KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

POISSON VE BELTRAMI DENKLEMLERİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Tuğçe ÜNVER

HAZİRAN 2012

Matematik Anabilim Dalı Tuğçe ÜNVER tarafından hazırlanan POISSON VE BELTRAMI DENKLEMLERİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : ______________

Üye : ______________

Üye : ______________

…./…./2012

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

POISSON VE BELTRAMI DENKLEMLERİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

ÜNVER, Tuğçe
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA

HAZİRAN 2012,73 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde kompleks analizde temel kavramlar, Gauss teoreminin kompleks formu, Cauchy-Pompeiu gösterilim formülleri, Cauchy-Riemann ve Bitsadze denklemleri için Schwarz, Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Poisson denklemi için Schwarz, Dirichlet, Neumann ve Robin sınır değer problemleri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde ise Beltrami denklemi için Schwarz ve Dirichlet sınır değer problemlerinin çözülebilme koşulları ve bu koşullar altında elemanter çözümleri ortaya konulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Poisson denklemi, Beltrami denklemi, Bitsadze denklemi, Schwarz, Dirichlet, Neumann, Robin sınır değer problemleri, Cauchy-Pompeiu integral gösterilimleri.

ABSTRACT

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON AND BELTRAMI EQUATIONS

ÜNVER, Tuğçe
Kirikkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA
June 2012, 73 pages

The thesis consists of four chapters. The aim of the study is given in the first chapter.

In the second chapter, some fundamental concepts, complex version of Gauss Theorem, Cauchy-Pompeiu representation formulas and Schwarz, Dirichlet and Neumann boundary value problems for Cauchy-Riemann and Bitsadze equations are investigated.

In the third chapter, Schwarz, Dirichlet, Neumann and Robin boundary value problems for Poisson equation are investigated.

In the fourth chapter, Schwarz and Dirichlet boundary value problems for Beltrami equation are investigated.

Key Words: Poisson equation, Beltrami equation, Bitsadze equation, Schwarz, Dirichlet, Neumann, Robin boundary value problems, Cauchy-Pompeiu represantation formulas.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen tez yöneticisi hocam, Sayın Prof. Dr. Kerim KOCA'ya, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda yardımını gördüğüm hocam Sayın Doç. Dr. Rza MUSTAFAYEV'e, büyük fedakarlıklarla bana destek olan aileme, son olarak birçok konuda olduğu gibi, tezimi hazırlamam esnasında da yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Kompleks analizin metotları, matematikteki en etkili konulardan biridir. Reel anlamda çözülemeyen bazı problemler, hesaplanamayan bazı genelleştirilmiş integraller kompleks analiz yöntemleriyle kolayca çözülebilmektedir. Örneğin $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ iki boyutlu Laplace denkleminin reelde genel çözümü olmadığı halde, bu denklemin kompleks formu olan $u_{z\bar{z}} = 0$ denkleminin $u(z,\bar{z}) = F(z) + G(\bar{z})$ biçiminde genel çözümü vardır. Burada F keyfi analitik, G ise keyfi anti-analitik fonksiyonlardır. Yine reelde hesaplanamayan ve Fresnel integralleri olarak bilinen

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx \ , \ \int_0^\infty \cos x^2 dx$$

integralleri, kompleks analizde rezidü yardımıyla kolayca hesaplanabilmektedir ve bu integrallerin her ikisinin de sonucunun $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ olduğu ispatlanabilmektedir.

Kompleks analiz konuları; cebir, cebirsel geometri, sayılar teorisi, potansiyel teori, diferansiyel denklemler, harmonik analiz, operatör teorisi gibi birçok alanı kapsar. Bunun yanında bu konunun fizikte de bazı uygulamaları vardır. Örneğin kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği, kabuk teorisi, su altı akustiği kompleks analizin önemli uygulama alanlarıdır. Gauss, Cauchy, Weierstrass ve Riemann kompleks analizin temellerini atan ve cebirsel yapıyı kuran önemli matematikçilerdir.

Kompleks diferansiyel denklemler için tanımlanan sınır-değer problemlerinin temelini, analitik fonksiyonlar için verilen Schwarz, Dirichlet, Neumann ve Robin problemleri oluşturmaktadır. Homogen olmayan Cauchy-Riemann denklemi veya daha yüksek basamaktan polianalitik denklemler için tanımlanan aynı problemler, analitik fonksiyonlar için verilen problemlere indirgenerek çözülebilmektedir. Bu tür problemlerin çözümünde birim diskte eğrisel veya iki katlı Cauchy tipinden integraller ile karşılaşılmaktadır. Ancak bu tip integraller singülerliğe sahip olsalar bile kompleks integral hesaplama metotları ile hesaplanabilmektedir.

Diğer bir uygulamalı sınır-değer problemi, bir kapalı eğrinin indeksi kavramına dayanan Riemann-Hilbert sınır değer problemidir. Singüler integral teorisinin kullanıldığı bu tipteki sınır-değer problemi bu tezde ele alınmayacaktır.

Günümüzde kompleks diferansiyel denklemler için verilen sınır-değer problemlerinin araştırılması iki temel teoriye dayanmaktadır. Bunlardan biri Avusturyalı Matematikçi W. Tutschke ve araştırma grubunun üzerinde çalıştığı sınır-değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği ile ilgili teoridir. Sınır-değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliğinin araştırılmasında uygun bir lineer fonksiyon uzayı tanımlanmalıdır ve problem bir operatörün bu uzaydaki sabit noktasının bulunması problemine dönüşmektedir.

Bu tezin temelini oluşturan ikinci durum ise tanımlanan sınır-değer problemlerinin çözülebilme koşulları altında çözümleri elemanter olarak ortaya koymaktır. H. Begehr ve çalışma grubunun ilgilendiği bu teori oldukça yenidir ve son beş yıl içerisinde dikkate değer makaleler yayınlanmıştır. Bu problemlerin temelini ise Cauchy tipi integraller, Pompeiu integral gösterilimleri ve Gauss-Ostrosgradski v.s. formülleri oluşturmaktadır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında önce (2) nolu kaynaktan kompleks kısmi türevlere sahip fonksiyonlar için Cauchy-Pompeiu integral gösterilimleri ortaya konulmuştur. Bu gösterilimler kompleks kısmi türevli denklemleri için tanımlanan sınır-değer problemlerinin çözümünde önemli rol oynamaktadır. Yine aynı kaynaktan standart formda belli tipten kompleks denklemler için Schwarz, Dirichlet ve Neumann problemlerinin çözülebilme koşulları ve elemanter çözümlerin nasıl ortaya konulduğu öğrenilmiştir. (4) nolu kaynaktan normal doğrultudaki türev ile kompleks türev operatörleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu ilişki, özellikle Neumann ve

Robin problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Kompleks formda Poisson denklemi için Robin problemi [1] numaralı kaynaktan incelenmiştir. Kompleks analizin temel konularından biri olan genelleştirilmiş analitik fonksiyonlarla ilgili kavramlar için [3] numaralı kaynaktan yararlanılmıştır. Klasik Beltrami denklemi için tanımlanan Schwarz ve Dirichlet sınır değer problemleri [5] numaralı kaynak kullanılarak ortaya konulmuştur. [6-8] numaralı kaynaklardan ise konuyla ilgili çeşitli kavramlar ve tanımlar öğrenilmiştir.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezde önce bazı temel integral gösterilimleri verilecek ve daha sonra belli tipten kompleks diferansiyel denklemler ve Beltrami denklemi için Schwarz, Dirichlet, Neumann ve Robin problemlerinin uygun koşullar altında çözümleri ortaya konulacaktır. İleri bir araştırma konusu olarak ele alınan problemlerin genelleştirilmelerinin yapılmasına temel oluşturma bu tezin amaçları arasındadır. Ayrıca belli tipten sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini araştırmak için ön bilgilerin ortaya konulması tezin bir diğer amacıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Kompleks Düzlemde Gauss Teoremi

$D \subset \mathbb{C}$ alt bölgesinde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleks fonksiyonu verilsin ve $f \in C^1(D)$ olsun. Burada $u,\ v : D \to \mathbb{R}$ kompleks değişkenli, reel değerli fonksiyonlardır. $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ sabit bir nokta olmak üzere u ve v nin z_0 noktasındaki lineerleştirilmesi

$$\tilde{u}(x,y) = u(x_0,y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$
$$\tilde{v}(x,y) = v(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)$$

biçimindedir. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$ eşitlikleri göz önüne alınırsa, f in $z_0 \in D$ noktasındaki lineerleştirilmesi

$$\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y - y_0) \qquad (2.1)$$

olur. Diğer taraftan

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$$
$$\overline{z - z_0} = (x - x_0) - i(y - y_0)$$

dır. Bu durumda son iki denklemin taraf tarafa toplanıp çıkarılmasıyla

$$x - x_0 = \frac{1}{2}\left[(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}\right]$$
$$y - y_0 = \frac{1}{2i}\left[(z - z_0) - \overline{(z - z_0)}\right]$$

yazılabilir. Bu değerler f in lineerleştirilmesinde yerine yazılırsa

$$f(z)=f(z_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right](z-z_0)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right]\overline{(z-z_0)} \qquad (2.2)$$

elde edilir. (2.1) de $x-x_0$ ve $y-y_0$ ın katsayılarının f in sırasıyla x ve y ye göre türevleri olduklarına dikkat edilirse, (2.2) de $(z-z_0)$ ve $\overline{(z-z_0)}$ in katsayıları sırasıyla f in z ve $\bar{z}$ e göre kompleks kısmi türevleri olarak isimlendirilebilir. Böylece

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

olur.

w, kompleks düzlemin açık bir kümesi üzerinde $\bar{z}$ ten bağımsız ise bu durumda w analitik bir fonksiyon olur. O halde $w=u+iv$ olmak üzere

$$u_x=v_y\ ,\ u_y=-v_x \qquad (2.3)$$

Cauchy-Riemann sistemi sağlanır. Bu sistem

$$w_{\bar{z}}=0 \qquad (2.4)$$

kompleks diferansiyel denklemine eşdeğerdir. Gerçekten

$$2\partial_{\bar{z}}w=\left(\partial_x+i\partial_y\right)\left(u+iv\right)=\partial_x u-\partial_y v+i\left(\partial_x v+\partial_y u\right) \qquad (2.5)$$

dir.

Teorem 2.1.1. γ, pozitif yönde yönlendirilmiş parçalı düzgün, kapalı bir eğri ve D, γ tarafından sınırlanan bölge olsun. Ayrıca P ve Q fonksiyonları D bölgesinde kısmi türevlere sahip, $\bar{D} = D \cup \partial D = D \cup \gamma$ kümesinde sürekli iki fonksiyon ise bu taktirde

$$\iint_D P_y(x,y)\,dxdy = -\int_{\partial D} P(x,y)\,dx \tag{2.6}$$

$$\iint_D Q_x(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} Q(x,y)\,dy \tag{2.7}$$

olup buradan

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dxdy \tag{2.8}$$

dır.

(2.8) eşitliğine “Green Formülü” adı verilir. Bu teoremin ispatı çeşitli Calculus kitaplarında bulunabilir.

Teorem 2.1.2. (Kompleks Düzlemde Gauss Teoremi) $D \subset \mathbb{C}$ düzgün bir bölge ve $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\bar{D};\mathbb{C})$ olsun. $z = x + iy$ olmak üzere

$$\iint_D w_{\bar{z}}(z)\,dxdy = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} w(z)\,dz \tag{2.9}$$

ve

$$\iint_D w_z(z)\,dxdy = -\frac{1}{2i}\int_{\partial D} w(z)\,d\bar{z} \tag{2.10}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (2.5) den

$$2w_{\bar{z}}=\left(u_x-v_y\right)+i\left(v_x+u_y\right)$$

yazılabilir ve (2.6) ve (2.7) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}2\iint_D w_{\bar{z}}\left(z\right)dxdy &= \iint_D\left(u_x\left(z\right)-v_y\left(z\right)\right)dxdy+i\iint_D\left(v_x\left(z\right)+u_y\left(z\right)\right)dxdy\\ &= \int_{\partial D}\left(u\left(z\right)dy+v\left(z\right)dx\right)+i\int_{\partial D}\left(v\left(z\right)dy-u\left(z\right)dx\right)\\ &= -i\int_{\partial D}\left(u+iv\right)\left(dx+idy\right)\\ &= -i\int_{\partial D}w\left(z\right)dz\end{aligned}$$

olup böylece (2.9) elde edilir. (2.9) eşitliğinde w yerine $\bar{w}$ yazılıp her iki tarafın kompleks eşleniği alınarak , $\overline{\partial_{\bar{z}}w}=\partial_z\bar{w}$ olduğuna da dikkat edilirse, (2.10) elde edilir.

