KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GAUSS-WEIERSTRASS TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

DÖNDÜ DUYGU YILDIZ

OCAK 2014

Matematik Anabilim Dalında DÖNDÜ DUYGU YILDIZ tarafından hazırlanan GAUSS-WEIERSTRASS TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr.Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr.Ali ARAL
Danışman

Juri Üyeleri

Başkan	: Doç. Dr. Ali OLGUN	__________________
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Ali ARAL	__________________
Üye	: Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK	__________________

…/…/2014

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

GAUSS-WEIERSTRASS TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YILDIZ, Döndü Duygu
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Ali ARAL
OCAK 2014, 63 sayfa

Bu tez, ikisi açıklama ikisi de temel bölüm olmak üzere toplam dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin amacı ve kaynaklar hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılacak bazı temel kavramları açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde q-Gauss-Weierstrass integrali yakınsaklık özellikleri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss- Weiestrass singuler integrallerin Jackson tipli genelleştirmeleri için bazı yakınsaklık sonuçları ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Süreklilik Modülü, P.P.Korovkin teoremi, q -Türev, Picard, Poisson-Cauchy integrali, q-Gauss Weierstrass integrali , Jackson tipli genelleştirme.

ABSTRACT

THE CONVERGENCE PROPERTİES OF GAUSS WEİERSTRASS TYPE OPERATORS

YILDIZ, Döndü Duygu
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M. Sc. Thesis
Supervisor:Assc: Prof. Dr. Ali ARAL
JANUARY 2014, 63 pages

There are four chapters in this thesis, two of them are about explanations and two of them are about basic chapters.

Information about the purpose of the thesis and resources are given in the first chapter.

Some definition in the thesis are presented in the second chapter.

The convergence properties of q-Gauss-Weierstrass are given in third chapter.

The convergence properties of Jakson type Picard, Poisson-Cauchy and Gauss- Weiestrass singuler integrals are given in fourth chapter.

Key Words: Modulus of Continuity, P.P.Korovkin theorem q -Derivative
Picard, Poisson-Cauchy integrals, q-Gauss Weierstrass integral
Jackson type generalization

TEŞEKKÜR

Hayatımın başlangıcından itibaren olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, yüksek lisans öğreniminde ve tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı ve ilgisini esirgemeyen, değerli danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Ali ARAL' a ve kıymetli arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Bu tez TÜBİTAK tarafından 112T548 numaralı proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\omega(f:\delta)$	Süreklilik Modülü
$L_{\boldsymbol{n}}(f:x)$	Lineer Pozitif Operatörler
$[r]_q$	q − Tamsayısı
$[r]_q!$	q − Faktöriyel
$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$	q − Binom Katsayısı
$d_q f(x)$	q − Diferansiyel
$D_q f(x)$	q − Türev
$W_n(f;q,x)$	q − Gauss weierstrass Operatörü
$C[0,\infty)$	Sürekli Fonksiyonlar uzayı
$P_{n,\xi}(f)(z)$	Picard Operatörü
$Q_{n,\xi}(f)(z)$	Poisson Cauchy Operatörü
$\Omega_2(f,\delta)$	Ağırlıklı Süreklilik Modülü

1.GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi, temel olarak verilen fonksiyona kendisinden çok daha basit ve kolay hesaplanabilen fonksiyona yaklaşmayı amaçlayan, Matematiksel Analiz' in temel konularından birisidir.

A. F. Timan'ın (A. F. Timan, 1963) hatırlattığı gibi reel değerli fonksiyonlar ile yaklaşımlar teorisinin temeli 1885 yılında Weierstrass tarafından verilen bir teoreme dayanmaktadır. Bu teoreme göre " Sonlu $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı her sürekli fonksiyona, düzgün yakınsayan bir polinom karşılık gelir."

1912 yılında S. N. Bernstein bu sonucu çok daha basit ispat yöntemleri kullanarak vermiştir.

Korovkin ise Lineer pozitif operatör dizilerinin, sürekli fonksiyona sonlu kapalı aralık üzerinde düzgün yakınsaklığını veren test fonksiyonlarının kümesinin varlığını göstermiştir. Bu sonuca göre test fonksiyonları $e_i(x) = x^i \quad i = 0,1,2$ fonksiyonlarından oluşur. Yani $L_{\boldsymbol{n}}$ lineer pozitif operatörler dizisinin sonlu $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonu düzgün yakınsak olması için gerek ve yeterli şart $L_{\boldsymbol{n}}(t)$ operatör dizisinin f fonksiyonuna yalnızca $e_i(x) = x^i, i = 0,1,2$ fonksiyonları için düzgün yakınsamasıdır.

Günümüzde q −analizi metodları kullanılarak operatör dizilerinin yakınsaklık şartlarını araştırmak, yaklaşımlar teorisinin önemli araştırma alanlarından birisi olmuştur. Araştırmalar göstermiştir ki q −sayıları kullanılarak oluşturulmuş operatör dizileri, klasik operatör dizilerine göre, yaklaşımların hızını bulma açısından daha etkilidir. Ayrıca klasik operatörler için elde edilemeyen bazı sonuçlar q −analiz yöntemleri ile elde edilebilmektedir. q −sayılar kullanılarak, 1987 yılanda Lupas ilk olarak Bernstein operatörlerinin q −analoğunu tanımlamış ve bazı yaklaşım özelliklerini ispatlamıştır.

1997 yılında Phillips Bernstein operatörlerinin bir başka genelleştirmesini tanımlamış (G.M. Phillips, 1997) ve adına q − Bernstein operatörleri demiştir. Bu operatörler birçok yazar tarafından çalışılmıştır. (V. Gupta, Ali ARAL, F. Altomare , Z. Xu, T. Ernst, …)

Bu tez çalışmasında öncelikle Gauss Weierstrass integralinin q-analogu tanımlamış ve yaklaşım özelikleri ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir. Daha sonra ağırlıklı Korovkin teoremleri yardımı ile düzgün yakınsaklık problemi ele alınmıştır. Ayrıca bu operatörün ve diğer Gauss Weierstrass tipli operatörlerin kompleks değişkenler için bir genelleştirmeleri tanımlanmış ve yakınsaklık özellikleri incelenmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için F. H. Jackson ın "On a q-definite integrals, V. G. Kac ın P. Cheung, "Quantum Calculus" ve G. M. Phillips in "On generalized Bernstein polynomials" adlı kitaplarından faydalanılmıştır q- Gauss Weierstrass operatörleri ve yaklaşım özellikleri için G A. Anastassiou, A.Aral ın "On Gauss Weierstrass İntegral Operators '' adlı makalesinden, Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss- Weiestrass singuler integrallerin Jackson tipli genelleştirmeleri için bazı yakınsaklık sonuçları için G.A. Anastassiou and S. G. Gal ın "Geometric and approximation properties of generalized singular integrals in the unit disk" adlı makalesi kullanılmıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu tez çalışmasında q-Gauss-Weierstrass integrali yakınsaklık özellikleri ağırlıklı uzaylarda Korovkin teoremleri yardımı ile ele alınmıştır. Ayrıca Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss- Weiestrass singüler integralerin Jackson tipli genelleştirmelerinin kompleks versiyonları verilmiş ve yüksek mertebeden süreklilik modülleri yardımı ile yakınsaklık sonuçları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $q > 0,\ r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$[r]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^r}{1-q} & q \neq 1 \\ r & ,q = 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[r]_q$ sayısına $\boldsymbol{q}$ **−tamsayısı** denir.

Tanım 2.2. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$[a]_{n,q} = [a]_q[a+1]_q \dots [a+n-1]_q = \prod_{m=0}^{n-1} [a+m]_q$$

ifadesine $\boldsymbol{q}$**- Pochammer gösterilimi** denir.

Kısaca hatırlatacak olursak klasik anlamdaki Pochammer gösterimi;

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)$$

şeklindedir.

Şimdi tanımdan yararlanarak klasik anlamda bildiğimiz ve daha

sonra kullanacağımız

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binom eşitliğinin ve Binom katsayılarının q-analoğunu elde edelim.

Bunun için önce klasik anlamda bildiğimiz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Binom açılımını göz önüne alalım.

Teorem 2.1. $k \in \mathbb{N}\,, 0 < q < 1$ olmak üzere

a) $$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.1}$$

b) $$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{n+1-k} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \tag{2.2}$$

dır.

İspat: a)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k \tag{2.3}$$

olduğundan n yerine $n+1$ yazıp,

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

eşitliğini kullanalım. (2.3) eşitliğinden;

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k \ (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k \ x + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1}$$

olur.

