KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Q – Gamma Beta İntegralleri ve Uygulamaları

Elif TÜRK

MAYIS 2010

Matematik Anabilim Dalında Elif TÜRK tarafından hazırlanan Q – Gamma Beta İntegralleri ve Uygulamaları adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Ali ARAL
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA ____________________
Doç. Dr. Ali ARAL ____________________
Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN ____________________

15 / 06 / 2010

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Q – GAMMA BETA İNTEGRALLERİ VE UYGULAMALARI

TÜRK, Elif
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans tezi
Danışman: Doç. Dr. Ali ARAL
Mayıs 2010, 64 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin amacı ve kaynak özetleri hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde q- analizdeki temel kavramlar ve bununla ilgili teoremler ile q-seriler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde ise q- Gamma ve q- Beta fonksiyonları, bunların sonlu ve sınırsız aralıktaki q- analoğu ile bu fonksiyonların integral değerlerinden ve birtakım özelliklerinden bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: q-Analiz, q- Gamma Fonksiyonu, q- Beta Fonksiyonu, q - Seriler, q -İntegrali, q - Diferansiyel, q- Binom Teoremi

ABSTRACT

Q-GAMMA BETA INTEGRALS AND APPLICATIONS

TÜRK, Elif
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M.Sc. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali ARAL
May 2010, 64 pages

This thesis consists of three basic chapters. In the first chapter, the purpose of the thesis and the summary of the literature are given.

In the second chapter, some fundamental concept of q- analysis theorems and q- series are given.

In the third chapter, the analogous of q - Gamma function and q- Beta function are given in bounded and unbounded interval and discused some properties of it.

Key words: q- Analysis, q - Gamma Function, q - Beta Function , q- Series, q - Integral, q- Differential, q-Binom Theorem

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım esnasında destek ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ali ARAL ‘ a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Günümüzde q- analizdeki çalışmalar giderek artan bir hızda devam etmektedir. Klasik analiz kullanılarak elde edilemeyen bazı sonuçlar q- analizde daha kolay elde edilebildiği gibi bazı durumlarda daha iyi uygulama alanlarına sahip olduğu gösterilmiştir. Bu alanlardan bir tanesi de yaklaşımlar teorisidir. İspatlanmıştır ki q-doğal sayılar kullanılarak yeniden tanımlanan lineer ve pozitif operatörlerin yaklaşım hızları klasik operatöre göre daha hızlıdır. Klasik operatörler için elde edilemeyen bazı sonuçlarda q- analiz teknikleri kullanılarak daha kolay elde edilebilmektedir. Bu tezdeki sonuçlar kullanılarak yeni lineer pozitif operatörler tanımlanabilir. Bu nedenle bu tez yaklaşımlar teorisinde kullanılmak üzere iyi bir kaynak oluşturacağına inanıyoruz.

1.1.Tezin Amacı

Tezde q- analizdeki temel kavramlardan faydalanarak yeni q- Gamma ve q- Beta fonksiyonları tanımlanmış ve bu fonksiyonların temel özellikleri incelenmiştir.

1.2.Kaynak Özetleri

Öncelikle q- analizdeki temel kavramlar ve bu tanımların birbirine geçişlerindeki ilgili teorem ve ispatlarda Kac ve Cheung (1) nin " Quantum Calculus'' adlı kitabı, Jackson (2) nın "A generalization of the functions $\Gamma(n)$ and x^n '' adlı makalesi ve Andrews, Askey ve Roy (3) un "Special functions'' adlı kitabından faydalanılmıştır. q - Gamma ve q- Beta fonksiyonları, bunların sonlu ve sınırsız aralıktaki integral gösterimleri, $K(x;t)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonların birbiriyle ilişkileriyle ilgili çözümler için De Sole ve Kac (4) in " On İntegral Representations of q- Gamma and q- Beta Functions'' adlı makalesinden ve Exton (5) un "q- hypergeometric functions and applications '' adlı kitabından yararlanılmıştır.

2.MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. q-Tamsayılar ve Özellikleri

Tanım 2.1: $r \in \mathbb{Z}$ ve $q > 0$ için $\left[r\right]_q$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\left[r\right]_q = \begin{cases} (1-q^r)/(1-q) = 1+q+q^2+...+q^{r-1}, q \neq 1 \\ r \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad , q = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

$\left[r\right]_q$ ifadesine bir q - tamsayısı denir ve $\left[r\right]$ veya $\left[r\right]_q$ şeklinde gösterilir. Burada r herhangi bir reel sayı olacak şekilde genişletilirse $\left[r\right]_q$ ifadesine q - reel sayısı denir.

Herhangi bir $q > 0$ için

$$\mathbb{N}_q = \left\{\left[r\right]_q , \ r \in \mathbb{N} \, için\right\} \tag{2.2}$$

kümesini tanımlayalım. (2.1) den

$$\mathbb{N}_q = \left\{0,1,1+q,1+q+q^2,1+q+q^2+q^3+...\right\} \tag{2.3}$$

yazılabilir.

Açık bir şekilde görülüyor ki $q = 1$ için $\mathbb{N}_q$ kümesi, negatif olmayan tamsayılar kümesini ifade eder.

Tanım 2.2: $q>0$ ve $r\in\mathbb{N}$ için $[r]_q!$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[r]_q! = \begin{cases} [1]_q[2]_q...[r]_q & ,r\geq 1, \\ 1 & ,r=0 \end{cases} \tag{2.4}$$

$[r]_q!$ ifadesine q - faktöriyel denir.

Tanım 2.3: Her bir $k\in\mathbb{N}$ ve $r\geq 0$ için binom katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[k]_q[k-1]_q...[k-r+1]_q}{[r]_q!} \tag{2.5}$$

Tanım 2.4: n ve r herhangi iki pozitif tamsayı olsun. $n\geq r\geq 0$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q[n-1]_q...[n-r+1]_q}{[r]_q} = \frac{[n]_q!}{[n-r]_q![r]_q} \tag{2.6}$$

olur.

Açıkça $q=1$ için

$$[n]_1 = 1 \quad , \quad [n]_1! = n! \quad , \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{r}$$

olur.

Gauss denklemleri

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q + q^r \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q \tag{2.7}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = q^{n-r}\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q \tag{2.8}$$

pascal tipindeki bağıntıları sağlar. $n \geq r \geq 0$ şeklinde olduğu zaman (2.6) kullanılarak aşağıdaki ifade yazıldığında (2.7) yi elde edebiliriz.

Gerçekten

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}_q + q^r\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}_q = \left([r]_q + q^r[n-r]_q\right)\frac{[n-1]_q!}{[n-r]_q![r]_q!} \tag{2. 9}$$

olup diğer taraftan

$$\left([r]_q + q^r[n-r]_q\right) = \frac{1-q^r}{1-q} + \frac{q^r\left(1-q^{n-r}\right)}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q} = [n]_q$$

dir. Bu ifade (2.9) da yerine yazılıp gerekli kısaltmalar yapılırsa (2.9) un sağ tarafının $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ ye eşit olduğu görülür.

(2.7) ve (2.8) de $q = 1$ yazarsak

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

bildiğimiz binom katsayılarını elde etmiş oluruz.

Bu bağıntıdan

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

olduğu açıktır.

Binom sayıları pozitif rasyonel sayılardır. $n, r \in \mathbb{R}$ için $n \geq r \geq 0$ durumda her zaman pozitif tamsayı olduğunu da söyleyebiliriz.

(2.6) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^{n-r+1})(1-q^{n-r+2})...(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^r)} \tag{2.11}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q$ parametresine göre bir rasyonel fonksiyondur. Diğer yandan adi Binom katsayıları, rasyonel sayıdan çok bir tamsayıdır. Pascal tipindeki bağıntılardan (2.7) yada (2.8) den herhangi birini kullanarak (2.10) un q nun rasyonel fonksiyonundan daha çok q nun bir polinomu olduğunu görürüz.

Tanım 2.5: Herhangi bir keyfi $f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \tag{2.12}$$

ifadesine $q-$diferansiyel denir. Bu tanımdan yararlanarak

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \tag{2.13}$$

ifadesine ise $f(x)$ 'in $q-$türevi denir. Bundan sonra $[n]$ ifadesi görüldüğünde $[n]_q$ anlaşılacaktır.

Örnek 2.1 : $f(x)=x^n \quad ,n\in\mathbb{Z}^+$ fonksiyonunun q – türevini bulalım.

$$D_q f(x)=\frac{(qx)^n-(x^n)}{qx-x}=\frac{x^n(q^n-1)}{x(q-1)}=\frac{(q^n-1)}{q-1}x^{n-1}$$

Burada $\left[n\right]=\dfrac{q^n-1}{q-1}$ yerine yazılırsa

$$D_q x^n=\frac{q^n-1}{q-1}x^{n-1}=\left[n\right]x^{n-1}$$

olacaktır. Bu ifade x^n nin klasik türev sonucuna benzemektedir.

Tanım 2.6 (İki Fonksiyonun Çarpımının q – Diferansiyeli) :

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere ,

$$\begin{aligned} d_q\left(f(x)g(x)\right) &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx)-f(x)g(x)-f(qx)g(x)+f(qx)g(x) \\ &= f(qx)(g(qx)-g(x))+g(x)(f(qx)-f(x)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$d_q(f(x)g(x))=f(qx)d_q g(x)+g(x)d_q f(x) \tag{2.14}$$

olur.

