Yusuf ÖLMEZ

Yüksek Lisans Tezi

KÜ 2010

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

YUSUF ÖLMEZ

OCAK 2010

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

YUSUF ÖLMEZ

OCAK 2010

Matematik Anabilim Dalı YUSUF ÖLMEZ tarafından hazırlanan KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Doç. Dr. Nuri ÖZALP
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Kerim KOC
Üye	: Doç. Dr. Ali ARAL

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

27 / 01 / 2010

Doç. Dr. Burak BİRGÖREN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN
VARLIK VE TEKLIK TEOREMLERİ

ÖLMEZ, Yusuf
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Prof. Dr. Kerim Koca
Ocak 2010, 64 sayfa

Bu tez, ikisi açıklama beşi de temel bölüm olmak üzere toplam yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin amacı ve kaynaklar hakkında genel bilgiler verilmiştir.
İkinci bölümde tezin konusunda kullanılacak bazı topolojik kavramlar açıklanmıştır.
Üçüncü bölümde kompleks analizin iki önemli teoremi ele alınmıştır ve Schmidt eşitsizliği ispatlanmıştır.
Dördüncü bölümde bir kompleks kısmi türevli denklem sisteminin çözümleri için varlık ve teklik teoremi verilmiştir.
Beşinci bölümde denklem sisteminin vektörel formu benzer yolla incelenmiştir.
Altıncı bölümde ise dördüncü bölümde incelenen denklemin çözümlerinin varlığı için Schauder Sabit Nokta Teoremi ortaya konmuştur.
Yedinci bölümde sonuçlar hakkında bazı açıklamalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta Teoremi, Banach Uzayı, Schauder Sabit Nokta Teoremi, Pompei İntegral Operatörü, Hölder süreklilik, Analitik Fonksiyonlar

ABSTRACT

EXISTENCE AND UNIQUENESS THEOREMS FOR COMPLEX PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ÖLMEZ, Yusuf
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, M.Sc. Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kerim Koca
January 2010, 64 pages

There are seven chapters in this thesis, two of them are about explanations and five of them are about basic chapters.
Information about the purpose of the thesis and resources are given in the first chapter.
Some topological concepts to be used in the thesis are presented in the second chapter.
Two important theorems of the complex analysis are dealt with and Schmidth's inequality is proved in the third chapter.
Existence theorem and unity theorem are given in the fourth chapter to solve a system of complex partial differential equations.
The vectoral form of the system of equations is analysed in a similar way in the fifth chapter.
In the sixth chapter, Schauder Fixed Point Theorem is given as a proof for the existence of a solution to the equation analised in the fourth chapter.
Some conclusions are given in the seventh chapter.

Key Words: Fixed Point Theorem, Banach Space, Schauder Fixed Point Theorem, Pompei İntegral Operator, Hölder continuity, Analytic functions

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Kompleks Analiz, matematikteki en etkili konulardan biridir. Reel anlamda çözülemeyen bazı problemler, hesaplanamayan bazı integraller vs. kompleks analiz yöntemleri ile kolayca çözülebilmektedir. Bu konu cebir, cebirsel geometri, sayılar teorisi, potansiyel teori, diferensiyel denklemler, harmonik analiz, operatör teorisi ve daha birçok dalları kapsar. Bu konunun fizikte birçok uygulaması vardır. Örneğin elastisite teorisi, kuantum mekaniği, akışkanlar dinamiği, kabuk teorisi, su altı akustikleri vs. konuları kompleks analizin önemli uygulama alanlarıdır.

Analitik fonksiyonlar için sınır-değer problemleri bu tezin temelini oluşturmaktadır. Daha ileri düzeyde indeks teorisi, singüler integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği, Riemann-Hilbert sınır değer problemleri, analitik fonksiyonlar için incelenen sınır-değer problemine indirgenerek çözülür.

Bilindiği gibi lisans düzeyindeki kompleks analiz dersi cebir, topoloji ve geometri ile çok yakından ilgilidir. Hatta sıralı küme kavramı kompleks analizin metodları ile ilişkilendirilerek incelenebilir.

Gauss, Cauchy, Weierstrass ve Riemann kompleks analizin temelini atan ve cebirsel yapıyı kuran matematikçilerdir.

Günümüzde, kompleks diferensiyel denklemlerin çözümleri, kompleks integral denklem sistemlerine dönüştürülmekte ve bu sistemlerin hangi koşullar altında çözümünün var ve tek olduğu araştırılmaktadır.

Bu tezde, $w_{\bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, w_z)$ formundaki kompleks kısmi türevli denklemin önce Cauchy tipinden integral yardımıyla çözümleri ortaya konulmaktadır. Daha sonra bundan yararlanarak bu denklemin çözümleri ile bir integral denklem sisteminin çözümlerinin denk olduğu gösterilerek sabit nokta teoremleri yardımıyla integral denklemin uygun koşullar altında çözümlerinin var ve tek olduğu teoremlerle verilmektedir.

1.1. Tezin Amacı

Diferensiyel Denklemler Teorisinde, denklemi çözmeden denklemin hangi koşullar altında çözümünün var ve tek olduğunun araştırılması önemli bir konudur. Bu tür problemler için varlık ve teklik teoremleri geliştirilmiştir. Denklemin çözümünün varlığı ve tekliği biliniyorsa uygun çözüm metodları ile çözüm ortaya konulabilir. Bu nedenle bir denklemin çözümünün varlık ve tekliğinin bilinmesi denklemi çözmekten daha önemlidir.

Bu tezin temel amacı, basit irtibatlı bir $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $w_{\bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, w_z)$ formundaki denklemlerin çözümleri için varlık ve teklik teoremleri ortaya koymaktır.

Bir denklemin önceden verilen bir özelliği sağlayan çözümün olup olmadığının araştırılması yine bu tezin hedefleri arasındadır. $w_{\bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, w_z)$ formundaki denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği araştırılırken, belli bir tipten bir integral denklem sistemi ortaya çıkmaktadır. Bu sistemin çözümünün varlık ve tekliği ise Sabit Nokta Teoremleri yardımıyla incelenmektedir. Bu nedenle fonksiyonel analiz konuları olan Banach Sabit Nokta ve Schauder Sabit Nokta Teoremleri araştırma konularımız arasındadır.

1.2. Kaynak Özetleri

Öncelikle Musayev ve Alp(1) in “Fonksiyonel Analiz” kitabından fonksiyonel analize ait temel kavramlar ve teoremler verilecektir. Daha sonra Tutschke(2) nin “Partielle Differentialgleichungen, klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden” kitabından T_{D} ve $\prod_{\mathrm{D}}$ integral operatörleri ve özellikleri ortaya konulacaktır. Begehr(3) in “Complex Analytic Methods for Partial

Differential Equations” kaynağından bu singüler integral operatörleri için normlar ve bu norma göre operatörlerin sınırlılığı ele alınacaktır.

Son olarak Tutschke[4] nin “Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung einer komplexen Normalform” kaynağından bir kompleks kısmi türevli denklem sisteminin Schauder Sabit Nokta Teoremi yardımıyla çözümünün varlığı ortaya konulacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Tanım 2.1. (Metrik Uzay**)**

X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $d: \mathrm{XxX} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in \mathrm{X}$ için

$(\mathcal{M}1) \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(\mathcal{M}2) \quad d(x,y) = d(y,x)$

$(\mathcal{M}3) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

koşullarını sağlıyorsa, X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır. Bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Tanım 2.2.

Bir (X, d) metrik uzayı, bir $x_0 \in \mathrm{X}$ noktası ve bir $r > 0$ sayısı verilsin.

$S(x_0, r) = \{x \in \mathrm{X}:\ d(x, x_0) < r\}$

$S[x_0, r] = \{x \in \mathrm{X}:\ d(x, x_0) \leq r\}$

$\partial S[x_0, r] = \{x \in \mathrm{X}:\ d(x, x_0) = r\}$

kümelerine sırasıyla x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi denir.

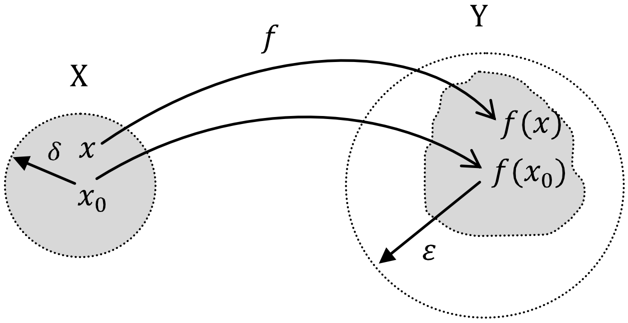
Tanım 2.3.

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere X de bir $(x_n)_1^\infty$ dizisini göz önüne alalım. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde ε' a bağlı $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilirse $(x_n)_1^\infty$ dizisi x elemanına yakınsar denir. Bu tanıma göre $\varepsilon \to 0$ için $n_0(\varepsilon) \to \infty$ olacağı açıktır.

Tanım 2.4.

(X, d), (Y, ρ) metrik uzayları verilsin. $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $x, x_0 \in \mathrm{X}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna $x_0 \in \mathrm{X}$ noktasında süreklidir denir.

Eğer f, X in her noktasında sürekli ise f, X de süreklidir denir. (Şekil 2.1.)



Şekil 2.1. Düzlemde x_0 noktasında sürekli fonksiyon.

Teorem 2.5.

(X, d), (Y, ρ) metrik uzayları verilsin. $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f ' in $x_0 \in \mathrm{X}$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $x_n \in \mathrm{X}$, $n = 1, 2, \ldots$ ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

koşullarını sağlayan her $(x_n)_1^\infty$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olmasıdır.

Tanım 2.6. (Lineer Uzay**)**

X boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$+ : \mathrm{XxX} \to \mathrm{X}\,, \quad (x, y) \to x + y$$

$$. : \mathrm{KxX} \to \mathrm{X}\,, \quad (a, x) \to a.x$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım.

Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X' e K üzerinde Lineer uzay veya Vektör uzayı, elemanlarına da Vektör veya Nokta adı verilir.

A) X, + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) $\forall x, y \in \mathrm{X}$ için $x + y \in \mathrm{X}$ dir. (kapalılık özelliği)

G2) $\forall x, y \in \mathrm{X}$ için $x + y = y + x$ dir. (değişme özelliği)

G3) $\forall x, y, z \in \mathrm{X}$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (birleşme özelliği)

G4) $\forall x \in \mathrm{X}$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in \mathrm{X}$ vardır. (özdeş elemanın varlığı)

G5) $\forall x \in \mathrm{X}$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in \mathrm{X}$ vardır. (ters elemanın varlığı)

B) $x, y \in \mathrm{X}$ ve $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1) $\alpha . x \in \mathrm{X}$ dir.

L2) $\alpha .(x+y)=\alpha . x+\alpha . y$ dir.

L3) $(\alpha+\beta) . x=\alpha . x+\beta . x$ dir.

L4) $(\alpha \beta) . x=\alpha .(\beta . x)$ dir.

L5) $1 . x=x$ dir. (Burada 1, K nın birim elemanıdır).

Tanım 2.7. (Cauchy Dizisi**)**

$\mathrm{X}=(\mathrm{X}, d)$ bir metrik uzay ve $(x_n)_1^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon>0$ için $m, n>n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa $(x_n)_1^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Kısaca,

$\forall \varepsilon>0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m>n_0(\varepsilon)$ için $|x_n-x_m|<\varepsilon \Leftrightarrow (x_n)_1^{\infty}$ dizisi Cauchy dizisidir.

Eğer, (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi, bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay adı verilir.

Tanım 2.8. (Normlu Vektör Uzayı**)**

X bir K cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. Eğer $\|\cdot\|: \mathrm{X} \rightarrow \mathbb{R}_{+}$ fonksiyonu $\forall x, y \in \mathrm{X}$ ve $\forall \lambda \in \mathrm{K}$ için

$(\mathcal{N}1)$ $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

$(\mathcal{N}2)$ $\|\lambda x\|=|\lambda| .\|x\|$

$(\mathcal{N}3)$ $\|x+y\| \leq\|x\|+\|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir.

$(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $d: \mathrm{XxX} \rightarrow \mathbb{R}_{+}$, $d(x, y)=\|x-y\|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzaydır.

Tanım 2.9. (Banach Uzayı**)**

Bir $(\mathrm{X}, \|\,.\,\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyorsa, bu $(\mathrm{X}, \|\,.\,\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

Bir X normlu uzayın tamlığını (ya da Banach uzayı olduğunu) göstermek için, X' de keyfi bir $(x_n)_1^\infty$ Cauchy dizisi alıp bunun X' de yakınsak olduğunu göstermek gerekir.

Tanım 2.10. (Hölder Süreklilik**)**

G, z-düzleminde sınırlı bir bölge ve $\overline{\mathrm{G}}$ da tanımlanmış bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{G}}$ için

$$|f(\,z_2) - f(\,z_1)| \leq \mathrm{H}|\,z_2 - z_1|^\lambda \qquad (2.1)$$

olacak şekilde $\mathrm{H} > 0$ ve $\lambda \in (0,1]$ sayıları varsa $f(z)$ fonksiyonuna $\overline{\mathrm{G}}$ bölgesinde Hölder süreklidir denir.

Ayrıca (2.1) eşitsizliğine de Hölder Eşitsizliği adı verilir.

H sabiti tek değildir, ancak H sabiti

$$\mathrm{H}_f = \sup_{z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{G}}} \frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda} \qquad (z_1 \neq z_2)$$

olarak seçilirse H tekdir ve Hölder sabiti adını alır. λ sayısına da Hölder üsteli denir. Bu durumda

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq \mathrm{H}_f\,|z_2 - z_1|^\lambda \qquad (2.2)$$

eşitsizliğine Hölder koşulu adı verilir.

(2.2) eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların kümesini $\mathrm{H}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ ile gösterelim. Eğer $f(z)$' nin 1.basamaktan türevleri Hölder sürekli ise bu tür fonksiyonların sınıfı da $\mathrm{H}_\lambda^1(\overline{\mathrm{G}})$ olarak ifade edilir.

(2.2) eşitsizliğini sağlayan bütün sınırlı fonksiyonların kümesi de $\mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ ile gösterilir.

Tanım 2.11.

$\mathrm{X} \neq \emptyset$ bir küme ve $f: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ herhangi bir dönüşüm olsun. $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in \mathrm{X}$ varsa, bu x noktasına f' in sabit bir noktası denir.

Başka bir ifadeyle $f(x) = x$ $(x \in \mathrm{X})$ denkleminin çözümü f' in bir sabit noktasıdır.

Örnek 1 :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ dönüşümü için $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

Örnek 2 :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{3}$$

dönüşümü için $x = 0$ noktası sabit noktadır.

Örnek 3 :

$\mathrm{X} = [0, \infty)$ ve $a > 0$ olmak üzere $f: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, $f(x) = x + a$ olsun. Bu durumda, bu dönüşümün hiçbir sabit noktası yoktur.

Tanım 2.12.

X Banach uzay olmak üzere, $A: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ dönüşümü verilsin. Eğer $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathrm{X}$ olmak üzere $A(x)$ operatörü

$$A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \text{ve} \quad A(\alpha x) = \alpha A(x)$$

şartlarını sağlıyorsa $A(x)$ operatörüne lineer operatör denir ve Ax ile gösterilir.

Tanım 2.13.

X Banach uzayı ve $A: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ bir operatör olmak üzere

$$x = Ax \tag{2.3}$$

denklemi verilmiş olsun. Eğer $x^* = Ax^*$ ise $x^* \in \mathrm{X}$ vektörüne A operatörünün sabit noktası denir.

$A: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ operatörünün bir sabit noktasının varlığı aynı zamanda (2.3) denkleminin bir çözümünün varlığı demektir.

Ardışık yaklaşımlar yöntemi (2.3) şeklindeki denklemlerin çözümü için en çok kullanılan yöntemdir. Bu yönteme göre herhangi $x_0 \in \mathrm{X}$ vektörü başlangıç yaklaşım noktası olmak üzere terimleri;

$$x_n = Ax_{n-1}, \quad n = 1,2, \dots \tag{2.4}$$

şeklinde olan $(x_n)_1^\infty$ tahmini çözümler dizisi oluşturur. Eğer $x^* \in \mathrm{X}$ vektörü $(x_n)_1^\infty$ dizisinin bir limiti ve A operatörü x^* noktasında sürekli ise (2.4) e göre x^* vektörü (2.3) denkleminin bir çözümüdür. Dolayısıyla $(x_n)_1^\infty$ dizisinin yakınsaklık koşulları aynı zamanda (2.3) denkleminin çözümünün varlığı koşulları olur.

Tanım 2.14.

X Banach uzayı ve $A: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ operatörü verilsin. Eğer $\forall x, y \in \mathrm{X}$ için,

$$\|Ax - Ay\| \leq \alpha \|x - y\|$$

olacak şekilde $\alpha > 0$ reel sayısı varsa, A' ya Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

Burada α sayısına daralma katsayısı denir ve $\alpha < 1$ ise A' ya büzülme dönüşümü veya daralma dönüşümü; $\alpha = 1$ ise, A' ya genişlemeyen dönüşüm denir.

Teorem 2.15. (Banach Sabit Nokta Teoremi)

X Banach uzayı ve $A: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ bir daralma dönüşümü ise, A' nın X' de bir tek sabit noktası vardır.