2.2. Cauchy-Pompeiu İntegral Gösterilimleri ve Sonuçları

Teorem 2.2.1. $D\subset\mathbb{C}$ düzgün bir bölge ve $w\in C^1\left(D;\mathbb{C}\right)\cap C\left(\bar{D};\mathbb{C}\right)$ olsun. $z\in D$ ve $\zeta=\xi+i\eta$ olmak üzere

$$w\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}w\left(\zeta\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar{\zeta}}\left(\zeta\right)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \tag{2.11}$$

ve

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{\pi}\iint_{D} w_{\zeta}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta - z}} \tag{2.12}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $\zeta \in D$ için $K_{\varepsilon}(z) := \{\zeta \in D : |\zeta - z| < \varepsilon\}$, $D_{\varepsilon} = D - \overline{K_{\varepsilon}(z)}$ olsun. Bu durumda D_{ε} halkasal bölgesinde $\dfrac{w(\zeta)}{\zeta - z}$ fonksiyonu için Teorem 2.1.2 nin koşulları sağlanır. O halde (2.9) dan

$$\iint_{D_{\varepsilon}} \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = \frac{1}{2i}\int_{\partial D_{\varepsilon}} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i}\int_{|\zeta - z| = \varepsilon} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

elde edilir. Sağdaki ikinci integral için $\zeta - z = \varepsilon e^{it}$ kutupsal koordinatları kullanılırsa

$$\iint_{D_{\varepsilon}} \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} w\left(z + \varepsilon e^{it}\right) dt$$

olur. Son eşitliğin her iki yanının $\varepsilon \to 0$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0}\iint_{D_{\varepsilon}} \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta &= \iint_{D} \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} w\left(z + \varepsilon e^{it}\right) dt \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \pi w(z)
\end{aligned}$$

olup buradan

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{w(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{D} \frac{w_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta$$

elde edilir. Benzer şekilde D_ε bölgesinde $\frac{w(\zeta)}{\zeta - z}$ fonksiyonu için (2.10) eşitliği kullanılarak (2.12) elde edilebilir.

Tanım 2.2.1. (2.11) ve (2.12) gösterilimlerine $w(z)$ fonksiyonunun Cauchy-Pompeiu integral gösterilimleri denir.

Tanım 2.2.2. $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olmak üzere

$$T_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

şeklinde tanımlanan T_D operatörüne "Pompeiu Operatörü" denir.

Tanım 2.2.3. φ**,** $C^k(D)$ sınıfına ait reel değerli bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu tamamen D nin içinde bulunan bir kompakt alt bölgenin sınırında ve dışında özdeş olarak sıfır ise φ ye "Test Fonksiyonu" denir. Bu şekilde tanımlanan test fonksiyonlarının sınıfı $C_0^k(D)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. Her $\varphi \in C_0^1(D)$ test fonksiyonu için f fonksiyonuna karşılık

$$\iint_D \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial z} + g\varphi \right) dxdy = 0$$

sağlanacak şekilde bir g fonksiyonu mevcutsa g ye f in z ye göre birinci basamaktan Sobolev anlamında türevi denir ve $\frac{\partial f}{\partial z} = g$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde Sobolev anlamında $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ tanımı ve yüksek basamaktan türevler verilebilir.

Teorem 2.2.2. $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ olmak üzere her $\varphi \in C_0^1(D;\mathbb{C})$ test fonksiyonu için

$$\iint_D T_D f(z)\varphi_{\bar{z}}(z)\,dxdy + \iint_D f(z)\varphi(z)\,dxdy = 0 \tag{2.13}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (2.11) eşitliği ve φ fonksiyonunun D bölgesinin sınırında özdeş olarak sıfır olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_D \varphi_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_D \varphi_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \left(T_D\varphi_{\bar{\zeta}}\right)(z)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\iint_D T_D f(z)\varphi_{\bar{z}}(z)\,dxdy &= \iint_D \left[-\frac{1}{\pi}\iint_D f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}\right]\varphi_{\bar{z}}(z)\,dxdy \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_D f(\zeta)\left[\iint_D \varphi_{\bar{z}}(z)\frac{dxdy}{\zeta - z}\right]d\xi d\eta \\ &= -\iint_D f(\zeta)\varphi(\zeta)\,d\xi d\eta\end{aligned}$$

sağlanır. Bu durumda

$$\iint_D T_D f(z)\varphi_{\bar{z}}(z)\,dxdy + \iint_D f(z)\varphi(z)\,dxdy = 0$$

veya

$$\iint_D \left(T_D f(z)\varphi_{\bar{z}}(z) + f(z)\varphi(z)\right)dxdy = 0$$

olur. O halde

$$\partial_{\bar{z}} T_D f = f \tag{2.14}$$

türevinin Sobolev anlamında mevcut olduğu söylenebilir.

Kompleks kısmi türevli denklemler için $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde sınır değer problemlerinin incelenmesi sırasında Cauchy-Pompeiu formüllerinin değişik versiyonları karşımıza çıkar.

Teorem 2.2.3. $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\bar{D};\mathbb{C})$ olmak üzere, $|z| < 1$ birim diskinde

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\operatorname{Re} w(\zeta)\right)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\operatorname{Im} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{1 - z\bar{\zeta}}\right)d\xi d\eta \tag{2.15}$$

dir.

İspat: $w \in C^1(D;\mathbb{C}) \cap C(\bar{D};\mathbb{C})$ olmak üzere, (2.9) daki eşitlikte $w(\zeta)$ yerine $w(\zeta)\dfrac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta}$ alınırsa Teorem 2.1.2 nin koşulları sağlanacağından $|z| < 1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{\bar{z}}{1 - \bar{z}\zeta}d\xi d\eta = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin kompleks eşleniği alınıp, (2.11) ile taraf tarafa toplanırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{\zeta w(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{1-z\bar{\zeta}}\right)d\xi d\eta$$

olur. Diğer taraftan

$$\left(\operatorname{Re}w(\zeta)\right)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+i\operatorname{Im}w(\zeta)=\frac{1}{2}\left(w(\zeta)+\overline{w(\zeta)}\right)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{1}{2}\left(w(\zeta)-\overline{w(\zeta)}\right)$$
$$=\frac{\zeta w(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z\overline{w(\zeta)}}{\zeta-z}$$

ifadesi son eşitlikte yerine yazılırsa (2.15) gösterilimi elde edilir.

Sonuç 2.2.1. Her $w\in C^1(D;\mathbb{C})\cap C(\bar{D};\mathbb{C})$ fonksiyonu, $|z|<1$ olmak üzere

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\operatorname{Re}w(\zeta)\right)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|<1}\left(\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right)d\xi d\eta+i\operatorname{Im}w(0)\quad(2.16)$$

biçiminde gösterilebilir.

(2.16) formülü Cauchy-Schwarz-Poisson formülü olarak bilinir.

Tanım 2.2.5. $\varphi(z)$, $|z|<1$ birim diskinde analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$S\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\varphi(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

şeklinde tanımlanan S operatörüne Schwarz Operatörü denir.

$z\in D$ ve $\zeta\in\partial D$ olmak üzere

$$\lim_{z\to\zeta} S\varphi(z) = \varphi(\zeta), \quad \varphi \in C(\partial D;\mathbb{R})$$

olduğu gösterilebilir.

Not: $w(z)$ fonksiyonu $|z|<1$ birim diskinde analitik bir fonksiyon olduğunda (2.16) formülü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \left(\operatorname{Re} w(\zeta)\right)\left(\frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + i \operatorname{Im} w(0) \tag{2.17}$$

formuna gelir. Bu formüle analitik fonksiyonlar için “Schwarz-Poisson Formülü” denir.

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1$$

ifadesine “Schwarz Çekirdeği” ve bunun reel kısmı olan

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1 = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}$$

ifadesi de “Poisson Çekirdeği” olarak isimlendirilir.

Teorem 2.2.4. D düzgün bir bölge ve $w \in C^2(D;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{D};\mathbb{C})$ olmak üzere

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{\pi}\iint_D w_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}d\xi d\eta \tag{2.18}$$

ve

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar\zeta}(\zeta)\log|\zeta-z|^2\,d\bar\zeta+\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\zeta\bar\zeta}(\zeta)\log|\zeta-z|^2\,d\xi d\eta \quad (2.19)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: (2.11) gösterilim formülünden

$$w_{\bar\zeta}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar t}(t)\frac{dt}{t-\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar t\bar t}(t)\frac{dt_1dt_2}{t-\zeta},\quad t=t_1+it_2$$

yazılabilir. Bu ifade (2.11) de yerine yazılırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar t}(t)\psi(z,t)\,dt-\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar t\bar t}(t)\psi(z,t)\,dt_1dt_2 \quad (2.20)$$

elde edilir. Burada

$$\psi(z,t)=\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}=\frac{1}{t-z}\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\frac{1}{\zeta-t}-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta$$

dır. (2.11) gösteriliminde $w(z)$ yerine $\dfrac{\overline{t-z}}{t-z}$ alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\overline{t-z}}{t-z}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{t-\zeta}}{t-\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\bar\zeta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-t)(\zeta-z)}\\&=\tilde\psi(z,t)-\psi(z,t)\end{aligned} \quad (2.21)$$

olup $\tilde\psi$ hem t hem de z ye göre analitiktir. Diğer taraftan (2.9) dan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar t}(t)\tilde\psi(z,t)\,dt-\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar t\bar t}(t)\tilde\psi(z,t)\,dt_1dt_2=0$$

yazılabilir. Bu ifade (2.20) den çıkarılırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar t}(t)\big(\tilde\psi(z,t)-\psi(z,t)\big)dt+\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar t\bar t}(t)\big(\tilde\psi(z,t)-\psi(z,t)\big)dt_1dt_2$$

elde edilir. (2.21) eşitliği kullanılırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar\zeta}(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar\zeta\bar\zeta}(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta$$

gösterilimi ortaya çıkar. Şimdi (2.19) u elde edelim.

Bunun için (2.12) den

$$w_{\bar\zeta}(\zeta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar t}(t)\frac{d\bar t}{\overline{t-\zeta}}-\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar t\bar t}(t)\frac{dt_1dt_2}{\overline{t-\zeta}}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifade (2.12) de yerine yazılırsa

$$\psi(z,t)=\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{d\xi d\eta}{\left(\overline{\zeta-t}\right)(\zeta-z)}$$

olmak üzere

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\bar t}(t)\psi(z,t)\,d\bar t-\frac{1}{\pi}\iint_D w_{\bar t\bar t}(t)\psi(z,t)\,dt_1dt_2 \qquad (2.22)$$

bulunur.

$\log|t-z|^2$ fonksiyonu sabit bir $t \in D$ noktası için $D \setminus \{t\}$ kümesinde C^1 sınıfındandır. O halde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için $D_\varepsilon = D \setminus \{z: |z-t| \le \varepsilon\}$ olmak üzere, $z \in D$ bölgesinde (2.11) uygulanabilir. Böylece

$$\log|t-z|^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \log|t-\zeta|^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{\overline{\zeta - t}} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

dir.

Diğer yandan $\varepsilon < |z-t|$ bölgesi için $\zeta - t = re^{i\theta}$ kutupsal gösterilimi kullanılırsa

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta - t| < \varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{\left(\overline{\zeta - t}\right)(\zeta - z)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{t - z - re^{i\theta}} d\theta dr$$

integrali mevcut olup $\varepsilon \to 0$ için bu integralin değeri sıfıra yaklaşır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \log|t-z|^2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \log|t-\zeta|^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{d\xi d\eta}{\left(\overline{\zeta - t}\right)(\zeta - z)} \\ &= \tilde{\psi}(z,t) - \psi(z,t) \end{aligned} \tag{2.23}$$

dır. Ayrıca

$$\tilde{\psi}(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \log|\zeta - t|^2 \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

fonksiyonu z ye göre analitik fakat t ye göre anti analitiktir. Böylece (2.10) dan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} w_{\bar{t}}(t) \tilde{\psi}(z,t) d\bar{t} + \frac{1}{\pi} \iint_D w_{t\bar{t}}(t) \tilde{\psi}(z,t) dt_1 dt_2 = 0 \text{ , } t = t_1 + it_2$$

elde edilir. Bu ifade (2.22) ye eklenip, (2.23) kullanılırsa (2.19) eşitliği elde edilir.

Sonuç 2.2.2. (2.18) ve (2.19) eşitliklerinde w yerine $\overline{w}$ eşlenik yazılıp kompleks eşlenik alınırsa

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\zeta}(\zeta)\frac{\zeta - z}{\overline{\zeta - z}}\, d\overline{\zeta} + \frac{1}{\pi}\iint_{D} w_{\zeta\zeta}(\zeta)\frac{\zeta - z}{\overline{\zeta - z}}\, d\xi d\eta \qquad (2.24)$$

ve benzer şekilde

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} w_{\zeta}(\zeta)\log|\zeta - z|^2\, d\zeta + \frac{1}{\pi}\iint_{D} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta - z|^2\, d\xi d\eta \quad (2.25)$$

gösterilimleri de yazılabilir.

2. 3. Temel Sınır Değer Problemleri

Bu kesimde belli tipten bazı kompleks kısmi türevli denklemler için sınır değer problemleri incelenecektir.

Tanım 2.3.1. (Schwarz Sınır Değer Problemi) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde $w_{\overline{z}} = 0$ denkleminin

$$\operatorname{Re} w\big|_{\partial D} = \gamma, \quad \gamma \in C(\partial D; \mathbb{R}); \quad \operatorname{Im} w(0) = c, \; c \in \mathbb{R}$$

sınır koşullarını sağlayan $w(z)$ çözümünün bulunması problemi analitik fonksiyonlar için "Schwarz Sınır Değer Problemi" olarak adlandırılır.