(2.3) formülünde n yerine $n+1$ yazılırsa ve son terim açılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}_q y^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} q^k y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1} + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q y^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k + y^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^{k+1} + y^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k$$

sol taraftaki ilk terim açılırsa,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k$$
$$= \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q q^0 x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q x^{n+1-k} y^k$$

olup buradan katsayıların karşılaştırılması ile

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

elde edilir.

b) Buradaki durum $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$ özdeşliğinden yararlanarak benzer şekilde ispatlanabilir.

Teoremde elde edilen (2.2) eşitliğinden (2.1) eşitliğinin taraf tarafa

çıkarılmasıyla ;

$$(1-q^k)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q (q^{n+1-k}-1) = 0$$

ve buradan

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q, k = 1,2,\ldots \qquad (2.4)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik q-binom katsayıları olarak bilinir.

$(q;q)_n = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-k})}$$

$$= \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\,(q;q)_{n-k}}$$

eşitliği vardır.

(2.4) eşitliğinden ;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\frac{(1-q^{n+2-k})}{1-q^k}\begin{bmatrix} n \\ k-2 \end{bmatrix}_q$$

$$=\frac{(1-q^{n+1-k})}{1-q^k}\frac{(1-q^{n+2-k})}{1-q^k}\frac{(1-q^{n+3-k})}{1-q^k}\begin{bmatrix} n \\ k-3 \end{bmatrix}_q$$

………………

$$=\frac{(1-q^{n+1-k})(1-q^{n+2-k})\dots(1-q^n)}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\dots(1-q)}\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q$$

$$=\frac{(1-q^{n+1-k})(1-q^{n+2-k})\dots(1-q^n)\ (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)\ (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})}$$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)\ (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-k})}$$

$$=\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\ (q;q)_{n-k}} \tag{2.5}$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Tanım 2.3. $q>0$ şeklinde verilsin. $n\in\mathbb{N}$ için

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q[n-1]_q \dots [1]_q & ,n\geq 1 \\ 1 & ,n=0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $[n]_q!$ eşitliğine ***q*- faktöriyeli** denir.

$n\geq 1$ için $\qquad [n]_q! = [1]_q[2]_q\dots[n]_q$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)}{(1-q)(1-q)}\dots\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}{(1-q)^n}$$

$$= (q;q)_n(1-q)^{-n}$$

şeklinde değişik yazım şeklini elde edebiliriz. Bu son eşitlikten $(q;q)_n$ çözülürse

$$(q;q)_n = [n]_q!\,(1-q)^n$$

elde edilir.

Benzer şekilde $(q;q)_k = [k]_q!\,(1-q)^k$ ve $(q;q)_{n-k} = [n-k]_q!\,(1-q)^{n-k}$ olduğu görülür.

Bu son bağıntılar (2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa ;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} = \frac{[n]_q!\,(1-q)^n}{[k]_q!\,(1-q)^k[n-k]_q!\,(1-q)^{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$$

bulunur. Burada $n \geq k \geq 0$ dır. Elde edilen son ifade klasik anlamdaki

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

ifadesine benzemektedir.

Şimdi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}y^k$$

eşitliğinde y yerine xy yazarsak ;

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}(xy)^k$$

olur. Burada $(xy)^k$ ifadesinin değerini hesaplayalım :

$$(xy)^1 = qxy$$

$$(xy)^2 = xy\,xy = qx^2y^2$$

$$(xy)^3 = xy\,xy\,xy = q^2x^3y^3$$

...

$$(xy)^k = q\,q^2q^3 \dots q^{k-1}x^ky^k$$

$$= x^ky^kq^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

olur. Böylece

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}(xy)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k}\,x^ky^kq^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^ny^k$$

$$= x^n \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k \qquad (2.6)$$

olup diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
(x+xy)^n &= (x+xy)(x+xy)(x+xy)\dots(x+xy)(x+xy)\\
&= x(1+y)\,x(1+y)\,x(1+y)\dots x(1+y)\,x(1+y)\\
&= x(1+y)\,x(1+y)\,x(1+y)\dots x(x+yx)\,(1+y)\\
&= x(1+y)\,x(1+y)\,x(1+y)\dots x(x+qxy)\,(1+y)\\
&= x(1+y)\,x(1+y)\,x(1+y)\dots x(x+xqy)\,(1+y)\\
&= x(1+y)\,x(1+y)\,x(1+y)\dots x(1+y)\,x^2(1+qy)\,(1+y)\\
&\dots
\end{aligned}
$$

ve böyle devam ederek

$$= x^n(1+q^{n-1}y)(1+q^{n-2}y)\dots(1+qy)(1+y) \qquad (2.7)$$

bağıntısı bulunur. Buradan (2.6) ve (2.7) karşılaştırılırsa

$$(1+y)(1+qy)(1+q^2y)\dots(1+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k \qquad (2.8)$$

eşitliği bulunur.

(2.8) eşitliğinde y yerine $\frac{y}{x}$ yazarsak ;

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{-k}y^k = \left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+q\frac{y}{x}\right)\left(1+q^2\frac{y}{x}\right)\dots\left(1+q^{n-1}\frac{y}{x}\right)$$

$$= x^{-n}(x+y)(x+qy)(x+q^2y)\dots(x+q^{n-1}y)$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^n q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{y^k}{x^k}$$
$$= (x+y)(x+qy)(x+q^2y)\dots(x+q^{n-1}y) \qquad (2.9)$$

eşitliği elde edilir.

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

şeklinde tanımlanan bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının q-analoğunda $q \to 1$ yaklaşımı yapılırsa;

$$\lim_{q\to 1}[a]_q = \lim_{q\to 1}\frac{1-q^a}{1-q} = \lim_{q\to 1}\frac{-aq^{a-1}}{-1} = \lim_{q\to 1}\frac{-a}{-1} = a$$

olur.

Benzer şekilde $q \to 1$ yaklaşımı için ;

$$\lim_{q\to 1}[n]_q\,! = n!$$

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.4. Anlamlı olacak şekilde keyfi bir $f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f(x)$ in ***q*-diferensiyeli**

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Örneğin, x'in q –diferensiyeli

$$d_q f(x) = d_q x = qx - x = (q-1)x \qquad \text{dir.}$$

Tanım 2.5.

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

biçiminde tanımlanan eşitliğe $f(x)$ fonksiyonunun ***q*-türevi** denir.
$f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{q \to 1} D_q f(x) = \lim_{q \to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = f'(x)$$

olur.
Buradaki $D_q f(x)$ operatörü lineer bir operatördür. Yani a, b sabitler olmak üzere f ve g fonksiyonları için

$$D_q[af(x) + bg(x)] = aD_q f(x) + bD_q g(x)$$

eşitliği doğrudur. Gerçekten ,

$$D_q[af(x) + bg(x)] = \frac{d_q[af(x) + bg(x)]}{d_q x}$$

$$= \frac{[af(qx) + bg(qx)] - [af(x) + bg(x)]}{(q-1)x}$$

$$= \frac{[af(qx) - af(x)] + [bg(qx) - bg(x)]}{(q-1)x}$$

$$= aD_q f(x) + bD_q g(x) \quad \text{dir.}$$

Bu da q –türev operatörünün lineer operatör olduğunu gösterir.
Şimdi q -Binom Teoremini verip ispatlayalım:

Teorem 2.2. $|x| < 1, |q| < 1$ ve $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(q;q)_\infty}$$

dur.

Burada $(a;q)_k = (1-a)\,(1-aq) \ldots (1-aq^{k-1})$ dir.

