KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS FONKSİYONLARDA REZİDÜ VE BAZI UYGULAMALARI

SEVGİ İŞLER

EYLÜL 2005

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı

Bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

Yrd. Doç. Dr. Hasan ERBAY

ÖZET

KOMPLEKS FONKSİYONLARDA REZİDÜ VE BAZI UYGULAMALARI

İŞLER, Sevgi

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Kerim KOCA

Eylül 2005, 97 sayfa

Tez, dört temel bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, kompleks düzlemde eğriler, kompleks integraller, Cauchy Türev ve İntegral Formülleri incelenmiştir. İkinci bölümde kompleks fonksiyonların singülerliklerinin bir sınıflandırılması, analitik fonksiyonların serisel gösterilimleri, rezidü ve rezidü hesaplama yöntemleri, Casorati-Weierstrass Teoremi ve Sonuçları verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Argümenlerin Değişimi Prensibi, Rouche' ve Hurwitz Teoremleri ele alınmıştır. Son bölümde ise belli tipten reel genelleştirilmiş integrallerin ve çok-değerli fonksiyonların integrallerinin rezidü yardımıyla hesaplanması ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Cauchy integral formülü, Cauchy türev formülü, Taylor teoremi, Singülerliklerin sınıflandırılması, Laurent teoremi, Cauchy rezidü teoremi.

ABSTRACT

RESIDUES OF THE COMPLEX FUNCTIONS AND THEIR SOME APPLICATIONS

İŞLER, Sevgi

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural and Applied Sciences

Deparment of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor : Prof. Dr. Kerim KOCA

September 2005, 97 pages

Thesis is in four basic parts. In the first part, curves in complex plane, complex integrals, Cauchy derivative and integral formulas are examined. In the second part of the thesis, a classification of singularities of complex functions, series demonstrations of analytical functions, residue and residue calculation methods, Casorati-Weierstrass Theorem and its results are discussed. In the third part, principles of argument variation, Rouche' and Hurwitz Theorems are discussed.In the last part of the thesis, calculations of the definite reel generalized integrals and the integrals of very-valued functions are made with the help of residues.

Key Words: Cauchy integral formula, Cauchy derivative formula, Taylor theorem, A classification of singularities, Laurent theorem, Cauchy residue theorem

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Kompleks Analiz soyut bir bilim alanı gibi görünse de sonuçları teknolojide, fizik ve mühendislikte çok sık kullanılmaktadır. Hatta kompleks analizde elde edilen sonuçlar, reel analizde çözümü imkansız olan problemlerin çözümünde güçlü bir araç olarak kullanılmaktadır. Örneğin;

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\left(\alpha\pi\right)} \ , \ 0<\alpha<1$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx = \pi\ln 2$$

v.s. formundaki integrallerin sonuçları kompleks analiz metodları ile elde edilebilmektedir. Ayrıca bir çok reel diferensiyel denklem sistemleri kompleks fonksiyonlar yardımıyla kolayca çözülebilmektedir.

Bu nedenlerden dolayı kompleks fonksiyonlarda rezidü kavramı önemli bir uygulama olarak ortaya çıkmaktadır. Bu konu tezin temelini oluşturmaktadır.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında dört temel kitaptan yararlanılmıştır. Önce [1] nolu kaynaktan singüler noktaların sınıflandırılması, Cauchy Teoremleri ve Özellikleri, kompleks eğrisel integral konuları öğrenilmiştir. Daha sonra analitik fonksiyonların

Laurent serisine açılımı ve temel özellikleri [2] ve [6] nolu kaynaklardan yararlanılarak ortaya konmuştur. Rezidülerin hesaplanması ve bunların belli tipten reel genelleştirilmiş integrallerin hesabında kullanılması konusu [1], [2], [3] ve [4] nolu kaynaklar göz önüne alınarak incelenmiştir. [3] ve [4] nolu kaynaklardan yararlanılarak Argümenlerin Değişimi Prensibi, Hurwitz ve Rouche' teoremlerinin en genel halleri bu tezde verilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Kompleks analizin mühendislik ve fiziksel uygulamalarının yanında önemli bir uygulaması da Rezidü(Kalıntı) kavramıdır. Rezidü, belli tipten kompleks integrallerin hesabında ve elemanter yollarla hesaplanamayan bazı tip reel genelleştirilmiş integrallerin hesabında çok sık kullanılmaktadır. Bir $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z)$'nin bir ayrık aykırı noktası olmak üzere $f(z)$, $0<|z-z_0|<R$ halkasal bölgesinde (uygun koşullar altında)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