Tanım 2.17 (İki Fonksiyonun Çarpımının ve Bölümünün q – Türevi) :

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere (2.13) ifadesinden yararlanarak aşağıdaki q – türevi elde ederiz.

$$D_q(f(x)g(x)) = \frac{d_q(f(x)g(x))}{d_q x} = \frac{f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)}{qx - x}$$

$$= f(qx)\frac{d_q g(x)}{d_q x} + g(x)\frac{d_q f(x)}{d_q x}$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) \tag{2.15}$$

bulunur. Simetriden dolayı

$$D_q(f(x)g(x)) = g(qx)D_q f(x) + f(x)D_q g(x) \tag{2.16}$$

elde edilir. Şimdi de fonksiyonun bölümünün $q-$ türevinin nasıl tanımlandığını gösterelim.

$$f(x) = f(x)$$
$$g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$$

olduğu açıktır.

Eşitliğin her iki tarafının q –türevini alalım.

$$D_q\left(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_q f(x)$$

(2.16) dan aşağıdaki sonuca varırız.

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + D_q g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = D_q f(x)$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_q f(x) - \frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x)}{g(qx)}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \tag{2.17}$$

elde edilir.

$q-$ türevde genelde zincir kuralı yoktur. Ancak $u(x)=\alpha x^{\beta}$ $(\alpha,\beta sabit)$ olmak üzere $f(u(x))$ şeklindeki fonksiyonların $q-$ türevleri zincir kuralı ile bulunabilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
D_q(f(u(x))) = D_q(f(\alpha x^{\beta})) &= \frac{f(\alpha x^{\beta}q^{\beta})-f(\alpha x^{\beta})}{x(q-1)} \\
&= \frac{f(\alpha x^{\beta}q^{\beta})-f(\alpha x^{\beta})}{\alpha x^{\beta}q^{\beta}-\alpha x^{\beta}}\frac{\alpha x^{\beta}q^{\beta}}{x(q-1)} \\
&= \frac{f(q^{\beta}u)-f(u)}{q^{\beta}u-u}\frac{u(qx)-u(x)}{x(q-1)}
\end{aligned}$$

$$D_q(f(u(x)))=(D_{q^{\beta}}f)(u(x))D_qu(x) \tag{2.18}$$

elde edilir.

Örneğin $u(x)=x^2+x$ veya $u(x)=\sin x$ gibi fonksiyonlarda $u(qx)$ basit bir şekilde u nun terimleri cinsinden ifade edilemez. Bu yüzden zincir kuralı burada uygulanamaz.

Örnek 2.2: $f(x)=Inx$ fonksiyonunun $q-$ diferansiyelini ve $D_qf(x)$ değerini bulalım.

$$d_q(Inx)=In(qx)-Inx=Inq$$

$$D_q(Inx)=\frac{d_q(Inx)}{d_qx}=\frac{Inqx-Inx}{x(q-1)}=\frac{Inq}{x(q-1)}$$

Buradan

$$\lim_{q\to 1} D_q(Inx) = \lim_{q\to 1}\frac{Inq}{x(q-1)} = \lim_{q\to 1}\frac{\frac{1}{q}}{x} = \frac{1}{x} = (Inx)'$$

eşitliği doğrudur.

Örnek 2.3 : $f(x)=x^2$ fonksiyonunun $d_q f(x), D_q f(x)$ değerlerini bulalım.

$$d_q f(x) = q^2x^2 - x^2 = x^2(q^2-1)$$

olduğunda

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{x^2(q^2-1)}{x(q-1)} = x(q-1)$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = 2x = (x^2)'$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 2.1 : $n\in\mathbb{Z}^+$ *ve* $t,s,a,b,A,B\in\mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde,

1) $D_q x^t = [t]x^{t-1}$,

2) $D_q(Ax+b)_q^n = [n]A(Ax+b)_q^{n-1}$,

3) $D_q(a+Bx)_q^n = [n]B(a+Bqx)_q^{n-1}$,

4) $D_q(1+Bx)_q^t = [t]B(1+Bqx)_q^{t-1}$,

5) $D_q\dfrac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = [s]\dfrac{Ax^{s-1}}{(1+Bx)_q^{t+1}} - B([t]-[s])\dfrac{Ax^s}{(1+Bx)_q^{t+1}}$

dir.

İspat : $q-$ türevin tanımını kullanırsak

1) $D_q x^t = \dfrac{q^t x^t - x^t}{x(q-1)} = \dfrac{x^t(q^t-1)}{x(q-1)} = x^{t-1}\dfrac{q^t-1}{q-1} = [t]\, x^{t-1}$

olur.

2) $D_q (Ax+b)_q^n = \dfrac{(Aqx+b)_q^n - (Ax+b)_q^n}{x(q-1)}$

yazabiliriz. Diğer yandan,

$$
\begin{aligned}
(Aqx+b)_q^n &= (Aqx+b)(Aqx+qb)\ldots(Aqx+q^{n-1}b) \\
&= (Aqx+b)q(Ax+b)\ldots q(Ax+q^{n-2}b) \\
&= q^{n-1}(Aqx+b)(Ax+b)\ldots(Ax+q^{n-2}b)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$$(Aqx+b)_q^n = (Ax+b)(Ax+qb)\ldots(Ax+q^{n-2}b)$$

olur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
(Aqx+b)_q^n - (Ax+b)_q^n &= (Ax+b)(Ax+qb)\ldots(Ax+q^{n-2}b)\left[q^{n-1}(Aqx+b)-(Ax+q^{n-1}b)\right] \\
&= (Ax+b)(Ax+qb)\ldots(Ax+q^{n-2}b)\left[Aq^n x + bq^{n-1} - Ax - q^{n-1}b\right] \\
&= (Ax+b)_q^{n-1} Ax(q^n-1)
\end{aligned}
$$

olup bulunan bu değer $q-$ türev tanımında yazılırsa

$$
\begin{aligned}
D_q (Ax+b)_q^n &= \frac{(Ax+b)_q^{n-1} Ax(q^n-1)}{x(q-1)} \\
&= (Ax+b)_q^{n-1} A\frac{(1-q^n)}{(1-q)}
\end{aligned}
$$

$$=(Ax+b)_q^{n-1}A[n]$$

elde edilir.

3) Benzer şekilde $q-$ türev tanımından

$$D_q(a+Bx)_q^n=\frac{(a+Bqx)_q-(a+Bx)_q^n}{x(q-1)}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$(a+Bqx)_q^n=(a+Bqx)(a+Bq^2x)...(a+Bq^nx)$$
$$(a+Bqx)_q^n=(a+Bx)(a+Bqx)...(a+Bq^{n-1}x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$(a+Bqx)_q^n-(a+Bx)_q^n=(a+Bqx)(a+Bq^2x)...(a+Bq^{n-1}x)\left[(a+Bq^nx)-(a+Bx)\right]$$
$$=(a+Bqx)_q^{n-1}B(q^n-1)$$

elde edilir. Bu değer $q-$ türev tanımında yerine yazılırsa

$$D_q(a+Bx)_q^n=\frac{(a+Bqx)_q^{n-1}Bx(q^n-1)}{x(q-1)}$$
$$=B(a+Bqx)_q^{n-1}\frac{(1-q^n)}{1-q}$$
$$=[n]B(a+Bqx)_q^{n-1}$$

bulunur.

4) $q-$ türev tanımından

$$D_q(1+Bx)_q^t=\frac{(1+Bqx)_q^t-(1+Bx)_q^t}{x(q-1)}$$

dır. Ayrıca,

$$(1+Bqx)_q^t=\frac{(1+Bqx)_q^\infty}{(1+Bq^{t+1}x)_q^\infty}=\frac{(1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^tx)(1+Bq^{t+1}x)...}{(1+Bq^{t+1}x)(1+Bq^{t+2}x)...}$$
$$=(1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^tx)$$

$$(1+Bqx)_q^t=\frac{(1+Bx)_q^\infty}{(1+Bq^tx)_q^\infty}=\frac{(1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^{t-1}x)(1+Bq^tx)...}{(1+Bq^tx)(1+Bq^{t+1}x)...}$$

$$=(1+Bx)(1+Bqx)...(1+Bq^{t-1}x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$(1+Bqx)_q^t-(1+Bx)_q^t=(1+Bqx)(1+Bq^2x)...(1+Bq^{t-1}x)\left[(1+Bq^tx)-(1+Bx)\right]$$
$$=(1+Bqx)_q^{t-1}Bx(q^t-1)$$

olup bu son bulunan değer $q-$türev tanımında yazılırsa,

$$D_q(1+Bx)_q^t=\frac{Bx(1+Bqx)_q^{t-1}(q^t-1)}{x(q-1)}$$
$$=B(1+Bqx)_q^{t-1}\frac{(1-q^t)}{1-q}$$
$$=B(1+Bqx)_q^{t-1}\left[t\right]$$

bulunur.