Teorem 2.3.1. $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}}=0\,,\ z\in D$$

$$\operatorname{Re}w\big|_{\partial D}=\gamma,\ \ \gamma\in C(\partial D;\mathbb{R});\ \ \operatorname{Im}w(0)=c,\ c\in\mathbb{R}$$

Schwarz sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ic \tag{2.26}$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı (2.17) Schwarz-Poisson formülünden açıktır.

Tanım 2.3.2. (Dirichlet Sınır Değer Problemi) $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim diskinde $w_{\bar{z}}=0$ denkleminin

$$w\big|_{\partial D}=\gamma(z),\ \gamma\in C(\partial D;\mathbb{C})$$

sınır koşulunu sağlayan çözümünün bulunması problemine analitik fonksiyonlar için "Dirichlet Sınır Değer Problemi" denir.

Teorem 2.3.2. $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ ve $\gamma\in C(\partial D;\mathbb{C})$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}}=0,\ z\in D$$
$$w\big|_{\partial D}=\gamma,\ \gamma\in C(\partial D;\mathbb{C})$$

Dirichlet sınır değer probleminin çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(z)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=0 \tag{2.27}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda problemin tek çözümü

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \tag{2.28}$$

Cauchy integral formülüyle verilir.

İspat: Cauchy integral formülünün hipotezleri altında $\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$ analitik fonksiyonu

$$\phi^{+}(\tau)=\lim_{\substack{z\to\tau\\ z\in D^{+}}}\phi(z)\ ,\quad \phi^{-}(\tau)=\lim_{\substack{z\to\tau\\ z\in D^{-}}}\phi(z)$$

sınır değerlerine sahiptir. Burada D^{+}, $\partial D^{+}=\gamma$ ile sınırlanmış iç bölge, $\widehat{\mathbb{C}}$ Riemann küresi ve $\overline{D}=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\left(D^{+}\cup\gamma\right)$ dir. Ayrıca $\tau\in\gamma$ için

$$\phi^{+}(\tau)=\frac{1}{2}\varphi(\tau)+\phi(\tau),\quad \phi^{-}(\tau)=-\frac{1}{2}\varphi(\tau)+\phi(\tau)$$

olup, $\phi(\tau)$ Cauchy esas değeri anlamındadır. Bu formüller Plemelj-Sokhotzki formülü olarak bilinir. Plemelj-Sokhotzki formülünden, $|\zeta|=1$ için

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ |z|<1}}w(z)-\lim_{\substack{z\to\zeta\\ 1<|z|}}w(z)=\gamma(\zeta)$$

yazılabilir. $|\zeta|=1$ için

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\|z|<1}} w(z)=\gamma(\zeta)$$

olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{\substack{z\to\zeta\\1<|z|}} w(z)=0$ olmasıdır.

(2.27) nin gerek koşul olduğunu göstermek için, w, Dirichlet probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda w, D bölgesinde analitik ve ∂D sınırında sürekli bir fonksiyondur. Böylece

$$\lim_{z\to\zeta} w(z)=\gamma(\zeta),\quad |\zeta|=1 \tag{2.29}$$

dir. $|z|>1$ için

$$w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-\frac{1}{\overline{z}}}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $|z|>1$ için $z\to\zeta$ durumunda $\frac{1}{\overline{z}}\to\zeta$ dır. O halde $1<|z|$ için $\lim_{z\to\zeta} w(z)$ mevcut olduğundan, $\lim_{z\to\zeta} w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)$ de mevcuttur. Diğer yandan

$$w(z)-w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}-\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}-\overline{z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

olup $|\zeta|=1$ için Poisson çekirdeğinin özelliğinden

$$\lim_{z\to\zeta}\left(w(z)-w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right)=\gamma(\zeta)$$

dir ve bu durumda

$$\lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|<1}} w(z) - \lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|>1}} w(z) = \gamma(\zeta) \tag{2.30}$$

elde edilir. Bu ifade (2.29) ile karşılaştırılırsa $\lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|>1}} w(z) = 0$ olduğu görülür. $|z|>1$ olduğunda $w(\infty)=0$ ise, analitik fonksiyonlar için maksimum prensibinden $w(z)\equiv 0$ olur. O halde $|z|<1$ için $w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=0$ dır. Böylelikle (2.27) koşulu elde edilir.

(2.27) nin yeter koşul olduğunu göstermek için (2.27) ve (2.28) taraf tarafa toplanırsa,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

bulunur. Böylece $|\zeta|=1$ için Poisson çekirdeğinin özelliğinden $\lim_{\substack{z\to\zeta \\ |z|<1}} w(z) = \gamma(\zeta)$ dir. Ayrıca (2.28) in homogen Cauchy-Riemann denklemini sağladığı açıktır.

Üçüncü bir sınır değer problemi, regüler bir bölgenin sınırındaki dış normal vektöre dayanır. $|z-a|=r$ çemberi üzerinde normal doğrultudaki türev, yarıçap vektörünün yönüdür. $\nu = (z-a)/r$ dış normal vektördür ve bu yöndeki türev $\partial_\nu = \partial_r = \frac{z}{r}\partial_z + \frac{\overline{z}}{r}\partial_{\overline{z}}$ şeklinde verilir. Özel olarak birim diskte $\partial_r = z\partial_z + \overline{z}\partial_{\overline{z}}$ dir.

Tanım 2.3.3. (Neumann Sınır Değer Problemi) $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ birim diskinde $w_{\overline{z}}=0$ denkleminin

$$\partial_\nu w\big|_{\partial D} = \gamma,\ \gamma\in C(\partial D;\mathbb{C});\ \ w(0)=c,\ c\in\mathbb{C}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine “Neumann Sınır Değer Problemi” denir.

Teorem 2.3.3. Neumann sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul, $|z|<1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)\zeta}=0 \tag{2.31}$$

olmasıdır. Bu durumda çözüm tektir ve

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{2.32}$$

ile verilir.

İspat: w analitik bir fonksiyon olduğundan, Neumann sınır koşulu

$$\partial_\nu w\big|_{\partial D}=\left(zw_z+\overline{z}w_{\overline{z}}\right)\big|_{\partial D}=zw'(z)\big|_{\partial D}=\gamma(z)$$

Dirichlet sınır koşuluna indirgenir. $zw'(z)$ analitik bir fonksiyon olduğundan, Teorem 2.3.2 den

$$zw'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

çözümünün mevcut olması için gerek ve yeter koşul, $|z|<1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=0 \tag{2.33}$$

olmasıdır. $zw'(z)$ fonksiyonu orijinde sıfır olduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=0 \tag{2.34}$$

dır. Bu taktirde

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{z(\zeta-z)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\zeta-z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının z ye göre integrali alınırsa,

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

çözümü ortaya çıkar. Diğer taraftan (2.33) ve (2.34) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=0$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}=0$$

elde edilir. Bu ise istenilen (2.31) koşuludur.

Bu kısımdan sonra aynı sınır değer problemleri homogen olmayan Cauchy-Riemann denklemleri için verilecektir. T_D operatörü kullanılarak bu problemler analitik fonksiyonlar için verilen sınır değer problemlerine indirgenebilir.

Teorem 2.3.4. D birim diskinde, $f \in L_1(D;\mathbb{C}), \gamma \in C(\partial D;\mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}} = f, \quad \operatorname{Re} w\big|_{\partial D} = \gamma, \quad \operatorname{Im} w(0) = c$$

homogen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Schwarz sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + ic - \frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta \quad (2.35)$$

dir. Bu teoremin ispatı için [4] e bakılabilir.

Teorem 2.3.5. D birim diskinde, $f \in L_1(D;\mathbb{C}),\ \gamma \in C(\partial D;\mathbb{C})$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}} = f, \quad w\big|_{\partial D} = \gamma$$

homogen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul, $|z| < 1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta = 0 \quad (2.36)$$

olmasıdır. Bu durumda Dirichlet probleminin tek çözümü

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \quad (2.37)$$

dir.

İspat: Problemin çözümünün var olduğu kabul edilirse, (2.37) çözümü (2.11) gösteriliminden açıktır. Çözümün tekliği ise Teorem 2.3.2 nin bir sonucudur.

(2.37) eşitliği ile verilen fonksiyonun (2.36) koşulu altında homogen olmayan Dirichlet sınır değer probleminin çözümü olduğu gösterilmelidir.

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

fonksiyonu $|z|<1$ olmak üzere T_D operatörünün özelliğinden, $w_{\bar{z}}=f$ denklemini sağlar. (2.36) ve (2.37) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}w(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right)d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\left(\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}+\frac{1}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta\end{aligned}$$

dir. O halde $|z|=1$ olmak üzere Poisson çekirdeğinin özelliğinden $w(z)=\gamma(z)$ sınır koşulu sağlanır.

(2.36) nın gerek koşul olduğunu göstermek için $\varphi=w-T_Df$ fonksiyonu ele alınırsa

$$\begin{aligned}&\varphi_{\bar{z}}=f\\&\varphi|_{\partial D}=\gamma-T_Df\end{aligned}$$

homogen Dirichlet problemi elde edilir. Bu problemin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul Teorem 2.3.2 den $|z|<1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\gamma(\zeta)-T_D f(\zeta)\right)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=0$$

olmasıdır ve bu durumda çözüm

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\gamma(\zeta)-T_D f(\zeta)\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

şeklindedir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (2.36) çözülebilme koşulu ve (2.37) çözümü elde edilir.

Teorem 2.3.6. D birim diskinde, $f\in C^{\alpha}\left(\overline{D};\mathbb{C}\right)$, $0<\alpha<1$, $\gamma\in C\left(\partial D;\mathbb{C}\right)$, $c\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$w_{\overline{z}}=f,\quad \partial_{\nu}w\big|_{\partial D}=\gamma,\quad w(0)=c$$

homogen olmayan Cauchy-Riemann denklemi için Neumann probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul, $|z|<1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{1-\overline{z}\zeta}+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}f(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2}d\xi d\eta=0 \qquad (2.38)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda tek çözüm

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\gamma(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta \qquad (2.39)$$

dir.

İspat: $\varphi = w - T_D f$ fonksiyonu ele alınırsa

$$\varphi_{\bar{z}} = 0,\ \partial_\nu \varphi\big|_{\partial D} = \gamma - z \prod f - \bar{z} f,\ \varphi(0) = c - T_D f(0)$$

analitik fonksiyonlar için homogen Neumann sınır değer problemi elde edilir. Teorem 2.3.3 den bu problemin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z| < 1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\gamma(\zeta) - \zeta \prod f(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} = 0$$

olmasıdır. Bu durumda çözüm

$$\varphi(z) = c - T_D f(0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(\gamma(\zeta) - \zeta \prod f(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta) \right) log\left(1 - z\bar{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

şeklindedir.

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \zeta \prod f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \prod f(\zeta) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \left(-\frac{1}{\pi} \iint_{|t|<1} f(t) \frac{dt_1 dt_2}{(t - \zeta)^2} \right) \frac{d\zeta}{1 - \bar{z}\zeta}$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta$$

olduğundan, çözülebilme koşulu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta(1 - \bar{z}\zeta)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} f(\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{1 - \bar{z}\zeta} + \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} f(\zeta) \frac{\bar{z}}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} d\xi d\eta = 0$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\zeta\,\Pi f(\zeta)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1} f(t)\frac{dt_1dt_2}{(\zeta-t)^2}\right)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)d\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1} f(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{(\zeta-t)^2}\right)dt_1dt_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan, w çözümü

$$w(z)=\varphi(z)+T_D f(z)$$

$$=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\gamma(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.3.7. D birim diskinde, $f\in C^{\alpha}\left(\overline{D};\mathbb{C}\right)$, $0<\alpha<1$, $\gamma\in C\left(\partial D;\mathbb{C}\right)$, $c\in\mathbb{C}$ olmak üzere

$$w_{\overline{z}}=f,\quad zw_z\big|_{\partial D}=\gamma,\quad w(0)=c$$

sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z|<1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta\left(1-\overline{z}\zeta\right)}+\frac{\overline{z}}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\left(1-\overline{z}\zeta\right)^2}=0 \qquad (2.40)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda tek çözüm

$$w(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{z}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta(\zeta-z)} \tag{2.41}$$

dir.

İspat: $\varphi=w-T_D f$ fonksiyonu ele alınırsa, verilen sınır değer problemi

$$\varphi_{\overline{z}}=0,\quad z\varphi'(z)\big|_{\partial D}=\gamma-z\Pi f,\quad \varphi(0)=c-Tf(0)$$

analitik fonksiyonlar için Neumann sınır değer problemine dönüşür. Burada φ fonksiyonu analitik olduğundan, $z\varphi'(z)=\partial_{\nu}\varphi$ yazılabilir. Bu durumda teoremin ispatı bir öncekine benzer şekilde yapılır.

İkinci basamaktan iki temel türev operatörü vardır. Bunlardan birisi $\partial_z\partial_{\overline{z}}$ Laplace operatörü ve diğeri $\partial_{\overline{z}}^{\,2}$ Bitsadze operatörüdür. Üçüncü bir operatör de Bitsadze operatörünün kompleks eşleniği olan $\partial_z^{\,2}$ operatörüdür. Bu operatör için araştırılacak bütün formüller ve sonuçlar, Bitsadze operatörü için elde edilecek sonuçlarda kompleks eşlenik alınarak bulunabilir.