şeklinde Laurent serisine açılabilir. Bu açılımda $(z-z_0)^{-1}$ ifadesinin katsayısı olan a_{-1}, $f(z)$'nin z_0 noktasındaki rezidüsü olarak isimlendirilir. Rezidüyü hesaplamak için $f(z)$'nin yapısına göre çeşitli hesaplama teknikleri vardır. Bu hesaplama metodları $f(z)$'yi Laurent serisine açmadan rezidüyü hesaplama imkanı verir. Tez içinde de görüleceği gibi Argümenlerin Değişimi Prensibi yine Cauchy-Rezidü Teoremi'nin önemli uygulamalarından birisidir. Yine elemanter işlemlerle çok-değerli kompleks fonksiyonların integralleri oldukça karmaşık olduğu halde yine rezidü yardımıyla bu tip fonksiyonların kompleks anlamdaki eğrisel integralleri kolayca hesaplanabilmektedir.

Bir $f(z)$ kompleks analitik fonksiyonu için verilen klasik türev tanımı değiştirilerek Laurent serisinden daha genel anlamda analitik olmayan fonksiyonlar için de serisel açılımlar verilebilir. Örneğin genelleştirilmiş analitik (pseudo-analitik) fonksiyonlar için bu tür açılımlar mevcuttur. İleri bir araştırma konusu olarak genelleştirilmiş Cauchy tipi integraller yardımıyla rezidü kavramı genişletilebilir. Bunun için klasik anlamdaki rezidü kavramı bir temel oluşturabilir. Tezin temel amaçlarından birisi de budur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Analitik Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri

Analitik fonksiyonlar, önemli özellikler gösterirler ve kompleks analizin temel konusunu oluştururlar.

Tanım 2.1.1: $f : D \to \mathbb{C}$

$$z \to w = f(z)$$

fonksiyonu verilsin. $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasının en az bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa ***f*** $\boldsymbol{(z)}$ ***fonksiyonu*** $\boldsymbol{z_0}$ ***noktasında türevlenebilirdir*** denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına ***f'nin*** $\boldsymbol{z_0}$ ***'daki türevi*** denir. Yani $f'(z_0)$ değeri,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.2: $f : D \to \mathbb{C}$

$$z \to w = f(z)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

limiti varsa $\boldsymbol{f(z)}$ ***fonksiyonu D bölgesinde türevlenebilirdir*** denir. Bu limit değeri $f'(z)$ ile gösterilir ve $f'(z)$ ifadesine ***f'nin z'deki türevi*** denir. Yani $f'(z)$ değeri,

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.1: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu herhangi bir $z = x + iy$ noktasında türeve sahipse bu takdirde

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y) \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

dir.

İspat: Tüm Kompleks Analiz kitaplarında ispatı bulunabilir.

Sonuç 2.1.1: (2.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= 0 \\ u_y + v_x &= 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna ***Cauchy-Riemann sistemi*** denir.

Sonuç 2.1.2: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olmak üzere $f'(z)$ türevi varsa u ve v Cauchy- Riemann sistemini sağlar. Ama bunun karşıtı doğru olmayabilir. Yani bir fonksiyon bir noktada Cauchy-Riemann sistemini sağladığı halde o noktada türeve sahip olmayabilir.

Uyarı : Örneğin;

$$f(z) = \begin{cases} 0 & , z = 0 \\ e^{-1/z^4} & , z \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $z = 0$ noktasında Cauchy-Riemann sistemini sağlar. Gerçekten,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-1/x^4} = 0$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} e^{-1/y^4} = 0$$

olduğundan

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x$$

yazılabilir. Ancak $z = 0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi yoktur.

Örneğin, $y = x$ doğrusu üzerinden sıfıra yaklaşırsa, $z = x + ix$ olacağından, $x \neq 0$ için

$$f(z) = e^{1/x^4}$$

ve

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{1/x^4} - 0}{x - 0} = \infty$$

olur.

Tanım 2.1.3: $f(z) = u + iv$ fonksiyonu bir z_0 noktasının en az bir komşuluğunun her noktasında türeve sahipse $f(z)$'ye z_0'da ***analitiktir*** veya ***holomorftur*** denir.

Sonuç 2.1.3: Bir z_0 noktasında $f'(z_0)$ türevinin mevcut olması $f(z)$'nin z_0'da analitik olmasını gerektirmez.

Örnek 2.1.1: $f(z) = z\overline{z}$ fonksiyonunu ele alalım. $z = 0$ için $f'(z)$ vardır. Fakat $z \neq 0$ için $f'(z)$ yoktur. Bu nedenle $f(z)$ holomorf değildir.

Not : $f = u + iv$ olsun. u ve v'nin kısmi türevlere sahip olması $f'(z)$ türevinin mevcut olmasını gerektirmez.