5) $q-$türev tanımından

$$D_q\frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t}=\frac{\dfrac{Aq^sx^s}{(1+Bqx)_q^t}-\dfrac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t}}{x(q-1)}$$

yazılabilir. Diğer yandan,

$$\frac{Aq^s x^s}{(1+Bqx)_q^t} = \frac{Aq^s x^s}{\dfrac{(1+Bqx)_q^\infty}{(1+Bq^{t+1}x)_q^\infty}} = Aq^s x^s \frac{(1+Bq^{t+1}x)_q^\infty}{(1+Bqx)_q^\infty}$$

$$= Aq^s x^s \frac{(1+Bq^{t+1}x)(1+Bq^{t+2}x)\ldots}{(1+Bqx)(1+Bq^2x)\ldots(1+Bq^t x)(1+Bq^{t+1}x)\ldots}$$

$$= \frac{Aq^s x^s}{(1+Bqx)(1+Bq^2x)\ldots(1+Bq^t x)}$$

$$\frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = \frac{Ax^s}{\dfrac{(1+Bx)_q^\infty}{(1+Bq^t x)_q^\infty}} = Ax^s \frac{(1+Bq^t x)_q^\infty}{(1+Bx)_q^\infty}$$

$$= Ax^s \frac{(1+Bq^t x)(1+Bq^{t+1}x)\ldots}{(1+Bx)(1+Bqx)\ldots(1+Bq^{t-1}x)(1+Bq^t x)\ldots}$$

$$= \frac{Ax^s}{(1+Bx)(1+Bqx)\ldots(1+Bq^{t-1}x)}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\frac{Aq^s x^s}{(1+Bqx)_q^t} - \frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = \frac{Ax^s}{(1+Bqx)(1+Bq^2x)\ldots(1+Bq^{t-1}x)}\left[\frac{q^s}{1+Bq^t x} - \frac{1}{1+Bx}\right]$$

olup bu son bulunan değer $q-$ türev tanımda yerine yazılırsa,

$$D_q \frac{Ax^s}{(1+Bx)_q^t} = \frac{Ax^s}{(1+Bx)(1+Bqx)\ldots(1+Bq^t x)}\left[\frac{(q^s-1)+Bx(q^s-q^t)}{x(q-1)}\right]$$

$$= \frac{Ax^{s-1}}{(1+Bx)(1+Bqx)\ldots(1+Bq^t x)}\left[\frac{1-q^s}{1-q} + Bx\frac{q^s-1-q^t+1}{q-1}\right]$$

$$= \frac{Ax^{s-1}}{(1+Bx)q^{t+1}}[s] + \frac{BAx^s}{(1+Bx)q^{t+1}}\left[\frac{1-q^s}{1-q} - \frac{1-q^t}{1-q}\right]$$

$$= \frac{[s]Ax^{s-1}}{(1+Bx)q^{t+1}} - B([t]-[s])\frac{Ax^s}{(1+Bx)q^{t+1}}$$

elde edilir.

Tanım 2.8 : Bir f fonksiyonun $[0,a]$ aralığındaki $q-$ integrali

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - q^{n+1})$$

dir.

Tanım 2.9: $A>0$ olmak üzere herhangi bir f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki $q-$ integrali

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

dir.

Örnek 2.4: Bazı özel fonksiyonların q – integralini bulalım:

1) $$\int_0^1 xd_qx = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - q^{n+1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n q^n (1-q)$$

$$= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \left(q^2\right)^n = (1-q)\frac{1}{1-q^2}$$

$$= \frac{1}{1+q} = \frac{1}{[2]}$$

dir.

2) $$\int_0^1 x^2 d_qx = \frac{1}{1+q+q^2}$$

3) $$\int_0^1 x^n d_qx = \frac{q-1}{q^{n+1}-1}$$

4) $\int_0^1 Inx d_q x = \frac{qInq}{1-q}$

dir.

Şimdi f fonksiyonunun $q-$ integralinin hangi koşullar altında mevcut olduğunu araştıralım.

f fonksiyonunun sınırlı aralıktaki q – integralinin

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - q^{n+1})$$

olduğunu biliyoruz. Buradaki serinin yakınsak olması için $x=0$ ın sağ komşuluğunda $c>0$, $\alpha>-1$ için ,

$$|f(x)| < cx^{\alpha}$$

olmalıdır. Gerçekten

$$|f(x)| < cx^{\alpha}$$

$$|f(x)| < (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} c(aq^n)^{\alpha}(aq^n)$$

ifadesinde $a_n = (1-q)c(aq^n)^{\alpha}(aq^n)$ diyelim. Bu seriye D'alembert oran testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1-q)c(aq^{n+1})^{\alpha}(aq^{n+1})}{(1-q)c(aq^n)^{\alpha}(aq^n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} q^{\alpha+1} = 0 < 1$$

bulunur. $\alpha > -1$ verildiğinden $\alpha + 1 > 0$, $0 < q < 1$ için $q^{\alpha+1} < 1$ olup $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q - integralinin

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

olduğunu biliyoruz. Bu serinin yakınsak olması için

$$\forall x \in [0, \varepsilon), c > 0, \alpha > -1, \varepsilon > 0$$

iken

$$|f(x)| < cx^{\alpha}$$

ve

$$D > 0,\ \beta < -1,\ N > 0, \qquad \forall\ x \in [N, \infty)$$

iken

$$|f(x)| < Dx^{\beta}$$

olması yeterlidir. Gerçekten f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki $q-$ integralinin tanımı

$$\int_0^{\infty/A} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

$$= (1-q)\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)\right]$$

$$\le (1-q)\left[\sum_{n=-\infty}^{-1} c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^n}{A}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^n}{A}\right)\right]$$

şeklinde yazılırsa $\forall\, x \in [0,\varepsilon)$ için $|f(x)| < cx^{\alpha}$ ve $\forall\, x \in [N,\infty)$ için $|f(x)| < Dx^{\beta}$ yı uygulayalım. Buna göre,

$$a_n = (1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

diyelim. D'alembert oran testi uygulanırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1-q)c\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)}{(1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\alpha}\left(\frac{q^n}{A}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n(\alpha-1)}q^{\alpha+1}}{A^{\alpha-1}}$$

$\alpha > -1, 0 < q < 1$ için $\alpha + 1 > 0$ ve $q^{\alpha+1} < 1$ olacağından $\sum a_n$ serisi yakınsaktır. Aynı şekilde $D > 0$, $\beta < -1, N > 0$ $\forall\, x \in [N,\infty)$ şartları için

$$b_n = (1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

yazılıp oran testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1-q)c\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^{n+1}}{A}\right)}{(1-q)c\left(\frac{q^n}{A}\right)^{\beta}\left(\frac{q^n}{A}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{q^{n(\beta-1)}q^{\beta+1}}{A^{\beta-1}} = 0 < 1$$

bulunur. $\beta < -1$ için $\beta - 1 < 0$ ve $q^{\beta-1} < 1$ olduğundan $\sum b_n$ serisi de yakınsaktır. Buna göre $\sum a_n + \sum b_n$ toplamının da yakınsak olduğu görülür.

Teorem 2.2 : $q-$ integrallenebilir bir f fonksiyonunun q $-$ integrali için

a) $\displaystyle\int_0^A f(x)d_qx = \int_{q/A}^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_qx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx = \int_0^{\infty.A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_qx$

özellikleri geçerlidir.

İspat : a) $\displaystyle\int_{q/A}^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_qx = \int_0^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_qx - \int_0^{q/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_qx$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} \frac{A^2}{q^{2n}} f\left(\frac{A}{q^n}\right) - \int_0^{q/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_qx$$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{q^n} f\left(\frac{A}{q^n}\right) - (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{A} \frac{A^2}{q^{2n}} f\left(\frac{A}{q^n}\right)$$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{q^n} f\left(\frac{A}{q^n}\right) - (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{q^n} f\left(\frac{A}{q^n}\right)$$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{q^n} f\left(\frac{A}{q^n}\right)$$

$$= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{q^{-n}} f\left(\frac{A}{q^{-n}}\right)$$

$$= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} Aq^n f\left(Aq^n\right)$$

$$= \int_0^A f(x)d_qx$$

dir.

b) $\int\limits_{0}^{\infty/A} f(x)d_q x = (1-q)\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} f\left(\frac{q^n}{A}\right)$

olduğundan

$$\int\limits_{0}^{\infty.A} f(x)d_q x = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n Af(q^n A)$$

dir. O halde ,

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\infty.A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)d_q x &= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n A^2}{q^{2n} A} f\left(\frac{A}{q^n}\right) \\ &= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^n A} f\left(\frac{1}{q^n A}\right) \\ &= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^{-n} A} f\left(\frac{1}{q^{-n} A}\right) \\ &= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} f\left(\frac{q^n}{A}\right) \\ &= \int\limits_{0}^{\infty/A} f(x)d_q x\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 2.10 : $x, y \in \mathbb{R},\ 0 < q < 1,\ k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} xq &= qx \\ yq &= qy \\ y^k x &= q^k x y^k \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.11 : $a \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$ olmak üzere

$$(a,q)_k = (1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})$$

dir.

Teorem 2.3 : $|x|<1$, $|q|<1$, $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}\left(1-aq^k\right)$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

dir. Bu ifade Binom Teoremi olarak adlandırılır.

İspat : $f_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k$ olsun.

Buradan,

$$f_a(x) - f_a(qx) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}q^k x^k$$

yazılabilir. Son yazılan eşitliğin sağ tarafındaki her iki seri de yakınsak olduğundan

$$f_a(x) - f_a(qx) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}(1-q^k)x^k$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\frac{f_a(x)-f_a(qx)}{x} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}(1-q^k)x^{k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-aq^k)}(1-q^k)x^{k-1}\\ &= (1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^{k-1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-aq^k)}(1-q^k)x^{k-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}\frac{(1-q^k)}{(1-q^k)}x^{k-1}\\
&=(1-a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_{k-1}}x^{k-1}\\
&=(1-a)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k}}{(q;q)_{k}}x^{k}\\
&=(1-a)f_{aq}(x)
\end{aligned}
$$

olup buradan,

$$f_a(x)-f_a(qx)=(1-a)x\,f_{aq}(x) \tag{2.19}$$

bulunur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
f_a(x)-f_{aq}(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}\left[(a;q)_k-(aq;q)_k\right]x^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}\left[(1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})-(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^k)\right]x^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_k}\left[(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^{k-1})\right]\left[1-a-(1-aq^k)\right]x^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}\left[1-a-1+aq^k\right]x^k\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}\left[-a+aq^k\right]x^k\\
&=-a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}(1-q^k)x^k\\
&=-a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(aq;q)_{k-1}}{(q;q)_k}(1-q^k)x^k
\end{aligned}
$$

elde edilir. k yerine $k+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} f_a(x) - f_{aq}(x) &= -a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_{k+1}}(1-q^{k+1})x^{k+1} \\ &= -ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-aq)(1-aq^2)...(1-aq^k)}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^{k+1})}(1-q^{k+1})x^k \\ &= -ax\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(aq;q)_k}{(q;q)_k}x^k \\ &= -axf_{aq}(x) \end{aligned}$$

olup buradan,

$$f_a(x) = (1-ax)f_{aq}(x) \tag{2.20}$$

yazabiliriz. (2.19) ve (2.20) den

$$\begin{aligned} f_a(x) &= (1-a)\,x\,f_{aq}(x) + f_a(qx) \\ &= (1-a)\,x\frac{f_a(x)}{1-ax} + f_a(qx) \\ &= \frac{x-ax}{1-ax}f_a(x) + f_a(qx) \end{aligned}$$

olup,

$$f_a(x) = \frac{x-ax}{1-ax}f_a(x) + f_a(qx)$$

elde edilir. Buradan,

$$f_a(x) = \frac{1-ax}{1-x}f_a(qx)$$

yazılabilir.