Şimdi Bitsadze operatörü için temel sınır değer problemlerini inceleyelim:

Teorem 2.3.8. $f\in L_1(D;\mathbb{C})$, $\gamma_0,\gamma_1\in C(\partial D;\mathbb{R})$, $c_0,c_1\in\mathbb{R}$ olmak üzere birim diskte

$$w_{\overline{z}\overline{z}}=f,\quad \operatorname{Re} w\big|_{\partial D}=\gamma_0,\quad \operatorname{Re} w_{\overline{z}}\big|_{\partial D}=\gamma_1,\quad \operatorname{Im} w(0)=c_0,\quad \operatorname{Im} w_{\overline{z}}(0)=c_1$$

homogen olmayan Bitsadze denklemi için Schwarz sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$w(z)=ic_0+i(z+\overline{z})+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\left(\zeta-z+\overline{\zeta-z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)\left(\zeta-z+\overline{\zeta-z}\right)d\xi d\eta \tag{2.42}$$

biçimindedir.

İspat: Verilen problem

$$w_{\overline{z}}=g,\quad \operatorname{Re} w|_{\partial D}=\gamma_0,\quad \operatorname{Im} w(0)=c_0$$
$$g_{\overline{z}}=f,\quad \operatorname{Re} g|_{\partial D}=\gamma_1,\quad \operatorname{Im} g(0)=c_1$$

sistemine eşdeğerdir. Teorem 2.3.4 den bu iki sınır değer probleminin çözümleri sırasıyla

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ic_0-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{g(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{g(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

ve

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ic_1-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1-z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

dir. g fonksiyonu, w çözümünde yerine yazılıp

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\xi d\eta}{\zeta}=\frac{t+z}{t-z}\overline{\left(t-z\right)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{1+\zeta\overline{t}}{1-\zeta\overline{t}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\xi d\eta}{\zeta}=\frac{1+z\overline{t}}{1-z\overline{t}}\overline{\left(t-z\right)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\overline{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta}}=\frac{1+z\overline{t}}{1-z\overline{t}}\left(t-z\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{1+\overline{\zeta}t}{1-\overline{\zeta}t}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta}}=t+z$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{1}{\zeta}-\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)d\xi d\eta=-z-\overline{z}$$

eşitlikleri kullanılırsa (2.42) çözümü elde edilir.

Teorem 2.3.9. D birim diskinde $w_{\overline{z}\overline{z}}=0,\ \ w\big|_{\partial D}=0$ Bitsadze denklemi için Dirichlet problemi sonsuz çoklukta lineer bağımsız çözüme sahiptir.

İspat: $w_{\overline{z}}\left(z\right)$, D bölgesinde analitik bir fonksiyondur. O halde $\varphi\left(z\right)$ ve $\psi\left(z\right)$ keyfi analitik fonksiyonlar olmak üzere Bitsadze denkleminin çözümü

$$w\left(z\right)=\varphi\left(z\right)\overline{z}+\psi\left(z\right)$$

dir. $\left|z\right|=1$ için, ∂D sınırında $w\big|_{\partial D}=0$ olduğundan $\varphi\left(z\right)+z\psi\left(z\right)=0$ dır. $\varphi\left(z\right)+z\psi\left(z\right)$ analitik olduğundan, bu eşitlik D bölgesinin tamamında doğrudur. O halde $\varphi\left(z\right)=-z\psi\left(z\right)$ olduğundan, keyfi analitik ψ fonksiyonu için

$$w\left(z\right)=\left(1-\left|z\right|^{2}\right)\psi\left(z\right)$$

yazılabilir. Özel olarak $\psi(z)=z^k$, $k\in\mathbb{N}$ alınırsa,

$$w_k(z)=\left(1-|z|^2\right)z^k,\ k\in\mathbb{N}$$

fonksiyonu Bitsadze denklemi için Dirichlet probleminin çözümüdür ve $k\in\mathbb{N}$ için $w_k(z)$ çözümleri, $\mathbb{C}$ bölgesinde lineer bağımsızdır.

Teorem 2.3.10. $f\in L_1(D;\mathbb{C})$, $\gamma_0,\gamma_1\in C(\partial D;\mathbb{C})$ olmak üzere, D birim diskinde

$$w_{\bar z\bar z}=f,\quad w\big|_{\partial D}=\gamma_0,\quad w_{\bar z}\big|_{\partial D}=\gamma_1$$

homogen olmayan Bitsadze denklemi için Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $|z|<1$ için

$$\frac{\bar z}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\frac{\gamma_0(\zeta)}{1-\bar z\zeta}-\frac{\gamma_1(\zeta)}{\zeta}\right)d\zeta+\frac{\bar z}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{1-\bar z\zeta}d\xi d\eta=0 \tag{2.43}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\bar z}{1-\bar z\zeta}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar z}{1-\bar z\zeta}d\xi d\eta=0 \tag{2.44}$$

olmasıdır. Bu durumda çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta \tag{2.45}$$

dir.

İspat: Verilen sınır değer problemi

$$w_{\bar{z}} = g \ , \quad w\big|_{\partial D} = \gamma_0$$
$$g_{\bar{z}} = f \ , \quad g\big|_{\partial D} = \gamma_1$$

sistemine eşdeğerdir. Teorem 2.3.5 ten $|z|<1$ birim diskinde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} g(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta \tag{2.46}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta \tag{2.47}$$

çözülebilme koşulları altında

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \tag{2.48}$$

ve

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \tag{2.49}$$

çözümleri mevcuttur. (2.48) fonksiyonu (2.49) da yerine yazılırsa

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\gamma_1(t)\frac{dt}{t-\zeta} - \frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1} f(t)\frac{dt_1dt_2}{t-\zeta}\right]\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\gamma_1(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}\right]dt + \frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}\right]dt_1dt_2$$

çözümü elde edilir. Bu ifadede

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}=\frac{\overline{t-z}}{t-z}$$

değerinin yerine yazılmasıyla (2.45) çözümü elde edilir. (2.48) fonksiyonu (2.46) da yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\gamma_1(t)\frac{dt}{t-\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}f(t)\frac{dt_1dt_2}{t-\zeta}\right]\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\overline{z}\gamma_1(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)(1-\overline{z}\zeta)}\right]dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\overline{z}f(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)(1-\overline{z}\zeta)}\right]dt_1dt_2$$

koşulu elde edilir.

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)(1-\overline{z}\zeta)}=\frac{\overline{t-z}}{1-\overline{z}t}$$

değerinin son ifadede yerine yazılmasıyla (2.43) koşulu elde edilir.

Teorem 2.3.11. $f\in L_1(D;\mathbb{C})\cap C(\partial D;\mathbb{C})$, $\gamma_0,\ \gamma_1\in C(\partial D;\mathbb{C})$, $c\in\mathbb{C}$ olmak üzere birim diskte

$$w_{\overline{z}\overline{z}}=f,\quad w|_{\partial D}=\gamma_0,\quad \partial_\nu w_{\overline{z}}|_{\partial D}=\gamma_1,\quad w_{\overline{z}}(0)=c$$

homogen olmayan Bitsadze denklemi için Dirichlet-Neumann sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $z\in D$ olmak üzere

$$c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}d\xi d\eta=0 \tag{2.50}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right)\frac{d\zeta}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}f(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^2}d\xi d\eta=0 \tag{2.51}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda çözüm

$$w(z)=c\overline{z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right)\frac{1-|z|^2}{z}\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta \tag{2.52}$$

şeklindedir.

İspat: Verilen sınır değer problemi

$$w_{\overline{z}}=g\ ,\quad w|_{\partial D}=\gamma_0$$
$$g_{\overline{z}}=f\ ,\ \partial_\nu g|_{\partial D}=\gamma_1\ ,\ \mathrm{g}(0)=c$$

sistemine eşdeğerdir. Teorem 2.3.5 ve Teorem 2.3.6 dan $|z|<1$ birim diskinde sırasıyla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}g(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta \tag{2.53}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{1-\overline{z}\zeta}=-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\overline{z}}{(1-\overline{z}\zeta)^2}d\xi d\eta \quad (2.54)$$

çözülebilme koşulları altında

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} \quad (2.55)$$

ve

$$g(z)=c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right)\log(1-\overline{z}\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{zf(\zeta)}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta \quad (2.56)$$

çözümleri mevcuttur. (2.53) ve (2.56) birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}g(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta\\
&=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[c-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\left(\gamma_1(t)-\overline{t}f(t)\right)\log\left(1-\overline{\zeta}t\right)\frac{dt}{t}-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\zeta f(t)}{t(t-\zeta)}dt_1dt_2\right]\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta\\
&=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{c\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\left(\gamma_1(t)-\overline{t}f(t)\right)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\log\left(1-\overline{\zeta}t\right)d\xi d\eta\right]\frac{dt}{t}\\
&-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}f(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\zeta}{\zeta-t}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta\right]\frac{dt_1dt_2}{t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{c\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta = c\overline{z}$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\log\left(1-\overline{\zeta}t\right)d\xi d\eta = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\zeta}{\zeta-t}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta = \overline{z}\left(\frac{|t|^2-1}{1-\overline{z}t}\right)$$

sonuçlarının son eşitlikte yerlerine yazılmasıyla (2.50) çözüm koşulu elde edilir. (2.55) ve (2.56) birlikte ele alınırsa

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\left(\gamma_1(t)-\overline{t}f(t)\right)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\log\left(1-\overline{\zeta}t\right)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}\right]\frac{dt}{t}$$
$$-\frac{c}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} + \frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}f(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\zeta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}d\xi d\eta\right]\frac{dt_1 dt_2}{t}$$

bulunur. Öte yandan

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} = \overline{z}$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\log\left(1-\zeta\overline{t}\right)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z} = \frac{1-|z|^2}{z}\log\left(1-z\overline{t}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\zeta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}d\xi d\eta = \frac{|t|^2-|z|^2}{t-z}$$

olması nedeniyle (2.52) elde edilir.

Teorem 2.3.12. $f \in L_1(D;\mathbb{C})$, γ_0, $\gamma_1 \in C(\partial D;\mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$ olmak üzere, birim diskte

$$w_{\overline{z}\overline{z}} = f, \quad w|_{\partial D} = \gamma_0, \quad z w_{\overline{z}\overline{z}}|_{\partial D} = \gamma_1, \quad w_{\overline{z}}(0) = c$$

sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $z \in D$ olmak üzere (2.50) ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta(1-\overline{z}\zeta)}+\frac{\overline{z}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(1-\overline{z}\zeta)^2}=0 \tag{2.57}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda çözüm

$$\begin{aligned} w(z)=&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{1-|z|^2}{z}\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{|\zeta|^2-|z|^2}{\zeta(\zeta-z)}d\xi d\eta+c\overline{z} \end{aligned} \tag{2.58}$$

şeklindedir.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 2.3.6 yerine Teorem 2.3.7 kullanılarak bir öncekine benzer biçimde yapılabilir.

Teorem 2.3.13. $f \in C^{\alpha}(D;\mathbb{C}),\ 0<\alpha<1,\ \gamma_0,\ \gamma_1 \in C(\partial D;\mathbb{C}),\ c_0,\ c_1 \in \mathbb{C}$ olmak üzere birim diskte

$$w_{\overline{z}\overline{z}}=f,\quad \partial_\nu w\big|_{\partial D}=\gamma_0,\quad \partial_\nu w_{\overline{z}}\big|_{\partial D}=\gamma_1,\quad w(0)=c_0,\quad w_{\overline{z}}(0)=c_1$$

homogen olmayan Bitsadze denklemi için Neumann probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $z \in \partial D$ için

$$\begin{aligned} c_1\overline{z}&+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left[\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\right]\left[1-\overline{z}\zeta\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\right]d\overline{\zeta} \\ &+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{\overline{z}\zeta\left(\overline{\zeta-z}\right)}{(1-\overline{z}\zeta)^2}-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\xi d\eta=0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\gamma_1(\zeta)-\bar{\zeta}\, f(\zeta)\right)\frac{d\bar{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-\frac{\bar{z}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}=0 \tag{2.60}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda çözüm

$$\begin{aligned} w(z)=c_0+c_1\bar{z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\gamma_1(\zeta)-\bar{\zeta}\, f(\zeta)\right)\left(\overline{\zeta-z}\right)\log\left(1-z\bar{\zeta}\right)\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta} \\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\log\left(1-z\bar{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{z}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta \end{aligned} \tag{2.61}$$

şeklindedir. Teoremin ispatı için [4] e bakılabilir.

Teorem 2.3.14. $f\in L_1(D;\mathbb{C})$, $\gamma_0,\ \gamma_1\in C(\partial D;\mathbb{C})$, $c_0,\ c_1\in\mathbb{C}$ olmak üzere birim diskte

$$w_{\bar{z}\bar{z}}=f,\quad zw_z\big|_{\partial D}=\gamma_0,\quad zw_{z\bar{z}}\big|_{\partial D}=\gamma_1,\quad w(0)=c_0,\quad w_{\bar{z}}(0)=c_1$$

sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul, $z\in\partial D$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta\left(1-z\bar{\zeta}\right)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{1}{z}\log\left(1-z\bar{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{\bar{z}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{(1-\bar{z}\zeta)^2}d\xi d\eta \tag{2.62}$$

ve

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\zeta}+\frac{\bar{z}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(1-\bar{z}\zeta)^2}=0 \tag{2.63}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda çözüm

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta)\log\left(1 - z\overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta)\left(\frac{1-|z|^2}{z}\log\left(1 - z\overline{\zeta}\right) + \overline{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$+\frac{z}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}d\xi d\eta + c_0 + c_1\overline{z} \qquad (2.64)$$

dir. Teoremin ispatı için [4] e bakılabilir.