Örnek 2.1.2: $f(z)=3z+2\overline{z}$ fonksiyonunu ele alalım. $f(z)=3z+2\overline{z}=5x+iy$ olduğundan $u=5x$ ve $v=y$ dir. u ve v her yerde her basamaktan kısmi türevlere sahip olduğu halde $f'(z)$ türevi yoktur.

Not (Kısmi Türev): Cebirsel yapıları farklı olmakla birlikte $\mathbb{R}^2$ düzlemi, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemine izomorftur. Bu iki düzlemin elemanları arasında bire bir eşleme vardır. $z=x+iy$ ve $\overline{z}=x-iy$ eşitliklerinden yararlanarak x ve y reel değişkenleri elde edilir. Yani,

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}, \quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

olduğu açıktır. Bu nedenle iki reel değişkenli bir $f(x,y)$ fonksiyonu z ve $\overline{z}$ kompleks değişkenlerinin fonksiyonu gibi düşünülebilir. Dolayısıyla z ve $\overline{z}$'e göre kısmi türevlerden sözedilebilir. Eğer $f(x,y)$ fonksiyonunun f_x ve f_y kısmi türevleri sürekli ise

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

eşitliklerinden yararlanarak

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

kısmi türev operatörleri elde edilir.

Lemma 2.1.1: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $f_x(z)$ ve $f_y(z)$ kısmi türevleri sürekli olsun. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ nin D de analitik olması için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

olmasıdır.

İspat: $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\dfrac{\partial}{\partial y}(u+iv)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + i\left(u_y + iv_y\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(u_x - v_y\right) + i\left(u_y + v_x\right)\right]$$

olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow u_x - v_y = 0\,,\; u_y + v_x = 0$$

Cauchy-Riemann sistemi elde edilir.

2.2. Kompleks Düzlemde Eğriler

Tanım 2.2.1:

(a) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir ***eğridir*** denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin ***başlangıç*** ve ***bitiş noktaları*** denir.

(b) Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ’ya ***kapalı eğridir*** denir.

(c) Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ ’ya ***diferensiyellenebilir eğri*** denir.

(d) γ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ ’ya ***düzgün eğri(regüler eğri)*** denir.

(e) $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç γ eğrisi diferensiyellenebiliyorsa ve bu sözkonusu noktalarda γ ’nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar

γ''nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ ***parçalı diferensiyellenebilir eğridir*** denir.

(f) γ parçalı diferensiyellenebilir eğri olsun. Eğer $t \in [a,b]$ olmak üzere türevin mevcut olduğu her yerde $\gamma'(t) \neq 0$ eğriye ***parçalı düzgün eğridir*** denir.

(g) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$t \to \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

eğrisi verilsin. $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ ise $\gamma(t)$'ye ***basit eğri*** denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya ***basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi)*** denir.

Uyarı :(1) Çoğu kez bir γ eğrisini belirtirken denklemi $z(t) = x(t) + iy(t)$ olan γ eğrisi diye yazıp söyleyeceğiz.

(2) Bir γ eğrisi verilsin. $z'(t_0) = \gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ var ve $z'(t_0) \neq 0$ ise eğri $z_0 = z(t_0)$ noktasında bir teğete sahiptir. Teğet, z_0 noktasından geçer ve pozitif eksenle $\theta = \arg z'(t_0)$ açısı yapar. Böylece görülüyor ki düzgün eğriler her noktada, diferensiyellenebilir eğriler ise türevin sıfırdan farklı olduğu noktalarda, teğete sahiptirler.

$$\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$t \to \gamma_1(t) = x(t) + iy(t)$$
$$\gamma_2(t) = x^*(t) + iy^*(t)$$

düzgün eğrileri verilsin. $z_1(t)$ ve $z_2(t)$, t_0 parametre değerine karşılık gelen noktada teğete sahip iseler teğetler arasındaki açı

$$\arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$$

dır .

Örnek 2.2.1:

(a) $z = z(t) = \cos t + i\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ eğrisi basit kapalı bir eğridir.

(b) $x(t) = t,\ y(t) = t^2, 0 \le t \le 1$ parametrik gösterimi ile verilen bir γ eğrisi $z = z(t) = t + it^2, 0 \le t \le 1$ gösterimi ile de belirtilebilir. Bu eğri basit eğridir fakat kapalı eğri değildir.

(c) $z(t) = 1 + it$, $z(t) = e^{-i\pi t}, z(t) = 3e^{2\pi i t}, 0 \le t \le 1$ fonksiyonları birer eğri belirtirler.

$z(t) = 1 + it$ eğrisi basit eğridir fakat kapalı eğri değildir.

$z(t) = e^{-i\pi t} = \cos \pi t - i\sin \pi t$ eğrisi basit eğridir fakat $0 \le t \le 1$ için kapalı eğri değildir.