Bu bağıntı ardışık olarak n - defa uygulanırsa

$$f_a(x) = \frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx}f_a(q^2x)$$

$$=\frac{1-ax}{1-x}\frac{1-aqx}{1-qx}\frac{1-aq^2x}{1-q^2x}f_a(q^3x)$$

$$=\frac{(1-ax)(1-aqx)...(1-aq^{n-1}x)}{(1-x)(1-qx)...(1-q^{n-1}x)}f_a(q^nx)$$

$$=\frac{(ax;q)_n}{(x;q)_n}f_a(q^nx)$$

$$=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}f_a(0)$$

$$=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

olup böylece

$$f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}x^k=\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar. Bu teoremden aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Sonuçlar:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(x;q)_\infty}$ $\qquad |x|<1\,,|q|<1$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}x^n}{(q;q)_n}=(x;q)_\infty$ $\qquad |q|<1$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\begin{bmatrix}N\\k\end{bmatrix}_q(-1)^k q^{\binom{k}{2}}x^k=(x;q)_N=(1-x)...(1-xq^{N-1})$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}N+k-1\\k\end{bmatrix}_q x^k=\frac{1}{(x;q)_N}=\frac{1}{(1-x)...(1-xq^{N-1})}$ $\qquad |x|<1$

Burada q – binom katsayısı aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = (q;q)_n / (q;q)_k \, (q;q)_{n-k}$$

İspat:

a) Teorem 2.3 de $a=0$ yazılır.

b) Teorem 2.3 de a ile $1/a$ ve x ile ax yer değiştirip $a=0$ yazılır.

c) Teorem 2.3 de $a=q^{-N}$ yazılır.

d) Teorem 2.3 de $a=q^{N}$ yazılır.

2.2. q - SERİLER

q - Analiz, en az dört yüz yıllık tarihi olan, soyut ve uygulamalı matematiğin birçok alanı ile ilişkili geniş bir konudur. q - Analiz'in temeli Euler 'e dayanmaktadır. q - Analiz matematiğin yavaş gelişmiş ancak güzel ve heyecanlı bir bölümüdür. Amacımız hesaplamaları q parametresiyle yapmak olduğu için her işlemde q - Analiz'in temel özelliklerinden faydalanarak çeşitli sonuçlar elde edeceğiz. Aşağıda binom katsayıları, binom teoreminden ve bunların q - analoglarının elde edilmelerini ifade ederek çeşitli sonuçlar ortaya koyacağız.

Tanım 2.12: Sabit bir doğal sayı n olmak üzere 1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına n faktöriyel (ya da n çarpansal) denir ve $n!$ ile gösterilir.

Buna göre

$$n! = 1.2.3...(n-1).n$$

dir.

Tanım 2.13: n bir reel sayı ve k da bir doğal sayı olmak üzere $\binom{n}{k}$ sembolü n altında k diye okunur ve

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-2)][n-(k-1)]}{k!} \tag{2.21}$$

ile tanımlanır. Bu ifadeye binom katsayısı denir.

Özel olarak n ile k doğal sayılar olduğunda , $n \geq k$ olmak üzere (2.21) eşitliğinin sağ tarafının pay ve paydasını $(n-k)!$ ile çarparsak ,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)[(n-k)!]}{k!.[(n-k)!]} = \frac{n!}{k![(n-k)!]}$$

elde edilir.

Ayrıca her n doğal sayısı ve her $0 \leq k \leq n$ için

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.4: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere her n reel sayısı ve her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}=1+n$ ve $\binom{n+1}{1}=n+1$ olduğundan $k=0$ için eşitlik doğrudur.

Şimdide herhangi bir k doğal sayısı için eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)(k+1)}{(k+1)!}+\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(k+1)n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)+n(n-1(n-2)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)[(k+1)+(n-k)]}{(k+1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)...(n-k+2)(n-k+)}{(k+1)!}=\binom{n+1}{k+1}$$

bulunur.

Bu teoremden yararlanarak Binom teoremini verelim

Teorem 2.5(Binom Teoremi) : Her $x,y\in\mathbb{R}$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$(x+y)^n=\binom{n}{o}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+...+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}y^n$$

ifadesine binom teoremi denir.

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapacağız .

Önce $n=1$ için eşitliğin doğru olduğunu görelim.

$$(x+y)^1 = x+y \text{ ve } \binom{1}{0}=1, \ \binom{1}{1}=1 \text{ olduğundan , } \binom{1}{0}x+\binom{1}{1}y=1x+1.y=x+y$$

olacağından eşitlik $n=1$ için sağlanır.

Şimdi de $n=m$ için eşitliğin doğruluğunun $n=m+1$ için doğruluğunu gerektirdiğini ispat edelim. Eşitliğin $n=m$ için doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$(x+y)^m = \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}y + \binom{m}{2}x^{m-2}y^2 + \ldots + \binom{m}{m-1}xy^{m-1} + \binom{m}{m}y^m$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafını $(x+y)$ ile çarparsak

$$(x+y)^m .(x+y) = (x+y)\left[\binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}y + \binom{m}{2}x^{m-2}y^2\right.$$

$$\left. + \ldots + \binom{m}{m-1}xy^{m-1} + \binom{m}{m}y^m\right]$$

$$(x+y)^{m+1} = \binom{m}{0}x^{m+1} + \binom{m}{1}x^m y + \binom{m}{2}x^{m-1}y^2$$

$$+ \ldots + \binom{m}{m-1}x^2y^{m-1} + \binom{m}{m}xy^m +$$

$$\binom{m}{0}x^m y + \binom{m}{1}x^{m-1}y^2 + \binom{m}{2}x^{m-2}y^3 + \ldots + \binom{m}{m-2}x^2y^{m-1} + \binom{m}{m-1}xy^m + \binom{m}{m}y^{m+1}$$

bulunur. Burada

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$$

olduğu ve $k = 0,1,2,...m-1$ için

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$$

olduğu kullanılırsa

$$(x+y)^{m+1} = \binom{m+1}{0}x^{m+1} + \binom{m+1}{1}x^m y + \binom{m+1}{2}x^{m-1}y^2 + ... + \binom{m+1}{m-1}x^2 y^{m-1}$$
$$+ ... + \binom{m+1}{m}x^m y + \binom{m+1}{m+1}y^{m+1}$$

elde edilir. Böylece tümevarım prensibinden dolayı her n doğal sayısı için Binom formülünün doğru olduğu ispat edilmiş oldu.

Tanım 2.14 : n bir reel sayı ve k da bir doğal sayı olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

ifadesine q - binom katsayısı denir.

Burada

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!}$$
$$= \frac{[n][n-1]...[n-k+1][n-k][n-k-1]...[1]}{[n-k][n-k-1]...[1][k]!}$$

$$=\frac{[n][n-1]...[n-k+1]}{[k]!}$$

$$=\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$$

olur. Dikkat edecek olursak $q \to 1$ için limit aldığında $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ifadesi bilinen binom katsayısına eşit olacaktır. Ayrıca $q \to 1$ için limit alındığında $\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)_q^k$ ifadesi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k$ haline dönüşür ki bu bildiğimiz binom formülüdür.

Teorem 2.6 : $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$ ifadesinin q - analoğu,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k (x+y)$$

şeklindedir.

İspat : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse,

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k} \right) (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k} x + \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k+1}$$

eşitlikleri doğrudur. Burada q- analizin temel özelliklerinden $y^k x = q^k x y^k$ kullanılırsa

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (q^{n-k}xy^{n-k})+\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} x^k q^{n-k+1} y^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k+1}$$

$$=\begin{bmatrix} n \\ n+1-1 \end{bmatrix} x^{n+1}+\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} q^{n-k+1}\right) x^k y^{n-k+1}$$

$$=x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} q^{n-k+1}\right) x^k y^{n-k+1}$$

olur. Burada q - Pascal kuralından

$$=x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k (x+y)$$

elde edilecektir. Böylece ispat tamamlanmış olacaktır. Bu ispatta birazdan göreceğimiz q -Pascal kuralını kullandık.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

Burada n yerine $n+1$ yazarsak ,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}=q^{n+1-k}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 2.7 : İki q - Pascal kuralı şu şekilde tanımlanmıştır.

$1 \le k \le n-1$ için ;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$$

İspat : $1 \le k \le n-1$ olmak üzere ;

$$\begin{aligned} [n] &= 1+q+q^2+...+q^{n-1} \\ &= 1+q+q^2+...+q^k+q^{k+1}+...+q^{n-1} \\ &= \left(1+q+q^2+...+q^{k-1}\right)+q^k\left(1+q+q^2+...+q^{n-k-1}\right) \\ &= [k]+q^k[n-k] \end{aligned}$$

Burada (2.7) den ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k-1 \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur.

Buradan n yerine $n+1$ yazılırsa ,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem 2.8: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{(1-q)...(1-q^n)}{(1-q)...(1-q^k)(1-q)...(1-q^{n-k})} = \dfrac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}$ eşitliği doğrudur.