İspat:

Ax operatörü X Banach uzayında bir daralma dönüşümü ise,

$$x = Ax$$

denkleminin X' de bir tek x^* çözümü vardır ve

$$x_n = Ax_{n-1} \quad (n = 1,2, \dots) \tag{2.5}$$

ile oluşturulan $(x_n)_1^\infty$ ardışık yaklaşıklar bu çözüme yakınsar.

Bu yakınsamanın hızı

$$\|x_n - x^*\| \leq \alpha^n \|x_0 - x^*\| \tag{2.6}$$

veya

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|x_0 - Ax_0\|$$

eşitsizlikleri ile belirlenir.

$x_0 \in \mathrm{X}$ olsun. $x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1,\ x_3 = Ax_2, \dots,\ x_n = Ax_{n-1}, \dots$ olacak şekilde bir $(x_n)_1^\infty)$ dizisi oluşturalım. Bir sabit noktanın varlığını ispatlayabilmemiz için $(x_n)_1^\infty$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermemiz gerekir. Bu dizi için

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Ax_n - Ax_{n-1}\| \leq \alpha\, \|x_n - x_{n-1}\|$$

yazılabilir ve benzer eşitsizlikler ardışık olarak yazılırsa

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n\, \|x_1 - x_0\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bundan dolayı $\forall k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\| &\leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \\ &\quad \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \alpha^{n+k-1}\|x_1 - x_0\| + \alpha^{n+k-2}\|x_1 - x_0\| + \ \dots + \alpha^n\|x_1 - x_0\| \\ &= (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \ \dots + 1)\ \alpha^n\|x_1 - x_0\| \\ &= \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\ \alpha^n\|x_1 - x_0\| \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\alpha < 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\lim_{n,k\to\infty} \|x_{n+k} - x_n\| = 0$$

elde edilir. Bu ise $(x_n)_1^\infty$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X Banach uzayı olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

olacak şekilde $x^* \in \mathrm{X}$ vardır. $A(x)$ operatörü Lipschitz şartını sağladığından

$$\|Ax_{n-1} - Ax^*\| \leq \alpha\, \|x_{n-1} - x^*\|$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} Ax_{n-1} = Ax^*$$

olup (2.5) de $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$x^* = Ax^*$$

elde edilir. Bu ise $x = Ax$ denkleminin çözümü olduğunu gösterir.

Şimdi bu çözümün bir tek olduğunu gösterelim.
Bunun için $x = Ax$ denkleminin x^* ve y^* şeklinde iki çözümünün olduğunu varsayalım. Yani

$$x^* = Ax^* \text{ ve } y^* = Ay^*$$

olsun. Buradan

$$\|x^* - y^*\| = \|Ax^* - Ay^*\| \leq \alpha\|x^* - y^*\|$$

yazılabilir. $\alpha < 1$ olduğundan bu eşitsizlik ancak $x^* = y^*$ olması halinde sağlanır. O halde $Ax = x$ denkleminin çözümü tektir.

Teoremin ispatını tamamlamak için (2.6) eşitsizliğini doğrulamak yeterlidir.

$$x_n = Ax_{n-1}$$

eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\|x_n - x^*\| = \|Ax_{n-1} - A\,x^*\| \leq \alpha\|x_{n-1} - x^*\|$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikte tümevarım metodu uygulanırsa

$$\|x_n - x^*\| \leq \alpha^n\|x_0 - x^*\|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu teorem (2.5) denkleminin bir tek çözümünün varlığını göstermenin yanı sıra bu çözüme ait bir yöntem de vermiş olur.

Bu teorem, Polonyalı matematikçi S.Banach tarafından 1920'de ispatlanmıştır ve kaynaklarda "Daralma Dönüşüm Prensibi" olarak bilinir.

Örnek 1:
$A: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to Ax = \varphi(x)$ olsun. Bilindiği gibi $\mathbb{R}$' de iki nokta arasındaki uzaklık,

$$\|x - y\| = |x - y|$$

ile tanımlıdır. Bu takdirde operatör denklem

$$x = \varphi(x) \tag{2.7}$$

şeklini alır. $\varphi(x)$ in $\mathbb{R}$ de Lipschitz koşulunu sağladığını kabul edelim. Yani ($x, y \in \mathbb{R}$ ve $\alpha < 1$ olmak üzere)

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \alpha |x - y|$$

olsun. Bu takdirde $x = \varphi(x)$ denkleminin bir tek çözümü var ve bu çözüm

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1,2, \dots)$$

ardışık yaklaşıklıklar dizisinin limitidir ve yakınsama hızı (2.6) ile verilebilir.

Eğer, $\varphi(x)$ fonksiyonu Lipschitz şartını,

$$S[x_0^*, r] = \{\, x: |x - x^*| \leq r \,\}$$

yuvarında sağlıyor ve

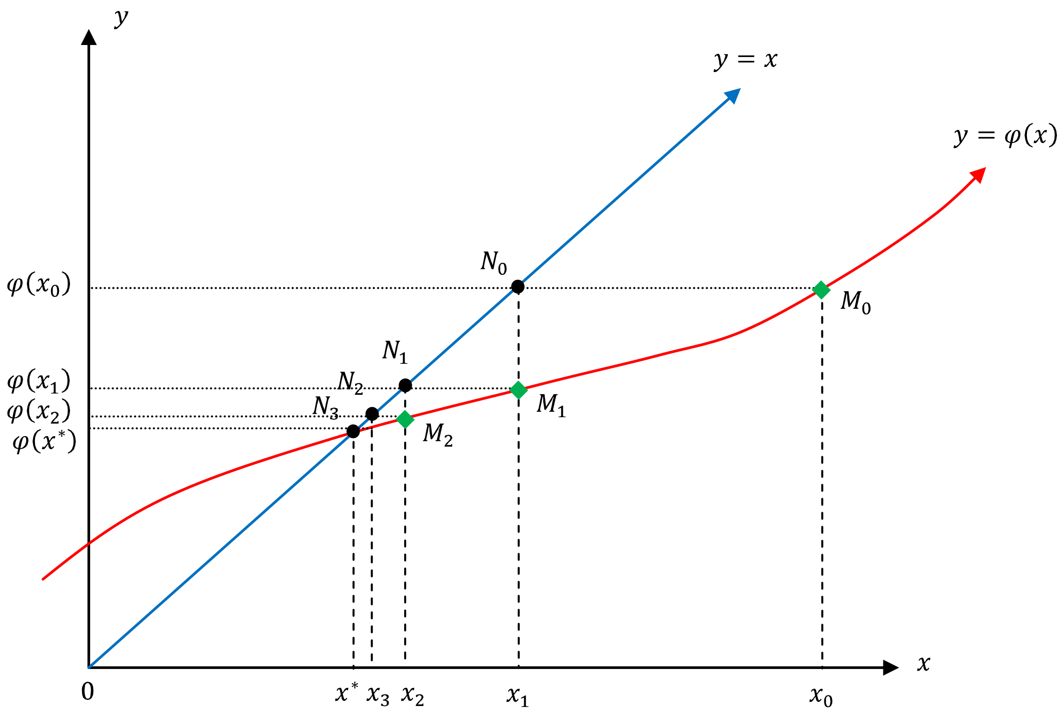
$$|\varphi(x^*) - x_0^*| \leq (1 - \alpha) r$$

ise bu takdirde $x = \varphi(x)$ denkleminin $[x_0^* - r\,,\ x_0^* + r]$ aralığında bir tek çözümü var ve bu çözüm $x_n = \varphi(x_{n-1})$ dizisinin limitidir. Bu özel hal için

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq (\alpha^k - 1) \frac{\alpha^n}{\alpha - 1} \|x_1 - x_0\|$$

denkleminin çözümü olan ardışık yaklaşıklar limiti kavramının geometrik anlamını aşağıdaki gibi yorumlayabiliriz.

Bu denklemin çözümü aşikar olarak $y = \varphi(x)$ eğrisi ile $y = x$ doğrusunun kesişme noktasıdır. (Şekil 2.2.)



Şekil 2.2. $x = \varphi(x)$ denkleminin çözümü

x ekseni üzerinde keyfi bir x_0 noktası seçelim ve bu noktayı eğri üzerine taşıyalım. Yaklaşıkların başlangıç noktası x_0 olsun.

$M_0\big(x_0\,,\ \varphi(x_0)\big)$ noktası $\varphi(x)$ eğrisi üzerindedir. Bu noktadan x eksenine çizilen paralel, $y = x$ doğrusunu $N_0\big(x_1\,,\ \varphi(x_0)\big)$ noktasında kesecektir. N_0 ın koordinatları $N_0(x_1\,,\ x_1)$ şeklinde olacaktır. ($y = x$ doğrusu üzerinde $\varphi(x_0) = x_1$ dir.)

N_0' dan y eksenine paralel çizersek bu paralel, $y = \varphi(x)$ eğrisini $M_1\big(x_1\,,\ \varphi(x_1)\big)$ noktasında keser. Bu kesişme noktasında x eksenine çizilen paralel, eğriyi N_1 noktasında keser. Bu düşünce ile işleme devam edilirse $y = x$ doğrusu üzerinde $N_1\big(x_2\,,\ \varphi(x_1)\big), \ldots$ noktaları elde edilir. Bu şekilde elde edilen $M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots\ ,\ M_n$ noktaları dizisi x^* ile gösterilen noktaya yakınsar.

Şimdi bu teoremi

$$x = \varphi(x) \equiv \frac{1}{4 + x^2} \tag{2.8}$$

ile verilen denklemin çözümüne uygulayalım.

Önce $\varphi(x)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ de Lipschitz şartını sağladığını gösterelim:
Keyfi $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| &= \left| \frac{1}{4 + x_2^2} - \frac{1}{4 + x_1^2} \right| \\
&= \left| \frac{4 + x_1^2 - 4 - x_2^2}{(4 + x_2^2)(4 + x_1^2)} \right| \\
&= \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{(4 + x_2^2)(4 + x_1^2)} \\
&= \frac{|x_1 + x_2|}{(4 + x_2^2)(4 + x_1^2)}\,|x_2 - x_1|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Açık olarak,

$$|x| \leq 1 + \frac{x^2}{4}$$

dir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
|x_1 + x_2| &\leq |x_1| + |x_2| \\
&\leq 1 + \frac{x_1^2}{4} + 1 + \frac{x_2^2}{4} \\
&= 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \\
&\leq 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{x_1^2\, x_2^2}{8} \\
&= \frac{16 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_1^2 x_2^2}{8} \\
&= \frac{1}{8}(16 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_1^2 x_2^2) \\
&= \frac{1}{8}(4 + x_1^2)(4 + x_2^2)
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$|x_1 + x_2| \leq \frac{1}{8}(4 + x_1^2)(4 + x_2^2)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{|x_1 + x_2|}{(4 + x_1^2)(4 + x_2^2)} \leq \frac{1}{8}$$

olur.

O halde keyfi iki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq \frac{1}{8}|x_2 - x_1|$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $\varphi(x)$ Lipschitz koşulunu sağlar.

Demek ki,

$$x_n = \frac{1}{4 + x_{n-1}^2}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

dizisi (2.8) denkleminin çözümüne yakınsar.

Eğer $x_0 = 0$ kabul edilirse, diğer yaklaşıklar

$x_1 = 0{,}25,\ x_2 = 0{,}2461,\ x_3 = 0{,}2463,\ x_4 = 0{,}2463$ olarak bulunur.

O halde, (2.8) denkleminin çözümü $0{,}0001$ hata ile $(x_3 = x_4)$ yaklaşık çözümü $0{,}2463$ sayısıdır.

Tanım 2.16.

$\mathfrak{R}$ bir Banach uzayı ve K, $\mathfrak{R}$ nin kapalı bir alt kümesi olsun. $x^* \in \mathfrak{R}$ olmak üzere x^* ın her komşuluğunda K nın x^* dan farklı elemanları varsa x^* a K nın bir yığılma noktası denir. Bütün yığılma noktalarını kapsayan kümeye kapalıdır denir.

Tanım 2.17.

K, $\mathfrak{R}$ nin bir alt kümesi olmak üzere K nın her bir elemanını yine $\mathfrak{R}$ nin elemanına dönüştüren $\mathrm{T}x = y$ şeklindeki bir dönüşüme K kümesini $\mathfrak{R}$ ye dönüştüren bir operatördür denir. Yani

$$\mathrm{T}: \mathrm{K} \to \mathfrak{R}$$
$$x \to y = \mathrm{T}x \quad \text{(içine dönüşüm)}$$

Tanım 2.18.

Her $\{x_n\} \subset \mathfrak{R}$ yakınsak dizisi için

$$x_n \to x^* \text{ olduğunda } \mathrm{T}x_n \to \mathrm{T}x^*$$

oluyorsa T operatörüne $\mathfrak{R}$ üzerinde süreklidir denir.

Tanım 2.19.

K, $\mathfrak{R}$ fonksiyon uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in \mathrm{K}$ için

$$\lambda x + (1-\lambda)y \,, \qquad 0 < \lambda < 1$$

ifadesi yine K kümesine ait ise K ya konvekstir denir.

Tanım 2.20.

Normlu bir uzaydan seçilmiş bir $\{x_n\}_1^\infty$ dizisi için, $\forall n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\|x_n\| \leq \mathrm{c}$$

olacak şekilde c sabiti varsa x_n dizisine sınırlıdır denir.

Tanım 2.21.

K bir Banach uzayının alt kümesi olsun. $\mathrm{T}: \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ operatörünü göz önüne alalım. T nin tanım kümesinden seçilen sınırlı her $\{x_n\}_1^\infty$ dizisinin $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ alt dizilerinin T altındaki görüntüleri yakınsak oluyorsa T operatörüne tamdır veya kompakttır denir.

Teorem 2.22. (Schauder Sabit Nokta Teoremi**)**

X Banach uzayı olmak üzere K, X' in kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $\mathrm{T}: \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ operatörü sürekli ve kompakt olsun. Bu takdirde $\mathrm{T}x = x$ olacak şekilde en az bir $x \in \mathrm{K}$ sabit noktası vardır.

İspat:

Bkz [1], sayfa 433.

3. KOMPLEKS FONKSİYONLAR

Tanım 3.1.

Kompleks düzlemde açık ve irtibatlı her kümeye bölge denir.

Tanım 3.2.

$\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. D bölgesinin her elemanını kompleks düzlemin bir başka elemanına dönüştüren eşleştirme kuralına bir kompleks fonksiyon denir.

Reeldeki fonksiyon tanımından farklı olarak kompleks fonksiyonda, D tanım kümesindeki bir elemanın birden fazla görüntüsü olabilir. Bu durumdaki fonksiyonlara çok değerli fonksiyon, aksi halde basit fonksiyon denir. Kompleks fonksiyonlar için

$$f: \mathrm{D} \to \mathbb{C}\ , \qquad z \to w = f(z) = u(z) + iv(z)$$

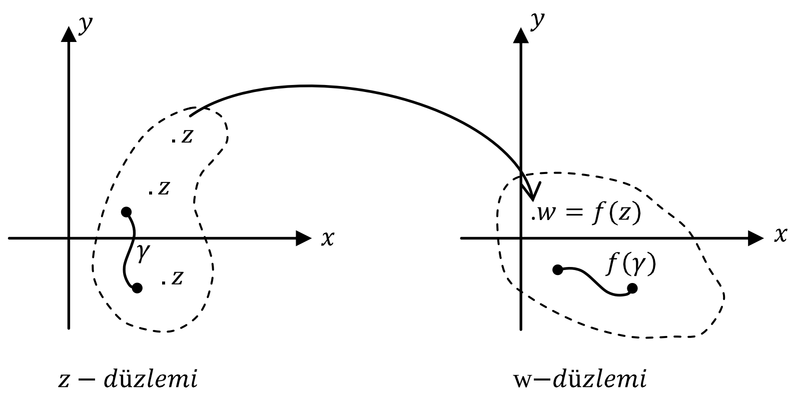
$$u, v: \mathrm{D} \to \mathbb{R}\ , \quad (x, y) \to u = u(x, y)$$

$$(x, y) \to v = v(x, y)$$

$$u = Ref,\ \ v = Imf$$

gösterimleri kullanılır.

Kompleks fonksiyonlar, kompleks düzlemde bölgeleri bölgelere dönüştürür. (Şekil 3.1.)



Şekil 3.1. Bölgeleri bölgelere dönüştüren kompleks fonksiyon

Tanım 3.3.

$\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi ve $f\colon \mathrm{D} \to \mathbb{C}$, $z \to w = f(z)$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathrm{D}$ olmak üzere,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise bu limite $f(z)$' nin z_0 noktasındaki türevi denir. Bu türev D bölgesinin her noktasında mevcut ise $f(z)$ ye D de türevlenebilirdir denir. Burada $z - z_0 = h$ alınırsa, bu türev

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) \qquad (3.1)$$

şeklinde de yazılabilir.

Teorem 3.4.

$\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $f'(z)$ türevi mevcut olsun. Bu durumda $f = u + iv$ için

$$f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$$

dir. Bunun karşıtı her zaman doğru değildir.