İspat:

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

olsun. Bu fonksiyona q-türev operatörü uygulanırsa;

$$D_q f_a(x) = \frac{f_a(x) - f_a(qx)}{(1-q)x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} [k]_q x^{k-1}$$

elde edilir.

$$\frac{f_a(x) - f_a(qx)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} \frac{1-q^k}{(1-q)} (1-q) x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} (1-q^k)\, x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)(1-aq^2) \ldots (1-aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2) \ldots (1-q^k)} (1-q^k)\, x^{k-1}$$

$$= (1-a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(aq;q)_{k-1}}{(1-q)(1-q^2) \ldots (1-q^{k-1})}\, x^{k-1}$$

$$= (1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}\ x^k$$

$$= (1-a)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k$$

$$= (1-a)f_{aq}(x)$$

olup buradan

$$f_a(x) - f_a(qx) = (1-a)xf_{aq}(x)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$f_a(x) - f_a(qx) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}[(a;q)_k - (aq;q)_k]\,x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}[(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{k-1})][1-a-(1-aq^k)]\,x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}[1-a-1+aq^k]x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}[-a+aq^k]\,x^k$$

$$= -a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}[1-q^k]x^k$$

$k = 0$ için ilk terim 0' dır.

$$f_a(x) - f_a(qx) = -a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}[1-q^k]x^k$$

$$= -a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}[1-q^{k+1}]x\,x^k$$

$$= -ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^k)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)(1-q^{k+1})}[1-q^{k+1}]\,x^k$$

$$= -ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k$$
$$= -axf_{aq}(x)$$

olup buradan

$$f_a(x) - f_a(qx) = -axf_{aq}(x)$$
$$f_a(x) = (1-ax)f_{aq}(x)$$
$$f_{aq}(x) = \frac{f_a(x)}{1-ax}$$

bulunur. Daha önce

$$f_a(x) - f_a(qx) = (1-a)xf_{aq}(x)$$

olduğu elde edilmişti. Buradan $f_a(x)$ çözülürse ;

$$f_a(x) = (1-a)xf_{aq}(x) + f_a(qx)$$

$$= (1-a)x\frac{f_a(x)}{1-ax} + f_a(qx)$$

$$= \frac{x - ax}{1 - ax} f_a(x) + f_a(qx)$$

olup buradan

$$1 - \frac{x - ax}{1 - ax} f_a(x) = f_a(qx)$$

veya

$$f_a(x) = \frac{1 - ax}{1 - x} f_a(qx)$$

elde edilir.

Bu bağıntı ardışık olarak uygulanırsa ;

$$f_a(x) = \frac{(1 - ax)}{(1 - x)} \frac{(1 - aqx)}{(1 - qx)} f_a(q^2 x)$$

$$= \frac{(1 - ax)}{(1 - x)} \frac{(1 - aqx)}{(1 - qx)} \frac{(1 - aq^2)}{1 - q^2 x} f_a(q^3 x)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(1 - ax)}{(1 - x)} \frac{(1 - aqx)}{(1 - qx)} \frac{(1 - aq^2)}{1 - q^2 x} \cdots \frac{(1 - aq^{n-1} x)}{(1 - q^{n-1} x)} f_a(q^n x)$$

$$= \frac{(ax; q)_n}{(x; n)_n} f_a(q^n x)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(ax; q)_\infty}{(x; q)_\infty} f_a(0)$$

$$= \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

yani

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

bulunur ki bu da teoremi ispatlar.

Bu teoremi başka bir yoldan daha ispatlayabiliriz. Gerçekten

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

sonsuz çarpımı sabit a ve q lar ile $|x| \leq 1 - \varepsilon$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu durumda

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

İfadesi $|x| < 1$ için bir analitik fonksiyona yakınsar. Yani $|x| < 1$ için

$$F(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

Taylor açılımı mevcuttur. Buradan ;

$$F(x) = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \frac{(1-ax)}{(1-x)} \frac{(1-aqx)}{(1-qx)} \frac{(1-aq^2)}{1-q^2x} \dots \frac{(1-aq^kx)\dots}{(1-q^kx)\dots}$$

$$= \frac{(1-ax)}{(1-x)} \frac{(1-aqx)(1-aq^2)\dots(1-aq^kx)\dots}{(1-xq)(1-xq^2)\dots(1-xq^k)\dots}$$

$$= \frac{(1-ax)}{(1-x)} F(qx)$$

olup böylece

$$(1-x)F(x) = (1-ax)F(qx)$$

veya

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n x^n$$

olur. Elde edilen son eşitlikte x^n lerin katsayıları karşılaştırılırsa ;

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n q^n x^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-q^n)A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-aq^n)A_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-aq^{n-1})A_{n-1}x^n$$

Buradan

$$(1-q^n)A_n = (1-aq^{n-1})A_{n-1}$$

elde edilir.

$$A_n = \frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}A_{n-1}$$

Bu işlem ardışık olarak yapılırsa ;

$$= \frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}\frac{(1-aq^{n-2})}{(1-q^{n-1})}A_{n-2}$$

$$= \frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}\frac{(1-aq^{n-2})}{(1-q^{n-1})}\frac{(1-aq^{n-3})}{(1-q^{n-2})}A_{n-3}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)} \frac{(1-aq^{n-2})}{(1-q^{n-1})} \cdots \frac{(1-aq)}{(1-q^2)} \frac{1-a}{1-q} A_0$$

$$= \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} A_0$$

elde edilir. Yani ;

$$A_n = \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} A_0$$

eşitliği doğrudur. Bu indirgeme bağıntısında A_0 keyfi olup $A_0 = 1$ alınabilir.

Böylece ;

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olur. Bu ise ispatı tamamlar.

q-Binom teoremindeki sonsuz çarpım $(1-x)^{-a}$ ifadesinin q-analoğuna baktığımızda da karşımıza çıkar. a bir tamsayı olması halinde $(1-x)^{-a}$ ifadesinin q-analoğunu bulalım.

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{a} x^n, \qquad |x| < 1$$

olduğunu klasik anlamda biliyoruz.

$(1-x)^{-n}$ ifadesinin q-analoğu ;

$$\frac{1}{(1-x)\,(1-qx)\ldots(1-xq^{n-1})}$$

$$= \frac{(1-xq^n)\,(1-xq^{n+1})\,\dots}{(1-x)\,(1-qx)\dots(1-xq^{n-1})\,(1-xq^n)\,(1-xq^{n+1})\dots}$$

$$= \frac{[(1-xq^n)][1-(xq^n)q]\dots[1-(xq^n)q^2]\dots}{(1-x)\,(1-qx)\dots(1-xq^{n-1})\,(1-xq^n)\,(1-xq^{n+1})\dots}$$

$$= \frac{(xq^n;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

şeklinde yazılabilir. n tamsayı olmadığı durumda da son ifade anlamlıdır.

q-Binom teoreminin bazı özel hallerinin ilginç özellikleri vardır.

1- q-Binom teoreminde $a = 0$ alınırsa ;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(q;q)_k} = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \quad |x| < 1, |q| < 1$$

olur.

2- q -Binom teoreminde a yerine $\frac{1}{a}$, x yerine ax yazıp düzenlersek ;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k}{(q;q)_k} = (x;q)_\infty, \quad |q| < 1$$

olur. Gerçekten ;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

dur. Binom eşitliğinden ;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{a};q\right)_k}{(q;q)_k}(ax)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{q}{a}\right)\left(1-\frac{q^2}{a}\right)\dots\left(1-\frac{q^{k-1}}{a}\right)}{(q;q)_k}\, a^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{a-q}{a}\right)\left(\frac{a-q^2}{a}\right)\dots\left(\frac{a-q^{k-1}}{a}\right)}{(q;q)_k} a^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{a^k}\ a^k(a-1)(a-q)(a-q^2)\dots(a-q^{k-1})}{(q;q)_k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-a)(q-a)(q^2-a)\dots(q^{k-1}-a)}{(q;q)_k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\ 1\ q\ q^2 \dots q^{k-1})}{(q;q)_k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\frac{k-1}{2}}}{(q;q)_k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k} x^k$$

elde edilir. Burada

$$1+2+3+\cdots+k-1 = \frac{k\ (k-1)}{2}$$

ve

$$\binom{k}{2} = \frac{k!}{(k-2)2!} = \frac{k\ (k-1)(k-2)!}{(k-2)!\,2} = \frac{k\ (k-1)}{2}$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

Aynı yerine yazmaları q-Binom teoremindeki eşitliğin sağ tarafı için de yaparsak ;

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \frac{(1-ax)}{(1-x)}\frac{(1-aqx)}{(1-qx)}\frac{(1-aq^2)}{1-q^2x}\dots\frac{(1-aq^kx)\dots}{(1-q^kx)\dots}$$

$$\left(a \to \frac{1}{a}\right), \qquad \frac{\left(\frac{x}{a},q\right)_\infty}{(x;q)_\infty} = \frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x\,q}{a}\right)\left(1-\frac{x\,q^2}{a}\right)\dots\left(1-\frac{x\,q^k}{a}\right)\dots}{(1-x)\,(1-qx)\,(1-xq^2)\dots(1-xq^k)\dots}$$

$$(x \to ax)\ , \qquad \frac{(x,q)_\infty}{(ax;q)_\infty} = \frac{(1-x)\,(1-qx)\,(1-xq^2)\dots(1-xq^k)\dots}{(1-ax)\,(1-aqx)\,(1-axq^2)\dots(1-axq^k)\dots}$$

$$(a \to 0)\ , \qquad \frac{(x,q)_\infty}{(0;q)_\infty} = (x,q)_\infty$$

bulunur.