$z(t) = 3e^{2\pi i t} = 3(\cos 2\pi t + i\sin 2\pi t)$ eğrisi basit kapalı bir eğridir.

Tanım 2.2.2: (a) $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$t \to \gamma_1(t) = x(t) + iy(t)$$

ve

$$\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$$
$$t \to \gamma_2(t) = x^*(t) + iy^*(t)$$

şeklinde iki eğri verilsin. $\gamma_1 + \gamma_2$ birleşimi

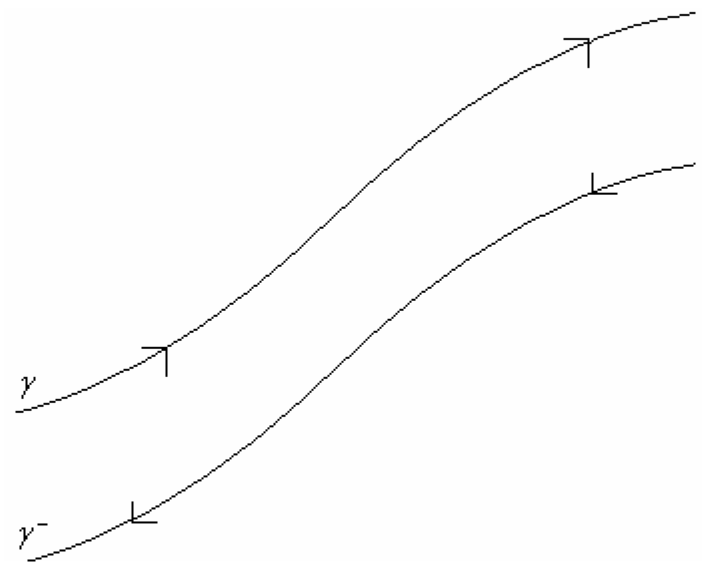
$$\gamma(t) = (\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [c,d] \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. γ_1 ve γ_2 uç uca eklenmiş olmayabilir. Bu durumda eğriye ***parçalı eğri*** denir.

(b) $\mathbb{C}$ düzleminde

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$t \to \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

eğrisi verilsin. Bu durumda $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t),\ a \le t \le b$ eğrisine ***γ'nın tersi*** denir ve $\gamma^{-}(t)$ ile gösterilir.



Şekil 2.2.1

Uyarı: Bir eğriyi belirten fonksiyon bir tek değildir. Eğer bir h fonksiyonu, $h'(t) > 0,\ h(c) = a,\ h(d) = b$ olacak biçimde, $[c,d]$ aralığını $[a,b]$ aralığı üzerine dönüştürüyorsa $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ile $\tilde{\gamma} = \gamma \, o \, h : [c,d] \to \mathbb{C}$ aynı eğriyi belirtirler. Bu durumda $\tilde{\gamma} = \gamma \, o \, h$ eğrisine ***γ eğrisinin yeni bir parametrik gösterimi*** denir. Bu nedenle genelde, eğrinin tanım kümesi olarak $[0,1]$ aralığı alınır. Çünkü

$h(t) = tb + (1-t)a,\ t \in [0,1]$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığını $[a,b]$ aralığı üzerine istenilen biçimde dönüştürür. Böylece,

$$\gamma(s) = x(s) + iy(s),\ a \le s \le b$$

ile

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(h(t)) = x(tb + (1-t)a) + iy(tb + (1-t)a),\ 0 \le t \le 1$$

aynı eğriyi belirtirler. O halde $\tilde{\gamma}(0)$ ve $\tilde{\gamma}(1)$ sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktası olurlar.

Örnek 2.2.2: $z(t) = t^2 + it^4$, $0 \le t \le 1$ eğrisi, $z(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 1$ eğrisinden $t = u^2$ parametre dönüşümü yapılarak elde edilmiştir.

Tanım 2.2.3: Eğer $\gamma = \gamma(t)$ eğrisi sınırlı değişimli ise γ eğrisine ***doğrultulabilir (rektiflenebilir) eğri*** denir veya bir başka ifade ile bir çembere homeomorf olarak dönüştürülebilen sınırlı değişimli bir eğriye ***rektiflenebilir eğri*** denir.

Örnek 2.2.3:

(a) $z(t) = x(t) + iy(t),\ 0 \le t \le 4$ eğrisini

	$0 \le t \le 1$	$1 \le t \le 2$	$2 \le t \le 3$	$3 \le t \le 4$
$x(t)$	t	1	$3-t$	0
$y(t)$	0	$t-1$	1	$4-t$

tablo olarak şeklinde tanımlayalım. Bu eğri bir karenin çevresini verir ve parçalı düzgün bir eğridir.