İspat:

$f'(z)$ türevi mevcut olsun.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

(3.1) de $h = r + is$ alınırsa

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + r + iy + is) - f(x + iy)}{r + is} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{u(x + r, s + y) + iv(x + r, s + y) - u(x, y) - iv(x, y)}{r + is} \end{aligned}$$

$s = 0$ için $h = r$ olacağından (reel eksen boyunca yaklaşıldığında)

$$\begin{aligned} &= \lim_{r \to 0} \frac{u(x + r, y) + iv(x + r, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{r} \\ &= \lim_{r \to 0} \left[\frac{u(x + r, y) - u(x, y)}{r} + i \frac{v(x + r, y) - v(x, y)}{r} \right] \\ &= u_x(x, y) + iv_x(x, y) \end{aligned}$$

$r = 0$ için $h = is$ olacağından (sanal eksen boyunca yaklaşıldığında)

$$= \lim_{s \to 0} \frac{u(x, y+s) + iv(x, y+s) - u(x, y) - iv(x, y)}{is}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{s \to 0} \left[\frac{u(x, y+s) - u(x, y)}{s} + i \frac{v(x, y+s) - v(x, y)}{s} \right]$$

$$= \frac{1}{i} \left[u_y(x, y) + iv_y(x, y) \right]$$

$$= -iu_y + v_y$$

yazılabilir. $f'(z)$ türevi mevcut olduğundan

$$u_x + iv_x = -iu_y + v_y = f'(z)$$

elde edilir.

Tanım 3.5.

$\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $f: \mathrm{D} \to \mathbb{C}$, $z \to w = f(z)$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathrm{D}$ olmak üzere, z_0' ın en az bir

$$\mathrm{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r \}$$

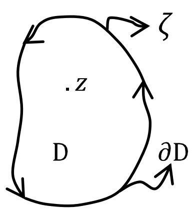
komşuluğundaki her z noktasında $f'(z)$ türevi varsa $f(z)$ ye z_0 noktasında analitiktir denir.

Eğer $\forall z \in \mathrm{D}$ için $f(z)$, z noktasında analitik ise $f(z)$ ye D bölgesinde analitiktir denir.

f, D bölgesinde ve $\partial\mathrm{D}$ sınırında analitik olsun. Bu takdirde $z_0 \in \mathrm{D}$ olmak üzere,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \qquad (3.2)$$

bağıntısı geçerlidir. Bu bağıntıya Cauchy-integral formülü denir.
Burada $f(\zeta)$, fonksiyonun sınır üzerindeki değeridir. Yani,



$$f(z)\big|_{\partial \mathrm{D}} = \varphi(z)$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

dir.

Tanım 3.6. (Kompleks Türev Operatörleri)

$\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $z = x + iy$ olsun. D de $f = u + iv$ şeklinde kompleks değerli bir fonksiyon tanımlayalım. $f \in \mathbb{C}^1(\mathrm{D})$ ve $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathrm{D}$ sabit bir nokta olsun. Bu durumda

$$\tilde{u}(x,y) = u(x_0,y_0) + u_x(x_0,y_0)(x - x_0) + u_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$\tilde{v}(x,y) = v(x_0,y_0) + v_x(x_0,y_0)(x - x_0) + v_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

ifadelerine sırasıyla u ve v nin (x_0,y_0) noktasındaki lineerleştirilmesi denir.

$\tilde{u}(x,y)$ ve $\tilde{v}(x,y)$ fonksiyonları sırasıyla yüzeye $(x_0,y_0,u(x_0,y_0))$ ve $(x_0,y_0,v(x_0,y_0))$ noktalarından çizilen teğet düzlem denklemleridir. Böylece $f(z)$ nin lineerleştirilmesi

$$\tilde{f}(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) \qquad (3.3)$$

şeklinde olur.

$$z = x + iy \text{ ve } \bar{z} = x - iy$$

ifadelerinden

$$x = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ ve } y = -\tfrac{i}{2}(z - \bar{z}) = \tfrac{i}{2}(\bar{z} - z)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$$

$$\overline{z - z_0} = (x - x_0) - i(y - y_0)$$

dir. Bu denklemlerden

$$x - x_0 = \tfrac{1}{2}\left[\, (z - z_0) + \overline{(z - z_0)}\, \right]$$

$$y - y_0 = -\tfrac{i}{2}\left[\, (z - z_0) - \overline{(z - z_0)}\, \right] = \tfrac{i}{2}\left[\, \overline{(z - z_0)} - (z - z_0)\, \right]$$

yazılabilir. Bu değerler f in $\tilde{f}$ lineerleştirilmesinde yerine yazılırsa,

$$\tilde{f}(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}\left[f_x(z_0) - if_y(z_0)\right](z - z_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_x(z_0) + if_y(z_0)\right](\overline{z - z_0}) \qquad (3.4)$$

elde edilir. (3.3)' de $x - x_0$ ve $y - y_0$ ın katsayıları f'in sırasıyla x ve y ye göre türevleri olduğuna dikkat edilirse benzer şekilde (3.4)' de $z - z_0$ ve $\overline{z - z_0}$ katsayıları sırasıyla f'in z ve $\bar{z}$ e göre kompleks kısmi türevleri olarak adlandırılabilirler. Yani,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{3.5}$$

bulunur.

$f=u+iv,\ \ f_x=u_x+iv_x$ ve $f_y=u_y+iv_y$ olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left[u_x+v_y-i\left(u_y-v_x\right)\right] \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left[u_x-v_y+i\left(u_y+v_x\right)\right]$$

şeklinde gösterilebilir.

$f(z)$ analitik ise $f_{\bar{z}}=0$ dır. Buradan

$$u_x-v_y=0, \qquad u_y+v_x=0$$

Cauchy-Riemann sistemi ortaya çıkar. Bu sistem aynı zamanda Teorem 3.4 ün sonucundan da doğrudan ortaya çıkar.

Tanım 3.7.

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.6}$$

operatörlerine birinci basamaktan kompleks kısmi türev operatörleri denir.

3.1. Reel Kısmi Türevli Denklem Sistemlerinin Kompleks Kısmi Türevli Denklemlere Dönüştürülmesi

u,v,a_{ij},b_{ij},d_j ; x ve y nin fonksiyonları olmak üzere,

$$a_{j1}u_x+a_{j2}u_y+a_{j3}v_x+a_{j4}v_y+b_{j1}u+b_{j2}v=d_j \qquad j=1,2 \tag{3.7}$$

birinci basamaktan lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

$j=1$ için elde edilen denklem ile $j=2$ için elde edilen denklemi "i" ile çarpıp taraf tarafa toplarsak

$$(a_{11}+ia_{21})u_x+(a_{12}+ia_{22})u_y+(a_{13}+ia_{23})v_x+(a_{14}+ia_{24})v_y$$
$$+(b_{11}+ib_{21})u+(b_{12}+ib_{22})v=d_1+id_2 \tag{3.8}$$

elde edilir.

u ve v reel değerli fonksiyonları bir w kompleks fonksiyonunun sırasıyla reel ve sanal kısımları olmak üzere

$$w=u+iv, \quad \bar{w}=u-iv$$

olsun. Bu iki eşitlikten

$$u = \frac{1}{2}(w + \overline{w}), \quad v = \frac{1}{2i}(w - \overline{w})$$

yazılabilir. Bu yazılış (3.8)' deki denklemin tek kompleks denklem türünden yazılışını sağlar. u_x, u_y, v_x, v_y türevlerini, w_z ve $w_{\bar{z}}$ cinsinden yazarsak;

$$u_x = \frac{1}{2}\left[\, w_z + w_{\bar{z}} + \overline{(w_z)} + \overline{(w_{\bar{z}})}\,\right]$$

$$u_y = \frac{i}{2}\left[\, w_z - w_{\bar{z}} - \overline{(w_z)} + \overline{(w_{\bar{z}})}\,\right]$$

$$v_x = \frac{i}{2}\left[\, -w_z - w_{\bar{z}} + \overline{(w_z)} + \overline{(w_{\bar{z}})}\,\right]$$

$$v_y = \frac{1}{2}\left[\, w_z - w_{\bar{z}} + \overline{(w_z)} - \overline{(w_{\bar{z}})}\,\right]$$

elde edilir. Bu bağıntılar (3.8) de yerine yazılıp w, $w_{\bar{z}}$, $\overline{w_z}$, $\overline{w_{\bar{z}}}$ parantezinde yeniden düzenlenirse

$$\mathrm{A}_1 w_z + \mathrm{A}_2 w_{\bar{z}} + \mathrm{A}_3\overline{(w_z)} + \mathrm{A}_4\overline{(w_{\bar{z}})} + \mathrm{B}_1 w + \mathrm{B}_2\overline{w} = 0 \qquad (3.9)$$

elde edilir.

(3.9) denklemine, (3.7) denkleminde $j = 1, 2$ alınarak elde edilen sistemin kompleks formu denir. Verilen (3.7) denkleminde

$$b_{jk} = 0, \ d_j = 0$$

seçilirse o zaman $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2 = \mathrm{D} = 0$ olup en son elde ettiğimiz (3.9) denklemi de

$$\mathrm{A}_1 w_z + \mathrm{A}_2 w_{\bar{z}} + \mathrm{A}_3\overline{(w_z)} + \mathrm{A}_4\overline{(w_{\bar{z}})} = 0 \qquad (3.10)$$

haline gelir.

Teorem 3.9. (Schmidt Eşitsizliği)

$0 \leq \alpha < 2$ olmak üzere kompleks düzlemin her z noktası için

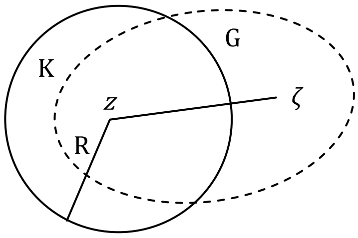
$$\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} \leq \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(\frac{m\mathrm{G}}{\pi}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

dir. Burada $m\mathrm{G}, \mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ bölgesinin ölçüsüdür.

İspat:

$z \in \mathrm{G}$ olmak üzere z merkezli R yarıçaplı bir K diskini; diskin alanı ile G bölgesinin alanı aynı olacak şekilde seçelim. (Şekil 3.2.)

Yani $\pi \mathrm{R}^2 = \mathrm{mG}$ olsun. O zaman



Şekil 3.2. Alan ölçüleri aynı iki bölge

$$\mathrm{R} = \left(\frac{\mathrm{mG}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. $\zeta \in \mathrm{G}\backslash\mathrm{K}$ için $|\zeta - z| \geq \mathrm{R}$ dir. Bu durumda

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{\alpha}} \leq \frac{1}{\mathrm{R}^{\alpha}}$$

yazılabilir. G ve K bölgeleri aynı ölçüye sahiptir. Diğer taraftan $\mathrm{G}\backslash\mathrm{K}$ ve $\mathrm{K}\backslash\mathrm{G}$ bölgeleri de aynı ölçüye sahiptir. Böylece

$$\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} = \iint\limits_{\mathrm{G}\cap\mathrm{K}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \iint\limits_{\mathrm{G}\backslash\mathrm{K}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}}$$

$$\leq \iint\limits_{\mathrm{G}\cap\mathrm{K}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \frac{1}{\mathrm{R}^{\alpha}} \iint\limits_{\mathrm{G}\backslash\mathrm{K}} d\xi d\eta$$

$$= \iint\limits_{\mathrm{G}\cap\mathrm{K}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \frac{1}{\mathrm{R}^{\alpha}} \iint\limits_{\mathrm{K}\backslash\mathrm{G}} d\xi d\eta$$

$$\leq \iint\limits_{\mathrm{G}\cap\mathrm{K}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} + \iint\limits_{\mathrm{K}\backslash\mathrm{G}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}}$$

$$= \iint\limits_{\mathrm{K}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}} = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\mathrm{R}} \frac{r dr d\theta}{r^{\alpha}}$$

$$\leq \frac{2\pi}{2 - \alpha} \mathrm{R}^{2-\alpha}$$

$$= \frac{2\pi}{2 - \alpha} \left(\frac{m\mathrm{G}}{\pi}\right)^{1-\frac{\alpha}{2}}$$

olur. Burada

$$|\zeta - z| = r, \ \zeta - z = re^{i\theta}$$

dır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.10.

$$\mathrm{J} = \iint_{\mathrm{G}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|^{\alpha}|\zeta - z|^{\beta}}$$

integrali için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

a) Eğer $|z_2 - z_1| < 2$ ve $\alpha + \beta \neq 2$ ise

$$\mathrm{J} \leq 2\pi\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\beta} - \frac{2}{2-\alpha-\beta}\right)\left(\frac{|z_2 - z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta} + \frac{4\pi}{2-\alpha-\beta} + m\mathrm{G}$$

b) $|z_2 - z_1| < 2$ ve $\alpha + \beta = 2$ ise

$$\mathrm{J} \leq 2\pi\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\beta}\right) - 4\pi\ln\left(\frac{|z_2 - z_1|}{2}\right) + m\mathrm{G}$$

c) $|z_2 - z_1| \geq 2$ ise

$$\mathrm{J} \leq 2\pi\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\beta}\right)\left(\frac{|z_2 - z_1|}{2}\right)^{2-\alpha-\beta} + m\mathrm{G}$$

İspat:

Bkz [2], sayfa 101.

3.2. Homojen Olmayan Cauchy-Riemann Denkleminin Çözümleri

$$w_{\bar{z}} = 0$$

denklemini sağlayan bir w fonksiyonunun reel ve sanal kısımları homojen Cauchy-Riemann denklemini sağlar. Yani,

$$u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0$$

sistemi gerçeklenir.

$$w_{\bar{z}} = g(z) \tag{3.11}$$

formundaki kompleks denklemi göz önüne alalım. (3.11) ile verilen denkleme homojen olmayan Cauhy-Riemann denklemi denir.

$$w_0(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{G}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\,, \qquad \zeta = \xi + i\eta \tag{3.12}$$

ile tanımlanan fonksiyon (3.11) kompleks diferansiyel denkleminin G' de bir özel çözümüdür.

3.3. Hölder Sürekli Fonksiyonların Banach Uzayı

G, z-düzleminde sınırlı bir bölge, f ise $\overline{\mathrm{G}}$ da tanımlı $\overline{\mathrm{G}}$ ın tamamında Hölder sürekli kompleks değerli bir fonksiyon ve H, f nin $\overline{\mathrm{G}}$ bölgesi için Hölder sabiti olsun. Bu takdirde $z_1 \neq z_2$ noktaları için

$$\frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\lambda}} \leq \mathrm{H} \tag{3.13}$$

yazılabilir. (3.13) eşitsizliğinin sol tarafı $z_1 \neq z_2$ noktaları için daima sınırlı kalmaktadır. O halde bu sol taraf sonlu bir supremuma sahiptir. $\overline{\mathrm{G}}$ ın tamamında tanımlı ve $\overline{\mathrm{G}}$ da (3.13) eşitsizliğini sağlayan bütün fonksiyonları $\mathrm{C}_{\lambda}(\overline{\mathrm{G}})$ ile gösterelim. Buradaki H sabitleri f in özel seçimine bağlıdır. Ancak z_1 ve z_2 noktalarının seçiminden bağımsızdır.

Lemma 3.13.

$f \in \mathrm{C}_{\lambda}(\overline{\mathrm{G}})$ ve $z_1, z_2 \in \mathrm{G}$ olmak üzere,

$$\|f\|_{\lambda} = \max\left[\sup_{\mathrm{G}}|f(z)|,\ \sup_{z_1 \neq z_2}\frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\lambda}}\right] \tag{3.14}$$

ifadesi $\mathrm{C}_{\lambda}(\overline{\mathrm{G}})$ sınıfında bir normdur.

İspat:

$i)$ Eğer f özdeş olarak sıfır ise o zaman tanım gereğince $\|f\|_{\lambda} = 0$ dır. Tersine $\|f\|_{\lambda} = 0$ ise $\sup_{\mathrm{G}}|f(\mathrm{z})| = 0$ yani f özdeş olarak sıfırdır. $(f \equiv 0)$

$ii)$ $\alpha \in \mathbb{C}$ bir sabit ise ve $z_1, z_2 \in \mathrm{G}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_{\lambda} &= \max\left[\sup_{\mathrm{G}}|(\alpha f)(\mathrm{z})|,\ \sup_{z_1 \neq z_2}\frac{|(\alpha f)(z_2) - (\alpha f)(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\lambda}}\right]\\ &= |\alpha|\max\left[\sup_{\mathrm{G}}|f(\mathrm{z})|,\ \sup_{z_1 \neq z_2}\frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\lambda}}\right]\\ &= |\alpha|.\|f\|_{\lambda}\end{aligned}$$

$iii)$ (3.14) den $f \in \mathrm{C}_{\lambda}(\overline{\mathrm{G}})$ ise

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\lambda} \tag{3.15}$$

dır. Aynı zamanda

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq \|f\|_{\lambda}\, |z_2 - z_1|^{\lambda} \tag{3.16}$$

olduğu tanımdan görülebilir.