3- q-Binom teoreminde a yerine q^{-N} yazılırsa ;

$$\sum_{n=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n = (x;q)_N = (1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{N-1})$$

olur. Şimdi bunu gösterelim :

$$(a;q)_n = (1-a)\,(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})$$

olduğunu biliyoruz. Burada a yerine q^{-N} yazılırsa ;

$$(q^{-N};q)_n = (1-q^{-N})\,(1-q^{-N+1})\ldots(1-q^{-N+n-1})$$

$$=\left(\frac{q^N-1}{q^N}\right)\left(\frac{q^{N-1}-1}{q^{N-1}}\right)\ldots\left(\frac{q^{N-n+1}-1}{q^{N-n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{q^Nq^N\ldots q^Nq^{-1}q^{-2}\ldots q^{-n+1}}(q^N-1)(q^{N-1}-1)\ldots(q^{N-n+1}-1)$$

$$=\frac{1}{q^{N\,n}}\;q^{1+2+\cdots n-1}(q^N-1)(q^{N-1}-1)\ldots(q^{N-n+1}-1)$$

$$=(-1)^nq^{-Nn}q^{\binom{n}{2}}(1-q^N)(1-q^{N-1})\ldots(1-q^{N-n+1})$$

$$=(-1)^nq^{-Nn+\binom{n}{2}}(1-q^N)(1-q^{N-1})\ldots(1-q^{N-n+1})$$

$$=(q;q)_N(-1)^nq^{-Nn+\binom{n}{2}}$$

olur. Bu ifadeyi q-Binom teoreminde yerine yazarsak;

$$\frac{(q^{-N};q)_n}{(q;q)_n}=\frac{(q;q)_N}{(q;q)_n\,(q;q)_{N-n}}(-1)^nq^{-Nn+\binom{n}{2}}=\begin{bmatrix}N\\n\end{bmatrix}_q(-1)^nq^{-Nn+\binom{n}{2}}$$

olur.

Burada

$$\begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_N}{(q;q)_n \, (q;q)_{N-n}}$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece $N = 0,1,2 \ldots$ için

$$\sum_{n=0}^{N} \begin{bmatrix} N \\ n \end{bmatrix}_q (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n = (x;q)_N \qquad ; N = 0,1,2 \ldots$$

elde edilmiş olur. Tanımdan

$$\frac{(xq^{-N},q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$
$$= \frac{(1-xq^{-N})(1-xq^{-N+1}) \ldots (1-xq^{-1})(1-x)(1-xq) \ldots (1-xq^N) \ldots}{(1-x)(1-xq) \ldots (1-xq^N) \ldots}$$
$$= (xq^{-N};q)_N$$

yazılabilir.

4-

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \frac{1}{(x;q)_N} = \frac{1}{(1-x) \ldots (1-xq^{N-1})} \; ; \; |x| < 1$$

eşitliğini göstermek için q-Binom teoreminde $a = q^N$ yazarsak ;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^N;q)_k}{(q;q)_k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q^N)(1-q^{N-1}) \ldots (1-q^{N-k+1})}{(1-q)\,(1-q^2) \ldots (1-q^k)} x^k$$

olur. Toplam içindeki ifadeyi $(q;q)_{N-1}$ ile çarpıp bölelim. Bu durumda ;

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q^N)(1-q^{N-1})\dots(1-q^{N-k+1})\,(1-q)\,(1-q^2)\dots(1-q^{N-1})}{(1-q)\,(1-q^2)\dots(1-q^k)\,(1-q)\,(1-q^2)\dots(1-q^{N-1})}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)\,(1-q^2)\dots(1-q^{N-1})(1-q^N)(1-q^{N-1})\dots(1-q^{N-k+1})}{(q;q)_k\,(q;q)_{N-1}}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q;q)_{N+k-1}}{(q;q)_k\,(q;q)_{N-1}}x^k$$

bulunur. Son eşitlikte toplam içindeki ifade ;

$$\frac{(q;q)_{N+k-1}}{(q;q)_k\,(q;q)_{N-1}}=\frac{(q;q)_{N+k-1}}{(q;q)_k\,(q;q)_{N+k-1-k}}=\begin{bmatrix}N+k-1\\k\end{bmatrix}_q$$

şeklinde yazılabilir. Böylece son eşitlik ;

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^N;q)_k}{(q;q)_k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}N+k-1\\k\end{bmatrix}_q x^k$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi de q-Binom teoremindeki eşitliğin sağ tarafında $a=q^N$ yazarsak

$$\frac{(ax,q)_\infty}{(x;q)_\infty}=\frac{(q^N x;q)_\infty}{(x;q)_\infty}=\frac{(1-xq^N)(1-xq^{N+1})\dots(1-xq^{N+k})\dots}{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^k)\dots}$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-xq)\dots(1-xq^{N-1})}=\frac{1}{(x;q)_N}$$

olur. Böylece q-Binom teoreminde $a=q^N$ yazılmasıyla ;

$$\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}N+k-1\\ k\end{bmatrix}_q x^k=\frac{1}{(x;q)_N} \qquad ; \quad |x|<1$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Tanım 2.6. $0<q<1$ ve $x\in\mathbb{R}$ için

$$e_q(x)=\frac{1}{((1-q)x;q)_\infty}$$

ifadesine $f(x)=e^x$ fonksiyonunun **1. tip *q*-analoğu** denir.

q-Binom teoreminin sonuçlarından biri olan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k}{(q;q)_k}=(x;q)_\infty\,, \qquad |q|<1$$

eşitliğinde x yerine $-(1-q)x$ yazarsak ;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(k-1)/2} (-1)^k (1-q)^k x^k}{(q;q)_k} = (-(1-q)x;q)_\infty ,$$

eşitliği elde edilir. Eşitliği düzenlersek ;

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{\frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{k_q!} = (-(1-q)x;q)_\infty = E_q(x)$$

elde edilir. Son eşitlikteki $E_q(x)$ fonksiyonuna $f(x) = e^x$ fonksiyonunun **2. tip q-analoğu** adı verilir. O halde $f(x) = e^x$ üstel fonksiyonunun iki farklı q-analoğu vardır. Kolayca görülebileceği gibi $f(x) = e^x$ in q-analogları arasında

$$e_q(x)\, E_q(x) = 1$$

özelliği vardır.

Tanım 2.7. $f, [0.a]$ aralığında sürekli fonksiyon olmak üzere **f(x) in q integrali**

$$\int_0^a f(x) d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - aq^{n+1})$$

şeklindedir.

Bu tanım düzenlenirse;

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n \ , \quad a \in R$$

elde edilir.

f in sınırsız aralıktaki q- integrali ise

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\frac{q^n}{A} \ , \quad A > 0$$

şeklindedir.

Ayrıca f , [a,b] aralığındaki sürekli bir fonksiyon olmak üzere f'in q- integrali ;

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx$$

şeklindedir.

Tanım 2.8. $q -$ integrali için değişken değiştirme formülü ;
u(x) = γx^{β} için ;

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)d_qu = \int_a^b f\big(u(x)\big)D_{q^{1/\beta}}u(x)d_{q^{1/\beta}}x$$

dir.

Tanım 2.9. Klasik anlamda **gamma fonksiyonu**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

şeklindedir.

$|q|<1$ olmak üzere

$$\Gamma_q(x)=\frac{(q,q)_\infty}{(q^x,q)_\infty}(1-q)^{1-x}$$

fonksiyonuna **q- qamma fonksiyonu** denir.

Tanım 2.10.

$$\Gamma_q(t)=\int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1}E_q(-qx)d_qx$$

ifadesine q- gamma integrali denir.

Şimdi q- qamma fonksiyonunda $x\to x+1$ yazalım ve pay ve paydayı $(1-q)(1-q^x)$ ile çarpalım.

$$\Gamma_q(x+1)=\frac{(q,q)_\infty}{(q^{x+1},q)_\infty}(1-q)^{-x}$$

$$=\frac{(q,q)_\infty(1-q)^{-x}}{(1-q^{x+1}).(1-q^{x+2})\dots(1-q^{n+x})}\ \frac{(1-q)(1-q^x)}{(1-q)(1-q^x)}$$

$$=\frac{(q,q)_\infty(1-q)^{1-x}.(1-q^x)}{(1-q).(1-q^x)(1-q^{x+1})(1-q^{x+2})\dots(1-q^{n+x})}$$

$$=\frac{(q,q)_\infty(1-q)^{1-x}.(1-q^x)}{(1-q)(q^x,q)_\infty}$$

$$=\frac{(1-q^x)}{(1-q)}\ \frac{(q,q)_\infty(1-q)^{1-x}}{(q^x,q)_\infty}$$

$$=[x]_q\ \Gamma_q(x)$$

elde edilir.