(b) $z(t) = \sin t + i \sin 2t,\ 0 \le t \le \pi$ eğrisi doğrultulabilir eğridir. Fakat $z(0) = i$ olmak üzere $z(t) = t \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) + ie^t$, $0 \le t \le 1$ eğrisi rektiflenemez bir eğridir.

Not (Yönlendirme Kavramı): Noktaların ardışık olarak birbirini takip etmesiyle oluşan kümeye eğri diyebiliriz. Bir $\gamma(t)=z(t)=x(t)+iy(t), 0\leq t\leq 1$ eğrisini ele alalım. Bu eğrinin uç noktaları $z_0=z(0)$ ve $z_1=z(1)$ olsun.

Eğer t sıfırdan bire doğru değişirken eğri de z_0'dan z_1'e doğru saatin tersi yönünde çiziliyorsa eğriye pozitif yönde yönlendirilmiştir denir. Eğer eğri saat yönünde çiziliyorsa eğriye negatif yönde yönlendirilmiştir denir. Negatif yön γ^- ile gösterilir.

Dolayısıyla γ eğrisi $z=z(t), 0\leq t\leq 1$ fonksiyonu ile γ^- eğrisi de $z=z(-t), -1\leq t\leq 0$ fonksiyonu ile belirtilir.

Tanım 2.2.4: Sonlu sayıda γ_j, $j=1,2,\ldots,n$ düzgün eğrileri verilmiş olsun. Eğer bütün $j=1,2,\ldots,n-1$ değerleri için γ_j'nin bitim noktası γ_{j+1}'in başlangıç noktası ile çakışıyorsa bu γ_j eğrilerinin birleşimi olan γ eğrisine ***çevre (parçalı düzgün eğri)*** denir.

Özel olarak γ_1'in başlangıç noktası γ_n'nin bitiş noktası ile çakışıyorsa ***kapalı çevre*** denir.

Örneğin; bir dikdörtgen çevresi, üçgen çevresi parçalı düzgün kapalı eğrilerdir.

Kendisini kesmeyen çevreye ***basit çevre***, kendisini kesmeyen kapalı çevreye de ***basit kapalı çevre*** denir.

Not: Çevrelerin yönlendirilmesi, eğrilerin yönlendirilmesi gibidir.

Örnek 2.2.4:

(a) Eğer a bir kompleks sayı ve $r > 0$ ise

$$z(t) = a + re^{it} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

fonksiyonu pozitif yönlü düzgün kapalı bir çevre belirtir.

(b) Eğer a ve b kompleks sayılar ise

$$z(t) = a + (b - a)\,t \quad , \qquad 0 \le t \le 1$$

fonksiyonu $z_0 = a$ noktasını $z_1 = b$ noktasına birleştiren doğru parçasıdır. Yönü de z_0 noktasından z_1 noktasına doğrudur. Bu fonksiyon düzgün bir çevredir.

Şimdi de ispatını vermeyeceğimiz ancak sonuçlarını kullanacağımız bir teorem verelim:

Teorem 2.2.1 (Kapalı Jordan Eğrisi Teoremi): Basit kapalı bir eğri (kapalı Jordan eğrisi) kompleks düzlemi üç kümeye ayırır, birisi kapalı Jordan eğrisinin iç kısmındaki noktalardan oluşmuş açık küme, diğeri kapalı Jordan eğrisinin üzerindeki noktaların (sınır noktaları) oluşturduğu kapalı küme ve bir diğeri de Jordan eğrisinin dışındaki noktaların oluşturduğu açık kümedir.

Bu teoremin ifadesi geometrik olarak açık gibi görülse de ispatı oldukça zordur. İspatını değişik Kompleks Analiz kitaplarında bulmak mümkündür. Uygulamalarda çok sık karşılaşılan bu teoremden aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

(a) Bir iç noktayı bir dış noktaya birleştiren her Jordan eğrisi bir sınır noktası bulundurur.

(b) İç noktaların her çifti tamamen iç noktalardan oluşan bir Jordan eğrisi ile birleştirilebilir.

(c) Dış noktaların her çifti tamamen dış noktalardan oluşan bir Jordan eğrisi ile birleştirilebilir.

(d) İç noktaların kümesi sınırlı, dış noktaların kümesi sınırsızdır.

Örnek 2.2.5: a bir kompleks sayı olmak üzere $z(t)-a=re^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$ bir kapalı Jordan eğrisidir.Burada iç noktalar kümesi $\left|z(t)-a\right|<r$, sınır kümesi $\left|z(t)-a\right|=r$ ve dış noktalar kümesi ise $\left|z(t)-a\right|>r$ özelliğindeki z noktalarının oluşturduğu kümedir.