$f_1(z)$ ve $f_2(z)$, $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfından herhangi iki fonksiyon olsun. (3.16) dan

$$|f_1(z)+f_2(z)| \le |f_1(z)|+|f_2(z)| \le \|f_1\|_\lambda+\|f_2\|_\lambda$$

yazılabilir. Böylece

$$\sup_{G}|f_1(z)+f_2(z)| \le \|f_1\|_\lambda+\|f_2\|_\lambda$$

olup (3.16) bağıntısının göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} |(f_1+f_2)(z_2)-(f_1+f_2)(z_1)| &= |f_1(z_2)+f_2(z_2)-f_1(z_1)-f_2(z_1)| \\ &\le |f_1(z_2)-f_1(z_1)|+|f_2(z_2)-f_2(z_1)| \\ &\le \|f_1\|_\lambda\,|z_2-z_1|^\lambda+\|f_2\|_\lambda\,|z_2-z_1|^\lambda \\ &= (\|f_1\|_\lambda+\|f_2\|_\lambda)\,|z_2-z_1|^\lambda \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{|(f_1+f_2)(z_2)-(f_1+f_2)(z_1)|}{|z_2-z_1|^\lambda} \le \|f_1\|_\lambda+\|f_2\|_\lambda \tag{3.17}$$

olur. Bu eşitsizlik ise $f_1(z)+f_2(z)$ nin, $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfına ait olduğunu gösterir.

(3.16) ve (3.17) nin birlikte kullanılmasıyla

$$\|f_1+f_2\|_\lambda \le \|f_1\|_\lambda+\|f_2\|_\lambda$$

olur. O halde (3.14), $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfında bir norm tanımlar.

Şimdi (3.14) normuna göre $C_\lambda(\overline{G})$ nın bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. $C_\lambda(\overline{G})$' ın tamlığını göstermek için $C_\lambda(\overline{G})$ sınıfından bir $(f_n)_1^\infty$ Cauchy dizisi seçelim. Tanım gereğince $n,m \ge n_0$ olduğunda

$$\|f_n-f_m\|_\lambda < \varepsilon \tag{3.18}$$

olur. (3.16) dan $n,m \ge n_0$ için

$$|f_n(z)-f_m(z)| < \varepsilon \tag{3.19}$$

elde edilir. Bu ise $(f_n)_1^\infty$ dizisinin düzgün yakınsak olduğunu verir. O halde (3.19) da n sabit tutulup $m \to \infty$ için limit alınırsa $n \ge n_0$ için

$$|f_n(z)-f(z)| < \varepsilon \tag{3.20}$$

olacak şekilde sürekli bir f fonksiyonu bulunabilir. (3.16) dan

$$|\,[f_n(z_2)-f_m(z_2)]-[f_n(z_1)-f_m(z_1)]\,| \le \|f_n-f_m\|_\lambda\,|z_2-z_1|^\lambda$$

yazılabilir. (3.18) den

$$| [f_n(z_2) - f_m(z_2)] - [f_n(z_1) - f_m(z_1)] | < \varepsilon \, |z_2 - z_1|^{\lambda}$$

olur. n sabit tutulup $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$| [f_n(z_2) - f(z_2)] - [f_n(z_1) - f(z_1)] | < \varepsilon \, |z_2 - z_1|^{\lambda}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{| [f_n(z_2) - f(z_2)] - [f_n(z_1) - f(z_1)] |}{|z_2 - z_1|^{\lambda}} < \varepsilon \tag{3.21}$$

bulunur. Bu ise $f_n - f$ ve $f - f_n$ farklarının $\mathrm{C}_{\lambda}(\overline{\mathrm{G}})$ sınıfına ait olduğunu gösterir.

(3.20) ve (3.21) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa her $n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f\|_{\lambda} < \varepsilon$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür.

Bu ise $(f_n)_1^{\infty}$ dizisinin $\mathrm{C}_{\lambda}(\overline{\mathrm{G}})$ daki metriğe göre f e yakınsadığını gösterir. Yani $f \in \mathrm{C}_{\lambda}(\overline{\mathrm{G}})$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4. $\mathbf{T_G}$, $\prod_{\mathbf{G}}$ Operatörleri

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = g(z)$$

homojen olmayan Cauchy-Riemann denkleminin bir özel çözümü

$$w_0(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathrm{G}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta \tag{3.22}$$

dir. (3.22)' daki özel çözümü $\mathrm{T_G}g$ ile gösterirsek

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \mathrm{T_G} g = g \tag{3.23}$$

özelliği sağlanır.

G sınırlı bir bölge; g, G de tanımlı sürekli ve $|g| \leq c$ yani sınırlı ise o zaman her z için (3.22) integralinin mevcut olduğu söylenebilir. (3.22) için (3.23) gösterilimi kullanılırsa o zaman $\mathrm{T_G}$ operatörünün tanım kümesindeki g fonksiyonları G de tanımlanmış fonksiyonlar olmasına rağmen bütün düzleme bu fonksiyonlar genişletilebilir.

Bu tip fonksiyonlar aynı zamanda (3.23) kompleks diferansiyel denkleminin çözümleri olacaktır.

Tanım 3.15.

$C_\lambda(\overline{G})$, $\overline{G}$' da Hölder sürekli fonksiyonların sınıfı olmak üzere,

$$T_G : C_\lambda(\overline{G}) \to C_\lambda^1(\overline{G})$$

$$f \to T_G f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \ , \ \ \zeta = \xi + i\eta$$

şeklinde tanımlanan T_G operatörüne Pompeiu İntegral Operatörü denir.

Bilindiği gibi bu operatör $w_{\bar{z}} = F(z, w, w_z)$ formundaki kompleks diferansiyel denklemlerin çözümleri için verilen Cauchy problemlerinin varlığı ve tekliği için çok önemli rol oynamaktadır.

Yine burada,

$$\frac{\partial}{\partial z} T_G f(z) = \prod_G f(z) \ = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

şeklinde tanımlanan operatöre de $\prod_G$ operatörü denir.

$$w_{\bar{z}} = Aw + B\overline{w} \tag{3.24}$$

kompleks denkleminin

$$w(z) = \phi(z) + T_G(Aw + B\overline{w})$$

şeklinde bir çözüm gösterilimi vardır. Burada $\phi(z)$ keyfi holomorf bir fonksiyondur.

T_G operatörü için

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(T_G f(z)) = f(z) \ \text{ ve } \ \frac{\partial}{\partial z}(T_G f(z)) = \phi'(z) + \Pi_G f(z)$$

özellikleri vardır ve

$$w'(z) = \phi'(z) + \prod_G(Aw + B\overline{w})$$

dir.

Teorem 3.16.

$0 < \lambda < 1$ olması halinde $\mathrm{T_G}$, $\mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ sınıfından yine kendi içine dönüşen sınırlı bir operatördür.

İspat:

$z \in \overline{\mathrm{G}}$ herhangi bir nokta olsun. Bu durumda

$$\mathrm{T_G}f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \;\;, \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - z_1} = \frac{\zeta - z_1 - \zeta + z_2}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)} = \frac{z_2 - z_1}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)}$$

olması nedeniyle

$$\mathrm{T_G}f(z_2) - \mathrm{T_G}f(z_1) = -\frac{z_2 - z_1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)} d\xi d\eta$$

yazılabilir. Böylece (3.15) eşitsizliğinin de göz önüne alınmasıyla

$$|\mathrm{T_G}f(z)| \leq \frac{\|f\|_\lambda}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{1}{|\zeta - z|} d\xi d\eta \tag{3.25}$$

ve

$$|\mathrm{T_G}f(z_2) - \mathrm{T_G}f(z_1)| \leq \frac{\|f\|_\lambda}{\pi}|z_2 - z_1| \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_2||\zeta - z_1|} \tag{3.26}$$

elde edilir.

Teorem 3.9, $\alpha = 1$ için kullanılırsa ve eşitsizliğin sağ tarafı K_1 ile gösterilirse

$$\mathrm{K}_1 = \frac{1}{\pi} 2\pi \left(\frac{m\mathrm{G}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Her $z \in \mathbb{C}$, özellikle her $z \in \overline{\mathrm{G}}$ için

$$|\mathrm{T_G}f(z)| \leq \mathrm{K}_1\|f\|_\lambda \tag{3.27}$$

olur.

Benzer şekilde $|z_2 - z_1| \leq 1$ kabul edilir ve Teorem 3.10, $\alpha = \beta = 1$ için yazılırsa K_2, G' nin alanına bağlı bir sabit olmak üzere

$$\iint\limits_{G} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z_2||\zeta - z_1|} \leq \mathrm{K}_2 - 4\pi \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2}$$

yazılabilir.

Böylece (3.26) dan

$$|\mathrm{T_G}f(z_2) - \mathrm{T_G}f(z_1)| \leq \frac{\|f\|_\lambda}{\pi} |z_2 - z_1| \left[\mathrm{K}_2 - 4\pi \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{K}_2 |z_2 - z_1|^{1-\lambda} - 4\pi \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2} |z_2 - z_1|^{1-\lambda}\right] |z_2 - z_1|^{\lambda} \|f\|_\lambda \tag{3.28}$$

olur. $0 < \lambda < 1$ olması nedeniyle $1 - \lambda > 0$ dır. $|z_2 - z_1| = \delta$ dersek $\delta^{1-\lambda} \to 0$ ve $\delta^{1-\lambda} ln \frac{\delta}{2} \to 0$ dır. Buradan $\delta \to 0$ ifadesi sıfır limitine sahiptir. Böylece herhangi z_2 ve z_1 için $0 < |z_2 - z_1| \leq 1$ olduğu sürece (3.28) ifadesindeki

$$\frac{1}{\pi}\left[\mathrm{K}_2 |z_2 - z_1|^{1-\lambda} - 4\pi \ln \frac{|z_2 - z_1|}{2} |z_2 - z_1|^{1-\lambda}\right]$$

terimi sınırlıdır. Bu sınır K_3 ile gösterilirse o zaman (3.28) ifadesi

$$|\mathrm{T_G}f(z_2) - \mathrm{T_G}f(z_1)| \leq \mathrm{K}_3 \|f\|_\lambda |z_2 - z_1|^{\lambda} \tag{3.29}$$

haline dönüşür. K_2 yalnızca G' ye bağlı olduğundan K_3 de G' ye bağlıdır.

(3.28) eşitsizliği $|z_2 - z_1| \leq 1$ varsayımı altında geçerlidir. Eğer $|z_2 - z_1| > 1$ ise $|z_2 - z_1|^{\lambda} > 1$ olacağından (3.27) eşitsizliğinin göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned} |\mathrm{T_G}f(z_2) - \mathrm{T_G}f(z_1)| &\leq |\mathrm{T_G}f(z_2)| + |\mathrm{T_G}f(z_1)| \\ &\leq 2\mathrm{K}_1 \|f\|_\lambda \\ &\leq 2\mathrm{K}_1 \|f\|_\lambda |z_2 - z_1|^{\lambda} \end{aligned} \tag{3.30}$$

yazılabilir. Böylece $|z_2 - z_1| > 1$ olması halinde (3.30) eşitsizliği geçerlidir. O halde herhangi $z_2, z_1 \in \overline{\mathrm{G}}$ için

$$|\mathrm{T_G}f(z_2) - \mathrm{T_G}f(z_1)| \leq \max(2\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_3) \|f\|_\lambda |z_2 - z_1|^{\lambda} \tag{3.31}$$

olur. Buradan

$$\frac{|\mathrm{T_G}f(z_2) - \mathrm{T_G}f(z_1)|}{|z_2 - z_1|^{\lambda}} \leq \max(2\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_3) \|f\|_\lambda$$

bulunur. Bu ise $\mathrm{T_G}f$' in tekrar $\mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ sınıfına ait olduğunu gösterir.

$f \in C_\lambda(\overline{G})$ olmak üzere,

$$\|f\|_\lambda = \max\left[\sup_{G}|f(z)|\,,\ \sup_{z_1\neq z_2}\frac{|f(z_2)-f(z_1)|}{|z_2-z_1|^\lambda}\right]$$

Hölder normuna dikkat edilirse (3.27) ve (3.31) den

$$\|T_G f\|_\lambda \leq \max(2K_1, K_3)\|f\|_\lambda \tag{3.32}$$

olduğu görülür.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.17.

$$\|\prod\nolimits_G f\|_{0,\alpha} \leq \|T_G f\|_{1,\alpha} \leq K_1(\alpha)\|f\|_{0,\alpha}$$

Bkz [2], sayfa 169.

4. BİR KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM SİSTEMİNİN BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = f_j(z, w_1, w_2, \dots, w_m), \qquad j = 1, 2, \dots, m \tag{4.1}$$

kompleks kısmi türevli denklem sistemini göz önüne alalım. Bu sistem kompleks düzlemin bir $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ altbölgesinde geçerlidir. Yani $z \in \mathrm{G}$ dir. Burada

$$w_j = w_j(z), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

kompleks değerli fonksiyonları bulmaya çalışacağız. f_j ler ise üzerine bazı koşulların konulacağı skaler fonksiyonlardır.

Eğer (4.1) sistemdeki f_j ler özdeş olarak sıfır ise

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad j = 1, 2, \dots, m \tag{4.2}$$

sistemi elde edilir. Bu durumda w_j ler uygun $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ altbölgesinde holomorf (analitik) fonksiyonlar olmak üzere $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ vektör fonksiyonu (4.2) sisteminin çözümü olur.

(4.1) sisteminin çözümlerini ortaya koymadan önce

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_m), \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{4.3}$$

reel denklem sistemini göz önüne alalım. $t = t_0$ sabit noktasının uygun bir komşuluğunda bu sistemin çözümleri

$$y_i(t) = \mathrm{c}_i + \int_{s=t_0}^{t} f_i\big(s, y_1(s), \dots, y_m(s)\big) ds, \qquad i = 1, \dots, m \tag{4.4}$$

şeklinde ortaya konur. Burada $\mathrm{c}_i = y_i(t_0)$ dır.

Adi türevli denklem sistemi teorisinden de bilindiği gibi f_i fonksiyonları üzerine konulacak uygun koşullar altında (4.3) sisteminin $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ şeklinde vektörel çözümü elde edilir. Bu çözüm, $t = t_0$ için $y(t_0) = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ koşulunu sağlar.

Benzer düşünceyi kompleks sistem için ortaya koyalım.

Sınırlı $\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanmış $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ vektör değerli fonksiyonlar, $\overline{\mathrm{G}}$ da sürekli G de

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = f_j\big(z, w_1(z), \dots, w_m(z)\big)$$

sisteminin çözümü olsun. Bu durumda $\zeta = \xi + i\eta$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[w_j(z) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]$$

$$= \frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} - f_j\big(z, w_1(z), \dots, w_m(z)\big)$$

$$= 0$$

yazılabilir.

(3.12) de $g(\zeta)$ yerine $f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)$ ve $w_0(z)$ yerine $w_j(z)$ alınırsa ve çözümdeki keyfi fonksiyonu sıfır kabul ettiğimizde

$$w_j(z) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir ve (4.5) in her iki yanının $\bar{z}$ değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[w_j(z) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right] = 0$$

olur. O halde köşeli parantezin içi ($\bar{z}$ e göre türev sıfır olduğundan) bir holomorf fonksiyon belirler. Bu köşeli parantez içindeki analitik fonksiyonu

$$\varphi_j(z) = w_j(z) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

ile gösterilim. Buradan (4.1) sisteminin çözümleri için

$$w_j(z) = \varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{4.6}$$

yazılabilir. Burada φ_j ler G' de tanımlanmış holomorf fonksiyonlardır.

(4.1) sistemini çözmek için (4.6) integral denklem sisteminin çözümünün varlığını ortaya koymamız gerekir. Bunu Banach Sabit Nokta Teoremi yardımıyla yapabiliriz. Bu teoremi kullanabilmek için f_j fonksiyonları üzerine koşullar koymak gerekir.

Şimdi

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = f_j\big(z, w_1(z), w_2(z), \dots, w_m(z)\big)\,, \qquad j = 1, 2, \dots, m$$

sistemini göz önüne alalım ve aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

a) $z \in \overline{\mathrm{G}}$ olmak üzere f_j ler $m+1$ tane z, $w_1, \dots$, w_m değişkenlerine göre sürekli ve her w_j için $|w_j| \leq \mathrm{R}$, $|f_j| \leq \mathrm{K_R}$ olacak şekilde R ve $\mathrm{K_R}$ sabitleri mevcut olsun.

b) $|w_j| \leq \mathrm{R}$, $|\widetilde{w}_j| \leq \mathrm{R}$ ve her $z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{G}}$ için $(z_2 \neq z_1)$ f_j ler

$$\left|f_j(z_2, w_1, \dots, w_m) - f_j(z_1, \widetilde{w}_1, \dots, \widetilde{w}_m)\right| \leq \mathrm{L_R}\left(|z_2 - z_1|^{\lambda} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} |w_j - \widetilde{w}_j|\right) \quad (4.7)$$

düzgün Lipschitz koşulunu sağlasın.

Diğer yandan, Banach Sabit Nokta Teoremini kullanabilmek için (4.6) integral denklem sisteminin çözümlerinin içinde bulunduğu bir Banach uzayı oluşturmamız gerekmektedir.

$w_j = w_j(z)$, $\overline{\mathrm{G}}$ da sürekli, kompleks değerli fonksiyonlar olmak üzere $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ vektör değerli fonksiyonların sınıfını $\mathfrak{R}$ ile gösterelim. (3.14) den $\mathfrak{R}$ nin Banach uzayı olduğu açıktır.