3. POISSON DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

3.1. Poisson Denklemi için Schwarz, Dirichlet ve Neumann Sınır Değer Problemleri

Bu kesimde, homogen olmayan Poisson denklemi için tanımlanan üç ayrı sınır değer probleminin çözülebilme koşulları ile elemanter çözümleri ortaya konulacaktır.

Teorem 3.1.1. $f \in L_1(D;\mathbb{C}),\ \gamma_0,\ \gamma_1 \in C(\partial D;\mathbb{C}),\ c_0,\ c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere birim diskte

$$w_{z\bar{z}} = f,\quad \mathrm{Re}\,w\big|_{\partial D} = \gamma_0,\quad \mathrm{Re}\,w_z\big|_{\partial D} = \gamma_1,\quad \mathrm{Im}\,w(0) = c_0,\quad \mathrm{Im}\,w_z(0) = c_1$$

Poisson denklemi için Schwarz sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$\begin{aligned} w(z) &= ic_0 + ic_1(z+\bar{z}) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta)\,\overline{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}}\,\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta)\Big[\zeta\log(1-z\bar{\zeta})^2 - \bar{\zeta}\log(1-\bar{z}\zeta)^2 + z - \bar{z}\Big]\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\Big\{ f(\zeta)\Big[\log|\zeta - z|^2 - \log(1-\bar{z}\zeta)\Big] - \overline{f(\zeta)}\log(1-\bar{z}\zeta)\Big\} d\xi d\eta \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left\{ f(\zeta)\left[\frac{\log(1-\bar{z}\zeta)}{\zeta^2} + \log|\zeta|\right] - \overline{f(\zeta)}\left[\frac{\log(1-z\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}^2} + \log|\zeta|\right]\right\} d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}}\right]\frac{z-\bar{z}}{2}\, d\xi d\eta \end{aligned} \tag{3.1}$$

biçimindedir.

İspat: Verilen problem

$$\overline{w}_{\overline{z}} = \overline{g}, \quad \operatorname{Re}\overline{w}\big|_{\partial D} = \gamma_0, \quad \operatorname{Im}\overline{w(0)} = -c_0$$
$$g_{\overline{z}} = f, \quad \operatorname{Re}g\big|_{\partial D} = \gamma_1, \quad \operatorname{Im}g(0) = c_1$$

sistemine eşdeğerdir. Teorem 2.3.4 den bu problemlerin çözümleri sırasıyla

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\overline{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}}\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}} + ic_0 - \frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{g(\zeta)}{\zeta}\overline{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}} + \frac{\overline{g(\zeta)}}{\zeta}\frac{1+\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\right]d\xi d\eta$$

ve

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + ic_1 - \frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\frac{1+z\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right]d\xi d\eta$$

olduğunu biliyoruz. g çözümü, w da yerine yazılıp

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{1}{\overline{\zeta}}\overline{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}} - \frac{1}{\zeta}\frac{1+\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\right]d\xi d\eta = -z-\overline{z}$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{1+\zeta\overline{t}}{1-\zeta\overline{t}}\overline{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}}\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta}} = \frac{2}{\overline{t}}\log\left(1-z\overline{t}\right)+z$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{1+\overline{\zeta}t}{1-\overline{\zeta}t}\frac{1+\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta} = -\frac{2}{t}\log\left(1-\overline{z}t\right)-\overline{z}$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{t+\zeta}{t-\zeta}\overline{\frac{\zeta+z}{\zeta-z}}\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta}} = 2\overline{t}\,\log|t-z|^2 - 2t\log\left(1-\overline{z}t\right) - t\log|t|^2 + z$$

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\overline{\frac{t+\zeta}{t-\zeta}}\frac{1+\overline{z}\zeta}{1-\overline{z}\zeta}\frac{d\xi d\eta}{\zeta} = -2\overline{t}\,\log\left(1-\overline{z}t\right) + \overline{t}\,\log|t|^2 - \overline{z}$$

oldukları göz önüne alınırsa (3.1) çözümü elde edilir.

Çözümün tekliğini göstermek için w_1 ve w_2 fonksiyonlarının çözüm oldukları kabul edilirse, $g = w_1 - w_2$ fonksiyonu Laplace denklemini sağladığından harmoniktir. Ayrıca

$$g_{z\bar{z}} = 0, \quad \operatorname{Re} g\big|_{\partial D} = 0, \quad \operatorname{Re} g_z\big|_{\partial D} = 0, \quad \operatorname{Im} g(0) = 0, \quad \operatorname{Im} g_z(0) = 0$$

dır. g_z analitik bir fonksiyon olduğundan, $g_z = \varphi'$ denilirse, ψ keyfi bir analitik fonksiyon olmak üzere $g = \varphi + \overline{\psi}$ elde edilir. $\operatorname{Re} g_z = 0$ olduğundan $\operatorname{Re}\varphi' = 0$ dır. $\operatorname{Im} g_z(0) = 0$ olduğundan $\operatorname{Im}\varphi'(0) = 0$ dır. Teorem 2.3.1 den $\varphi'(z) \equiv 0$ dır. Bu durumda α keyfi bir sabit olmak üzere $\varphi(z) = \alpha$ yazılabilir. $\operatorname{Re} g\big|_{\partial D} = 0$ ve $\operatorname{Im} g(0) = 0$ olduğundan $\operatorname{Re}\psi = -\operatorname{Re}\alpha$ ve $\operatorname{Im}\psi(0) = \operatorname{Im}\alpha$ dır. Bu durumda $\psi(z) = -\overline{\alpha}$ olmalıdır. O halde $w_1 \equiv w_2$ dir ve çözüm tektir.

Bu problemde w yerine $\overline{w}$ yazılıp, daha sonra kompleks eşlenik alınırsa Poisson denklemi için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.2. $f \in L_1(D;\mathbb{C})$, $\gamma_0,\ \gamma_1 \in C(\partial D;\mathbb{R})$, $c_0,\ c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, birim diskte

$$w_{z\bar{z}} = f, \quad \operatorname{Re} w\big|_{\partial D} = \gamma_0, \quad \operatorname{Re} w_{\bar{z}}\big|_{\partial D} = \gamma_1, \quad \operatorname{Im} w(0) = c_0, \quad \operatorname{Im} w_{\bar{z}}(0) = c_1$$

Poisson denklemi için Schwarz sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$
\begin{aligned}
w(z) = {} & ic_0 + ic_1\left(z+\overline{z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta)\left[\zeta\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)^2 - \overline{\zeta}\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)^2 + z - \overline{z}\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \\
& + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left\{ f(\zeta)\left[\log|\zeta-z|^2 - \log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\right] - \overline{f(\zeta)}\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\right\} d\xi d\eta \\
& - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left\{ f(\zeta)\left[\frac{\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{\overline{\zeta}^2} + \log|\zeta|\right] - \overline{f(\zeta)}\left[\frac{\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)}{\zeta^2} + \log|\zeta|\right]\right\} d\xi d\eta \\
& - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta} + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\right]\frac{z-\overline{z}}{2} d\xi d\eta \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

olarak verilir. Bu teoremin ispatı için [2] ye bakılabilir.

Şimdi (2.19) ile gösterdiğimiz

$$
w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^2 d\overline{\zeta} + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^2 d\xi d\eta
$$

ifadesini göz önüne alalım. Bu gösterilim, eşitliğin sağ tarafındaki ikinci eğrisel integralden dolayı Laplace denklemi için Dirichlet probleminin çözümüne uygun değildir. Ancak bu ifade Gauss teoremi yardımıyla problemin çözümüne uygun hale getirilebilir. İkinci eğrisel integrale Gauss teoremi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^2 d\overline{\zeta} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} w_{\overline{\zeta}}\log\left|1-z\overline{\zeta}\right|^2 d\overline{\zeta} \\
&= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\partial_{\zeta}\left[w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log\left|1-z\overline{\zeta}\right|^2\right] d\xi d\eta \\
&= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log\left|1-z\overline{\zeta}\right|^2 d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta} d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sağ taraftaki ikinci bölge integraline tekrar Gauss teoremi uygulanırsa

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \partial_{\bar{\zeta}}\left[w(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}\right]d\xi d\eta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{\bar{z}}{\overline{\zeta - z}}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

eğrisel integrali ortaya çıkar. Bu ifadeler (2.19) gösteriliminde yerine yazılırsa

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta - z} + \frac{\bar{\zeta}}{\overline{\zeta - z}} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta)\log\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right|d\xi d\eta \qquad (3.3)$$

eşitliğinin her $w \in C^2(D;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{D};\mathbb{C})$ fonksiyonu için doğru olduğu görülür. Bu gösterimde, sınır integralindeki çekirdek fonksiyonu Poisson çekirdeğidir.

Tanım 3.1.1. $z, \zeta \in D,\ z \neq \zeta$ için

$$G_1(z,\zeta) = \log\left|\frac{1-z\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2 \qquad (3.4)$$

olmak üzere $G(z,\zeta) = \frac{1}{2}G_1(z,\zeta)$ fonksiyonuna, birim diskte "Laplace Operatörü için Green Fonksiyonu" denir.

Not. Herhangi bir sabit $\zeta \in D$ noktası için, z nin bir fonksiyonu olarak Green fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $G(z,\zeta)$, $D\backslash\{\zeta\}$ bölgesinde harmoniktir.

2) $G(z,\zeta) + \log|\zeta - z|$, D bölgesinde harmoniktir.

3) Her $t \in \partial D$ için $\lim_{z\to t} G(z,\zeta) = 0$ dır.

4) $z,\zeta \in D$ ve $z \neq \zeta$ olmak üzere $G(z,\zeta)=G(\zeta,z)$ dir.

Sonuç 3.1.1. Her $w \in C^2(D;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{D};\mathbb{C})$ fonksiyonu

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)G_1(z,\zeta)\,d\xi d\eta \qquad (3.5)$$

biçiminde gösterilebilir.

Teorem 3.1.3 $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ ve $\gamma \in C(\partial D;\mathbb{C})$ olmak üzere, birim diskte

$$w_{z\overline{z}} = f, \quad w|_{\partial D}=\gamma$$

Poisson denklemi için Dirichlet sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-1\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)G_1(z,\zeta)\,d\xi d\eta \qquad (3.6)$$

eşitliği ile verilir.

İspat: Teoremin ispatı Green fonksiyonu ve Poisson çekirdeğinin özellikleri kullanılarak Sonuç 3.1.1 den görülebilir.

Poisson denklemi için Neumann probleminin çözümüne uygun bir gösterim elde etmek için (2.19) ve (2.25) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, $w \in C^2(D;\mathbb{C}) \cap C^1(\overline{D};\mathbb{C})$ olmak üzere

$$w(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\left(\frac{\zeta}{\zeta-z}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(\overline{\zeta}w_{\overline{\zeta}}(\zeta)+\zeta w_{\zeta}(\zeta)\right)\log|\zeta-z|^2\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log|\zeta-z|^2\,d\xi d\eta \qquad (3.7)$$

eşitliği yazılabilir. Aynı zamanda

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log\left|1-z\overline{\zeta}\right|^2 d\xi d\eta=\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left\{\partial_{\zeta}\left[w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\log\left|1-z\overline{\zeta}\right|^2\right]+\partial_{\zeta}\left[w(\zeta)\frac{z}{1-z\overline{\zeta}}\right]\right\}d\xi d\eta$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left\{\partial_{\overline{\zeta}}\left[w_{\zeta}(\zeta)\log\left|1-z\overline{\zeta}\right|^2\right]+\partial_{\overline{\zeta}}\left[w(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\right]\right\}d\xi d\eta$$
$$=\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log|\zeta-z|^2\left[\zeta w_{\zeta}(\zeta)+\overline{\zeta}w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\left[\frac{z}{\zeta-z}+\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta-z}}\right]\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (3.8)$$

dir. (3.7) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk integral uygun hale getirilip, (3.8) eşitliği kullanılırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log|\zeta-z|^2\left(\zeta w_{\zeta}(\zeta)+\overline{\zeta}w_{\overline{\zeta}}(\zeta)\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} w_{\zeta\overline{\zeta}}(\zeta)\log\left|(\zeta-z)\left(1-z\overline{\zeta}\right)\right|^2 d\xi d\eta \qquad (3.9)$$

gösterilimi elde edilir. Birim çember üzerinde birim dış normal vektör doğrultusundaki türev $\partial_{\nu_{\zeta}} w(\zeta)=\zeta w(\zeta)=\zeta w_{\zeta}(\zeta)+\overline{\zeta}w_{\overline{\zeta}}(\zeta)$ biçiminde olduğundan, bu eşitlikteki ikinci sınır integralinde normal doğrultudaki türev ve bölge integralinde yeni bir çekirdek fonksiyonu ortaya çıkar.

Tanım 3.1.2. $z,\ \zeta \in D,\ \ z \neq \zeta$ için

$$N_1(z,\zeta) = \log\left|(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})\right|^2 \tag{3.10}$$

olmak üzere, $N(z,\zeta) = -\frac{1}{2}N_1(z,\zeta)$ fonksiyonuna birim diskte "Laplace Operatörü İçin Neumann Fonksiyonu" denir.