Yani ;

$$\Gamma_q(x+1) = [x]_q \ \Gamma_q(x)$$

eşitliği sağlanır.

q- qamma fonksiyonu tanımından ;

$$\Gamma_q(1) = \frac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-1}}{(q;q)_\infty} = 1$$

olduğu açıktır.

Tanım 2.11. $x, y \in [a,b]$ olmak üzere $|x-y| \leq \delta$ şartını sağlayan $\delta > 0$ için $|f(x) - f(y)|$ nin en küçük üst sınırına f nin **süreklilik modülü** denir.

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

veya

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)|$$

sembolleri ile gösterilir.

Tanım 2.12.

$$\omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D} = sup\left\{\left|\Delta_u^{n+1} f(e^{ix})\right|; |x| \leq \pi\, , |u| \leq \xi\right\}$$

eşitliğine **n. mertebeden süreklilik modülü** denir.

Süreklilik Modülünün bazı özellikleri;

1) ω fonksiyonu monoton artandır. Yani;

$$\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f;\delta_1) \leq \omega(f;\delta_2)$$

2) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega(f;m\delta) \le m\omega(f;\delta)$

$$\omega(f;m\delta) = \sup_{|h|\le m\delta} |f(x+h) - f(x)|$$

$$= \sup_{|mh|\le m\delta} |f(x+mh) - f(x)|$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left|\sum_{k=1}^{m} [f(x+kh) - f(x+(k-1)h)]\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \sup_{|h|\le\delta} |(x+kh) - f(x+(k-1)h)|$$

$$= m\omega(f;\delta)$$

3) $\lambda > 0$ için $\omega(f;\lambda\delta) \le (1+\lambda)\omega(f;\delta)$ dir.

$$\omega(f;\lambda\delta) \le \omega(f;[\![\lambda]\!]+1)\delta)$$

$$\le (1+[\![\lambda]\!])\omega(f;\delta)$$

$$\le (1+\lambda)\omega(f;\delta)$$

4) $f;[a,b]$ de sürekli ise ;

$$|f(t) - f(x)| \le \omega(f;|t-x|)$$

dir.

$$\omega(f;|t-x|) = \sup_{|t-x|\le\delta} |f(t) - f(x)|$$

$$= \sup_{t,x\in\{a,b]} |f(t) - f(x)|$$

$$\ge |f(t) - f(x)|$$

5) $|f(x) - f(y)| < \left(1 + \frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$ dır.

$$|f(x) - f(y)| \le \omega(f;|x-y|)$$

$$\le \omega\left(f;\frac{\delta|x-y|}{\delta}\right)$$

$$\le \left(1 + \frac{|x-y|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

dir.

6) $\omega_{n+1}(f;\lambda\delta) \leq (1+\lambda)^{n+1}\omega_{n+1}(f;\delta)$
dir.

Teorem 2.3. (P. P. Korovkin)

$\{L_{\boldsymbol{n}}(f:x)\}$ lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. $\alpha_n(x), \beta_n(x) ve\ \gamma_n(x)$, $[a,b]$ de düzgün olarak sıfıra yakınsayan diziler olmak üzere $\forall\ x \in [a,b]$ için;

$$L_{\boldsymbol{n}}(1:x) = 1 + \alpha_n(x) \qquad (2.10)$$
$$L_{\boldsymbol{n}}(t:x) = x + \beta_n(x) \qquad (2.11)$$
$$L_{\boldsymbol{n}}(t^2:x) = x^2 + \gamma_n(x) \qquad (2.12)$$

koşulları sağlayan $L_{\boldsymbol{n}}(f:x)$ $f(x)$ e düzgün yakınsar. Burada f, $[a,b]$ de sürekli a da soldan b de sağdan sürekli ve reel eksenin tamamında sınırlı bir fonksiyondur.

İspat : f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm x ler için

$$|f(x)| \leq M \qquad (2.13)$$

olacak şekilde M pozitif sayısı vardır. $f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \qquad (2.14)$$

sağlanır.

$x, t \in [a,b]$ olduğunda (2.14) eşitsizliği f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında düzgün sürekli olmasından dolayı gerçeklenir. $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise (2.14) eşitsizliği f fonksiyonu a noktasında soldan ve b noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir. (2.13) ve (2.14) eşitsizliklerinden dolayı her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{M}{\delta^2}(t-x)^2 \qquad (2.15)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ayrıca $\frac{M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır.

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için (2.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq 2M \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon \qquad (2.16) \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Lineer pozitif operatörlerin özelliklerinden

$$\begin{aligned} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)L_n(1;x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x);x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim (2.10) dan dolayı sıfıra yakınsar. Yani,

$\|f\|_{C[a,b]}\|L_n(1;x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$ ($n \to \infty$ iken $\varepsilon_n \to 0$)

eşitsizliğini sağlayan ε_n dizisi vardır.

O halde

$$\|L_n(f(t)-f(x);x)\|_{C[a,b]} \leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]} + \varepsilon_n \tag{2.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi birinci terimi hesaplayalım. (2.16) eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|_{C[a,b]}$

$\leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)$

$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n((t-x)^2;x)$

$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x)]$

$= \varepsilon[L_n(1;x)-1] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\{[L_n(t^2;x)-x^2] - 2x[L_n(t;x)-x] + x^2[L_n(1;x)-1]\}$

$= \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right)[L_n(1;x)-1] + \frac{2M}{\delta^2}[L_n(t^2;x)-x^2] - \frac{4M}{\delta^2}x[L_n(t;x)-x]$

elde edilir. $x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2\right) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}b^2\,,\left(\frac{4M}{\delta^2}x \leq \frac{4M}{\delta^2}b\right)$$

dir. O halde

$$C_1 = \frac{2M}{\delta^2}b^2, C_2 = 2bC_1, C_3 = \varepsilon + C_1b^2$$

eşitliklerini kabul edersek

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\|$$
$$\leq \varepsilon + C_1\|L_n(t^2;x)-x^2\| + C_2\|L_n(t;x)-x\| + C_3\|L_n(1;x)-1\|$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük seçilebilen bir sayıdır. (2.10), (2.11) ve (2.12) eşitsizliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\|L_n(|f(t)-f(x)|;x)\| \to 0$$

olur. Bu sonuç ve (2.15) eşitsizliğinden yaralanarak

$$\|L_n(f;x)-f(x)\| \to 0$$

olduğu görülür.

Tanım 2.13.

$$u_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\lambda^2(\xi-x)^2}\, d\xi \quad , \quad \lambda > 0$$

şeklindeki integrale **Gauss- Weierstrass integrali** denir.

Tanım 2.14. $A(\overline{D}) = \{f : \overline{D} \to \mathbb{C} \,;\, f\,, \overline{D}$ de sürekli ve D de analitiktir $, f(0) = 0, f'(0) = 1\}$ olmak üzere $f \in A(\overline{D})$ ve $\xi > 0$ için,

$$P_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{2\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-|u|/\xi} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} f\left(ze^{iku}\right) \right] du\,,$$

eşitliğine **Picard singüler integrali** denir.

Tanım 2.15. $A(\overline{D}) = \{f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}\,; f\,, \overline{D}\text{ de sürekli ve D de analitiktir}\,, f(0) = 0, f'(0) = 1\}$ olmak üzere $f \in A(\overline{D})$ ve $\xi > 0$ için,

$$Q_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{\frac{2}{\xi}arctg\left(\frac{\pi}{\xi}\right)}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(ze^{iku})}{u^2+\xi^2}\,du\,,$$

eşitliğine **Poisson- Cauchy singüler integrali** denir.

Tanım 2.16. $A(\overline{D}) = \{f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{C}\,; f\,, \overline{D}\text{ de sürekli ve D de analitiktir}\,, f(0) = 0, f'(0) = 1\}$ olmak üzere $f \in A(\overline{D})$ ve $\xi > 0$ için,

$$W_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{2C(\xi)}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\int_{-\pi}^{+\pi}f(ze^{iku})e^{-u^2/\xi^2}\,du\,,$$

$$W^*{}_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{2C^*(\xi)}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty}f(ze^{iku})e^{-u^2/\xi^2}\,du\,,$$

eşitliklerine **Gauss Weierstrass singüler integrali** denir.