Tanım 2.2.5: $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan sürekli $f(z)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer bir $\gamma(t), a\leq t\leq b$ eğrisi tamamen D bölgesinde bulunuyorsa bu takdirde $w(t)=f(\gamma(t))$ ifadesine $\gamma(t)$ **'nin *f altındaki görüntüsü*** denir.

Lemma 2.2.1: $\gamma(t)$ düzgün bir eğri ve f analitik ise $w(t)=f(\gamma(t))$ düzgün eğridir ve $w'(t)=f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ dir.

İspat: $\gamma(t)$'nin f altındaki görüntüsü $w(t)=f(\gamma(t))$ olsun. f analitik olduğundan türevi vardır. Diğer taraftan; $\gamma(t)$ düzgün olduğundan $\gamma'(t)$ mevcut ve $\gamma'(t)\neq 0$ dir. w , f ve γ'nın bileşkesi olup iki türetilebilir fonksiyonun bileşkesi türetilebilir olduğundan w türetilebilirdir ve $w'(t)=f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ olur.

Not: γ düzgün eğri ve f analitik olduğu sürece $w(t)$ eğrisi de düzgün eğridir.

Not: Kendisini kesmeyen eğrinin görüntüsü kendisini kesebilir.

2.3. Kompleks integraller

Tanım 2.3.1 (Belirsiz İntegral): f ve F bir D bölgesinde analitik olsunlar. Eğer $\frac{d}{dz}F(z)=f(z)$ ise $F(z)$'ye $f(z)$'nin bir ***belirsiz integrali*** denir ve

$$F(z)=\int f(z)\,dz \tag{2.3.1}$$

şeklinde gösterilir.

Diğer taraftan c keyfi bir kompleks sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dz}\big(F(z)+c\big)=F'(z)=f(z)$$

olması nedeniyle $f(z)$'nin belirsiz integrali $F(z)+c$ şeklindedir. Böylece

$\int f(z)\,dz=F(z)+c$ yazılabilir.

Tanım 2.3.2: $h:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$t\to h(t)=u(t)+iv(t)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer u ve v, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilirse h fonksiyonunun $[a,b]$'deki belirli integrali

$$\int_a^b h(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.3: f fonksiyonu $D\subset\mathbb{C}$ açık bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun.

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$$
$$t\to\gamma(t)\in D$$

eğrisinin

$$\gamma\big([a,b]\big)\subset D$$

olacak şekilde düzgün bir eğri olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

ifadesine, ***f* fonksiyonunun γ eğrisi boyunca kompleks integrali** denir.

Sonuç 2.3.1: γ , $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış parçalı düzgün bir eğri olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} \gamma_i : [a_i, a_{i+1}] &\to \mathbb{C} \\ t &\to \gamma_i(t) \end{aligned} \quad , \; i = 0,1,\ldots,n-1$$

düzgün eğriler olmak üzere $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1}$ eğrisi boyunca $f(z)$'nin kompleks eğrisel integrali

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma_i(t))\, \gamma_i'(t) dt$$

olarak tanımlanır.

Not : (1) Eğer $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ise düzgün γ eğrisi boyunca olan integral

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \left[u(x,y)dx - v(x,y)dy \right] + i \int_{\gamma} \left[u(x,y)dy + v(x,y)dx \right]$$

şeklinde de verilebilir.

(2) γ 'nın çevre olması halinde de aynı tanım geçerlidir.

Örnek 2.3.1: (a) γ eğrisi, $1 \le t \le 2$ olduğunda, $x = 2t$ ve $y = 3t$ olarak verilsin ve $f(z) = z^2$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_1^2 (2t + 3it)^2 (2 + 3i) dt = (2 + 3i)^3 \int_1^2 t^2 dt = -\frac{322}{3} + 21i$$

olarak bulunur.

(b) $\gamma : |z - z_0| = R$ tam çemberinin pozitif yönde yönlendirilmiş hali olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

integralini hesaplayalım.

Verilen γ eğrisi $z - z_0 = |z - z_0| e^{it} = \mathrm{R}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ formunda yazılabilir. Bu durumda $dz = i\,\mathrm{R}e^{it}\,dt$ olup böylece

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,\mathrm{R}e^{it}}{\mathrm{R}e^{it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

elde edilir.

Not: Bu sonuç z_0 noktasından ve R yarıçapından bağımsızdır.

Lemma 2.3.1: f ve g, sürekli iki fonksiyon olsun. γ, γ_1 ve γ_2'de parçalı düzgün eğriler olarak verilsin. Buna göre c_1 ve c_2 kompleks iki sabit olmak üzere,

(a) $\displaystyle\int_{\gamma} (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_{\gamma} f + c_2 \int_{\gamma} g$

(b) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f = -\int_{\gamma} f$

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

dir. Ayrıca (a) ve (c) ifadeleri

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{\gamma} f_i$$

ve

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$$

şeklinde genelleştirilebilir.