Not. Neumann fonksiyonu ikinci tip Green fonksiyonu olarak da adlandırılır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $N(z,\zeta)$, $D\backslash\{\zeta\}$ bölgesinde harmoniktir.

2) $N(z,\zeta) + \log|\zeta - z|$, her $\zeta \in \bar{D}$ için D bölgesinde harmoniktir.

3) $z \in \partial D$ ve $\zeta \in D$ için $\partial_n N(z,\zeta) = -1$ dir. (Burada $\vec{n}$ birim dış normaldir.)

4) $z,\zeta \in D$ ve $z \neq \zeta$ olmak üzere $N(z,\zeta) = N(\zeta, z)$ dir.

5) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} N(z,\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = 0$.

Sonuç 3.1.2. Her $w \in C^2(D;\mathbb{C}) \cap C^1(\bar{D};\mathbb{C})$ fonksiyonu için

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} w(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \partial_\nu w(\zeta)\log|\zeta - z|^2\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta)N_1(z,\zeta)\,d\xi d\eta \tag{3.11}$$

gösterilimi mevcuttur. (3.11) eşitliği aynı zamanda

$$w(z) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \left(w(\zeta)\partial_{\nu_\zeta}N_1(z,\zeta) - \partial_\nu w(\zeta)N_1(z,\zeta)\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} w_{\zeta\bar{\zeta}}(\zeta)N_1(z,\zeta)\,d\xi d\eta \tag{3.12}$$

biçiminde de yazılabilir.

Teorem 3.1.4. $f \in L_1(D;\mathbb{C})$ ve $\gamma_0, \gamma_1 \in C(\partial D;\mathbb{C})$ olmak üzere, birim diskte

$$w_{z\bar{z}} = f, \quad w|_{\partial D} = \gamma_0, \quad w_z|_{\partial D} = \gamma_1$$

Poisson denklemi için sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul, $|z| < 1$ için

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta)\frac{z}{1-z\bar{\zeta}}d\bar{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta)\log\left(1-z\bar{\zeta}\right)d\zeta = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\log\left(1-z\bar{\zeta}\right)d\xi d\eta \quad (3.13)$$

ve

$$\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\bar{z}\zeta} = \frac{\bar{z}}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-\bar{z}\zeta} \quad (3.14)$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda tek çözüm

$$w(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_0(\zeta)\frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}-\bar{z}} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma_1(\zeta)\log\left(1-z\bar{\zeta}\right)d\zeta$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\left(\log|\zeta-z|^2 - \log\left(1-\bar{z}\zeta\right)\right)d\xi d\eta \quad (3.15)$$

dir.

İspat: Verilen problem

$$w_z = g, \quad w|_{\partial D} = \gamma_0$$
$$g_{\bar{z}} = f, \quad g|_{\partial D} = \gamma_1$$

sistemine eşdeğerdir. Teorem 2.3.5 den bu denklemlerin bir tek çözüme sahip olmaları için gerek ve yeter koşullar sırasıyla

$$-\frac{z}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}=\frac{z}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-z\overline{\zeta}}$$

ve

$$\frac{\overline{z}}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}=\frac{\overline{z}}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-\overline{z}\zeta}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu durumda çözümler sırasıyla

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_0(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z}}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta-z}}$$

ve

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

dir. g fonksiyonunun birinci koşulda yerine yazılmasıyla

$$\frac{z}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{1-z\overline{\zeta}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\gamma_1(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{z d\xi d\eta}{(t-\zeta)(1-z\overline{\zeta})}\right]dt$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}f(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{z d\xi d\eta}{(t-\zeta)(1-z\overline{\zeta})}\right]dt_1dt_2$$

elde edilir.

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{z d\xi d\eta}{(\zeta-t)(1-z\overline{\zeta})}=-\log(1-z\overline{t})-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log(1-z\overline{\zeta})\frac{d\zeta}{\zeta-t}$$
$$=-\log(1-z\overline{t})+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\log(1-z\overline{\zeta})}{1-t\overline{\zeta}}\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}}$$
$$=-\log(1-z\overline{t})$$

integralinin değerinin yerine yazılmasıyla (3.13) koşulu elde edilir. w ve g fonksiyonları birlikte ele alınırsa

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} g(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\overline{\zeta-z}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma_1(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)\left(\overline{\zeta-z}\right)}\right]dt$$
$$+\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1} f(t)\left[\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)\left(\overline{\zeta-z}\right)}\right]dt_1dt_2$$

dir.

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{d\xi d\eta}{(t-\zeta)\left(\overline{\zeta-z}\right)} = \log|t-z|^2 - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log|\zeta-z|^2\frac{d\zeta}{\zeta-t}$$
$$=\log|t-z|^2 - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log(1-\overline{z}\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-t} + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}\left(1-\overline{\zeta}t\right)}$$
$$=\log|t-z|^2 - \log(1-\overline{z}t)$$

integral sonucunun yerine yazılmasıyla (3.15) çözümü elde edilir.

3.2 Poisson Denklemi İçin Robin Sınır Değer Problemi

Robin sınır koşulu, D bölgesinin sınırında Dirichlet ve Neumann sınır koşullarının lineer kombinasyonudur.

Teorem 3.2.1. $f \in L_1(D;\mathbb{C})$, $\gamma \in C(\partial D;\mathbb{C})$ ve $\vec{v}$, ∂D nin birim dış normali olmak üzere $w_{z\overline{z}} = f$ Poisson denklemi için

$$\left(w+\partial_\nu w\right)\Big|_{\partial D} = \gamma$$

Robin sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left\{1+\frac{\zeta}{z}\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{z}}\ln\left(1-\overline{z}\zeta\right)\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$+\frac{2}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\left\{1+\frac{\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z\overline{\zeta}}+\frac{\ln\left(1-\overline{z}\zeta\right)}{\overline{z}\zeta}+\ln\left|\frac{z-\zeta}{1-z\overline{\zeta}}\right|\right\}d\xi d\eta \tag{3.16}$$

dır.

İspat. φ ve ψ, D de analitik keyfi iki fonksiyon ve

$$T_D f(z)=\frac{2}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\log|z-\zeta|f(\zeta)d\xi d\eta,\quad \zeta=\xi+i\eta$$

olmak üzere Poisson denkleminin genel çözümü

$$w=\varphi+\overline{\psi}+T_D f \tag{3.17}$$

formundadır. Bu durumda

$$w_z=\varphi_z+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{1}{z-\zeta}f(\zeta)d\xi d\eta$$
$$w_{\overline{z}}=\left(\overline{\psi}\right)_{\overline{z}}+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{1}{\overline{z-\zeta}}f(\zeta)d\xi d\eta$$

eşitlikleri ve (3.17) çözümü Robin sınır koşulunda yerine yazılırsa, $|z|=1$ olmak üzere

$$\varphi(z)+\overline{\psi(z)}+T_D f(z)+zw_z(z)+\overline{z}w_{\overline{z}}(z)=\gamma(z)$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda

$$\varphi+\overline{\psi}+z\varphi_z+\overline{z}\left(\overline{\psi}\right)_{\overline{z}}=\gamma(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left\{\log|z-\zeta|^2+\frac{z}{z-\zeta}+\frac{\overline{z}}{\overline{z-\zeta}}\right\}f(\zeta)\,d\xi d\eta$$

yazılabilir. Eşitliğin sol tarafındaki fonksiyon reel ve imajiner kısımlarına ayrılırsa

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\varphi+\overline{\psi}+z\varphi_z+\overline{z}\left(\overline{\psi}\right)_{\overline{z}}\right)&=\operatorname{Re}\left(\varphi+z\varphi_z+\left(\overline{\psi+z\psi_z}\right)\right)\\&=\operatorname{Re}\left(\varphi+z\varphi_z+\psi+z\psi_z\right)\\&=\operatorname{Re}\gamma(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left\{\ln|z-\zeta|^2+\frac{z}{z-\zeta}+\frac{\overline{z}}{\overline{z-\zeta}}\right\}\\&\times\operatorname{Re}f(z)\,d\xi d\eta\end{aligned}\tag{3.18}$$

ve

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left(\varphi+\overline{\psi}+z\varphi_z+\overline{z}\left(\overline{\psi}\right)_{\overline{z}}\right)&=\operatorname{Im}\left(\varphi-\psi+z\varphi_z-z\psi_z\right)\\&=\operatorname{Re}\left(-i\left(\varphi-\psi+z\varphi_z-z\psi_z\right)\right)\\&=\operatorname{Im}\gamma(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left\{\ln|z-\zeta|^2+\frac{z}{z-\zeta}+\frac{\overline{z}}{\overline{z-\zeta}}\right\}\\&\times\operatorname{Im}f(z)\,d\xi d\eta\end{aligned}\tag{3.19}$$

eşitlikleri elde edilir. φ ve ψ fonksiyonları analitik olduğundan (3.18) ve (3.19) Teorem 2.3.1 deki Schwarz sınır koşullarıdır. Bu durumda çözümler

$$\varphi+\psi+z\left(\varphi_z+\psi_z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\operatorname{Re}\left[\varphi+\psi+z\left(\varphi_z+\psi_z\right)\right]\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+i\operatorname{Im}\left[\varphi(0)+\psi(0)\right]$$

ve

$$\varphi-\psi+z\left(\varphi_z-\psi_z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}i\operatorname{Re}\left[\varphi-\psi+z\left(\varphi_z-\psi_z\right)\right]\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+\operatorname{Re}\left[\varphi(0)-\psi(0)\right]$$

biçimindedir. O halde $|z|<1$ için $z_1=x_1+iy_1$ olmak üzere

$$\varphi+\psi+z(\varphi_z+\psi_z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left\{\operatorname{Re}\gamma(\zeta)-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left(\log|\zeta-z_1|+\frac{\zeta}{\zeta-z_1}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z_1}}\right)\right.$$
$$\left.\times\operatorname{Re} f(z_1)\,dx_1dy_1\right\}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+i\operatorname{Im}\left[\varphi(0)+\psi(0)\right]$$

ve

$$\varphi-\psi+z(\varphi_z-\psi_z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left\{i\operatorname{Im}\gamma(\zeta)-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left(\log|\zeta-z_1|+\frac{\zeta}{\zeta-z_1}+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{\zeta-z_1}}\right)\right.$$
$$\left.\times i\operatorname{Im} f(z_1)\,dx_1dy_1\right\}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+\operatorname{Re}\left[\varphi(0)-\psi(0)\right]$$

yazılabilir. $\varphi+\psi+z(\varphi_z+\psi_z)=\left(z(\varphi+\psi)\right)_z$ ve $\varphi-\psi+z(\varphi_z-\psi_z)=\left(z(\varphi-\psi)\right)_z$ oldukları göz önüne alınırsa, $z\neq 0$ için

$$\varphi+\psi=\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\int_{|s|=1}\left\{\operatorname{Re}\gamma(s)-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\log|s-z_1|^2+\frac{s}{s-z_1}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-z_1}}\right)\operatorname{Re} f(z_1)\,dx_1dy_1\right\}$$
$$\times\frac{s+\zeta}{s-\zeta}\frac{ds}{s}d\zeta+i\operatorname{Im}\left[\varphi(0)+\psi(0)\right]\qquad(3.20)$$

ve

$$\varphi-\psi=\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\iint_{|s|=1}\left\{i\operatorname{Im}\gamma(s)-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\log|s-z_1|^2+\frac{s}{s-z_1}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-z_1}}\right)i\operatorname{Im} f(z_1)\,dx_1dy_1\right\}$$
$$\times\frac{s+\zeta}{s-\zeta}\frac{ds}{s}d\zeta+\operatorname{Re}\left[\varphi(0)-\psi(0)\right]\qquad(3.21)$$