İspat :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!}$$

$$= \frac{[n][n-1]...[n-k+1][n-k][n-k-1]...[1]}{[n-k][n-k-1]...[1][k][k-1]...[1]}$$

$$= \frac{\dfrac{1-q^n}{1-q}\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}...\dfrac{1-q^{n-k+1}}{1-q}\dfrac{1-q^{n-k}}{1-q}...\dfrac{1-q}{1-q}}{\dfrac{1-q^{n-k}}{1-q}\dfrac{1-q^{n-k-1}}{1-q}...\dfrac{1-q}{1-q}\dfrac{1-q^k}{1-q}...\dfrac{1-q}{1-q}}$$

$$= \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k}$$

bulunur.

Teorem 2.9: $(q;q)_n = \prod_{j=1}^{n} (1-q^j)$ olur.

İspat : q - analizin temel özelliğinden ; ($a \in \mathbb{R}, 0 < q < 1$ olmak üzere)

$$(a;q)_n = (1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})$$

dir. Buradan

$$(q;q)_n = (1-q)(1-q^2)...(1-q^n)$$

$$(q;q)_n = \prod_{j=1}^{n} (1-q^j)$$

olur.

Teorem 2.10: Binom teoreminin q - analoğu

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} x^{n-k} y^k$$

şeklindedir.

İspat: Binom teoreminin q - analoğu olan,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k$$

ifadesinde y gördüğümüz yere xy yazalım. Buna göre ,

$$y(xy) = (yx)y = q(xy)y$$

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} (xy)^k$$

dir. Burada

$$(xy)^k = xyxy...xy = x^k y^k q^{k(k-1)/2}$$

olduğundan

$$(x+xy)^n = (x+xy)(x+xy)...(x+xy)$$

$$= x(1+y)...x(1+y)x(1+y)$$

$$= x(1+y)...x(1+y)x^2(1+qy)(1+y)$$

$$= x^n(1+y)(1+qy)...(1+q^{n-1}y)$$

$$(1+y)(1+qy)...(1+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} y^k$$

$$(x+y)(x+qy)...(x+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} x^{n-k} y^k$$

olur.

2.3. q- İntegral

Tanım 2. 15 : Bir f fonksiyonunun $[0,a]$ aralığındaki q - integrali

$$\int_0^a f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)$$

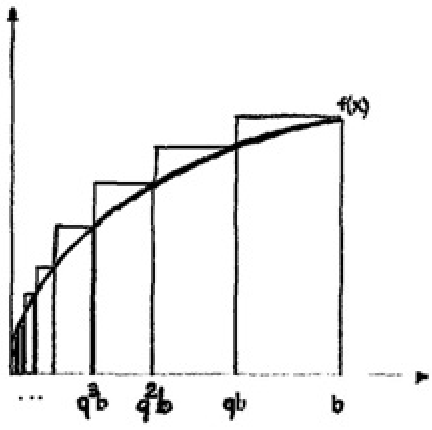
dir.

Tanım 2.16 : f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q - integrali

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A} f\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

dir.

Tanım 2.17: q - integralinin geometrik anlamı aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi sonsuz çokluktaki dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır.



Şekilden de görüldüğü gibi $[a,b]$ aralığını sonsuz çoklukta aralıklara böldüğümüzde Bu alanların toplamı q integrali verecektir. Bu durum analizdeki belirli integralin tanımına benzemektedir. Eğer $q \to 1$ için limit alırsak ,

$$\lim_{q \to 1} (1\text{-q}) \sum_{j=0}^{\infty} f(bq^j)(bq^j)$$

ifadesinde dikdörtgenlerin genişliği sıfıra yaklaşacak ve bu durumda bu limit Riemann toplamına yakınsayacaktır. O halde $f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$$\lim_{q \to 1} \int_0^b f(x)\ d_q\ x = \int_0^b f(x) dx$$

olacaktır.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

Giriş

q - Gamma ve q - Beta Fonksiyonları

3.1 q - Gamma Fonksiyonu

Euler Gamma fonksiyonunun bir q - analoğu

$$\Gamma_q(t)=\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t}$$

şeklinde verilir ve

$$\Gamma_q(t)=\int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx$$

integral gösterimine denktir.

Gerçekten q - integral tanımından

$$\int_0^{\frac{1}{1-q}} x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^j}{1-q}f\left(\frac{q^j}{1-q}\right)$$

$$=(1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^j}{1-q}\frac{q^{j(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}E_q^{-\frac{q^{j+1}}{1-q}}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{jt}}{(1-q)^{t-1}}E_q^{-\frac{q^{j+1}}{1-q}}$$

$$=\frac{1}{(1-q)^{t-1}}\sum_{j=0}^{\infty}q^{jt}E_q^{-\frac{q^{j+1}}{1-q}}$$

$$=\frac{1}{(1-q)^{t-1}}\sum_{j=0}^{\infty}q^{jt}(q^{j+1};q)_{\infty} \tag{3.1}$$

dir. Diğer yandan

$$\sum_{j=0}^{\infty}q^{jt}\left(q^{j+1};q\right)_{\infty}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}q^{kt}(q^{k+1};q)_{\infty}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{(q;q)_{\infty}+q^{t}(q^{2};q)_{\infty}+...+q^{nt}(q^{n+1};q)_{\infty}\right\}$$

$$=(q;q)_{\infty}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{q^{t}}{1-q}+...+\frac{q^{nt}}{(1-q)(1-q^{2})...(1-q^{n})}\right\}$$

$$=(q;q)_{\infty}\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{q^{kt}}{(q;q)_{k}}\right\} \tag{3.2}$$

$$=(q;q)_{\infty}\frac{1}{(q^{t};q)_{\infty}}$$

elde edilir.

(3.2) , (3.1) de yerine yazılırsa

$$\Gamma_q(t)=\int_{0}^{\frac{1}{1-q}}x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx=\frac{(q;q)_{\infty}}{(q^{t};q)_{\infty}}(1-q)^{1-t}$$

olduğu görülür.

Şimdide Gamma ve Beta integralinin q - analoğunu bulurken de işimize yarayacak olan

$$(a+b)_q^n = \prod_{j=0}^{n-1}(a+q^j b) \qquad n \in \mathbb{Z}+$$

$$(1+a)_q^\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1+q^j a)$$

$$(1+q)_q^t = \frac{(1+a)_q^\infty}{(1+q^t a)_q^\infty} \qquad t \in \mathbb{C}$$

notasyonlarını da dikkate alalım.

3.2.q - Beta Fonksiyonu

Herhangi bir α ,β >0 için,

$$B_q(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-qx)_q^{\beta-1} d_q x$$

fonksiyonuna q - Beta fonksiyonu denir. Bu ifade

$$B_q(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty} d_q x$$

şeklindeki Beta integralinin q - analoğuna denktir.

Beta integralinin q – analoğunu, q – gamma fonksiyonu cinsinden ifade edebiliriz.

Gerçekten ,

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_q x$$

$$=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(\alpha-1)}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^{\beta+n};q)_\infty}q^n$$

$$=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n\alpha-n}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^\beta q^n;q)_\infty}q^n$$

olduğundan

$$B_q(\alpha,\beta)=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^{n\alpha-n}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^\beta q^n,q)_\infty}q^n \tag{3.3}$$

olup (3.3) de q^α yerine x , q^β yerine a yazarsak

$$B_q(\alpha,\beta)=(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n \tag{3.4}$$

elde edilir. Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n$ toplamını bulalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+1}q)...(1-q^{n+1}q^{k-1})...}{(1-q^n a)(1-q^n aq)...(1-q^n aq^{k-1})...}x^n$$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)...}{(1-a)(1-aq)...(1-aq^{k-1})...}$$

$$+\ldots+\frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})...(1-q^{2k})...}{(1-q^k a)(1-q^{k+1}a)...(1-q^{2k-1}a)...}x^k$$

$+\dots$

$$=\frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)\dots}{(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^k)\dots}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}x^n$$

$$=\frac{(q;q)_\infty (ax;q)_\infty}{(a;q)_\infty (x;q)_\infty}$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q^{n+1};q)_\infty}{(q^n a;q)_\infty}x^n=\frac{(q;q)_\infty (ax;q)_\infty}{(a;q)_\infty (x;q)_\infty} \tag{3.5}$$

bulunur. (3.5) , (3.4) de yerine yazılırsa

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_q x=\frac{(1-q)(ax;q)_\infty (q;q)_\infty}{(x;q)_\infty (a;q)_\infty} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.6) da x yerine q^α , a yerine q^β yazılırsa

$$B_q(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}\frac{(qx;q)_\infty}{(q^\beta x;q)_\infty}d_q x$$

$$=(1-q)\frac{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty (q;q)_\infty}{(q^\beta;q)_\infty (q^\alpha;q)_\infty}$$

$$=\frac{\dfrac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-\alpha}}{(q^\alpha;q)_\infty}\,\dfrac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-\beta}}{(q^\beta;q)_\infty}}{\dfrac{(q;q)_\infty (1-q)^{1-(\alpha+\beta)}}{(q^{\alpha+\beta};q)_\infty}}$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)}$$

bulunur. O halde ,

$$B_q(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta)} \tag{3.7}$$

elde edilir.