Not: $\displaystyle\int_{\gamma} f_i$ integrallerinin hepsi mevcutsa o zaman toplamla integral yer değiştirir.

İspat: (a) $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $g(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y)$

$c_1=c_{11}+ic_{12}$, $c_2=c_{21}+ic_{22}$ ve $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ olsun. Buna göre Tanım 2.3.3 ve belirli integrallerin özellikleri kullanılarak bu Lemmanın doğruluğu görülebilir.

(b) Tanım 2.3.3 gereği

$$\int_{\gamma^-} f=\int_a^b f\left(\gamma^-(t)\right)\frac{d\gamma^-}{dt}\,dt$$

yazılabilir.Tanım 2.2.2'deki (b)'den

$$=\int_a^b f\left(\gamma(a+b-t)\right)\left(\gamma'(a+b-t)\right)dt$$

dir. $s=a+b-t$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$=\int_b^a f\left(\gamma(s)\right)\left(-\gamma'(s)\right)(-ds)$$

$$=-\int_a^b f\left(\gamma(s)\right)\gamma'(s)\,ds=-\int_\gamma f$$

elde edilir.

(c) $\gamma_1:[a,a_1]\to\mathbb{C}$, $\gamma_2:[a_1,b]\to\mathbb{C}$

düzgün eğrilerini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2=\begin{cases}\gamma_1 \ , \ t\in[a,a_1]\\ \gamma_2 \ , \ t\in[a_1,b]\end{cases}$$

olup Tanım 2.3.3'den dolayı

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f=\int_a^b f\left((\gamma_1+\gamma_2)(t)\right)(\gamma_1+\gamma_2)'(t)\,dt$$

yazılır. Riemann anlamındaki integral özelliğinden γ'nın sürekli olması nedeniyle yukarıdaki integralin sağ tarafı

$$\int_a^b f\left(\left(\gamma_1+\gamma_2\right)(t)\right)\left(\gamma_1+\gamma_2\right)'(t)\,dt=\int_a^{a_1} f\left(\left(\gamma_1+\gamma_2\right)(t)\right)\left(\gamma_1+\gamma_2\right)'(t)\,dt+$$
$$+\int_{a_1}^b f\left(\left(\gamma_1+\gamma_2\right)(t)\right)\left(\gamma_1+\gamma_2\right)'(t)\,dt$$

şeklinde yazılır.

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f=\int_a^{a_1} f\left(\gamma_1\right)\gamma_1'(t)\,dt+\int_{a_1}^b f\left(\gamma_2\right)\gamma_2'(t)\,dt=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_2} f$$

elde edilir.

Lemma 2.3.2: $\tilde{\gamma}:\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]\to\mathbb{C}$ eğrisi , $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ eğrisinin yeni parametrik gösterilimi olsun. Bu durumda

$$\int_\gamma f=\int_{\tilde{\gamma}} f$$

dir.

İspat: Tanım 2.3.3 gereği

$$\int_\gamma f=\int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,dt$$

yazılır. Kesim 2.2'deki ikinci uyarı gereği $\gamma(t)=\tilde{\gamma}(h(t))$ olduğundan

$$\gamma'(t)=\frac{d\tilde{\gamma}(h(t))}{dh}\frac{dh}{dt}$$

dir. $h:[a,b]\to\left[\tilde{a},\tilde{b}\right]$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_\gamma f=\int_a^b f\left(\tilde{\gamma}\left(h(t)\right)\right)\left(\frac{d\tilde{\gamma}\left(h(t)\right)}{dh}\frac{dh}{dt}\right)dt$$

$t=a$ için $s=\tilde{a}=h(a)$ ve $t=b$ için $s=\tilde{b}=h(b)$ olmak üzere $s=h(t)$ yeni bir değişken olsun. O halde

$$=\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\left(\tilde{\gamma}(s)\right)\left(\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}\frac{ds}{dt}\right)dt$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}} f\left(\tilde{\gamma}\left(h(t)\right)\right)\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}dt = \int_{\tilde{\gamma}} f$$

elde edilir.

Örnek 2.3.2: γ eğrisi, sıfır noktasını $1+i$ noktasına birleştiren doğru parçası olsun. Bu durumda $\int_{\gamma} xdz$ integralini bulalım.