çözümleri elde edilir. (3.20) ve (3.21) sırasıyla taraf tarafa toplanır ve çıkarılırsa

$$2\varphi=\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\int_{|s|=1}\left\{\gamma(s)-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\log|s-z_1|^2+\frac{s}{s-z_1}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-z_1}}\right)f(z_1)\,dx_1dy_1\right\}\times$$
$$\times\frac{s+\zeta}{s-\zeta}\frac{ds}{s}d\zeta+\varphi(0)-\overline{\psi(0)} \tag{3.22}$$

ve

$$2\psi=\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_0^z\int_{|s|=1}\left\{\overline{\gamma(s)}-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\log|s-z_1|^2+\frac{s}{s-z_1}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-z_1}}\right)\overline{f(z_1)}dx_1dy_1\right\}$$
$$\times\frac{s+\zeta}{s-\zeta}\frac{ds}{s}d\zeta+\psi(0)-\overline{\varphi(0)} \tag{3.23}$$

elde edilir. Diğer taraftan $|s|=1$ için

$$\int_0^z\frac{s+\zeta}{s-\zeta}d\zeta=\int_0^z\left(-1+\frac{2s}{s-\zeta}\right)d\zeta=-\left(z+2s\log\left(1-z\overline{s}\right)\right)$$

olup bu değer (3.22) ve (3.23) de yerlerine yazılırsa

$$2\varphi=-\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=1}\left\{\gamma(s)-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\log|s-z_1|^2+\frac{s}{s-z_1}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-z_1}}\right)f(z_1)\,dx_1dy_1\right\}$$
$$\times\left\{z+2s\log\left(1-z\overline{s}\right)\right\}\frac{ds}{s}+\varphi(0)-\overline{\psi(0)}$$

ve

$$2\overline{\psi}=-\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=1}\left\{\overline{\gamma(s)}-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\log|s-z_1|^2+\frac{s}{s-z_1}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-z_1}}\right)\overline{f(z_1)}dx_1dy_1\right\}$$
$$\times\left\{\overline{z}+2\overline{s}\log\left(1-\overline{z}s\right)\right\}\frac{ds}{s}+\overline{\psi(0)}-\varphi(0)$$

elde edilir ve böylece $|z|<1$ birim diskinde

$$
\begin{aligned}
\varphi+\overline{\psi} = &-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(1+\frac{\zeta}{z}\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{z}}\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\
&+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\left\{\log|s-\zeta|^2+\frac{s}{s-\zeta}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-\zeta}}\right\}\times \\
&\times\left\{1+\frac{s}{z}\log\left(1-z\overline{s}\right)+\frac{\overline{s}}{\overline{z}}\log\left(1-\overline{z}s\right)\right\}\frac{ds}{s}\,d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\left\{\log|s-\zeta|^2+\frac{s}{s-\zeta}+\frac{\overline{s}}{\overline{s-\zeta}}\right\}\left\{1+\frac{s}{z}\log\left(1-z\overline{s}\right)+\frac{\overline{s}}{\overline{z}}\log\left(1-\overline{z}s\right)\right\}\frac{ds}{s} \tag{3.24}
$$

integralinin hesabında aşağıdaki integraller ortaya çıkar:

$$
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\log|s-\zeta|^2\frac{ds}{s}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\log\left((s-\zeta)\left(\overline{s-\zeta}\right)\right)\frac{ds}{s}=0\,,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\log|s-\zeta|^2\frac{s}{z}\log\left(1-z\overline{s}\right)\frac{ds}{s} &= \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\log\left(1-\overline{s}\zeta\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-z^k\overline{s}^k}{k}\right)ds \\
&\quad+\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\log\left(1-s\overline{\zeta}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-z^k\overline{s}^k}{k}\right)ds \\
&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\log\left(1-s\overline{\zeta}\right)\frac{ds}{s^k} \\
&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{k(k-1)}\overline{\zeta}^{\,k-1} \\
&=1-\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)+\frac{\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z\overline{\zeta}},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\log|s-\zeta|^2\frac{\overline{s}}{\overline{z}}\log\left(1-\overline{z}s\right)\frac{ds}{s}=1-\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)+\frac{\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)}{\overline{z}\zeta},
$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{s}{s-\zeta}\frac{ds}{s}=1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{s}{s-\zeta}\frac{s}{z}\log\left(1-z\overline{s}\right)\frac{ds}{s}=-1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{\overline{s}}{\overline{s-\zeta}}\frac{\overline{s}}{\overline{z}}\log\left(1-\overline{z}s\right)\frac{ds}{s}=-1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{\overline{s}}{\overline{s-\zeta}}\frac{s}{z}\log\left(1-z\overline{s}\right)\frac{ds}{s}=\frac{\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z\overline{\zeta}},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{s}{s-\zeta}\frac{\overline{s}}{\overline{z}}\log\left(1-\overline{z}s\right)\frac{ds}{s}=\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\log\left(1-\overline{z}s\right)}{s-\zeta}\frac{ds}{s}=\frac{\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)}{\overline{z}\zeta},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|s|=1}\frac{\overline{s}}{\overline{s-\zeta}}\frac{ds}{s}=1.$$

Bu durumda

$$\varphi+\overline{\psi}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma\left(\zeta\right)\left(1+\frac{\zeta}{z}\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)+\frac{\overline{\zeta}}{\overline{z}}\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$
$$+\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\left(1+\frac{\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z\overline{\zeta}}+\frac{\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)}{\overline{z}\zeta}-\log\left|1-z\overline{\zeta}\right|\right)f\left(\zeta\right)d\xi d\eta \qquad (3.25)$$

yazılabilir. Bu ifade (3.17) eşitliğinde yerine yazılırsa, (3.16) çözümü elde edilir.

Tanım 3.2.1. $G(z,\zeta)=\log\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\right|$, Green fonksiyonu olmak üzere

$$R_1(z,\zeta)=G(z,\zeta)-\left(1+\frac{\log\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z\overline{\zeta}}+\frac{\log\left(1-\overline{z}\zeta\right)}{\overline{z}\zeta}\right)$$

fonksiyonuna "Robin Fonksiyonu" denir.

Not. Herhangi bir sabit $\zeta\in D$ noktası için Robin fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $R_1(z,\zeta)$ fonksiyonu, $D\backslash\{\zeta\}$ bölgesinde harmoniktir.

2) $R_1(z,\zeta)+\log|z-\zeta|$ fonksiyonu, D de harmoniktir.

3) Her $t\in\partial D$ için $\lim_{z\to t}\left(R_1(z,\zeta)+\partial_\nu R_1(z,\zeta)\right)=0$ dır.

4) $z,\zeta\in D$, $z\neq\zeta$ olmak üzere $R_1(z,\zeta)=R_1(\zeta,z)$.

4. BELTRAMİ DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Kompleks diferansiyel operatörlerinin en önemlilerinden biri de

$$w_{\bar{z}} + q(z) w_z$$

şeklinde ifade edilen Beltrami operatörüdür. Burada q fonksiyonu inceleme yapılan bölgede

$$|q(z)| \leq q_0 < 1$$

şartını sağlayan, ölçülebilir bir fonksiyondur.

4.1 Beltrami Denklemi için Schwarz Sınır Değer Problemi

Bu bölümde $f \in L_p(\bar{D}),\ p > 2$ olmak üzere

$$w_{\bar{z}} + q(z) w_z = f(z), \quad z \in D \tag{4.1}$$

denkleminin genel çözümü verilecektir.

$\rho = w_{\bar{z}}$ olsun. Bu durumda φ, D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve

$$T\rho(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<1} \rho(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

olmak üzere

$$w(z) = \varphi(z) + T\rho(z) \tag{4.2}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$w_z = \varphi'(z) + \Pi\rho(z)$$
$$w_{\bar{z}} = \rho(z)$$

kısmi türevleri (4.1) denkleminde yerine yazılırsa, $z \in D$ için

$$\rho(z) + q(z)\varphi'(z) + q(z)\Pi\rho(z) = f(z)$$

elde edilir. Burada

$$\Pi\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} \rho(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

dir. $\zeta_0 = z = x + iy$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\rho(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (q\Pi)^k (f - q\varphi')(z)\\ &= f(z) - q(z)\varphi'(z) + q(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^k}\int_{D^k}\left[\frac{f(\zeta_k) - q(\zeta_k)\varphi'(\zeta_k)}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}\right.\\ &\quad \left.\times\prod_{l=1}^{k-1}\frac{q(\zeta_k)}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}\right] d\xi_1 d\eta_1 ... d\xi_k d\eta_k\end{aligned} \qquad (4.3)$$

yazılabilir. Beltrami denklemi için sınır değer problemleri tanımlanırken ortaya çıkan integrallerin hesaplanabilir olması nedeniyle özel olarak $q(z) = c,\ (c \text{ sabit})$ durumu incelenecektir. Bu durumda (4.3) ifadesi

$$\begin{aligned}\rho(z) &= f(z) - c\varphi'(z)\\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{\pi^k}\int_D \{f(\zeta_k) - c\varphi'(\zeta_k)\}\left(\int_{D^{k-1}}\prod_{l=1}^{k}\frac{1}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2} d\xi_1 d\eta_1 ... d\zeta_{k-1} d\eta_{k-1}\right) d\xi_k d\xi_k\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Tümevarımla

$$\int\limits_{D^{k-1}} \prod_{l=1}^{k} \frac{1}{\left(\zeta_k - \zeta_{l-1}\right)^2} d\xi_1 d\eta_1 ... d\xi_{k-1} d\eta_{k-1} = k\pi^{k-1} \frac{\overline{\left(\zeta_k - z\right)}^{k-1}}{\left(\zeta_k - z\right)^{k+1}} \tag{4.4}$$

olduğunu gösterilebilir. Bu durumda

$$\rho(z) = f(z) - c\varphi'(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kc^k}{\pi} \iint\limits_{D} \left\{ f(\zeta) - c\varphi'(\zeta) \right\} \frac{\overline{(\zeta - z)}^{k-1}}{(\zeta - z)^{k+1}} d\xi_k d\eta_k$$

olur. Bu ifade (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa, $t = t_1 + it_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} w(z) &= \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \rho(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &= \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \left\{ f(\zeta) - c\varphi'(\zeta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kc^k}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \left\{ f(\zeta) - c\varphi'(\zeta) \right\} \frac{\overline{(\zeta - t)}^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}} d\xi d\eta \right) \frac{1}{t - z} dt_1 dt_2 \\ &= \varphi(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\zeta|<1} \left\{ f(\zeta) - c\varphi'(\zeta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} kc^k \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{D^2} \left\{ f(\zeta) - c\varphi'(\zeta) \right\} \frac{\overline{(\zeta - t)}^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}} \frac{1}{t - z} dt_1 dt_2 d\xi d\eta \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|t|<1} \frac{\overline{(\zeta - t)}^{k-1}}{(\zeta - z)^{k+1}} \frac{1}{t - z} dt_1 dt_2 = \frac{1}{k} \frac{\overline{(\zeta - z)}^{k}}{(\zeta - z)^{k+1}} \tag{4.6}$$

dır. Gerçekten Cauchy-Pompeiu integral gösterilimleri kullanılırsa

$$\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\overline{(\zeta-t)}^{k-1}}{(\zeta-t)(t-z)}dt_1dt_2 \tag{4.7}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z}\left\{\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\overline{(\zeta-t)}^{k-1}}{\zeta-t}dt_1dt_2+\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\overline{(\zeta-t)}^{k-1}}{t-z}dt_1dt_2\right\}$$

$$=\frac{1}{\zeta-z}\frac{1}{k}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\overline{(\zeta-t)}^{k}\frac{dt}{t-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\overline{(\zeta-t)}^{k}\frac{dt}{t-z}+\overline{(\zeta-z)}^{k}\right\}$$

$$=\frac{1}{k}\frac{\overline{(\zeta-z)}^{k}}{\zeta-z} \tag{4.8}$$

olur. (4.7) ve (4.8) ifadelerinin ζ ya göre k-yıncı basamaktan türevleri alınırsa; (4.6) eşitliği elde edilir. (4.6) eşitliği (4.5) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}w(z)&=\varphi(z)-\sum_{k=0}^{\infty}c^k\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\{f(\zeta)-c\varphi'(\zeta)\}\frac{\overline{(\zeta-z)}^{k}}{(\zeta-z)^{k+1}}d\xi d\eta\\&=\varphi(z)-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\{f(\zeta)-c\varphi'(\zeta)\}\frac{1}{\zeta-z-c\overline{(\zeta-z)}}d\xi d\eta\end{aligned}$$

çözümü elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.1. $f\in L_p(\bar{D}),\ p>2,\ \gamma\in C(\partial D;\mathbb{R})$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere, birim diskte $w_{\bar{z}}+cw_z=f$ Beltrami denklemi için

$$\operatorname{Re} w|_{\partial D}=\gamma,\quad \operatorname{Im} w(0)=\alpha$$

Schwarz sınır değer problemi bir tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$w(z)=\varphi(z)+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left\{c^k\Pi_1^{\,k}\left(f-c\varphi'\right)(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)}\right.$$

$$\left.+\bar{c}^k\,\overline{\Pi_1^{\,k}\left(f-c\varphi'\right)(\zeta)}\frac{1+z\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}\left(1-z\bar{\zeta}\right)}\right\}d\xi d\eta \tag{4.9}$$

biçimindedir. Burada

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+i\alpha \tag{4.10}$$

ve

$$\Pi_1\rho(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left\{\frac{\rho(\zeta)}{(\zeta-z)^2}+\frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-z\bar{\zeta}\right)^2}\right\}d\xi d\eta$$

dır.