Şimdi

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{R}} = \{ w \in \mathfrak{R} : \ \|w\|_{\lambda} \leq \mathrm{R} \}$$

sınıfını tanımlayalım. $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}} \subset \mathfrak{R}$ olduğu açıktır.

Lemma 4.2.

$\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ kümesi kapalıdır. Yani $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ kümesinden seçilen her Cauchy dizisi yine bu uzayın bir elemanına yakınsar.

İspat:

$\{w_n\}_{n\in N}$, $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ de bir Cauchy dizisi olsun. Tanım gereğince $n,m \geq n_0$ olduğunda

$$\|w_n - w_m\|_\lambda < \varepsilon \tag{4.8}$$

olur. (3.15) den $n,m \geq n_0$ için

$$|w_n(z) - w_m(z)| < \varepsilon \tag{4.9}$$

elde edilir. Bu ise $\{w_n\}_{n\in N}$ dizisinin düzgün yakınsak olduğunu verir. O halde (4.9) da n sabit tutulup $m \to \infty$ için limit alınırsa $n \geq n_0$ için

$$|w_n(z) - w(z)| < \varepsilon \tag{4.10}$$

olacak şekilde sürekli bir w fonksiyonu bulabiliriz. (3.16) dan

$$|\,[w_n(z_2) - w_m(z_2)] - [w_n(z_1) - w_m(z_1)]\,| \leq \|w_n - w_m\|_\lambda\, |z_2 - z_1|^\lambda$$

yazılabilir. (4.8) den

$$|\,[w_n(z_2) - w_m(z_2)] - [w_n(z_1) - w_m(z_1)]\,| < \varepsilon\, |z_2 - z_1|^\lambda$$

olur. n sabit tutulup $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$|\,[w_n(z_2) - w(z_2)] - [w_n(z_1) - w(z_1)]\,| < \varepsilon\, |z_2 - z_1|^\lambda$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{|\,[w_n(z_2) - w(z_2)] - [w_n(z_1) - w(z_1)]\,|}{|z_2 - z_1|^\lambda} < \varepsilon \tag{4.11}$$

bulunur.

(4.10) ve (4.11) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa her $n \geq n_0$ için

$$\|w_n - w\|_\lambda < \varepsilon \leq \mathrm{R}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür.

Bu ise $\{w_n\}_{n\in N}$ dizisinin $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ daki metriğe göre w ye yakınsadığını gösterir. Yani $w \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Diğer yandan,

$$f_j\big(z, w_1(z), w_2(z) \ldots, w_m(z)\big)$$

fonksiyonu sürekli olduğundan bir $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ elemanı yardımıyla oluşturulan $f_j\big(z, w_1(z), \ldots, w_m(z)\big)$ bileşke fonksiyonu $\overline{\mathrm{G}}$' da süreklidir. Bu durumda

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}}\frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

integrali ile tanımlanan fonksiyon kompleks düzlemin tamamında tanımlı ve süreklidir. Eğer $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ ler G' de holomorf, $\overline{\mathrm{G}}$' da sürekli iseler

$$w_j(z) = \varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}}\frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \qquad (4.12)$$

olmak üzere ($\varphi_j(z)$ ler analitik olduğundan süreklidir.) sürekli iki fonksiyonun toplamı da sürekli olacağından $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ $\overline{\mathrm{G}}$ da sürekli bir vektör fonksiyonu tanımlar. Böylece (4.12) dönüşümü $\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ sınıfının her w elemanını $w \in \mathfrak{R}$ elemanına dönüştürür. Bu dönüşüm operatörünü

$$\mathrm{T}_{\varphi,f} : \mathfrak{M}_{\mathrm{R}} \to \mathfrak{R}$$

$$w \to \mathrm{T}_{\varphi,f}\, w = W = (W_1, W_2, \dots, W_m)$$

şeklinde gösterelim.

Şimdi $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ olmak üzere

$$\|\varphi\| \le \mathrm{R}' < R$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Diğer taraftan Schmidt eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\left|\iint\limits_{\mathrm{G}}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\zeta - z}\right| \le \iint\limits_{\mathrm{G}}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{|\zeta - z|} \le \frac{2\pi}{2-1}\left(\frac{m\mathrm{G}}{\pi}\right)^{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi\frac{\sqrt{m\mathrm{G}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$= 2\sqrt{\pi}\sqrt{m\mathrm{G}}$$

$$= \sqrt{4\pi m\mathrm{G}} \qquad (4.13)$$

olur. Ayrıca

$$\left|w_j(z)\right| \le \left|\varphi_j(z)\right| + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}}\frac{\left|f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)\right|}{|\zeta - z|}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$\le \mathrm{R}' + \frac{1}{\pi}\mathrm{K}_{\mathrm{R}}\iint\limits_{\mathrm{G}}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{|\zeta - z|}$$

$$< \mathrm{R}' + \frac{\mathrm{K}_{\mathrm{R}}}{\pi}\sqrt{4\pi m\mathrm{G}}$$

olur. Böylece

$$\|w\| < \mathrm{R}' + \frac{\mathrm{K_R}}{\pi}\sqrt{4\pi m\mathrm{G}}$$

yazılabilir. Eğer G bölgesinin $m\mathrm{G}$ ölçüsü

$$\frac{\mathrm{K_R}}{\pi}\sqrt{4\pi m\mathrm{G}} \leq \mathrm{R} - \mathrm{R}' \qquad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilirse

$$\begin{aligned}\|W\| &< \mathrm{R}' + \frac{\mathrm{K_R}}{\pi}\sqrt{4\pi m\mathrm{G}} \\ &< \mathrm{R}' + \mathrm{R} - \mathrm{R}' \\ &= \mathrm{R}\end{aligned}$$

yani $\|W\| < \mathrm{R}$ olup buradan $W \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ elde edilir.

Böylece,

$$\mathrm{T}_{\varphi,f} : \mathfrak{M}_\mathrm{R} \to \mathfrak{M}_\mathrm{R}$$

dir.

(4.14) eşitsizliğinde her iki tarafın karesi alınarak düzenlenirse

$$m\mathrm{G} \leq \frac{\pi(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2}{4\mathrm{K_R}^2}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki Lemma elde edilmiş oldu:

Lemma 4.3

Eğer,

$$m\mathrm{G} \leq \frac{\pi(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2}{4\mathrm{K_R}^2}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $m\mathrm{G}$ seçilirse $\mathrm{T}_{\varphi,f}$ operatörü $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ kümesini yine kendi içine dönüştürür.

(4.1) denkleminin çözümünün varlığını araştırmak için en son gerçekleştirilmesi gereken (Banach Sabit Nokta Teoreminin hipotezi olan) $\mathrm{T}_{\varphi,f}$ operatörünün daralma dönüşümü olduğunu göstermektir.

O halde

$$\mathrm{T}_{\varphi,f} : \mathfrak{M}_\mathrm{R} \to \mathfrak{M}_\mathrm{R}$$

$$w \to \mathrm{T}_{\varphi,f}\, w = W = (W_1, \dots, W_m)$$

$$= \left(\varphi_1(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_1\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta, \dots , \varphi_m(z) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_m\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \right)$$

şeklinde verilen operatörün hangi koşullar altında daralma dönüşümü olduğunu araştıralım.

$$W = \mathrm{T}_{\varphi,f}\, w, \;\; \widetilde{W} = \mathrm{T}_{\varphi,f}\, \widetilde{w} \qquad \big(W, \widetilde{W} \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}\big)$$

elemanlarını göz önüne alalım. Burada

$\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, \dots, \widetilde{w}_m)$, $\quad \widetilde{W} = \big(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_2, \dots, \widetilde{W}_m\big)$ dir.

$W_j(z) - \widetilde{W}_j(z) =$

$$- \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big) - f_j\big(\zeta, \widetilde{w}_1(\zeta), \dots, \widetilde{w}_m(\zeta)\big)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

ifadesinin payı için (4.7) den

$$\left| f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big) - f_j\big(\zeta, \widetilde{w}_1(\zeta), \dots, \widetilde{w}_m(\zeta)\big) \right| \le \mathrm{L_R} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \left| w_j - \widetilde{w}_j \right|$$

$$\le \mathrm{mL_R} \left\| w_j - \widetilde{w}_j \right\|_\lambda$$

yazılabilir. Bu bağıntı ve Schmidt eşitsizliğinin göz önüne alınmasıyla

$\left| W_j(z) - \widetilde{W}_j(z) \right| =$

$$\left| - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big) - f_j\big(\zeta, \widetilde{w}_1(\zeta), \dots, \widetilde{w}_m(\zeta)\big)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \right|$$

$$\le \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\left| f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big) - f_j\big(\zeta, \widetilde{w}_1(\zeta), \dots, \widetilde{w}_m(\zeta)\big) \right|}{|\zeta - z|} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$$< \mathrm{mL_R} \left\| w_j - \widetilde{w}_j \right\|_\lambda \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta}{|\zeta - z|}$$

$$< \mathrm{mL_R} \left\| w_j - \widetilde{w}_j \right\|_\lambda \frac{1}{\pi} \sqrt{4\pi m \mathrm{G}}$$

$$< \mathrm{mL_R} \left\| w_j - \widetilde{w}_j \right\|_\lambda \frac{2\sqrt{m\mathrm{G}}}{\sqrt{\pi}}$$

$$< \frac{2\mathrm{m}}{\sqrt{\pi}} \mathrm{L_R} \sqrt{m\mathrm{G}} \left\| w_j - \widetilde{w}_j \right\|_\lambda$$

elde edilir.

Böylece

$$\left\| W - \widetilde{W} \right\|_\lambda = \max\left[\sup_{\mathrm{G}} \left| W_j(z) - \widetilde{W}_j(z) \right|, \ \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{\left| \left[W_j(z_2) - \widetilde{W}_j(z_2) \right] - \left[W_j(z_1) - \widetilde{W}_j(z_1) \right] \right|}{|z_2 - z_1|^\lambda} \right]$$

$$\leq \frac{2\mathrm{m}}{\sqrt{\pi}} \mathrm{L_R} \sqrt{m\mathrm{G}} \left\| w_j - \widetilde{w}_j \right\|_\lambda$$

yazılabilir. O halde aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 4.4.

$$m\mathrm{G} < \frac{\pi}{4m^2 \mathrm{L_R}^2} \ , \quad \left(\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \mathrm{L_R} \sqrt{m\mathrm{G}} < 1 \right)$$

seçilirse, $\mathrm{T}_{\varphi,f} : \mathfrak{M}_\mathrm{R} \rightarrow \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ dönüşümü daralma olur.

Sonuç olarak,

$$m\mathrm{G} < \frac{\pi(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2}{4\mathrm{K_R}^2} \ , \quad \left(\mathrm{K_R} = \sup_{\mathrm{G}} \left| f_j \right| \right)$$

seçilirse $\mathrm{T}_{\varphi,f}$ operatörü $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$' yi kendi içine dönüştürür.

$$m\mathrm{G} < \frac{\pi}{4m^2 \mathrm{L_R}^2}$$

($\mathrm{L_R}$, f_j lere ait Lipschitz sabitlerinin maksimumu, daralma için)

eşitsizlikleri aynı anda sağlandığında $\mathrm{T}_{\varphi,f}$ operatörü $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sınıfını kendi içine dönüştürür ve $\mathrm{T}_{\varphi,f}$ bir daralma dönüşümü olur.

$$\mathrm{K} = min\left(\frac{\pi(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2}{4\mathrm{K_R}^2}, \ \frac{\pi}{4m^2 \mathrm{L_R}^2} \right)$$

dersek $m\mathrm{G} < \mathrm{K}$ olduğunda

$$\mathrm{T}_{\varphi,f} : \mathfrak{M}_\mathrm{R} \rightarrow \mathfrak{M}_\mathrm{R}$$

bir daralma dönüşümü olur.

O halde Banach Sabit Nokta Teoremine göre

$$\mathrm{T}_{\varphi,f}\, w = w$$

olacak şekilde bir tek $w \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ elemanı vardır. Bu durumda $W = w$ için

$$W_j(z) = \varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

sağlanır. Böylece $W(z)$ gösterimi ile

$$w_j(z) = \varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

ifadesi özdeş olarak aynı olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.5.

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ G de holomorf, $\overline{\mathrm{G}}$' da sürekli olsun. Eğer G bölgesinin $m\mathrm{G}$ ölçüsü

$$m\mathrm{G} < \frac{\pi(\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2}{4{\mathrm{K}_{\mathrm{R}}}^2}, \quad \Big(\mathrm{K}_{\mathrm{R}} = \sup_{\mathrm{G}}\big|f_j\big|\Big)$$

($\mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$' yi kendi içine dönüştürme için)

$$m\mathrm{G} < \frac{\pi}{4m^2{\mathrm{L}_{\mathrm{R}}}^2}$$

(L_{R} , f_j lere ilişkin Lipschitz sabitlerinin maksimumu, daralma için)

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde küçük seçilirse

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = f_j(z, w_1(z), \dots, w_m(z)), \qquad j = 1,2, \dots, m$$

kompleks kısmi türevli denklem sisteminin dolayısıyla

$$w_j(z) = \varphi_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

integral denklem sisteminin bir tek $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ çözümü vardır.

5. BİR KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM SİSTEMİ İÇİN SCHWARZ PROBLEMİ

$\mathrm{G} \subset \mathbb{C}$ basit irtibatlı, düzgün sınıra sahip bir bölge olmak üzere G de

$$\frac{\partial w_j}{\partial \bar{z}} = \mathrm{F}_j(z, w_1, \dots, w_m), \ \ j = 1, 2, \dots, m, \quad z \in \mathrm{G} \tag{5.1}$$

$$Rew_j\big|_{\partial \mathrm{G}} = \varphi_j, \qquad Imw_j(z_0) = c_j,$$

$$z_0 \in \overline{\mathrm{G}}, \ \ \varphi_j \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}}, \mathbb{R}), \ \ 0 < \lambda < 1 \tag{5.2}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada c_j reel sabitler ve $\mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}}, \mathbb{R})$, $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G} \cup \partial\mathrm{G}$ üzerinde Hölder-sürekli fonksiyonların sınıfıdır.

(5.1) sistemindeki F_j fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağladığını varsayalım:

a) $z \in \overline{\mathrm{G}}$ olmak üzere F_j ler $m+1$ tane z, $w_1, \dots$, w_m değişkenlerine göre sürekli ve her w_j için

$$\left|w_j(z)\right| \leq \mathrm{R}, \ \ \left|\mathrm{F}_j\right| \leq \mathrm{K_R} \tag{5.3}$$

olacak şekilde R ve $\mathrm{K_R}$ sabitleri mevcut olsun.

b) $\left|w_j(z)\right| \leq \mathrm{R}$, $\left|w_j^*(z)\right| \leq \mathrm{R}$ ve her $z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{G}}$ için ($z_2 \neq z_1$) $\mathrm{F_j}$ ler

$$\left|\mathrm{F}_j(z_2, w_1, \dots, w_m) - \mathrm{F}_j(z_1, w_1^*, \dots, w_m^*)\right| \leq \mathrm{L_R}\left(|z_2 - z_1|^\lambda + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \left|w_j - w_j^*\right|\right) \tag{5.4}$$

düzgün Lipschitz koşulunu sağlasın. Burada $\mathrm{L_R}$ alışılmış Lipschitz sabitlerinin maksimumudur.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m), \quad \boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_m),\\
&\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_m) = (u_1 + iv_1, \dots, u_m + iv_m)\\
&\quad = (u_1, \dots, u_m) + i(v_1, \dots, v_m)\\
&\quad = \mathbf{U} + i\mathbf{V}
\end{aligned}$$

olmak üzere (5.1) ve (5.2) sınır-değer problemi

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \bar{z}} = \mathbf{F}(\mathrm{z}, \mathbf{W}), \ \ z \in \mathrm{G}, \ \ \mathbf{W} = (w_1, \dots, w_m), \ \ \mathbf{F} = (\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F_m})$$

$$\mathbf{U}\big|_{\partial\mathrm{G}} = \mathbf{\Phi}, \qquad \mathbf{V}(\mathrm{z}_0) = \boldsymbol{c}, \ \ z_0 \in \overline{\mathrm{G}} \tag{5.5}$$

şeklinde vektörel formda yazılabilir. (5.1) sisteminden

$$w_j(z) = f_j(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

$$= f_j(z) + \mathrm{T_G F}_j\big(z, w_1(z), \dots, w_m(z)\big) \qquad (5.6)$$

yazılabilir. Burada f_j ler G de keyfi holomorf fonksiyonlar ve

$$\mathrm{T_G F}_j\big(z, w_1(z), \dots, w_m(z)\big) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

dir.

Böylece (5.5) deki vektörel denklemden

$$\mathbf{W}(z) = \boldsymbol{f}(z) - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathbf{F}\big(\zeta, \boldsymbol{w}(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$= \boldsymbol{f}(z) + \mathrm{T_G}\mathbf{F}(\mathrm{z}, \boldsymbol{w}) \qquad (5.7)$$

vektörel çözümü, vektörel integral denklem formunda yazılabilir. Burada

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)$$

ve

$$\mathrm{T_G}\mathbf{F}(z, \mathbf{W}) = [\mathrm{T_G F}_1(z, w_1(z), \dots, w_m(z)), \dots, \mathrm{T_G F}_m(z, w_1(z), \dots, w_m(z))]$$

dir.