Burada $z \in \overline{D}, n \in N$ olmak üzere;

$$C(\xi) = \int_{0}^{\pi} e^{-u^2/\xi^2}\,du$$

$$C^*(\xi) = \int_{0}^{\infty} e^{-u^2/\xi^2}\,du$$

eşitlikleri vardır.

Tanım 2.17. f kompleks fonksiyon olsun. z_0 noktasının en az bir D(z_0, δ) komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebilirse f, z_0 noktasında analitiktir. Ayrıca f, z_0 noktasında analitikse

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

şeklinde Taylor seri açılımına sahiptir.

3.GAUSS-WEIERSTRASS İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Tanım 3.1. $f: R \to R$ ye bir fonksiyon olmak üzere her $n \in N$, $q \in (0,1)$ ve $x \in R$ için , f in q-Gauss-Weierstrass integrali

$$W_n(f;q,x) = \frac{\sqrt{[n]_q}\,(q+1)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q}\sqrt{1-q^2}}} f(x+t)E_{q^2}\left(-q^2[n]_q\frac{t^2}{4}\right)\,d_qt. \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir.

Lemma 3.1. Her $k \in N$ için W_n operatörü,

$$W_n(t^k;q,x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{2^j\Gamma_{q^2}\left(\frac{j+1}{2}\right)}{[n]_q^{\frac{j}{2}}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\,x^{k-j}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat : (3.1) eşitliğinden

$$W_n(t^k;q,x)$$

$$= \frac{\sqrt{[n]_q}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q}\sqrt{1-q^2}}} (t+x)^k E_{q^2}\left(-q^2[n]_q\frac{t^2}{4}\right)\,d_qt \qquad (3.2)$$

eşitliği vardır.

O halde

$$W_n(t^k;q,x)=\frac{\sqrt{[n]_q}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^{k-j}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q}\sqrt{1-q^2}}} t^j E_{q^2}\left(-q^2[n]_q\frac{t^2}{4}\right)d_qt.$$

eşitliği sağlanır.

q-türev tanımından yazabiliriz ki ve $t=2\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{[n]_q}}$ alırsak,

$$D_{q^2}(t)=\frac{2}{\sqrt{[n]_q}}\frac{\sqrt{u}-\sqrt{q^2u}}{(1-q^2)u}=\frac{2}{(q+1)\sqrt{[n]_q}\sqrt{u}}\,. \tag{3.3}$$

q-integrali için $\beta=\frac{1}{2}$ için değişken değiştirmesi formülünü kullanırsak ;

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q}\sqrt{1-q^2}}} t^j E_{q^2}\left(-q^2[n]_q\frac{t^2}{4}\right)d_qt=\frac{2^{j+1}}{(q+1)[n]_q^{\frac{j+1}{2}}}\int_0^{\frac{1}{1-q^2}} u^{\frac{j-1}{2}}E_{q^2}(-q^2u)d_{q^2}u$$

$$=\frac{2^{j+1}\Gamma_{q^2}\left(\frac{j+1}{2}\right)}{(q+1)[n]_q^{\frac{j+1}{2}}}\qquad j=0,\dots\dots,k \text{ için}$$

Bu da bize istenen sonucu verir.

Hatırlatma 3.1: $n\leq 0$ için $E_q\left(-\frac{q^n}{1-q}\right)=0$ olduğundan (3.1) operatörü ;

$$W_n(f;q,x)=\frac{\sqrt{[n]_q}(q+1)}{2\,\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\infty}{\sqrt{[n]_q}\sqrt{1-q^2}}\Big/2} f(x+t)E_{q^2}\left(-q^2[n]_q\frac{t^2}{4}\right)d_qt\,.$$

şeklinde yazılabilir.

3.1. Gauss – Weierstrass İntegral Operatörlerinin Yaklaşım özellikleri

Burada Bohman-Korovkin teoremini kullanarak W_n operatörünü $f(x)$ fonksiyonuna ağırlıklı düzgün yakınsadığını göstereceğiz.

$B_2(R)$ ile $|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$ $\;, x \in R$, özelliğini sağlayan reel değerli fonksiyonların sınıfını gösterelim. $C_2(R)$ ise $B_2(R)$ de olan ve süreklilik özelliğine sahip fonksiyonların sınıfını göstereceğiz.

$C_2^k(R)$ ile $C_2(R)$ uzayında olan ve $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} = k \in R,$ $\|f\|_2 = sup_{x\in R} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$ özelliğini sağlayan fonksiyonların sınıfını göstereceğiz.

Teorem 3.1.1. T_n lineer pozitif operatörlerde $C_2(R) den\ B_2(R)\ ye$ bir dizi olsun ve verilen koşulları sağlasın;

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \frac{|T_n(t^v;x) - x^v|}{1+x^2} = 0, \quad v = 0,1,2$$

eşitliği vardır.

$\forall\, f \in C_2^k(R),$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \frac{|T_n(f;x) - f(x)|}{1+x^2} = 0,$$

ve $f^* \in C_2(R)/C_2^k(R)$ olmak üzere böyle bir fonksiyon var ki,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R_+} \frac{|T_n(f^*;x) - f^*(x)|}{1+x^2} \geq 1$$

eşitsizliği sağlanır.

$f \in C_2^k(R)$ için sürekli ağırlık modülünü ele alacağız.

$$\Omega_2(f,\delta) \; = \sup_{x\in R, |h|\le\delta} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{1+(h+x)^2}$$

Bu fonksiyon, aşağıdaki özelliklere sahiptir :

(1) $\Omega_2(f,\delta) \le 2\|f\|_2$,

(2) $\Omega_2(f,m\delta) \le m\,\Omega_2(f,\delta)$, $m \in N$

(3) $\lim_{\delta\to 0} \Omega_2(f,\delta) = 0$

sonsuz aralıkta $\omega_1(f;\delta)$ süreklilik modülü $\delta \to 0$ iken sıfır olmaz çünkü f fonksiyonunu $\omega_1(f;\delta)$ süreklilik ilk modülü açısından yakınsama oranını bulmuyoruz. Bu nedenle $\Omega_2(f,\delta)$ sürekli ağırlık modülünü göz önüne alacağız.

Hatırlatma 3.1.1. Herhangi bir lineer pozitif operatör monotondur, her f $\in$ $C_2(R)$ *için* , $W_n(f) \in C_2(R)$, Lemma 3.1 in monoton olduğunu gösterir.

Eğer $q=1$ seçersek W_n operatörü Klasik Gauss-Weierstrass singuler integral operatörü olur.

Sabit bir q için $0<q<1$

$$\lim_{n\to\infty} [n]_q = \frac{1}{1-q} \; ,$$

W_n operatörünün yakınsaklık özelliklerini göstermek için, $0 < q_n < 1, q = q_n$ öyle bir dizi ki $q_n \to 1, \mathrm{n} \to \infty$ ve $[n]_q \to \infty, \mathrm{n} \to \infty$ olsun. Örneğin;

$q_n = 1 - {}^{1}/_{na^n}$, $\quad a > 3$ dizisi gösterilir.

Teorem 3.1.2 : $0 < q_n < 1$ olmak üzere $q = q_n$ alalım ve $q_n \to 1, \mathrm{n} \to \infty$ alalım. Her f∈ $C_2^k(R)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \frac{|W_n(f; q_n, x) - f(x)|}{1 + x^2} = 0$$

dir.

İspat :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \frac{|W_n(1; q_n, x) - 1|}{1 + x^2} = 0$$

olduğu açıktır. Lemma 3.1 den

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \frac{|W_n(t; q_n, x) - x|}{1 + x^2} = 0$$

olur.

Lemma 3.1 i tekrar kullanarak

$$\sup_{x\in R} \frac{|W_n(t^2; q_n, x) - x^2|}{1 + x^2} \leq \sup_{x\in R} \frac{|x|}{1 + x^2} \frac{4}{\sqrt{[n]_{q_n}} \Gamma_{q_n^2}\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{4\Gamma_{q_n^2}\left(\frac{3}{2}\right)}{[n]_{q_n} \Gamma_{q_n^2}\left(\frac{1}{2}\right)},$$

eşitliğini elde ediliriz.

Burdan da

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \frac{|W_n(t^2;q_n,x)-x^2|}{1+x^2}=0$$

olur.

Böylece Teorem 3.1.1'in koşulları sağlanır ve her $f\in C_2^k(R)$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \frac{|W_n(f;q_n,x)-f(x)|}{1+x^2}=0$$

dir.

