1,\gamma_2;x,y)\\&+\frac{\beta_1y}{\gamma_2}\sum_{k=1}^{n}F_4(\alpha_1+k,\beta_1+1;\gamma_1,\gamma_2+1;x,y)\end{aligned}\tag{3.22}$$

ve

$$\begin{aligned}F_4(\alpha_1-n,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y)&=F_4(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y)\\&-\frac{\beta_1x}{\gamma_1}\sum_{k=1}^{n-1}F_4(\alpha_1-k,\beta_1+1;\gamma_1+1,\gamma_2;x,y)\\&-\frac{\beta_1y}{\gamma_2}\sum_{k=1}^{n-1}F_4(\alpha_1-k,\beta_1+1;\gamma_1,\gamma_2+1;x,y)\end{aligned}\tag{3.23}$$

şeklindedir. Ayrıca (3.22) ve (3.23) formüllerin bir diğer gösterim şekli ise

$$\begin{aligned}F_4(\alpha_1+n,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\tbinom{n}{i}\tbinom{n-i}{k}\frac{(\beta_1)_{i+k}}{(\gamma_1)_i(\gamma_2)_k}\\&\quad x^iy^kF_4(\alpha_1+i+k,\beta_1+i+k;\gamma_1+i,\gamma_2+k;x,y)\end{aligned}$$

$$F_4\left(\alpha_1-n,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}\frac{(\beta_1)_{i+k}}{(\gamma_1)_i\,(\gamma_2)_k}$$
$$\left(-x^i\right)\left(-y^k\right)F_4\left(\alpha_1,\beta_1+i+k;\gamma_1+i,\gamma_2+k;x,y\right)$$

dir. γ_1 parametresi için yineleme formülleri

$$\begin{aligned} F_4\left(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1-n,\gamma_2;x,y\right) &= F_4\left(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1,\gamma_2;x,y\right) \\ &+\alpha_1\beta_1 x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F_4\left(\alpha 1+1,\beta_1+1;\gamma_1+1-k,\gamma_2;x,y\right)}{(\gamma_1-k)\,(\gamma_1-k-1)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_4\left(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1-n,\gamma_2;x,y\right) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(\alpha_1)_k\,(\beta)_k}{(\gamma_1)_k\,(\gamma_1-n)_k}x^k \\ &\times F_4\left(\alpha_1+k,\beta_1+k;\gamma_1+k,\gamma_2;x,y\right) \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu formüllerin ispatı (3.19) in ispatına benzer şekilde yapılabilir. γ_2 içinde yine aynı yollar takip edilerek benzer bir formül elde edilebilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle hipergeometrik fonksiyon tanıtılmış ve sağladığı çeşitli özellikler verilmiştir. Daha sonra Appell hipergeometrik fonksiyonları incelenmiş ve bu fonksiyonların yineleme formülleri elde edilmiş olup doktora öncesi temel bir kaynak olacak şekilde çalışma yapılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] P.Appell, J. Kampé de Fériet, Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

[2] S.B. Opps, N. Saad, H.M. Srivastava, Some reduction and transformation formulas for the Appell hypergeometric function F_2, J. Math. Anal. Appl. 302 (2005), pp. 180-195.

[3] S.B. Opps, N. Saad, and H.M. Srivastava, Rcarsion formulas for Appell's hypergeometric functionF_2 with some applications to radiotion field problem, Appl. Math. Comupt. 207 (2009), pp. 545-558

[4] E.D. Rainville, Special functions, Macmillan Company, New York, 1960; Reprinted by Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1971.

[5] L.J. Slater, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[6] H.M. Srivastava, H.L. Monacha, A Treatise on Generating Functions, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), Wiley, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1984.

[7] H.M. Srivastava and P.W. Karlsson, Multiple Gaussian Hpergeometric Series, Halsted Press (John Wiley and Sons), New York, 1985.

[8] X. Wang, Recursion formulas for Appell functions, Integral Transforms Spec. Funct. First, (2011), pp. 1-13.

[9] Şahin, Recep; Altin, Abdullah An extension of F1, F2, F3 Appell's hypergeometric functions. Ars Combin. 100 (2011), 97–105.

[10] N.M. Temme, Special Functions, Wiley, New York, 1996.

[11] W.N. Bailey, Generalized Hypergeometric Series, Stechert-Hafner Ser. Agency, 1964.