$\mathbf{W}$ vektörel fonksiyonunun $\partial\mathrm{G}$ sınırındaki davranışı ile $\boldsymbol{f}$ keyfi holomorf fonksiyonunun sınırdaki davranışı arasındaki bağıntıyı ortaya koymak için önce $\boldsymbol{f}$ fonksiyonunun, iki holomorf fonksiyonun toplamı şeklinde yani,

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{f}_w$$

yazılabildiğini kabul edelim. $\boldsymbol{\psi}$ ve $\boldsymbol{f}_w$ holomorf fonksiyonlarının sırasıyla

$$Re\mathbf{W}\big|_{\partial\mathrm{G}} = \mathbf{U}\big|_{\partial\mathrm{G}} = Re\boldsymbol{\psi}\big|_{\partial\mathrm{G}} = \mathbf{\Phi}, \qquad Im\mathbf{W}(z_0) = Im\boldsymbol{\psi}(z_0) \qquad (5.8)$$

$$Re\boldsymbol{f}_w\big|_{\partial\mathrm{G}} = -Re\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\big|_{\partial\mathrm{G}}, \quad Im\boldsymbol{f}_w(z_0) = -Im\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})(z_0) \qquad (5.9)$$

koşullarını sağladığını varsayalım. Böylece (5.7) nin çözümü

$$\mathbf{W}(z) = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{f}_w + \mathrm{T_G}\mathbf{F}(z, \mathbf{W}) \qquad (5.10)$$

şekline gelir.

Lemma 5.1.

Eğer (5.10) daki $\boldsymbol{\psi}$ ve $\boldsymbol{f}_w$ holomorf fonksiyonları (5.8) ve (5.9) sınır koşullarını sağlarsa bu takdirde (5.10) ile tanımlanan $\mathbf{W}$ fonksiyonu (5.5) Schwarz probleminin çözümü olur.

Şimdi

$$\boldsymbol{\mathfrak{R}} = \{\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_m) :\ w_j \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})\}$$

sınıfını tanımlayalım. Bu sınıftaki bir normu

$$\|\mathbf{W}\|_\lambda = \max_{\mathrm{j}} \|w_j\|_\lambda\ , \quad j = 1, 2, \dots, m \qquad (5.11)$$

$$= \max_{\mathrm{j}} \left\{ \max \left[\sup_{\mathrm{G}} |w_j(z)|\,,\ \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|w_j(z_2) - w_j(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\lambda} \right] \right\}$$

şeklinde verebiliriz.

Bu norma göre $\boldsymbol{\mathfrak{R}}$ sınıfı bir Banach uzayıdır.

$\mathfrak{R}$ sınıfının bir alt sınıfı olan

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{R}} = \{\mathbf{W} = (w_1, \dots, w_m) \in \boldsymbol{\mathfrak{R}} :\ \|\mathbf{W}\|_\lambda \le \mathrm{R}, 0 \le \mathrm{R} < \infty\} \subset \boldsymbol{\mathfrak{R}} \qquad (5.12)$$

sınıfını göz önüne alalım. Eğer $\mathbf{W} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ ise $\mathrm{F}_j(z, w_1(z), \dots, w_m(z))$ fonksiyonu $\overline{\mathrm{G}}$ da tanımlı bir fonksiyon olur. Bu şekilde $\overline{\mathrm{G}}$ da tanımlı bileşke fonksiyonların sınıfını $\mathrm{F}_j(.,\boldsymbol{w})$ ile gösterelim.

Lemma 5.2.

Eğer $\mathbf{W} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ ise (5.4) koşulu altında $\mathrm{F}_j(.,\mathbf{W}) \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ dır.

İspat:

$\mathbf{W} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{R}}$ olsun. Bu takdirde $w_j \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ olup buradan her $z_1, z_2 \in \overline{\mathrm{G}}$ için

$$|w_j(z_2) - w_j(z_1)| \le \|w_j\|_\lambda |z_2 - z_1|^\lambda$$

yazılabilir. (3.16 dan)

(5.4) koşulunun göz önüne alınmasıyla

$$|\mathrm{F}_j(z_2, \mathbf{W}(z_2)) - \mathrm{F}_j(z_1, \mathbf{W}(z_1))| \le \mathrm{L_R} \left(|z_2 - z_1|^\lambda + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} |w_j(z_2) - w_j^*(z_1)| \right)$$

$$\leq \mathrm{L_R}\left(|z_2 - z_1|^{\lambda} + \sum_{j=1}^{m} \|w_j\|_{\lambda} |z_2 - z_1|^{\lambda}\right)$$
$$= \mathrm{L_R}\left(1 + \sum_{j=1}^{m} \|w_j\|_{\lambda}\right) |z_2 - z_1|^{\lambda}$$

olur. Bu da $\mathrm{F}_j(.,\mathbf{W}) \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sınıfı (5.11) normuna göre kapalıdır. (Lemma 4.2)

(5.4) koşulunun yanında ilave olarak $\mathbf{F} = (\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_\mathrm{m})$ fonksiyonunun her $\mathbf{W}, \widetilde{\mathbf{W}} \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ için

$$\left\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) - \mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right\|_{\lambda} \leq \mathrm{L}_1 \left\|\mathbf{W} - \widetilde{\mathbf{W}}\right\|_{\lambda} \tag{5.13}$$

Hölder-Lipschitz koşulunu sağladığını varsayalım. Buna ek olarak

$$\|\mathbf{F}(.,\mathbf{0})\|_{\lambda} = \mathrm{M} \tag{5.14}$$

diyelim. Burada $\mathbf{0}$ vektörel sıfırdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_{\lambda} &\leq \|\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) - \mathbf{F}(.,\mathbf{0})\|_{\lambda} + \|\mathbf{F}(.,\mathbf{0})\|_{\lambda} \\ &\leq \mathrm{L}_1\|\mathbf{W} - \mathbf{0}\|_{\lambda} + \mathrm{M} \\ &= \mathrm{L}_1\|\mathbf{W}\|_{\lambda} + \mathrm{M}\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece eğer $\mathbf{W} \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ ise

$$\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_{\lambda} \leq \mathrm{L}_1\|\mathbf{W}\|_{\lambda} + \mathrm{M} \leq \mathrm{L}_1\mathrm{R} + \mathrm{M} \tag{5.15}$$

olur. Teorem 3.16 dan $\mathrm{T_G}: \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}}) \to \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ olduğu bilinmektedir. $\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ olduğundan $\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ dır.

$\boldsymbol{f}_w$ holomorf fonksiyonu için (5.9) sınır koşullarının sağlandığını varsayalım. Eğer $\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ ise bu takdirde

$$\|\boldsymbol{f}_w\|_{\lambda} \leq \mathrm{K}_1(\lambda)\|\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_{\lambda} \tag{5.16}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

Bu Lemmanın ispatı için [2] kaynağına bakılabilir.

$\boldsymbol{\psi}$ holomorf fonksiyonu için (5.8) sınır koşulları sağlanırsa ve bu koşuldaki $\boldsymbol{\Phi}$ fonksiyonu $\partial \mathrm{G}$ sınırında $\mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ sınıfına aitse bu takdirde

$$\boldsymbol{\psi} \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$$

olur.

Bu durumda önceden verilen her $\boldsymbol{\Phi}$ ve $\boldsymbol{c}$ için

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_\lambda \leq \mathrm{K}_2 \tag{5.17}$$

olacak şekilde K_2 sabiti bulunabilir. Böylece ortaya konan hipotezler altında (5.10) daki $\boldsymbol{\psi}$ ve $\boldsymbol{f}_w$ fonksiyonları $\mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ sınıfına ait olur.

Şimdi

$$\mathrm{T}: \mathfrak{M}_\mathrm{R} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$w \rightarrow \boldsymbol{W} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{f}_w + \mathrm{T_G}\mathbf{F}(z, \mathbf{W})$$

operatörünü tanımlayalım.

$\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{f}_w, \mathrm{T_G}\mathbf{F}(z, \mathbf{W}) \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\boldsymbol{W} \in \mathrm{C}_\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ dır.

(5.13), (5.14) ve (5.15) in göz önüne alınmasıyla

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{W}\|_\lambda &\leq \|\boldsymbol{\psi}\|_\lambda + \|\boldsymbol{f}_w\|_\lambda + \|\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_\lambda \\
&\leq \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_1(\lambda)\|\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_\lambda + \|\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_\lambda \\
&= \mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_\lambda \\
&\leq \mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W})\|_\lambda \\
&\leq \mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|(\mathrm{L}_1\mathrm{R} + \mathrm{M})
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Böylece aşağıdaki lemmayı verebiliriz:

Lemma 5.3.

Eğer

$$\mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|(\mathrm{L}_1\mathrm{R} + \mathrm{M}) \leq \mathrm{R} \tag{5.18}$$

eşitsizliği sağlanırsa ($\|\boldsymbol{W}\|_\lambda \leq \mathrm{R}$ olur) T operatörü $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sınıfını yine kendi içine dönüştürür. (5.18) eşitsizliğinden

$$\mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{L}_1\mathrm{R} + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{M} \leq \mathrm{R}$$

$$(\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{L}_1\mathrm{R} - \mathrm{R} \leq -\mathrm{K}_2 - (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{M}$$

$$\mathrm{R}[(\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{L}_1 - 1] \leq -[\mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{M}]$$

$$\mathrm{R} \leq \frac{-[\mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\|\mathrm{M}]}{[(\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\|\mathrm{L}_1 - 1]}$$

$$\mathrm{R} \leq \frac{\mathrm{K}_2 + (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\|\mathrm{M}}{1 - (\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\|\mathrm{L}_1}$$

elde edilir.

Buradan ise $(\mathrm{K}_1(\lambda) + 1)\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\|\mathrm{L}_1 < 1$ olması gerektiği açıktır.

(5.18) koşulunun gerçeklendiğini varsayalım. Bu takdirde T operatörü

$$\mathrm{T}: \mathfrak{M}_\mathrm{R} \to \mathfrak{M}_\mathrm{R}$$

$$w \to \boldsymbol{W} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{f}_w + \mathrm{T}_\mathrm{G}\mathbf{F}(z, \mathbf{W})$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi T operatörünün hangi koşullar altında daralma operatörü olduğunu gösterelim.

$\boldsymbol{W} \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ elemanından başka bir $\widetilde{\boldsymbol{W}} \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ elemanını göz önüne alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W} - \widetilde{\boldsymbol{W}} &= \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{f}_w + \mathrm{T}_\mathrm{G}\mathbf{F}(z, \mathbf{W}) - \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{f}_{\widetilde{w}} - \mathrm{T}_\mathrm{G}\mathbf{F}(z, \widetilde{\mathbf{W}}) \\ &= \boldsymbol{f}_w - \boldsymbol{f}_{\widetilde{w}} + \mathrm{T}_\mathrm{G}\left[\mathbf{F}(z, \mathbf{W}) - \mathbf{F}(z, \widetilde{\mathbf{W}})\right] \end{aligned} \tag{5.19}$$

yazılabilir.

Burada $\widetilde{\boldsymbol{W}} \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ için $\widetilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{f}_{\widetilde{w}} + \mathrm{T}_\mathrm{G}\mathbf{F}(z, \widetilde{\mathbf{W}})$ dır.

Diğer taraftan $\boldsymbol{f}_w - \boldsymbol{f}_{\widetilde{w}}$ holomorf fonksiyonu için

$$\begin{aligned} Re[\boldsymbol{f}_w - \boldsymbol{f}_{\widetilde{w}}]\big|_{\partial \mathrm{G}} &= -Re\left[\mathrm{T}_\mathrm{G}\mathbf{F}(z, \mathbf{W}) - \mathbf{F}(z, \widetilde{\mathbf{W}})\right]\big|_{\partial \mathrm{G}} \\ Im[\boldsymbol{f}_w - \boldsymbol{f}_{\widetilde{w}}](z_0) &= -Im\left[\mathrm{T}_\mathrm{G}\left(\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) - \mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right)\right](z_0) \end{aligned} \tag{5.20}$$

sınır koşulları sağlanır. (5.19) koşullarını sağlayan holomorf fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{f}_w - \boldsymbol{f}_{\widetilde{w}}\|_\lambda &\leq \mathrm{K}_1(\lambda)\left\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\left(\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) - \mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right)\right\|_\lambda \\ &\leq \mathrm{K}_1(\lambda)\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\|\left\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W}) - \mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right\|_\lambda \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Böylece (5.15) in göz önüne alınmasıyla

$$\left\|\boldsymbol{W}-\widetilde{\boldsymbol{W}}\right\|_{\lambda} \leq \|\boldsymbol{f}_{w}-\boldsymbol{f}_{\widetilde{w}}\|_{\lambda}+\left\|\mathrm{T_G}\left(\mathbf{F}(.,\mathbf{W})-\mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right)\right\|_{\lambda}$$
$$\leq \mathrm{K_1}(\lambda)\|\mathrm{T_G}\|\left\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W})-\mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right\|_{\lambda}$$
$$+\|\mathrm{T_G}\|\left\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W})-\mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right\|_{\lambda}$$
$$=[\mathrm{K_1}(\lambda)+1]\|\mathrm{T_G}\|\left\|\mathbf{F}(.,\mathbf{W})-\mathbf{F}(.,\widetilde{\mathbf{W}})\right\|_{\lambda}$$
$$\leq [\mathrm{K_1}(\lambda)+1]\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{L_1}\left\|\boldsymbol{W}-\widetilde{\boldsymbol{W}}\right\|_{\lambda} \qquad (5.21)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafı $\|\mathrm{T_G}w-\mathrm{T_G}\widetilde{w}\|_{\lambda}$ dir.

Sonuç olarak, eğer

$$(\mathrm{K_1}(\lambda)+1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{L_1}<1 \qquad (5.22)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathrm{T}:\mathfrak{M}_\mathrm{R}\to\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ operatörü bir daralma dönüşümüdür. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.4.

(5.18) eşitsizliğinin yani,

$$\mathrm{K_2}+(\mathrm{K_1}(\lambda)+1)\|\mathrm{T_G}\|(\mathrm{L_1R+M})\leq \mathrm{R}$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Burada $\mathrm{R},\mathrm{L_1},\mathrm{M},\mathrm{K_1}(\lambda),\mathrm{K_2}$ pozitif reel sabitleri sırasıyla (5.12), (5.13), (5.14), (5.16) ve (5.17) deki gibidir. Bu takdirde T operatörü $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sınıfını kendi içine dönüştürür ve

$$\mathrm{T}:\mathfrak{M}_\mathrm{R}\to\mathfrak{M}_\mathrm{R}$$
$$w\to\boldsymbol{W}=\mathrm{T_G}w=\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{f}_w+\mathrm{T_G}\mathbf{F}(.,\mathbf{W})$$

dönüşümü bir daralma dönüşümdür.

İspat:

(5.18) eşitsizliğinin sağlanması durumunda $\mathrm{T}:\mathfrak{M}_\mathrm{R}\to\mathfrak{R}$ operatörü $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sınıfını yine kendi içine dönüştürür.

Şimdi, (5.18) eşitsizliğinin sağlanması durumunda (5.22) daralma koşulunun sağlandığını gösterelim. (5.18) eşitsizliğinden

$$\mathrm{R}\leq\frac{\mathrm{K_2}+(\mathrm{K_1}(\lambda)+1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{M}}{1-(\mathrm{K_1}(\lambda)+1)\|\mathrm{T_G}\|\mathrm{L_1}}$$

yazılabilir.

R pozitif olduğundan $(\mathrm{K}_1(\lambda)+1)\|\mathrm{T}_\mathrm{G}\|\mathrm{L}_1 < 1$ elde edilir. Bu ise (5.22) eşitsizliğidir. O halde (5.18) in sağlanması T nin daralma dönüşümü olmasını gerektirir.

Sonuç olarak,
(5.11) normuna göre $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sınıfı bir Banach uzayıdır. (5.18) eşitsizliğinin sağlanması durumunda $\mathrm{T}: \mathfrak{M}_\mathrm{R} \to \mathfrak{R}$ operatörü $\mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sınıfını kendi içine dönüştürür. (5.18) eşitsizliği sağlanırsa aynı zamanda (5.22) eşitsizliği de gerçeklenir. Bu eşitsizlik ise T nin daralma operatörü olduğunu gösterir.

Böylece Banach Sabit Nokta Teoremine göre $\mathrm{T}: \mathfrak{M}_\mathrm{R} \to \mathfrak{M}_\mathrm{R}$, operatörünün $\mathrm{T}_\mathrm{G}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}$ şeklinde bir tek $\boldsymbol{w} \in \mathfrak{M}_\mathrm{R}$ sabit noktası vardır. Bu $\boldsymbol{w}$ sabit noktası (5.5) sınır değer probleminin çözümüdür.

Böylece $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ çözümünün bileşenleri için (5.1) sistemi ve (5.2) koşulları sağlanır. Dolayısıyla (5.1) sisteminin (5.2) koşullarını sağlayan çözümü var ve tekdir.