İspat: Denklemin çözümü

$$w(z)=\varphi(z)+T_1\rho(z) \tag{4.11}$$

formundadır. Burada

$$T_1\rho(z)=-\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left\{\frac{\rho(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}+\frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right\}d\xi d\eta$$

ve φ, D bölgesinde analitik bir fonksiyondur. Şimdi

$$\rho(z)+c\varphi'(z)+c\Pi_1\rho(z)=f(z) \tag{4.12}$$

sağlanacak şekilde φ ve ρ fonksiyonlarını bulalım. $z \in \partial D$ olmak üzere, (4.11) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} w(z) &= \operatorname{Re}\varphi(z) + \operatorname{Re} T_1\rho(z) \\
&= \operatorname{Re}\varphi(z) + \operatorname{Re}\left\{ -\frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} \left\{ -\frac{\rho(\zeta)}{\zeta}\frac{1+\bar{z}\zeta}{1-\bar{z}\zeta} + \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\bar{\zeta}}\frac{1+z\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}} \right\} d\xi d\eta \right\} \\
&= \operatorname{Re}\varphi(z) = \gamma
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im} w(0) &= \operatorname{Im}\varphi(0) + \operatorname{Im} T_1\rho(0) \\
&= \operatorname{Im}\varphi(0) + \operatorname{Im}\left\{ -\frac{1}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} \left\{ \frac{\rho(\zeta)}{\zeta} + \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{\bar{\zeta}} \right\} d\xi d\eta \right\} \\
&= \operatorname{Im}\varphi(0) = \alpha
\end{aligned}
$$

olur. φ analitik bir fonksiyon olduğundan

$$
\varphi_{\bar{z}} = 0, \quad \operatorname{Re}\varphi\big|_{\partial D} = \gamma, \quad \operatorname{Im}\varphi(0) = \alpha \tag{4.13}
$$

homogen Cauchy-Riemann denklemi için Schwarz problemi elde edilir. Bu problemin çözümü Teorem 2.3.1 den

$$
\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + i\alpha \tag{4.14}
$$

olarak verilebilir. ρ fonksiyonu bir önceki problemde olduğu gibi

$$
\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(c\Pi_1\right)^k \left(f - c\varphi'\right)(z) \tag{4.15}
$$

biçiminde elde edilebilir. (4.15) ve (4.14) fonksiyonlarının (4.11) de yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
w(z) &= \varphi(z) + T_1\rho(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + i\alpha \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (c\Pi_1)^k (f-c\varphi')(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)} \\
&\quad +\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \overline{(c\Pi_1)}^k\overline{(f-c\varphi')(\zeta)}\frac{1+z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}\left(1-z\overline{\zeta}\right)}\Bigg\}d\xi d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \gamma(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta} + i\alpha \\
&\quad +\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|<1}\Bigg\{c^k\Pi_1^{\,k}(f-c\varphi')(\zeta)\frac{\zeta+z}{\zeta(\zeta-z)} \\
&\quad +\overline{c}^k\,\overline{\Pi_1^{\,k}(f-c\varphi')(\zeta)}\frac{1+z\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}\left(1-z\overline{\zeta}\right)}\Bigg\}d\xi d\eta
\end{aligned}$$

çözümü bulunur.

4.2 Beltrami Denklemi İçin Dirichlet Sınır Değer Problemi

Teorem 4.2.1. $f \in L_p\left(\overline{D}\right),\ p > 2$ ve $\gamma \in C\left(\partial D;\mathbb{C}\right)$ olmak üzere, birim diskte $w_{\overline{z}} + cw_z = f$ Beltrami denklemi için

$$w\big|_{\partial D} = \gamma$$

Dirichlet sınır değer probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{2+c\overline{z\zeta}}{1+c\overline{z\zeta}}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\left(\overline{\zeta-z}\right)^k\frac{\overline{z}^{k+1}}{\left(1-\overline{z}\zeta\right)^{k+1}}d\xi d\eta \qquad (4.16)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda çözüm

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z-c\left(\overline{\zeta-z}\right)}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z-c\left(\overline{\zeta-z}\right)} \quad (4.17)$$

dir.

İspat: $w(z)=\varphi(z)+T\rho(z)$ biçiminde çözüm aranırsa

$$w_{\bar{z}}=\rho(z)$$
$$w_z=\varphi'(z)+\Pi\rho(z)$$

olduğundan

$$\rho(z)+c\Pi\rho(z)=f(z)-c\varphi'(z)\ ,\ z\in D \quad (4.18)$$

ve

$$\varphi(z)=\gamma(z)-T\rho(z)\ ,\ z\in\partial D \quad (4.19)$$

koşullarını sağlayan φ ve ρ fonksiyonları bulunmalıdır. φ analitik olduğundan (4.19) analitik fonksiyonlar için Dirichlet sınır koşuludur. Teorem 2.3.2 den bu problemin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta)-T\rho(\zeta)\right]\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta=0 \quad (4.20)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Cauchy integral formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}T\rho(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\rho(t)\frac{dt_1dt_2}{t-\zeta}\right]\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\rho(t)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\frac{d\zeta}{t-\zeta}\right]dt_1dt_2 \\ &= \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\rho(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda çözülebilme koşulu (4.20) ye eşdeğer olarak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta = \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\rho(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta \tag{4.21}$$

şeklinde yazılabilir. (4.21) koşulu altında tek çözüm

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left[\gamma(\zeta)-T\rho(\zeta)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\left(-\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\rho(t)\frac{dt_1dt_2}{t-\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\rho(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{d\zeta}{(t-\zeta)(\zeta-z)}\right)dt_1dt_2 \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}\end{aligned}$$

şeklindedir. Diğer yandan (4.18) eşitliği göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\rho(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k \Pi^k\left(f - c\varphi'\right)(z) \\
&= f(z) - c\varphi'(z) + \sum_{k=1}^{\infty} c^k \frac{1}{\pi^k}\iint_D \left\{ f\left(\zeta_k\right) - c\varphi'\left(\zeta_k\right)\right\} k\pi^{k-1}\frac{\left(\overline{\zeta_k - z}\right)^{k-1}}{\left(\zeta_k - z\right)^{k+1}}d\xi d\eta \\
&= f(z) - \frac{c}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c^k k\left\{\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{k-1}}{(\zeta-z)^{k+1}}d\xi d\eta\right. \\
&\quad \left. -\frac{c}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{k-1}}{(\zeta-z)^{k+1}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\gamma(t)\frac{dt}{(t-\zeta)^2}\right]d\xi d\eta\right\} \\
&= f(z) - \frac{c}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} kc^k\left\{\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{k-1}}{(\zeta-z)^{k+1}}d\xi d\eta\right. \\
&\quad \left. -\frac{c}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta) I(k;z,\zeta)\, d\zeta\right\}
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Burada

$$
I(k;z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\left(\overline{t-z}\right)^{k-1}}{(t-z)^{k+1}}\frac{dt_1 dt_2}{(t-\zeta)^2}
$$

dir. Diğer taraftan $|\zeta|<1$ için

$$
\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\left(\overline{t-z}\right)^{k-1}}{(t-z)(t-\zeta)}dt_1 dt_2 \tag{4.22}
$$

$$
= \frac{1}{\zeta - z}\left\{\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\left(\overline{t-z}\right)^{k-1}}{t-\zeta}dt_1 dt_2 - \frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\left(\overline{t-z}\right)^{k-1}}{t-z}dt_1 dt_2\right\}
$$

$$
= -\frac{1}{k}\frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{k}}{\zeta - z} \tag{4.23}
$$

yazılabilir. (4.22) ve (4.23) ifadelerinin her iki tarafının ζ ya göre k defa; z ye göre bir defa türevlerinin alınmasıyla

$$I(k;z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\left(\overline{t-z}\right)^{k-1}}{(t-z)^{k+1}}\frac{dt_1dt_2}{(t-\zeta)^2}=\frac{k+1}{k}\frac{\left(\overline{\zeta-z}\right)^{k}}{(\zeta-z)^{k+2}} \tag{4.24}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\rho(z)=f(z)-\frac{c}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\gamma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta+\sum_{k=1}^{\infty}kc^k&\left\{\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\left(\overline{\zeta-z}\right)^{k-1}}{(\zeta-z)^{k+1}}d\xi d\eta\right.\\&\left.-\frac{k+1}{k}\frac{c}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\left(\overline{\zeta-z}\right)^{k}}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta\right\}\end{aligned} \tag{4.25}$$

dır. Ayrıca (4.21) koşulundan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta&=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\rho(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta\\&=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left\{f(\zeta)-\frac{c}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{\gamma(t)}{(t-\zeta)^2}dt\right.\\&\quad+\sum_{k=1}^{\infty}kc^k\left(\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}f(t)\frac{\left(\overline{t-\zeta}\right)^{k-1}}{(t-\zeta)^{k+1}}dt_1dt_2\right)\\&\quad\left.-\frac{k+1}{k}\frac{c}{2\pi i}\int_{|t|=1}\gamma(t)\frac{\left(\overline{t-\zeta}\right)^{k}}{(t-\zeta)^{k+2}}dt\right\}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\xi d\eta\end{aligned}$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılıp

$$I_1(k;z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\left(\overline{\zeta-t}\right)^{k}}{(\zeta-t)^{k+2}}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}dt_1dt_2$$

$$I_2(k;z,\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}\frac{\left(\overline{\zeta-t}\right)^{k-1}}{(\zeta-t)^{k+1}}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}dt_1dt_2$$

denilirse, (4.21) koşulu

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)I_1(k;z,\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}\zeta}d\xi d\eta+\sum_{k=1}^{\infty}kc^k\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)I_2(k;z,\zeta)d\xi d\eta \qquad (4.26)$$

koşuluna eşdeğer olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$I_1(k;z,\zeta)=\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\frac{\bar{z}^{k+2}\left(\overline{\zeta-z}\right)^{k+1}}{\left(1-\bar{z}\zeta\right)^{k+2}}$$

$$I_2(k;z,\zeta)=\frac{(-1)^{k}}{k+1}\frac{\bar{z}^{k+1}\left(\overline{\zeta-z}\right)^{k+1}}{\left(1-\bar{z}\zeta\right)^{k+1}}$$

olduğu görülebilir. I_1 ve I_2 fonksiyonları, (4.26) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, (4.16) koşulu elde edilir.

Son olarak $w(z)=\varphi(z)+T\rho(z)$ çözümünde φ ve ρ fonksiyonları yerlerine yazılırsa

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-z)^2}+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left[\frac{c}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{\gamma(t)}{(t-\zeta)^2}dt\right]\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}kc^k\frac{1}{\pi}\iint_{|t|<1}f(t)\frac{\left(\overline{t-\zeta}\right)^{k-1}}{(t-\zeta)^{k+1}}dt_1dt_2\right)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)c^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\gamma(t)\frac{\left(\overline{t-\zeta}\right)^{k}}{(t-\zeta)^{k+2}}dt\right)\frac{d\xi d\eta}{\zeta-z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c^{k+1}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\frac{\left(\overline{\zeta - t}\right)^k}{(\zeta - t)^{k+2}(t-z)}dt_1dt_2\right)d\zeta$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}kc^k\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\frac{\left(\overline{\zeta - t}\right)^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}(t-z)}dt_1dt_2\right)d\xi d\eta$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\frac{\left(\overline{\zeta - t}\right)^k}{(\zeta - t)^{k+2}(t-z)}dt_1dt_2 = \frac{1}{k+1}\frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{k+1}}{(\zeta - z)^{k+2}}$$

ve

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|t|<1}\frac{\left(\overline{\zeta - t}\right)^{k-1}}{(\zeta - t)^{k+1}(t-z)}dt_1dt_2 = \frac{1}{k}\frac{\left(\overline{\zeta - z}\right)^{k}}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

olduğundan

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\left(\zeta - z - c\left(\overline{\zeta - z}\right)\right)} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} f(\zeta)\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z - c(\zeta - z)}$$

çözümü elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde önce kompleks türev operatörleri ortaya konmuş ve daha sonra bu operatörler yardımıyla yazılabilen homogen ve homogen olmayan Cauchy-Riemann denklemleri için Dirichlet, Schwarz ve Neumann sınır değer problemleri incelenmiştir. Bu problemlerin hareket noktası $w_{\bar{z}}=0$ homogen Cauchy-Riemann denklemi için incelenen sınır değer problemleridir. Diğer problemler genellikle bir değişken değiştirmesiyle bu denklem için verilen problemlere indirgenmektedir.

Bu tezde klasik anlamda $w_{\bar{z}}=0$, $w_{z\bar{z}}=0$, $w_{\bar{z}\bar{z}}=0$, $w_{\bar{z}}=f$, $w_{\bar{z}}+pw_{z}=f$ şeklinde temel kompleks diferensiyel denklemleri için Schwarz, Dirichlet, Neumann ve Robin problemleri incelenmiştir. Çeşitli araştırma makalelerinde bu problemlerin bazılarının genelleştirilmeleri yapılmıştır. İleri bir aşama olarak şimdiye kadar yapılmayan genelleştirilmeler ile $\left.(\alpha w+\beta\partial_{\nu}w)\right|_{\partial D}=\gamma,\ (\alpha,\beta \text{ sabitler})$ şeklinde sınır koşullarında genelleştirilmeler yapılıp problemler yeniden incelenebilir. Ayrıca elde edilen elemanter çözümlerin uygun fonksiyon uzaylarında seçilecek uygun norma göre sınırlılığı, periyodikliği veya diğer özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Begehr, H, Harutjunjan, G.; Robin Boundary value problem for the Poisson Equation, Journal of Analysis and Applications, Vol. 4, No. 3, 201-213, (2006)

[2] Begehr, H., Boundary value problems in complex analysis, I, II, Bol. Asoc. Mat. Venezolana, 12, 65-85, 217-250, (2005)

[3] Vekua, I. N., Generalized Analytic Functions, Pergamon Press, Oxford, (1962)

[4] Begehr, H., Complex analytic methods for partial differential equations, An introductory text, World Scientific, Singapore, (1994)

[5] Harutjunjan, G., Boundary value problems for the Beltrami operator, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 52, 475-484, (2007)

[6] Vaitsiakhovic, T., Boundary value problems for complex differential equations in a ring domain., Ph.D. thesis, FU Berlin, (2008)

[7] Tutschke, W., Partielle Differentialgleichungen, klassische,Funktionalanalytische und komplexe Methoden; TEUBNER-TEXTE zur Mathematik. Band 27, (1983)

[8] _____, Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungssysteme erster ordnung in der Ebene durch Verwendung einer komplexen Normalform., Math. Nachr.,75, 283-298, (1976)