3.3.Üstel Fonksiyonun q – Analoğu

Üstel fonksiyonun iki tane önemli q – analoğu aşağıda tanımlanmıştır :

$$E_q^x=\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{x^n}{[n]!}=(1+(1-q)x)_q^{\infty} \tag{3.8}$$

$$e_q^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]!}=\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} \tag{3.9}$$

şeklindedir. Burada $[n]!=[n][n-1]...[1]$ şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca (3.8) de tanımlanan seri $|x|<\infty$ için yakınsaktır. Benzer şekilde (3.9) da tanımlanan seri ise $|x|<[\infty]$ için yakınsaktır. (3.8) ve (3.9) daki ikinci eşitlikler ise Euler in birinci ve ikinci özdeşliğinden yararlanılarak yazılmıştır. Euler in birinci özdeşliği olan E_1 aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$(1+x)_q^{\infty}=\sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}$$

Euler in ikinci özdeşliği olan E_2 ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}$$

Euler in birinci özdeşliği Gauss binom formülünde $n \to \infty$ için limit alınmasıyla ve

$\lim_{n\to\infty}[n] = \frac{1}{1-q}$, $\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^j)}$ ifadelerinin yerine konulmasıyla elde edilmiştir. Euler in ikinci özdeşliği ise , $\frac{1}{(1-x)_q^n}$ nin $q-$ Taylor açılımında , $n \to \infty$ için limit alınması ile elde edilmiştir. e_q^x in q $-$ türevi yine kendisine eşittir. Ayrıca $e_q^0 = 1$ olacağı tanımdan kolaylıkla görülmektedir. Bunlara ek olarak ,

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}}$$

$$E_q^{-x} = (1-(1-q)x)_q^{\infty}$$

olacağından dolayı ,

$$e_q^x E_q^{-x} = 1$$

olacaktır. Diğer bir $q-$ üstel fonksiyon olan E_q^x in $q-$ türevi ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$D_q E_q^x = E_q^{qx}$$

Gerçekten Gamma ve Beta fonksiyonlarının sınırlı aralık için $q-$ analog gösterimlerini elde ettik. Aralık sınırsız olduğunda Gamma ve Beta fonksiyonlarının $q-$ analoglarını bulmak istiyoruz. Bunun için öncelikle

$$K(x;t)=\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t} \tag{3.10}$$

çekirdek fonksiyonunu göz önüne almalıyız.

3.4. $K(x;t)$ Fonksiyonunun Özellikleri

1) $K(x;t)$ fonksiyonu x değişkenine göre bir q –sabittir. t reel sayısı için,

$$K(qx;t)=K(x;t)$$

olacaktır.

2) $K(x;t) = q^{\frac{t(t-1)}{2}}$

dir.

3) $\lim\limits_{q\to 0}K(x;t)=x^{t-1}+x^t$

dir.

İspat: 1) $K(qx;t)=K(x;t)$ olduğunu gösterelim.

$$\left(1+\frac{1}{qx}\right)_q^t=\frac{1+\frac{1}{qx}}{1+\frac{q^{t-1}}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t$$

$$(1+qx)_q^{1-t}=\frac{1+q^{1-t}x}{1+x}(1+x)_q^{1-t}$$

bağıntıları

$$K(qx;t)=\frac{(qx)^t}{1+qx}\left(1+\frac{1}{qx}\right)_q^t(1+qx)_q^{1-t}$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$K(qx;t)=\frac{q^t x^t}{1+qx}\frac{1+qx}{qx}\frac{x}{x+q^{t-1}}\frac{1+q^{1-t}x}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$$

$$=\frac{q^{t-1}(1+q^{1-t}x)}{x+q^{t-1}}\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$$

$$=\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$$

$$=K(x;t)$$

bulunur.

2) $K(x,t)=\dfrac{x^t}{1+x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$

$$=\frac{x^t}{1+x}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty}\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^{1-t}x)_q^\infty}$$

$$=\frac{x^t}{1+x}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{q}{x}\right)...\left(1+\frac{q^t}{x}\right)...}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)\left(1+\frac{q^{t+1}}{x}\right)...}\frac{(1+x)(1+qx)...}{(1+q^{1-t}x)(1+q^{2-t}x)...(1+x)...}$$

$$=\frac{(x+q)(x+q^2)...(x+q^{t-1})}{(1+q^{-1}x)(1+q^{-2}x)...(1+q^{1-t}x)}$$

$$=q^{1+2+...+t-1}\frac{(x+q)(x+q^2)...(x+q^{t-1})}{(x+q)(x+q^2)...(x+q^{t-1})}$$

$$=q^{\frac{t(t-1)}{2}}$$

olur.

3) $\lim\limits_{q\to 0}K(x;t)=\lim\limits_{q\to 0}\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t(1+x)_q^{1-t}$

$$=\lim_{q\to 0}\frac{x^t}{1+x}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty}\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^{1-t}x)_q^\infty}$$

$$=\frac{x^t}{1+x}\lim_{q\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty(1+x)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty(1+q^{1-t}x)_q^\infty}$$

$$=\frac{x^t}{1+x}\frac{\lim\limits_{q\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^\infty(1+x)_q^\infty}{\lim\limits_{q\to 0}\left(1+\frac{q^t}{x}\right)_q^\infty(1+q^{1-t}x)_q^\infty}$$

$$=\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)(1+x)$$
$$=x^{t-1}+x^t.$$

Sınırsız aralıkta q – integrali aşağıdaki şekilde tanımlıyoruz:

$$\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx=(1-q)\sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{q^n}{A}\right)\left(\frac{q^n}{A}\right)$$

Bu tanıma göre q - gamma ve q - beta fonksiyonlarının $K(x;t)$ fonksiyonuna bağlı diğer q - integral gösterimi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır :

$$\Gamma_q(t)=K(A;t)\int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1}e_q^{-x}d_qx\ ,$$
$$B_q(t;s)=K(A;t)\int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx\ .$$

$K(A;t)$ fonksiyonu herhangi bir t değeri için A ya bağlı olacaktır. Bu formülde t tamsayısı için $K(A;t)$ yerine $q^{t(t-1)/2}$ ifadesi kullanılmıştır. Buna göre ispatlarını görelim.

3.5.Sınırsız Aralıkta Gamma İntegralinin q-Analoğu

Sınırsız aralıkta q - gamma fonksiyonunun $K(x;t)$ fonksiyonuna bağlı q – integrali

$$\Gamma_q(t)=K(A;t)\int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1}e_q^{-x}d_qx$$

biçimindedir. Şimdi bu eşitliğin doğru olduğunu görelim.

f fonksiyonunun q – integrali tanımında

$$f(x) = x^{t-1} e_q^{-x}$$

alınırsa;

$$K(A;t) \int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1} e_q^{-x} d_q x = K(A;t)(1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^n}{A(1-q)} \frac{q^{n(t-1)} e_q^{\frac{-q^n}{A(1-q)}}}{A^{t-1}(1-q)^{t-1}}$$

$$= \frac{K(A;t)}{A^t (1-q)^{t-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} e_q^{\frac{-q^n}{A(1-q)}}$$

$$= \frac{q^{t(t-1)/2}}{A^t (1-q)^{t-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{nt}}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{\infty}}$$

$$= \frac{q^{t(t-1)/2}}{A^t (1-q)^{t-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{nt}}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty} \qquad (3.11)$$

elde edilir. Şimdi

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{nt}}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty}$ toplamını hesaplayalım. Bunun için

Ramanujan özdeşliğinden yararlanacağız.

Ramanujan özdeşliğinin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(bq^n;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}x^n=\frac{(ax;q)_\infty(q/ax;q)_\infty(q;q)_\infty(b/a;q)_\infty}{(a;q)_\infty(q/a;q)_\infty(x;q)_\infty(b/ax;q)_\infty}$$

olduğunu biliyoruz. Burada $x=q^t$, $b=0$, $a=-\dfrac{1}{A}$ alırsak ;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}}{\left(-\dfrac{q^n}{A};q\right)_\infty}=\frac{\left(-\dfrac{q^t}{A};q\right)_\infty(-Aq^{1-t};q)_\infty(q;q)_\infty}{\left(-\dfrac{1}{A};q\right)_\infty(-Aq;q)_\infty(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{(1+Aq^{1-t})(1+Aq^{2-t})...(1+A)(q;q)_\infty}{\left(1+\dfrac{1}{A}\right)\left(1+\dfrac{q}{A}\right)...\left(1+\dfrac{q^{t-1}}{A}\right)(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{A^t(1+Aq^{1-t})(1+Aq^{2-t})...(1+A)(q;q)_\infty}{(A+1)(A+q)...(A+q^{t-1})(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{A^tq^{t-1}(1+Aq^{1-t})q^{t-2}(1+Aq^{2-t})...q(1+Aq^{-1})(A+1)(q;q)_\infty}{q^{t(t-1)/2}(A+q^{t-1})(A+q^{t-2})...(A+1)(q^t;q)_\infty}$$

$$=\frac{A^t(q;q)_\infty}{q^{t(t-1)/2}(q^t;q)_\infty}$$

bulunur. Bu değer (3.11) de yerine yazılırsa

$$K(A,t)\int_0^{\infty/A(1-q)}x^{t-1}e_q^{-x}d_qx=\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t}=\Gamma_q(t)$$

elde edilir.

3.6.Sınırsız Aralıkta Beta İntegralinin q – Analoğu

Sınırsız aralıkta Beta integralinin q – analoğu

$$B_q(t,s)=K(A,t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx$$

şeklindedir. İspatında q- integralinin tanımından ve Ramanujan özdeşliğinden yararlanacağız.