6. BİR KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM SİSTEMİNİN SCHAUDER SABİT NOKTA TEOREMİ YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

(4.1) sisteminin çözümü için,

$$w_j(z) = \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{f_j\big(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\big)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

integral denklem sisteminin (4.6) çözümünün varlığı Dördüncü Bölümde Banach Sabit Nokta Teoremi yardımı ile ortaya kondu. Bu bölümde ise (4.6) integral denklem sisteminin çözümünün varlığını görmek için Schauder Sabit Nokta Teoremini kullanacağız.

Teorem 6.1. (Schauder Sabit Nokta Teoremi)
X Banach uzayı olmak üzere K, X in kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $\mathrm{T}: \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ operatörü sürekli ve kompakt olsun. Bu takdirde $\mathrm{T}x = x$ olacak şekilde en az bir $x \in \mathrm{K}$ vardır.

Schauder Sabit Nokta Teoremini kullanabilmek için (4.6) integral denklem sisteminin çözümlerinin içinde bulunduğu bir Banach uzayı oluşturmamız gerekmektedir.

$w_j = w_j(z)$, $\overline{\mathrm{G}}$ da tanımlı sürekli, kompleks değerli fonksiyonlar olmak üzere $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ vektör değerli fonksiyonların sınıfını $\mathfrak{R}$ ile gösterelim. (3.14) den $\mathfrak{R}$ nin Banach uzayı olduğu açıktır.

G de holomorf, $\overline{\mathrm{G}}$ da sürekli Φ fonksiyonlarının sınıfını

$$\mathcal{H} = \{\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_\mathrm{m}) : \ \Phi_1, \dots, \Phi_\mathrm{m} \ \mathrm{G} \text{ de holomorf}, \overline{\mathrm{G}} \text{ da sürekli}\}$$

ile, diğer yandan diferensiyel denklem sisteminin $\overline{\mathrm{G}}$ da sürekli w çözümlerinin sınıfını da

$$\mathcal{W} = \{w = (w_1, \dots, w_m) : w_1, \dots, w_m \ \overline{\mathrm{G}} \text{ da sürekli}\}$$

ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{W}$, $\mathfrak{R}$ sınıfının alt kümeleri olur. Yani

$\mathcal{H} \subset \mathfrak{R}$ ve $\mathcal{W} \subset \mathfrak{R}$

dir. Çünkü

$$\mathfrak{R} = \{w = (w_1, \ldots, w_m) : w_1, \ldots, w_m \ \overline{\mathrm{G}} \text{ da sürekli} \}$$

olup diğer yandan

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = h$$

homojen olmayan Cauchy-Riemann diferensiyel denkleminin çözümlerinin,

$$w = w_0 + \Phi$$

formunda olduğunu biliyoruz. Burada Φ analitik fonksiyon.

Şimdi bu çözümü

$$\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{W}$$

$$\Phi \to \Lambda\Phi = w = \Phi + \mathrm{T_G F}(z, w, h)$$

şeklinde tanımlanan bir operatör yardımı ile

$$\mathrm{w} = \Lambda\Phi$$

biçiminde olduğunu göstereceğiz.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, h) \quad , \quad h = w_z$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümünün varlığını Schauder sabit nokta teoremini kullanarak göstermek için önce

$$\|w\|_{0,\alpha} = \max_{\mathrm{j}} \left[\sup_{\mathrm{G}} |w_j| , \ \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|w_j(z_2) - w_j(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right]$$

$$\|(w, h)\|_{0,\alpha} = \max \left(\|w\|_{0,\alpha} , \|h\|_{0,\alpha} \right)$$

normlarını göz önüne alalım. Ayrıca

I) $\left|\mathrm{F_j}(z, w, h)\right| \leq \mathrm{M}$

II) $\left|\mathrm{F_j}(z_2, w, h) - \mathrm{F_j}(z_1, w, h)\right| \leq \ell |z_2 - z_1|^\alpha$

III) $\mathrm{d}^{(0,\alpha)}\left[\mathrm{F}(z, w, h), \mathrm{F}\left(z, \widetilde{w}, \tilde{h}\right)\right] \leq \mathrm{Ld}^{(0,\alpha)}\left[(w, h), \left(\widetilde{w}, \tilde{h}\right)\right]$

olduğunu kabul edeceğiz. Burada F_j ler skaler fonksiyonlardır.

Diğer yandan

$$\mathcal{K} = \left\{ (w, h) \in \mathrm{C}^{(0,\alpha)}(\overline{\mathrm{G}}) : \ \mathrm{d}^{(0,\alpha)}[(w, h), (\Phi, \Phi')] \leq \mathrm{R} \right\}$$

$\mathcal{K} \subset \Re$ sınıfını tanımlarsak, ileride bu kapalı sınıfı yine kendi içine dönüştürecek bir dönüşüm olduğunu ve bu dönüşümün sürekli ve kompakt olduğunu göstereceğiz. Böylelikle Schauder prensibi gerçekleşmiş olacaktır.

(II) koşulundan yararlanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{F_j}\big(z_2, w(z_2), h(z_2)\big) - \mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_1), h(z_1)\big)\right| \\
&\quad \le \left|\mathrm{F_j}\big(z_2, w(z_2), h(z_2)\big) - \mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_2), h(z_2)\big)\right| \\
&\qquad + \left|\mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_2), h(z_2)\big) - \mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_1), h(z_1)\big)\right| \\
&\quad \le \ell |z_2 - z_1|^{\alpha} + \left|\mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_2), h(z_2)\big) - \mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_1), h(z_1)\big)\right| \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$(w, h) = \big(w(z_2), h(z_2)\big)$$

$$\big(\tilde{w}, \tilde{h}\big) = \big(w(z_1), h(z_1)\big)$$

olmak üzere

$$\mathrm{d}^{(0,\alpha)}\big[(w,h), (\tilde{w}, \tilde{h})\big] = \max_{\mathrm{j}}\big(\left|w_j(z_2) - w_j(z_1)\right|, \left|h_j(z_2) - h_j(z_1)\right|\big)$$

yazılabilir.

(III) koşulundan yararlanarak,

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_2), h(z_2)\big) - \mathrm{F_j}\big(z_1, w(z_1), h(z_1)\big)\right| \\
&\le \mathrm{L}\max\big(\left|w_j(z_2) - w_j(z_1)\right|, \left|h_j(z_2) - h_j(z_1)\right|\big)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(w, h) \in \mathrm{C}^{(0,\alpha)}(\overline{\mathrm{G}})$ olduğundan

$$\left|w_j(z_2) - w_j(z_1)\right| \le \|w\|_{0,\alpha} |z_2 - z_1|^{\alpha}$$

$$\left|h_j(z_2) - h_j(z_1)\right| \le \|h\|_{0,\alpha} |z_2 - z_1|^{\alpha}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Böylece (6.1) nin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}\max\big(\|w\|_{0,\alpha} |z_2 - z_1|^{\alpha}, \|h\|_{0,\alpha} |z_2 - z_1|^{\alpha}\big) \\
&= \mathrm{L}|z_2 - z_1|^{\alpha} \max\big(\|w\|_{0,\alpha}, \|h\|_{0,\alpha}\big) \\
&= \mathrm{L}\|(w,h)\|_{0,\alpha} |z_2 - z_1|^{\alpha}
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\|(w,h)\|_{0,\alpha} = \max\big(\|w\|_{0,\alpha}, \|h\|_{0,\alpha}\big)$$

$$\mathrm{d}^{(0,\alpha)}[(w,h), (\Phi, \Phi')] = \max(|w(z_2) - \Phi(z_1)|, |h(z_2) - \Phi'(z_1)|)$$

$$\|\Phi,\Phi'\|_{0,\alpha}=\max\left(\|\Phi\|_{0,\alpha},\|\Phi'\|_{0,\alpha}\right)$$

olmak üzere

$$\|(w,h)\|_{0,\alpha}\leq \mathrm{d}^{(0,\alpha)}[(w,h),(\Phi,\Phi')]+\|\Phi,\Phi'\|_{0,\alpha}$$

yazılır. Ayrıca $(w,h)\in\mathcal{K}$ olduğundan

$$\mathrm{d}^{(0,\alpha)}[(w,h),(\Phi,\Phi')]\leq \mathrm{R}$$

olup buradan

$$\|(w,h)\|_{0,\alpha}\leq \mathrm{R}+\|\Phi,\Phi'\|_{0,\alpha}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\|(w,h)\|_{0,\alpha}\leq \mathrm{R}+\|\Phi\|_{1,\alpha}$$

yazılabilir.

Elde edilen bu değerler (6.1) de yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{F_j}\big(z_1,w(z_2),h(z_2)\big)-\mathrm{F_j}\big(z_1,w(z_1),h(z_1)\big)\right|\\
&\quad\leq \ell|z_2-z_1|^{\alpha}+\mathrm{L}\max\left(\left|w_j(z_2)-w_j(z_1)\right|,\left|h_j(z_2)-h_j(z_1)\right|\right)\\
&\quad< l|z_2-z_1|^{\alpha}+\mathrm{L}\|(w,h)\|_{0,\alpha}\\
&\quad< l|z_2-z_1|^{\alpha}+\mathrm{L}\big(\mathrm{R}+\|\Phi\|_{1,\alpha}\big)|z_2-z_1|^{\alpha}\\
&\quad=\big(\ell+\mathrm{LR}+\mathrm{L}\|\Phi\|_{1,\alpha}\big)|z_2-z_1|^{\alpha}
\end{aligned}\tag{6.2}$$

elde edilir. (6.2) den

$$\frac{\left|\mathrm{F_j}\big(z_1,w(z_2),h(z_2)\big)-\mathrm{F_j}\big(z_1,w(z_1),h(z_1)\big)\right|}{|z_2-z_1|^{\alpha}}\leq \ell+\mathrm{LR}+\mathrm{L}\|\Phi\|_{1,\alpha}$$

yazılır. (I) den

$$\left|\mathrm{F_j}(z,w,h)\right|\leq \mathrm{M}\ \text{ve}\ \sup\left|\mathrm{F_j}(z,w,h)\right|\leq \mathrm{M}$$

dir. (I) ve (6.2) ün birlikte kullanılması ile,

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{F}(z,w,h)\|_{0,\alpha}\\
&\quad=\max_{\mathrm{j}}\left[\sup_{\mathrm{G}}\left|\mathrm{F}_j\right|,\ \sup_{z_1\neq z_2}\frac{\left|\mathrm{F_j}\big(z_2,w(z_2),h(z_2)\big)-\mathrm{F_j}\big(z_1,w(z_1),h(z_1)\big)\right|}{|z_2-z_1|^{\alpha}}\right]
\end{aligned}$$

$$\|\mathrm{F}(z,w,h)\|_{0,\alpha}\leq \max\left(\mathrm{M},\ell+\mathrm{LR}+\mathrm{L}\|\Phi\|_{1,\alpha}\right)$$

eşitsizliği korunur.

Teorem 3.17. den her $(w,h)\in\mathcal{K}$ için

$$\|\mathrm{T_G F}(z,w,h)\|_{0,\alpha}\leq \|\mathrm{T_G F}(z,w,h)\|_{1,\alpha}\leq \mathrm{K_1}(\alpha)\max\left(\mathrm{M},\ell+\mathrm{LR}+\mathrm{L}\|\Phi\|_{1,\alpha}\right)$$

geçerlidir ve

$$\|\prod_G F(z,w,h)\|_{0,\alpha} \leq K_1(\alpha)\max\left(M, \ell + LR + L\|\Phi\|_{1,\alpha}\right)$$

elde edilir.

Şimdi bir T operatörü düşünelim.

$$T: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$$

$$w \to W = \Phi + T_G F(z,w,h)$$

$(w,h) \in \mathcal{K}$ olmak üzere, $(W,H) \in \mathcal{K}$ için

$$W = \Phi + T_G F(z,w,h)$$

$$H = \Phi' + \prod_G F(z,w,h)$$

yazılır. T dönüşümünün sabit noktasının ($\Phi \in \mathcal{H}$ sabit seçilmişti) daha sonra

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = F(z,w,w_z)$$

diferensiyel denkleminin çözümü olduğunu göreceğiz.

L Lipschitz sabitinin

$$L < \frac{1}{K_1(\alpha)}$$

şeklindeki eşitsizliğini sağladığını varsayalım.

$\Phi \in \mathcal{H}$ için

$$M \leq \ell + LR + L\|\Phi\|_{1,\alpha}$$

$$K_1(\alpha)\left(\ell + LR + L\|\Phi\|_{1,\alpha}\right) \leq R$$

olup böylece

$$\|\prod_G F(z,w,h)\|_{0,\alpha} \leq R$$

olması nedeniyle

$$\prod_G F(z,w,h) \in \mathcal{K}$$

bulunur.

O halde her $(w,h) \in \mathcal{K}$ için $\prod_G F(z,w,h) \in \mathcal{K}$ olduğundan $\mathcal{K}$ dan $\mathcal{K}$ ya gidecek şekilde bir T dönüşümü vardır.

(w_*, h_*) ikilisi, $C^{(0)}(\overline{G})$ uzayındaki metriğe göre $\mathcal{K}$ nın bir yığılma noktası olsun.

Böylece bu noktaya yakınsayacak şekilde $\mathcal{K}$ içinde bir $\left(w^{(n)}, h^{(n)}\right)$ dizisi seçebiliriz.

$$\left(w^{(n)}, h^{(n)}\right) \to (w_*, h_*)$$

olup buradan

$$\left(w^{(n)}\right) \to w_* \text{ ve } \left(h^{(n)}\right) \to h_*$$

dır.

$$\mathcal{K} = \left\{ (w, h) \in \mathrm{C}^{(0,\alpha)}(\overline{\mathrm{G}}) : \mathrm{d}^{(0,\alpha)}[(w, h), (\Phi, \Phi')] \leq \mathrm{R} \right\}$$

olması nedeniyle $\mathcal{K}$ tüm yığılma noktalarını kapsar. Ayrıca w', $w'' \in \mathcal{K}$ için

$$\mathrm{d}^{(0,\alpha)}[(w_1, h_1), (\Phi, \Phi')] \leq \mathrm{R}$$

ise

$$\max(|w_1 - \Phi|, |h_1 - \Phi'|) \leq \mathrm{R}$$

dir. Ayrıca

w', $w'' \in \mathcal{K}$ için

$$\|w' - \Phi\| \leq \mathrm{R} \text{ ve } \|w'' - \Phi\| \leq \mathrm{R}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
&\|\lambda w' + (1-\lambda)w'' - \Phi\| \\
&= \|\lambda(\mathrm{w}' - \Phi) + (1-\lambda)(w'' - \Phi)\| \\
&\leq \lambda\|\mathrm{w}' - \Phi\| + (1-\lambda)\|w'' - \Phi\| \\
&\leq \lambda\mathrm{R} + (1-\lambda)\mathrm{R} \\
&= \mathrm{R}
\end{aligned}$$

olur. O halde w', $w'' \in \mathcal{K}$ için

$$\lambda w' + (1-\lambda)w'' \in \mathcal{K}$$

olduğundan $\mathcal{K}$ konvekstir.

Şimdi konveksliğin bir başka tanımını verelim:

Tanım 6.2.

Eğer bir lineer uzaydaki bir kümenin elemanlarının ikişer ikişer birleştirilmesiyle oluşan doğru parçaları yine bu kümeye aitse bu kümeye konvekstir denir.

Böylece $\mathcal{K}$ nın kapalılığı ve konveks olduğu gösterilmiş oldu.

Şimdi T operatörünün sürekli ve kompakt olduğunu gösterelim.

$w, \widetilde{w} \in \mathcal{K}$ olmak üzere $W = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, w$, $\widetilde{W} = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, \widetilde{w}$ için Schmidt eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\left|W(z) - \widetilde{W}(z)\right| &= \frac{1}{\pi}\left|\iint_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}\big(\zeta, w(\zeta)\big) - \mathrm{F}\big(\zeta, \widetilde{w}(\zeta)\big)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\mathrm{L}\|w - \widetilde{w}\|\; 2\sqrt{\pi}\sqrt{m\mathrm{G}} \\
&= \frac{2\mathrm{L}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{m\mathrm{G}}\; d(w, \widetilde{w})
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
d\big(W, \widetilde{W}\big) = \big\|W - \widetilde{W}\big\| &= \sup_{\mathrm{G}}\left|W(z) - \widetilde{W}(z)\right| \\
&= \frac{2\mathrm{L}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{m\mathrm{G}}\; d(w, \widetilde{w})
\end{aligned}$$

olur.

Eğer $k \to \infty$ için $d\big(w^{(k)}, w\big) \to 0$ olacak şekilde bir $\big\{w^{(k)}\big\}_1^{\infty}$ dizisi oluşturulursa, bu sınırlandırmaya göre

$$W^{(k)} = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, w^{(k)}, \;\; W = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, w$$

görüntü elemanları için

$$d\big(W^{(k)}, W\big) \leq \frac{2\mathrm{L}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{m\mathrm{G}}\; d\big(w^{(k)}, w\big)$$

yazılabilir. $k \to \infty$ için

$$d\big(\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, w^{(k)}, \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, w\big) \to 0$$

olur. Bu ise $\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}$ operatörünün sürekli olduğunu gösterir.

Açıklama:

Eğer $h_k = h_k(z)$ fonksiyonları $\overline{\mathrm{G}}$ da tanımlı, sürekli ve $|h_k| \leq \mathrm{M}$ şeklinde düzgün sınırlı ise bu takdirde

$$H_k(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{G}} \frac{h_k(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

integrali de $\overline{\mathrm{G}}$ da düzgün sınırlı ve bütün noktalarda aynı dereceden süreklidir.