Teorem 3.1.3 . f ∈ $C_2^k(R)$ için , $n\in \mathrm{N}$ olmak üzere

$$\sup_{x\in R} \frac{|W_n(f;q,x)-f(x)|}{1+x^2} \le \left(1+\frac{12}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{8\Gamma_{q^2}\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\Omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : Ω_2 özelliklerinden açıktır ki herhangi bir $\lambda>0$ için ,

$$\Omega_2(f,\lambda\delta)\le(\lambda+1)\,\Omega_2(f,\delta)$$

eşitsizliği vardır.

$\delta>0$ için , Ω_2 tanımını kullanalım ve son eşitlikte $\lambda=\frac{t}{\delta}$ alırsak ;

$$|f(x+t)-f(x)|\le(1+(t+x)^2)\Omega_2(f,t)\le(1+(t+x)^2)\left(1+\frac{t}{\delta}\right)\Omega_2(f,\delta)\ .$$

W_n operatörünün lineerliğinden ve monotonluğundan son eşitliği kabul ederiz.

$|W_n(f;q,x)-f(x)|\leq$

$$\frac{\sqrt{[n]_q}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q}\sqrt{1-q^2}}}(1+(t+x)^2)\left(1+\frac{t}{\delta}\right)E_{q^2}\left(-q^2[n]_q\frac{t^2}{4}\right)\,d_q\Omega_2(f,\delta)$$ olur.

$$(1+(t+x)^2)\left(1+\frac{t}{\delta}\right)=\left(1-\frac{x}{\delta}\right)(1+(t+x)^2)+\frac{1}{\delta}\,(t+x)+\frac{1}{\delta}(t+x)^3$$ dir.

Aynı benzerliği kullanarak

$$\left(\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1+W_n(t^2;q,x)\right)+\frac{1}{\delta}W_n(t;q,x)+\frac{1}{\delta}W_n(t^3;q,x)\right)\Omega_2(f,\delta)$$

elde edilir.

Lemma 3.1 i ve basit cebirsel işlemleri kullanırsak;

$$\left\{(1+x^2)\left(1+\frac{2}{\delta\sqrt{[n]_q}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\right)+4x\left(\frac{1}{\sqrt{[n]_q}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{3}{2}\right)}{\delta[n]_q\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{4\Gamma_{q^2}\left(\frac{3}{2}\right)}{[n]_q\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{8}{\delta[n]_q^{3/2}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}\Omega_2(f,\delta)\ .$$

Yukarıdaki eşitsizlikleri kullanarak , $(1+x^2)$ e bölersek ve $\delta=\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}$ seçersek

$$\frac{|W_n(f;q,x)-f(x)|}{1+x^2}$$

$$\leq \left\{1+\frac{2}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{2}{\sqrt{[n]_q}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1+2\Gamma_{q^2}\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{4}{[n]_q\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\Gamma_{q^2}\left(\frac{3}{2}\right)+2\right)\right\}\Omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right)$$

$$\leq \left\{1+\frac{12}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{8\Gamma_{q^2}\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}\Omega_2\left(f,\frac{1}{\sqrt{[n]_q}}\right).$$

olur.Bu da ispatı tamamlar.

Hatırlatma 3.1.2. f ∈ $C_2^k(R)$ iken, (3.1) deki operatörün ağırlıklı yakınsama hızı $\frac{1}{\sqrt{[n]_{q_n}}}$ dir. $0 < q_n < 1$ ve $q_n \to 1, n \to \infty$ iken. Ayrıca bu yakınsama hızı daha iyi q_n seçimine bağlı olarak yapılabilir ve hızı en az $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kadardır.

Hatırlatma 3.1.3. Süreklilik modülünü tanımlarsak

$$\omega_1\,(f;\delta) = \sup_{x\in R,|h|\leq\delta}|f(x+h)-f(x)|\,,$$

$f\colon R \to R$ olmak üzere, f (x) = x için $\omega_1\,(x;\delta) = \delta$ dir.

$f\colon R \to R$ olmak üzere, herhangi bir $\delta > 0$ için $\omega_1\,(f;\delta) < \infty$ göz önüne alalım ve ∀ $x \in R$ için $W_n(f;q,x)$ vardır. Biz görürüz ki;

$$W_n(f;q,x+h) - W_n(f;q,x) =$$

$$= \frac{\sqrt{[n]_q}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q\sqrt{1-q^2}}}} \big(f(x+h+t) - f(x+t)\big) E_{q^2}\left(-q^2[n]_q \frac{t^2}{4}\right) d_q t \,.$$

$$|W_n(f;q,x+h) - W_n(f;q,x)| \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{[n]_q}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q\sqrt{1-q^2}}}} \big|\big(f(x+h+t) - f(x+t)\big)\big| E_{q^2}\left(-q^2[n]_q \frac{t^2}{4}\right) d_q t$$

dir.

$$\leq \omega_1\,(f;\delta) \frac{\sqrt{[n]_q}(q+1)}{2\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{[n]_q\sqrt{1-q^2}}}} E_{q^2}\left(-q^2[n]_q \frac{t^2}{4}\right) d_q t$$

$$= \omega_1\,(f;\delta)\,.$$

olur. Bu nedenle

$$\omega_1(W_n(f;q,.);\delta) \leq \omega_1(f;\delta) \qquad \forall\ \delta > 0 \tag{3.1.1}$$

W_n operatörünün şekil koruma özelliği kanıtlanmış olur.

$k = 1$ için Lemma 3.1 den biliyoruz ki

$$W_n(t;q,x) = x + \frac{2}{\sqrt{[n]_q}\Gamma_{q^2}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

eşitliği vardır.

Bundan dolayı

$$\omega_1\big(W_n(t;q,x);\delta)\big) = \omega_1(x;\delta) = \delta \ ,$$

eşitliğinden (3.1.1) ispatlanır. Buradan (3.1.1) kesindir.

4. KOMPLEKS SİNGÜLER İNTEGRALLERİ

Tezin bu kısmında kompleks Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss-Weierstrass singüler integrallerinin Jackson tipli genelleştirimleri için bazı yakınsaklık sonuçları vereceğiz. İkinci mertebeden süreklilik modülünü kullanarak düzgün yakınsaklık ve şekil koruma özelliğini vereceğiz.

$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ için; gösterelim ki;

$$A(\overline{D}) = \{f : \overline{D} \to \mathbb{C}\,; f\,, \overline{D} \text{ de sürekli ve } D \text{ de analitiktir}\,, f(0) = 0, f'(0) = 1\}$$

Bu nedenle eğer $f \in A(\overline{D})$ iken her $z \in D$ için

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

yazılabilir.

$f \in A(\overline{D})$ için ve $\xi > 0$ olmak üzere, kompleks singuler integraller için gösterelim ki ;

$$P_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-|u|/\xi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}f\left(ze^{iku}\right)\right]du\,,$$

$$Q_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{\frac{2}{\xi}arctg\left(\frac{\pi}{\xi}\right)}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f\left(ze^{iku}\right)}{u^2+\xi^2}\,du\,,$$

$$W_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{2C(\xi)} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(ze^{iku}\right) e^{-u^2/\xi^2} \, du \, ,$$

$$W^*{}_{n,\xi}(f)(z) = -\frac{1}{2C^*(\xi)} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(ze^{iku}\right) e^{-u^2/\xi^2} \, du \, ,$$

$z \in \overline{D}, n \in N$ olmak üzere;

$$C(\xi) = \int_{0}^{\pi} e^{-u^2/\xi^2} \, du$$

$$C^*(\xi) = \int_{0}^{\infty} e^{-u^2/\xi^2} \, du$$

eşitlikleri vardır.

4.1. Kompleks Singuler İntegrallerin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde kompleks Picard, Poisson-Cauchy ve Gauss- Weierstrass singüler integrallerinin Jackson tipli genelleştirimleri için yaklaşım ve şekil koruma özelliklerini göstereceğiz.

Teorem 4.1. (i) $z \in \overline{D}$ ve $\xi \in (0,1]$ için,

$$\left|P_{n,\xi}(f)(z) - f(z)\right| \leq \left[\sum_{k=o}^{n+1} \binom{p+1}{k} k\,!\right] \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D} \ ,$$

$$\left|W_{n,\xi}(f)(z) - f(z)\right| \leq C_n \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D} \ , \qquad C_n = \frac{\int_0^\infty (1+u)^{n+1} e^{-u^2} du}{\int_0^\pi e^{-u^2} du}$$

$$\left|W^*{}_{n,\xi}(f)(z) - f(z)\right| \leq C^*{}_n \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D} \ , \qquad C^*{}_n = \frac{\int_0^\infty (1+u)^{n+1} e^{-u^2} du}{\int_0^\infty e^{-u^2} du}$$

$$\left|Q_{n,\xi}(f)(z) - f(z)\right| \leq K(n,\xi) \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D} \ , \quad K(n,\xi) = \frac{\int_0^{\pi/\xi} \frac{(u+1)^{n+1}}{u^2+1} du}{tan^{-1}\left(\frac{\pi}{\xi}\right)},$$

$$\omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D} = sup\left\{\left|\Delta_u^{n+1} f(e^{ix})\right|; |x| \leq \pi \, , |u| \leq \xi\right\}$$

dir.