$\dfrac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}$ fonksiyonunun sınırsız aralıkta q – integralinin tanımından

$$K(A,t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx=K(A,t)(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{A}\frac{q^{n(t-1)}}{A^{t-1}\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}}$$

$$=K(A,t)\frac{(1-q)}{A^t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}\left(-\frac{q^{n+t+s}}{A};q\right)_\infty}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty} \tag{3.12}$$

yazılabilir. Ramanujan özdeşliğinde

$$x=q^t,a=-\frac{1}{A},b=-\frac{q^{t+s}}{A}$$

alırsak;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{nt}\left(-\frac{q^{n+t+s}}{A};q\right)_\infty}{\left(-\frac{q^n}{A};q\right)_\infty}=\frac{\left(-\frac{q^t}{A};q\right)_\infty(-A_q^{1-t};q)_\infty(q;q)_\infty(q^{t+s};q)_\infty}{\left(-\frac{1}{A};q\right)_\infty(-Aq;q)_\infty(q^t;q)_\infty(q^s;q)_\infty}$$

$$=\frac{A^t(q;q)_\infty(q^{t+s};q)_\infty}{q^{t(t-1)/2}(q^t;q)_\infty(q^s;q)_\infty}$$

bulunur. Bu son toplam değeri (3.12) de yerine yazılırsa

$$K(A,t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx=\frac{q^{t(t-1)/2}(1-q)A^t(q;q)_\infty(q^{t+s};q)_\infty}{A^tq^{t(t-1)/2}(q^t;q)_\infty(q^s;q)_\infty}$$

$$=\frac{(1-q)(q;q)_\infty(q^{s+t};q)_\infty}{(q^t;q)_\infty(q^s;q)_\infty}$$

$$=\frac{\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t}\,\frac{(q;q)_\infty}{(q^s;q)_\infty}(1-q)^{1-s}}{\frac{(q;q)_\infty}{(q^{t+s};q)_\infty}(1-q)^{-t-s}}$$

$$=\frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}$$

$$=B_q(t,s)$$

elde edilir.

Ayrıca $\Gamma_q(t)=\int_0^{1/(1-q)}x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx$

formülü , genelleştirilmiş integral aracılığıyla

$$\Gamma_q(t)=\int_0^{\infty/(1-q)}x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{1-q}\frac{q^{n(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

$$= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q^{nt}}{(1-q)^t} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{t-1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{t-1}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{nt} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt} E_q^{\frac{q^{n+1}}{1-q}} \right\}$$

$$= \frac{1}{(1-q)^{t-1}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt} E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}}$$

biçiminde yazılabilir. Çünkü $n<0$ için ,

$$E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}} = (1-q^{n+1})_q^{\infty} = 0$$

ve

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty/1-q} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$$

gösteriminde $\infty/1-q$ yerine ∞ alınırsa ıraksak bir seri elde edilir. Yani f fonksiyonunun sınırsız aralıktaki q - integrali

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(q^n) q^n$$

biçiminde alınırsa yukarıdaki seri ıraksak çıkar. Gerçekten , $f(x) = x^{t-1} E_q^{-qx}$ alarak bunu görelim :

$$\int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(t-1)} E_q^{-q^{n+1}} q^n$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} E_q^{-q^{n+1}}$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt} (1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$$

dir.

Diğer yandan Raabe Testinden , pozitif terimli bir $\sum a_k$ serisi verildiğinde

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right)=s$$

olmak üzere

i) $s<-1$ iken $\sum a_k<\infty$

ii) $s>-1$ iken $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.

yazabiliriz.

$\sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}(1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$ pozitif terimli serisine Raabe Testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{q^{(n+1)t}(1-(1-q)q^{n+2})_q^{\infty}}{q^{nt}(1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{q^t}{(1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n(q^t-1)$$

$$=\infty$$

bulunur. Bu ise $\sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}(1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$ serisinin ıraksak olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{nt}(1-(1-q)q^{n+1})_q^{\infty}$ serisi de ıraksaktır.

3.7. q – Gamma ve q – Beta Fonksiyonlarının Diğer Tanımları

Bir önceki bölümde $\Gamma_q(t)$ q - gamma fonksiyonunu Euler' in gamma fonksiyonunda e^{-x} yerine q - analoğu olan E_q^{-qx} değerini koyarak q - integral ile aşağıdaki şekilde tanımlamıştık.

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$$

Acaba bu kez Euler'in gamma fonksiyonunda, exponansiyel fonksiyonun diğer q - analoğu olan e_q^{-x} ifadesini alırsak yeni q - gamma fonksiyonu nasıl olacaktır? Benzer şekilde daha önceki bölümde q - beta fonksiyonu

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1} dx$$

şeklindeki Euler'in beta fonksiyonunun q - analoğu olan

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)^{s-1} d_q x$$

olarak tanımlamıştık. Acaba beta fonksiyonunun diğer bir gösterimi olan

$$B(t,s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{t-1}}{(1+x)^{t+s}} dx$$

Fonksiyonunun q - analoğu nasıl olacaktır? Bu bölümde bu sorulara cevap arayacağız. Önce aşağıdaki tanımları verelim:

Tanım 3.1: $A > 0$ için,

$$\gamma_q^{(A)}(t) = \int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1} e_q^{-x} d_q x$$

dir.

Tanım 3.2: $A > 0$ için,

$$\beta_q^{(A)}(t,s) = \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}} d_q x$$

dir.

Şimdi $\gamma_q^{(A)}(t)$ ve $\beta_q^{(A)}(t,s)$ arasındaki ilişkiyi gösterelim.

ADIM 1: $\beta_q^{(A)}(t,s)$ fonksiyonunun $s \to \infty$ için limitini alalım. Sonra $x = (1-q)y$ şekilde değişken dönüşümü yapalım.

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty}$$

olduğuna göre

$$e_q^{-\frac{x}{1-q}} = \frac{1}{(1+x)_q^\infty}$$

olacaktır. Yukarıdaki eşitlikten

$$\beta_q^{(A)}(t,\infty)=\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{\infty}}d_qx=\int_0^{\infty/A}x^{t-1}e_q^{-\frac{x}{1-q}}d_qx$$
$$=\int_0^{\infty/A(1-q)}(1-q)^{t-1}y^{t-1}e_q^{-y}(1-q)d_qy$$
$$=(1-q)^t\int_0^{\infty/A(1-q)}y^{t-1}e_q^{-y}d_qy$$
$$=(1-q)^t\gamma_q^{(A)}(t)$$

olur. Böylece

$$\gamma_q^{(A)}(t)=\frac{1}{(1-q)^t}\beta_q^{(A)}(t,\infty)$$

elde edilir.

ADIM 2: Bu adımda yine $\gamma_q^{(A)}(t)$ ve $\beta_q^{(A)}(t,s)$ arasındaki bir başka ilişkiyi gösterelim. Kısmi integrasyonun q - analoğu olan

$$\int_a^b g(x)D_qf(x)d_qx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(qx)D_qg(x)$$

ifadesinden yararlanarak,

$$\gamma_q^{(A)}(t+1)=q^{-t}\left[t\right]\gamma_q^{(A)}(t)$$

olduğunu gösterelim.

$$\gamma_q^{(A)}(t+1)=\int_0^{\infty/A(1-q)}x^te_q^{-x}d_qx$$
$$=\frac{1}{\left[t+1\right]}\int_0^{\infty/A(1-q)}e_q^{-x}D_qx^{t+1}d_qx$$
$$=\frac{1}{\left[t+1\right]}\int_0^{\infty/A(1-q)}q^{t+1}x^{t+1}e_q^{-x}d_qx$$
$$=\frac{q^{t+1}}{\left[t+1\right]}\gamma_q^{(A)}(t+2)$$

elde edilecektir. Yukarıdaki ifadede $t\to t-1$ olarak alırsak,

$$\gamma_q^{(A)}(t+1) = q^{-t}\left[t\right]\gamma_q^{(A)}(t)$$

elde edilecektir.

$$\lim_{x\to\infty} e_q^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{E_q^x} = 0$$

ve

$$\lim_{x\to 0} x^t e_q^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^t e_q^{-x} = 0$$

olacaktır. Bu ifadeleri de ele alarak ve

$$\gamma_q^{(A)}(t+1) = q^{-t}\left[t\right]\gamma_q^{(A)}(t)$$

ifadesinden yararlanarak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\gamma_q^{(A)}(1) = \int_0^{\infty/A(1-q)} e_q^{-x} d_q x = 1$$

$$\gamma_q^{(A)}(2) = q^{-1}\left[1\right]\gamma_q^{(A)}(1)$$

$$\gamma_q^{(A)}(3) = q^{-2}\left[2\right]\gamma_q^{(A)}(2)$$

$$= q^{-2}q^{-1}\left[2\right]\left[1\right]\gamma_q^{(A)}(1)$$

$$\gamma_q^{(A)}(4) = q^{-3}\left[3\right]\gamma_q^{(A)}(3)$$

$$= q^{-3}q^{-2}q^{-1}\left[3\right]\left[2\right]\left[1\right]\gamma_q^{(A)}(1)$$

$$\vdots$$

$$\gamma_q^{(A)}(n) = q^{-n(n-1)/2}\left[n-1\right]!$$

Sonuç olarak $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$q^{n(n-1)/2}\gamma_q^{(A)}(n) = \left[n-1\right]! = \Gamma_q(n)$$

elde edilir.

Teorem 3.1: α $ve\,\beta$ herhangi iki keyfi sayı için,

$$D_q \frac{x^\alpha}{(1+x)_q^\beta} = \left[\alpha\right]\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}} - \left(\left[\beta\right]-\left[\alpha\right]\right)\frac{x^\alpha}{(1+x)_q^{\beta+1}}$$

olur.