$|h_k| \leq \mathrm{M}$ olduğunda H_k ların tümü aynı zamanda sınırlı ise buna aynı dereceden süreklidir denir. Böylece aşağıdaki önerme geçerlidir:

Lemma 6.3.
$\{w^{(k)}\}_1^{\infty} \subset \mathcal{K}$ dizisi verilsin. Bu takdirde $\{\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, w^{(k_v)}\}_{v=1}^{\infty}$ görüntüleri yakınsak olan $\{w^{(k_v)}\}$ alt dizisi vardır.

İspat:
Bkz [1], sayfa 238.

$\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}$ operatörü $\mathfrak{R}$ sınıfının tamamında tanımlıdır. Aynı sonuç nedeniyle sınırlı bir dizinin (her k için $\|w^{(k)}\| \leq \mathrm{M}$) bir alt dizisi vardır ve bu dizinin $\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}$ operatörü altındaki görüntüsü de yakınsak olur. Diğer bir ifadeyle $\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}$ operatörü tamdır veya kompakttır.

(I) den $\forall z \in \overline{\mathrm{G}}$ ve her $k = 1,2,\ldots$ için

$$\left|\mathrm{F}\left(z, w^{(k)}\right)\right| \leq \mathrm{M}$$

olur. Diğer taraftan $W^{(k)} = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}\, w^{(k)}$ olması yani diğer bir ifade ile

$$W^{(k)} = \Phi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}\left(\zeta, w^{(k)}(\zeta)\right)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

olması nedeniyle $\{W^{(k)}\}_1^{\infty}$ dizisi düzgün sınırlı ve aynı dereceden süreklidir.

Arzela-Ascoli Teoreminden (Bkz [1], sayfa 432) $\{W^{(k)}\}_1^{\infty}$ dizisinin $\mathfrak{R}$ deki metriğe göre de düzgün yakınsak olan $\{W^{(k_v)}\}_{v=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır. Diğer taraftan $W^{(k_v)} = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}} w^{(k_v)}$ olmak üzere $\mathrm{T}_{\varphi,\mathrm{F}}$ operatörü $\{w^{(k_v)}\}_{v=1}^{\infty}$ yakınsak alt dizisini yine yakınsak $\{\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}} w^{(k_v)}\}_{v=1}^{\infty}$ alt dizisine dönüştürür.

$\mathcal{K}$ ve $\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}$ operatörünün ortaya konulan özellikleri nedeni ile Schauder sabit nokta teoremi kullanılabilir. Böylece $\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}$ operatörünün sabit noktası

$$w = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}} w$$

eşitliğini sağlar. Böylece w sabit noktası

$$w(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}\big(\zeta, w(\zeta)\big)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{6.3}$$

integral denkleminin çözümü olur ve Φ holomorf bir fonksiyon olması nedeniyle w, G bölgesinde

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mathrm{F}(z, w)$$

diferensiyel denklemini sağlar.

Böylece tespit edilen bir $\Phi(z)$ holomorf fonksiyonuna karşılık (6.3) integral denkleminin w çözümünün var olduğunu göstermiş olduk.

Diğer yandan, Λ operatörü üzerinde detaylı bilgi edinmek için, Φ holomorf fonksiyonunu ve w çözümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}} w = w$$

olmak üzere bir $\widetilde{\Phi}$ holomorf fonksiyonuna karşılık gelen başka bir $\widetilde{w}$ çözümü ele alınırsa

$$\mathrm{T}_{\widetilde{\Phi},\mathrm{F}} \widetilde{w} = \widetilde{w}$$

yazılabilir.

Bu denklem her bir bileşen içinde yazılabilir ve karşılıklı bileşenler için fark oluşturulursa

$$w_j(z) - \widetilde{w}_j(z) = \Phi_j(\mathrm{z}) - \widetilde{\Phi}_j(\mathrm{z}) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F_j}(\zeta, w_1, \dots w_m) - \mathrm{F_j}(\zeta, \widetilde{w}_1, \dots \widetilde{w}_m)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

elde edilir. Lipschitz koşulunun da göz önüne alınmasıyla buradan

$$\left| w_j(z) - \widetilde{w}_j(z) \right| \leq \left| \Phi_j(z) - \widetilde{\Phi}_j(z) \right| + \frac{\mathrm{L_R}}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \sum_{v=1}^{m} \frac{|w_v(\zeta) - \widetilde{w}_v(\zeta)|}{|\zeta - z|} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

yazılabilir. $\mathfrak{R}$ uzayındaki metrik tanımından

$$\left| \Phi_j(z) - \widetilde{\Phi}_j(z) \right| \leq d\big(\Phi - \widetilde{\Phi}\big)$$

$$|w_v(\zeta) - \widetilde{w}_v(\zeta)| \leq d(w - \widetilde{w})$$

yazılabilir. Böylece

$$\iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{d}_\xi \mathrm{d}_\eta}{|\zeta - z|} \leq \ 2\sqrt{\pi}\sqrt{m\mathrm{G}}$$

Schmidt eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\left|w_j(z) - \widetilde{w}_j(z)\right| \leq d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) + \frac{m\mathrm{L}}{\pi} d(w, \widetilde{w}) 2\sqrt{\pi}\sqrt{m\mathrm{G}}$$

bulunur.

$$\frac{2m\mathrm{L}\sqrt{m\mathrm{G}}}{\sqrt{\pi}} = \alpha$$

alınırsa

$$d(w - \widetilde{w}) = \max_{\mathrm{j}} \sup_{\mathrm{G}} \left|w_j - \widetilde{w}_j\right|$$
$$\leq d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) + \alpha d(w - \widetilde{w})$$

bulunur. Yani

$$d(w - \widetilde{w}) \leq d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) + \alpha d(w - \widetilde{w}) \tag{6.4}$$

yazılabilir.

Şimdi G nin $m\mathrm{G}$ ölçüsünü öyle belirleyelim ki integral operatörü daralma koşulunu sağlasın. Bu ise bize $\alpha \leq 1$ olması gerektiğini söyler.

w çözümünü belirleyen Φ veya $\widetilde{w}$ çözümünü belirleyen $\widetilde{\Phi}$ holomorf fonksiyonları

$$\mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}} w = w, \ \ \mathrm{T}_{\widetilde{\Phi},\mathrm{F}} \widetilde{w} = \widetilde{w}$$

denklemlerinden Φ veya $\widetilde{\Phi}$ ya göre çözüm yapılarak bunların bileşenleri

$$\Phi_j(z) = w_j(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}_j\left(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\right)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$$\widetilde{\Phi}_j(z) = \widetilde{w}_j(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}_j\left(\zeta, \widetilde{w}_1(\zeta), \dots, \widetilde{w}_m(\zeta)\right)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$(j = 1,2, \dots, m)$ şeklinde elde edilir.

Buradan,

$$\left|\Phi_j(z) - \widetilde{\Phi}_j(z)\right| \leq d(w - \widetilde{w}) + \frac{1}{\pi}\, m\mathrm{L}2\sqrt{\pi}\sqrt{m\mathrm{G}}$$

$$d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) \leq d(w, \widetilde{w})\left(1 + \frac{1}{\pi} m\mathrm{L}2\sqrt{\pi}\sqrt{m\mathrm{G}}\right)$$

$$= d(w, \widetilde{w})(1 + \alpha)$$

$$d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) \leq (1 + \alpha) d(w, \widetilde{w}) \tag{6.5}$$

bulunur.

$w = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}} w$ integral denkleminin Φ holomorf fonksiyonu yardımıyla oluşturulan w çözümünü

$$w = \Lambda\Phi$$

ve benzer şekilde

$\widetilde{w} = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}} \widetilde{w}$ integral denkleminin $\widetilde{w}$ çözümünü de

$$\widetilde{w} = \Lambda\widetilde{\Phi}$$

ile gösterilirse (6.4) den

$$d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) \leq d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) + \alpha d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right)$$

$$d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) - \alpha d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) \leq d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right)$$

$$(1 - \alpha) d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) \leq d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right)$$

$$d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) \leq \frac{d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right)}{1 - \alpha} \tag{6.6}$$

ve (6.5) dan

$$d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) \leq (1 + \alpha) d(w, \widetilde{w})$$

$$\frac{d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right)}{1 + \alpha} \leq d(w, \widetilde{w})$$

$$\frac{d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right)}{1 + \alpha} \leq d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) \tag{6.7}$$

olup bu değerler ve (6.6),(6.7) göz önüne alındığında

$$\frac{d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right)}{1 + \alpha} \leq d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) \leq \frac{d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right)}{1 - \alpha}$$

$$d\left(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}\right) \leq \frac{1}{1 - \alpha} d\left(\Phi, \widetilde{\Phi}\right) \tag{6.8}$$

(6.8) eşitsizliğinden Λ operatörünün sürekliliği elde edilmiş olur.

$\Phi_j^{(k)}$ lar $\overline{\mathrm{G}}$ da sürekli, G de holomorf fonksiyonlar olmak üzere $\left(\Phi^{(k)}\right)_1^\infty$ dizisini göz önüne alalım. Burada $\Phi^{(k)} = \left(\Phi_1^{(k)}, \dots, \Phi_m^{(k)}\right)$ dır.

$\left(\Phi^{(k)}\right)_1^\infty$ dizisinin $\mathfrak{R}$ uzayındaki metriğe göre $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ vektör fonksiyonuna yakınsadığını varsayalım. Bu durumda $\mathfrak{R}$ uzayındaki metriğe göre tam olduğundan $\Phi_j^{(k)}$ lar $k \to \infty$ için $\overline{\mathrm{G}}$ da Φ_j ye düzgün yakınsar. Yani

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_j^{(k)} = \Phi_j$$

yakınsaması düzgündür.

Fonksiyonlar teorisinde holomorf fonksiyonlar için Weierstrass yakınsaklık teoremine göre Φ_j limit fonksiyonları holomorf olmak zorundadır.

(A, $\mathbb{C}$ de bir bölge $(f_n)_1^\infty$ ise A üzerinde analitik olan f_n fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer A da bulunan her kapalı disk üzerinde $f_n \to f$ yakınsaması düzgün ise f, A da analitiktir.)

Şimdi $w^{(k)} = \Lambda\Phi^{(k)}$, $w = \Lambda\Phi$ olsun. Bu durumda (6.8) eşitsizliğinden

$$d\left(\Lambda\Phi^{(k)}, \Lambda\Phi\right) \leq \frac{1}{1-\alpha} d\left(\Phi^{(k)}, \Phi\right) \tag{6.9}$$

yazılabilir.

$k \to \infty$ için $\Phi^{(k)} \to \Phi$ olduğundan $k \to \infty$ için $d\left(\Phi^{(k)}, \Phi\right) \to 0$ olur.

O halde (6.9) dan $k \to \infty$ için $d\left(\Lambda\Phi^{(k)}, \Lambda\Phi\right) \to 0$ olup buradan

$$\Lambda\Phi^{(k)} = w^{(k)} \to \Lambda\Phi = w$$

elde edilir. Bunların sonucu olarak Λ dönüşümünün sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Λ dönüşümü tek anlamlıdır. Çünkü $\overline{\mathrm{G}}$ da sürekli verilen her $w = (w_1, \dots, w_m)$ çözümünde w_j ler

$$w_j(z) = \Phi_j(z) - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{F}_j\left(\zeta, w_1(\zeta), \dots, w_m(\zeta)\right)}{\zeta - z} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

integral denklem sistemini sağlar. Bu durumda her w çözümüne karşılık $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ holomorf fonksiyonu tek anlamlı olarak belirlenebilir.

Tek anlamlılık nedeni ile Λ operatörünün Λ^{-1} tersi vardır. Bu ters dönüşüm her w çözümüne $\Phi = \Lambda^{-1}w$ şeklinde bir holomorf fonksiyon karşılık getirir.

w çözümü ve Φ holomorf fonksiyonu $w = \mathrm{T}_{\Phi,\mathrm{F}}w$ operatörü yardımıyla birbirine bağlıdır.

Eğer

$$\widetilde{w} = \Lambda\widetilde{\Phi}\,, \quad \widetilde{\Phi} = \Lambda^{-1}\widetilde{w}$$

denirse o zaman (6.8) eşitsizliğinden

$$\frac{d(\Phi, \widetilde{\Phi})}{1+\alpha} \leq d(\Lambda\Phi, \Lambda\widetilde{\Phi}) \leq \frac{d(\Phi, \widetilde{\Phi})}{1-\alpha}$$
$$\leq (1-\alpha)d(w, \widetilde{w}) \leq d(\Lambda^{-1}w, \Lambda^{-1}\widetilde{w})$$

olup buradan

$$\frac{d(\Lambda^{-1}w, \Lambda^{-1}\widetilde{w})}{1+\alpha} \leq (1-\alpha)d(w, \widetilde{w}) \leq d(\Lambda^{-1}w, \Lambda^{-1}\widetilde{w}) \leq (1+\alpha)d(w, \widetilde{w})$$
$$d(\Lambda^{-1}w, \Lambda^{-1}\widetilde{w}) \leq (1+\alpha)d(w, \widetilde{w}) \qquad (6.10)$$

bulunur.

Böylece (6.10) eşitsizliğinden de Λ^{-1} operatörünün sürekliliği elde edilir. Ayrıca $\mathcal{H}$, Λ operatörü yardımıyla $\mathcal{W}$ sınıfı üzerine tek anlamlı olarak dönüştürülebilir.

O halde tek anlamlılık ve Λ ve Λ^{-1} (iki taraflı) sürekliliğinden Λ bir topolojik dönüşümdür. Böylece aşağıdaki önerme elde edilmiş oldu.

Λ dönüşümü Φ holomorf vektörlerinin $\mathcal{H}$ kümesini $\mathcal{W}$ çözümler kümesine dönüştüren topolojik bir dönüşümdür. Yani

$$\Lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{W}$$
$$\Phi \to \Lambda\Phi = w = \Phi + \mathrm{T_G F}(z, w, h)$$

dir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, w_z)$$

diferensiyel denkleminin sağ tarafındaki F fonksiyonu, (I), (II) ve (III) koşullarını sağlasın. L Lipschitz sabiti

$$\mathrm{L} < \frac{1}{\mathrm{K}_1(\alpha)}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçilirse $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{W}$ ye gidecek şekilde Λ topolojik yapısı vardır. Bu yapı

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, w_z)$$

diferensiyel denkleminin genel çözümünü oluşturur.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, $w_{\bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, w_z)$ formundaki genel bir kompleks kısmi türevli denklem için sınır değer problemleri tanımlanmış ve çözümler önce integral denklem şeklinde ortaya konmuş, daha sonra bundan yararlanılarak integral denklem sistemi oluşturulmuştur. İntegral denklem sisteminin çözümünün varlık ve tekliği uygun koşullar altında incelenmiştir. Tezin sonunda çözüm, bir operatörün sabit noktası olarak elde edilmiştir.

Tezdeki problem Banach uzayında incelenmiş ve Topolojideki Sabit Nokta Teoremi yoğun bir şekilde kullanılmıştır.

İleri bir aşama olarak

$$w_{\bar{z}} = \mathrm{F}(z, w, w_z), \quad Rew_j\big|_{\partial \mathrm{G}} = \varphi, \quad \varphi \in \mathrm{C}_\lambda(\mathbb{C}, \mathbb{R}) \quad Imw(z_0) = c_0$$

şeklindeki sınır değer probleminin çözümünün varlık ve tekliği, çözümlerin içinde bulunduğu fonksiyon uzayı ve buna bağlı olarak norm ya da metrik değiştirilerek incelenebilir. Bu inceleme sırasında G bölgesinin sınırının düzgün olduğu kabul edilmektedir. $\partial\mathrm{G}$ sınırı düzgün olmadığı zaman çözümün varlık ve tekliği başka bir araştırma konusudur. Bu tür problemlerin incelenmesi için gerekli temel bilgiler bu tezde verilmiştir.

KAYNAKLAR

(1) Musayev B., Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, 2000.

(2) Tutschke, W., Partielle Differentialgleichungen, klassische, funktionalanalytische und komplexe Methoden. TEUBNER-TEXTE zur Mathematik. Band 27, 1983.

(3) Tutschke, W., Partielle komplexe Differentialgleichungen in einer und mehreren komplexen Variablen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Band 82, Berlin, 1977.

(4) Tutschke, W., Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung in der Ebene durch Verwendung einer komplexen Normalform. Math. Nachr. Vol. 75, 283-298, 1976.

(5) Vekua, I.N., Generalized Analytic Functions, Pergamon-Oxford, 1962.

(6) Begehr, H., Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. An introductory text, World Scientific, Singapore, 1994.

(7) Mamorian, A., Esrafilian, E., Taghizadeh, N., On the existence of generalized solution of a first order elliptic system by fixed-point theorem; Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications, Vol. 30, No : 8, 5351-5356, 1997.

(8) Agarwal, R.P., Meehan, M., O'Regan, D., Fixed Point Theory and Applications; Cambridge University Press, 2001.

(9) Koca, K., Altun, İ., Musayev, B., Existence and Uniquess theorems for Certain class of non-linear Singular İntegral Equations; Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 51, No. 2, 181-195, 2006.