(ii) Her $\delta > 0, \xi > 0$ $n \in \mathbb{N}$ için ,

$$\omega_1(P_{n,\xi}(f);\delta)_{\overline{D}} \leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}} \ ,$$

$$\omega_1(W_{n,\xi}(f);\delta)_{\overline{D}} \leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}} \ ,$$

$$\omega_1(W^*{}_{n,\xi}(f);\delta)_{\overline{D}} \leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}} \ ,$$

$$\omega_1(Q_{n,\xi}(f);\delta)_{\overline{D}} \leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}} ,$$

eşitlikleri vardır.

İspat : (i) $z \in \overline{D}, |z| = 1$ ve $\xi > 0$ sabit olsun. Çünkü maksimum modül prensibi için

$\left|P_{n,\xi}(f)(z) - f(z)\right|$, $|z| = 1$ $\mathrm{z} = e^{ix}$ *g*östermek yeterlidir.

$f(z) - P_{n,\xi}(f)(z) =$

$$= f(z)\frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-|u|/\xi}\right]du + \frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\right]f(e^{i(x+ku)})e^{-|u|/\xi}du$$

$$= \frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{n+1}\Delta_u^{n+1}f(e^{ix})e^{-|u|/\xi}du$$

dir.

$$\left|f(z) - P_{n,\xi}(f)(z)\right| \leq \frac{1}{2\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_{n+1}(f;|u|)_{\partial D}e^{-|u|/\xi}du$$

$$= \frac{1}{\xi}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_{n+1}\left(f;\frac{u}{\xi}\,\xi\right)_{\partial D} e^{-|u|/\xi}du$$

$$\leq \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D}\frac{1}{\xi}\int_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{u}{\xi}\right)^{n+1} e^{-|u|/\xi}du$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}k!\ \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D}$$

dir.

Yukarıdaki gibi eşitlikleri ele alırsak ,

$$f(z)-\ W_{n,\xi}(f)(z)=\frac{1}{2C(\xi)}\ \int_{-\pi}^{\pi}(-1)^{n+1}\Delta_u^{n+1}f\left(e^{ix}\right)e^{-u^2/\xi^2}du$$

$$\left|f(z)-\ W_{n,\xi}(f)(z)\right|\leq\frac{1}{C(\xi)}\int_{0}^{\pi}\omega_{n+1}(f;u)_{\partial D}e^{-u^2/\xi^2}du$$

$$\leq\frac{1}{C(\xi)}\omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D}\int_{0}^{\pi}\left[1+\frac{u}{\xi}\right]^{n+1}e^{-u^2/\xi^2}du$$

$$\leq\frac{\int_0^{\infty}[1+u]^{n+1}e^{-u^2}\,du}{\int_0^{\pi}e^{-u^2}du}\ \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D}$$

dir. Benzer şekilde ;

$$f(z)-\ W^*{}_{n,\xi}(f)(z)=\frac{1}{2C^*(\xi)}\ \int_{-\pi}^{\pi}(-1)^{n+1}\Delta_u^{n+1}f\left(e^{ix}\right)e^{-u^2/\xi^2}du$$

Yukarıdaki eşitliği

$$\leq\frac{1}{C^*(\xi)}\omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D}\int_{0}^{\infty}\left[1+\frac{u}{\xi}\right]^{n+1}e^{-u^2/\xi^2}du$$

$$\leq\frac{\int_0^{\infty}[1+u]^{n+1}e^{-u^2}\,du}{\int_0^{\pi}e^{-u^2}du}\ \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D}$$

yazarız. Son olarak da

$$f(z)-Q_{n,\xi}(f)(z)=\frac{1}{\frac{2}{\xi}arctg\left(\frac{\pi}{\xi}\right)}\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{(-1)^{n+1}\Delta_u^{n+1}f\left(e^{ix}\right)}{u^2+\xi^2}\ du\ ,$$

devam edersek

$$\left|f(z)-Q_{n,\xi}(f)(z)\right| \leq \frac{\xi}{arctg\left(\frac{\pi}{\xi}\right)} \int_{0}^{\pi} \frac{\omega_{n+1}(f;u)_{\partial D}}{u^2+\xi^2}\, du\,,$$

$$\leq \frac{\xi}{arctg\left(\frac{\pi}{\xi}\right)} \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D} \int_{0}^{\infty} \left[1+\frac{u}{\xi}\right]^{n+1} \frac{1}{u^2+\xi^2} du$$

$$= K(n;\xi)\ \omega_{n+1}(f;\xi)_{\partial D}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.

İspat (ii). $|z_1 - z_2| \leq \delta$, $z_1, z_2 \in \overline{D}$ olsun.

$$\left|P_{n,\xi}(f)(z_1) - P_{n,\xi}(f)(z_2)\right|$$

$$\leq \omega_1(f;|z_1-z_2|)_{\overline{D}}\ \frac{1}{2\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} e^{-|u|/\xi} du$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \omega_1(f;\delta)_{\overline{D}}$$

$$\leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}}$$

dir. Aynı şekilde devam edersek ;

$$\left|W_{n,\xi}(f)(z_1) - W_{n,\xi}(f)(z_2)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2C(\xi)} \int_{-n}^{+n} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} e^{-u^2/\xi^2} du\ \ \omega_1(f;\delta)_{\overline{D}}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \omega_1(f;\delta)_{\overline{D}}$$

$$\leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}}$$

Benzer şekilde

$$\left|W^*{}_{n,\xi}(f)(z_1) - W^*{}_{n,\xi}(f)(z_2)\right| \leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}}$$

dir.

Son olarak

$$\left|Q_{n,\xi}(f)(z_1) - Q_{n,\xi}(f)(z_2)\right|$$

$$\leq \frac{1}{\frac{2}{\xi} arctg\left(\frac{\pi}{\xi}\right)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{u^2+\xi^2} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \omega_1(f;\delta)_{\overline{D}} \,,$$

$$\leq (2^{n+1}-1)\omega_1(f;\delta)_{\overline{D}}$$

Yukarıda geçen tüm eşitsizliklerin sup değeri $|z_1 - z_2| \leq \delta$ dir. Bu durumda (ii) de istenen eşitlikler elde edilmiş oldu.

KAYNAKLAR

A.Aral, V. Gupta and R. P. Agarwal, Applications of q-Calculus in Operator Theory, Springer,2013.

G.A. Anastassiou, A. Aral, Generalized Picard singular integral, Comput Math.Appl. 57 , 821–830,2009.

G A. Anastassiou, A.Aral , On Gauss Weierstrass İntegral Operators, DEMONSTRATIO MATHEMATICA, Vol. XLIII no.4,2010.

G.A. Anastassiou and S. G. Gal, Geometric and approximation properties of generalized singular integarls in the unit disk, Journal Korean Math journal, 43, 425-443,2006.

A. D. Gadzhiev, Theorems of the type of P. P. Korovkin type theorems, Math. Zametki 20 (5) 1976, 781–786; English Translation, Math Notes 20 (5-6), 996–998 1976.

G. Gasper, M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol 35, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

F. H. Jackson, On a q-definite integrals, Quart. J. Pure Appl. Math. 41 ,193–203, 1910.

V. G. Kac, P. Cheung, Quantum Calculus, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.

G. M. Phillips, On generalized Bernstein polynomials, in Numerical Analysis, A. R. Mitchell 75th birthday volüme 263–269. Ed:by D. F. Griffiths and G. A. Watson World Scientific, Singapore, 1999.

A. De Sole, V. G. Kac, On integral representations of q-gamma and q-beta functions, Atti Accad

G.A. Anastassiou and S.G.Gal ,Convergence of generalized singular integrals to the unit, univariate case ,Math .Inquel Appl.3 no. 4, 511-518 2000.

G.A. Anastassiou and S.G.Gal Geometric and approximation properties of generalized singular integrals in the unit disk, submitted for publication.

S.G.Gal Convolation type integral operators in complex approximation, Comput. Methods Funct. Theory 1,no.2, 417-432 2001.