İspat: q - türev tanımını kullanarak,

$$D_q \frac{x^\alpha}{(1+x)_q^\beta} = \left(\frac{(qx)^\alpha}{(1+qx)_q^\beta} - \frac{x^\alpha}{(1+x)_q^{\beta+1}}\right)\frac{1}{x(q-1)}$$

$$= \frac{q^\alpha x^\alpha}{x(1+qx)_q^\beta (q-1)} - \frac{x^\alpha}{x(1+x)_q^\beta (q-1)}$$

$$= \frac{q^\alpha x^{\alpha-1}}{(1+qx)_q^\beta (q-1)} - \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^\beta (q-1)}$$

$$= \frac{q^\alpha x^{\alpha-1}(1+x)}{(1+qx)_q^{\beta+1}(q-1)} - \frac{(1+q^\beta x)x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}$$

$$=\frac{q^{\alpha}x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}+\frac{q^{\alpha}x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}-\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}-\frac{x^{\alpha}q^{\beta}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}$$

$$-\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}+\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}$$

$$=\frac{[\alpha]x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}}+\frac{x^{\alpha}(q^{\alpha}-1)}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}-\frac{x^{\alpha}(q^{\beta}-1)}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}$$

$$=\frac{[\alpha]x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}}-\left([\beta]-[\alpha]\right)\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}}$$

elde edilir. Kısmi q- integrasyondan ve yukarıdaki teoremden yararlanarak,

$$\begin{aligned}\beta_q^{(A)}(t+1,s)&=-\frac{1}{[t+s]}q^{-t}\int_0^{\infty/A}(qx)^t D_q\frac{1}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx\\&=\frac{1}{[t+s]}q^{-t}\int_0^{\infty/A}\frac{1}{(1+x)_q^{t+s}}D_qx^td_qx\\&=\frac{[t]}{[t+s]}q^{-t}\beta_q^{(A)}(t,s)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\beta_q^{(A)}(t+1,s)=\frac{[t]}{[t+s]}q^{-t}\beta_q^{(A)}(t,s) \tag{3.13}$$

yazabiliriz. $t=1$ için,

$$\beta_q^{(A)}(1,s)=\int_0^{\infty/A}\frac{1}{(1+x)_q^{1+s}}d_qx$$

$$=\frac{1}{[s]}\int_0^{\infty/A}D_q\frac{-1}{(1+x)_q^{1+s}}d_qx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[s]} \frac{1}{\left(1+\frac{q^N}{A}\right)_q^s} - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{[s]} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^s}$$

$$= \frac{1}{[s]}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\beta_q^{(A)}(1,s) = \frac{1}{[s]} \tag{3.14}$$

elde edilecektir. Burada $N \in \mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıdaki tanımdan yararlanılmıştır:

$$\int_0^{\infty/A} D_q F(x) d_q x = \lim_{N\to\infty} F\left(\frac{1}{Aq^N}\right) - \lim_{N\to\infty} F\left(\frac{q^N}{A}\right)$$

(3.13) ve (3.14) den yararlanarak $s > 0, n \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\beta_q^{(A)}(2,s) = q^{-1} \frac{[1]}{[1+s]} \beta_q^{(A)}(1,s)$$

$$= q^{-1} \frac{[1]}{[1+s]} \frac{[1]}{[s]}$$

$$\beta_q^{(A)}(3,s) = q^{-2} \frac{[2]}{[2+s]} \beta_q^{(A)}(2,s)$$

$$= q^{-2} \frac{[2]}{[2+s]} q^{-1} \frac{[1]}{[1+s]} \frac{[1]}{[s]}$$

$$\vdots$$

$$\beta_q^{(A)}(n,s) = q^{-n(n-1)/2} \frac{[n-1]!}{[s][s+1]\ldots[s+n-1]}$$

Ayrıca

$$\beta_q(t,n) = (1-q) \frac{(1-q)_q^{n-1}(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)_q^{t+n-1}}$$

ifadesini kullanarak,

$$q^{n(n-1)/2}\beta_q^{(A)}(n,s)=\frac{[n-1][n-2]...[1]}{[s][s+1]...[s+n-1]}$$

$$=\frac{(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})...(1-q)(1-q)}{(1-q^{s})(1-q^{s+1})...(1-q^{s+n-1})}$$

$$=\frac{(1-q)(1-q_q^{n-1})...(1-q)_q^{s-1}}{(1-q_q^{s+n-1})}$$

$$=B_q(n,s)$$

bulunur. Buradan,

$$q^{n(n-1)/2}\beta_q^{(A)}(n,s)=B_q(n,s)$$

elde edilecektir. Kısmi q - integrasyon tanımından ve teorem 3.1 den yararlanarak,

$$\beta_q^{(A)}(t,s+1)=\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s+1}}d_qx$$

$$=\frac{1}{[t+s]}q^{s}\int_0^{\infty/A}\frac{1}{(qx)^{s}}D_q\frac{x^{t+s}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx$$

$$=\frac{-q^{s}}{[t+s]}\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t+s}}{(1+x)_q^{t+s}}D_q\frac{1}{x^{s}}d_qx$$

$$=\frac{[s]}{[t+s]}\beta_q^{(A)}(t,s)$$

yazabiliriz. Sonuç olarak,

$$\beta_q^{(A)}(t,s+1)=\frac{[s]}{[t+s]}\beta_q^{(A)}(t,s)$$

elde edilecektir. Şimdi de $\beta_q^{(A)}(t,1)$ değerini bulmaya çalışalım. $\beta_q^{(A)}(t,s)$ nin tanımından ve teorem 3.1 den yararlanarak,

$$\beta_q^{(A)}(t,1)=\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+1}}d_qx=\frac{1}{[t]}\int_0^{\infty/A}D_q\frac{x^t}{(1+x)_q^t}d_qx$$

elde edilecektir. Bu ifadenin sağ tarafını aşağıda gösterilen şekilde düzenleyelim:

$$\begin{aligned}\beta_q^{(A)}(t,1)&=\frac{1}{[t]}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left(Aq^N\right)^t\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^t}-\frac{1}{[t]}\lim_{N\to\infty}\frac{\left(q^N\right)^t}{A^t\left(1+\frac{q^N}{A}\right)_q^t}\\&=\frac{1}{[t]}\left(\lim_{N\to\infty}\left(Aq^N\right)^t\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^t\right)^{-1}\end{aligned}$$

Sonuç olarak;

$$\beta_q^{(A)}(t,1)=\frac{1}{[t]}\left(\lim_{N\to\infty}\left(Aq^N\right)^t\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^t\right)^{-1}$$

elde edilecektir. Şimdi ise yukarıdaki limit değerinin $K(A;t)$ fonksiyonuna eşit olduğunu gösterelim:

$$A^t\lim_{N\to\infty}q^{Nt}\frac{\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{Aq^N}\right)_q^\infty}=A^t\lim_{N\to\infty}\frac{q^{Nt}\left(1+\frac{q^{-N}}{A}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{-1}}{A}\right)\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^{1-N}}{A}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{t-1}}{A}\right)\left(1+\frac{q^t}{A}\right)_q^\infty}$$

$$=A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t\lim_{N\to\infty}q^{Nt}\frac{(A+q^{-N})\ldots(A+q^{-1})}{(A+q^{t-N})\ldots(A+q^{t-1})}$$

$$= A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t \lim_{N\to\infty} q^{Nt}\,\frac{(1+Aq^N)...(1+Aq)q^{\frac{-N(N-1)}{2}+N^2-Nt}}{(1+Aq^{N-t})...(1+Aq^{1-t})q^{\frac{-N(N-1)}{2}+N^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t \lim_{N\to\infty}\frac{(1+Aq)...(1+Aq^{-t})(1+Aq^{1-t})...(1+Aq^N)}{(1+Aq^{1-t})...(1+Aq^{N-t})}\\
&= A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t (1+qA)(1+q^2A)...(1+q^{-t}A)\frac{1+A}{1+A}\\
&= \frac{A^t}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t (1+A)_q^{-t+1}\\
&= K(A;t)
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned}
\beta_q^{(A)}(t,2) &= \frac{[1]}{[1+t]}\beta_q^{(A)}(t,1)\\
&= \frac{[1]}{[1+t]}\big(K(A;t)\big)^{-1}\frac{1}{[t]}\\
\beta_q^{(A)}(t,3) &= \frac{[2][1]}{[t][1+t][2+t]}\big(K(A;t)\big)^{-1}\\
&\vdots\\
\beta_q^{(A)}(t,s) &= \frac{[s-1]!}{[t][t+1][t+s-1]}\big(K(A;t)\big)^{-1}\\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^{s-1}(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)_q^{t+s-1}}\big(K(A;t)\big)^{-1}
\end{aligned}$$

$$K(A;t)\beta_q^{(A)}(t,s) = (1-q)\frac{(1-q)_q^{s-1}(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)_q^{t+s-1}} = \beta_q(t,s)$$

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde analiz problemlerinden bildiğimiz bazı sonuçların $q-$ analizdeki karşılıkları incelenmiştir. İlk olarak q $-$ tamsayılar tanımı verilmiş ve $q-$ türev ve $q-$ integral kavramları tanıtılmıştır. Bu tanımlardan faydanılarak $q-$ Gamma ve $q-$ Beta fomksiyonları, bunların sonlu ve sınırsız aralıktaki integral gösterimleri incelenmiştir. Daha sonrada bu fonksiyonların özellikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

(1) V. Kac and P. Cheung, Quantum Calculus, Universitext , Springer -Verlag, Newyork. 2002.

(2) F. H. Jackson, A generalization of the functions $\Gamma(n)$ and x^n, Proc. Roy. Soc. London, (74) pp 64-72, 1904.

(3) G. E. Andrews , R. Askey and R. Roy Special functions , volume of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge. 1999.

(4) Albert De Sole , Victor G. Kac . Department of Mathematics , MIT 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139, USA.2003

(5) H. Exton q - hypergeometric functions and applications, Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd. Chichester, 1983.

(6) J. Thomae , Beitrage zur Theorie der durch die Heinesche Reihe. J. Reine angew. Math, (70) pp 258-281, 1869.

(7) F. H. Jackson, On q - definite integrals, Quart. J. Pure and Appli. Math, (41) pp 193-203, 1910.

(8) G.Gasper and M. Rahman, Basic hypergeometric series, volume 35 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge,1990.

(9) H. T. Koelink and T. H. Koornwinder, q -special functions, a tutorial, in Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical

physics (Amherst, MA, 1990) , volume 134 of Contemp. Math. Pp 141-142, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1992.

(10) T. H. Koornwinder, Special functions and q - commuting variables, in Special functions, q - Series and related topics (Toronto, ON, 1995), volume 14 of Fields Inst.Commun. pp 131-166 , Amer. Math. Soc. Providence. RI. 1997.71