Sıfır ile $1+i$ noktasını birleştiren doğru üzerinde, $y = x = t$ bağıntısı vardır. Buna göre, $dx = dy$ olur. Böylece, $z = x + iy = t + it$ ve $dz = dt + idt = (1+i)dt$ olur. Buradan;

$$\int_{\gamma} xdz = \int_0^1 t(1+i)dt = (1+i)\int_0^1 t\,dt = \frac{1+i}{2}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.3.4: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$t \to \gamma(t)$$

düzgün bir eğri olsun. Bu eğrinin yay uzunluğu,

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

şeklinde tanımlanır ve $L(\gamma)$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.3: $\gamma(t) = e^t(\sin t + i\cos t)$, $0 \le t \le \pi/2$

eğrisinin uzunluğunu hesaplayalım.

$$x = e^t \sin t \quad \Rightarrow \quad x' = e^t \sin t + e^t \cos t$$

$$y = e^t \cos t \quad \Rightarrow \quad y' = e^t \cos t - e^t \sin t$$

olduğundan

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(e^t \sin t + e^t \cos t\right)^2 + \left(e^t \cos t - e^t \sin t\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} e^t dt$$

$$= \sqrt{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right)$$

dir.

Lemma 2.3.3: $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$’dir. Yani eğrinin uzunluğu eğrinin gösterilim şeklinden bağımsızdır.

İspat: $h'(t) > 0$ olsun. Kesim 2.2’deki ikinci uyarı gereği $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(h(t))$ olduğundan

$$\gamma'(t) = \frac{d\tilde{\gamma}(h(t))}{dh}\frac{dh}{dt}$$

dir. $h:[a,b] \to \left[\tilde{a},\tilde{b}\right]$ sürekli ve türetilebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \left|\frac{d\tilde{\gamma}(h(t))}{dh}\frac{dh}{dt}\right| dt = \int_a^b \left|\frac{d\tilde{\gamma}(h(t))}{dh}\right|\frac{dh}{dt} dt$$

$t = a$ için $s = \tilde{a} = h(a)$ ve $t = b$ için $s = \tilde{b} = h(b)$ olmak üzere $s = h(t)$ yeni bir bağımsız değişken olsun. O halde

$$L(\gamma) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}\right| \frac{ds}{dt} dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}\right| ds = L(\tilde{\gamma})$$

elde edilir.

Lemma 2.3.4: $g:[a,b] \to \mathbb{C}$ eğrisi verilsin. Bu durumda

(a) $\operatorname{Re}\int_a^b g(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}\left(g(t)\right)dt$

(b) $\left|\int_a^b g(t)dt\right| \le \int_a^b |g(t)|dt$

dir.

İspat: **(a)** Bu Lemmanın ispatı kompleks eğrisel integrallerin tanımı ve özellikleri kullanılarak çok basit bir şekilde elde edilebilir.

(b) Sabit r ve θ değerleri için,

$$\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}$$

olsun.Böylece,

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b g(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta} g(t)\,dt$$

olur. Bu eşitlikten, her iki yanın reel kısımlarının eşitliği yazılırsa,

$$r = \operatorname{Re} r = \operatorname{Re}\int_a^b e^{-i\theta} g(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} g(t)\right]dt \le \int_a^b \left|e^{-i\theta} g(t)\right|dt = \int_a^b \left|g(t)\right|dt$$

bulunur. Tanım gereği,

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = \left|re^{i\theta}\right| = r$$

olur. Böylece,

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \le \int_a^b \left|g(t)\right|dt$$

elde edilir.

Lemma 2.3.5*:* D, $\mathbb{C}$'de bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. D bölgesinde bulunan parçalı düzgün bir γ eğrisinin üzerindeki her z noktası için $\left|f(z)\right| \le M$ olacak şekilde bir $M \ge 0$ sabiti varsa bu taktirde

$$\left|\int_\gamma f\right| \le M\,L(\gamma)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Bu Lemmanın ispatı $\int_{\gamma}|f||dz|=\int_{a}^{b}|f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$ olduğunun da gözönüne alınmasıyla Tanım 2.3.4, Lemma 2.3.4 ve Tanım 2.3.3 kullanılarak çok basit bir şekilde elde edilebilir

Teorem 2.3.1: Bir $f:D\to\mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin ve γ eğrisi D bölgesinde bulunan, z_1 noktasını z_2 noktasına birleştiren parçalı düzgün bir eğri olsun. Eğer D'de $F'=f$ olacak şekilde bir $F:D\to\mathbb{C}$ analitik fonksiyonu varsa,

(a) $\int_{\gamma} f = F(z_2)-F(z_1)$

(b) $z_1=z_2$ ise $\int_{\gamma} f = 0$

dir.

İspat: (a) $\gamma(a)=z_1$ ve $\gamma(b)=z_2$ olsun. Tanım 2.3.3 gereği

$$\int_{\gamma} f=\int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt=\int_{a}^{b} F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt=\int_{a}^{b}\frac{d}{dt}\left[F(\gamma(t))\right]dt$$

$$=F(\gamma(t))\Big|_{a}^{b}=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=F(z_2)-F(z_1)$$

elde edilir.

(b) $z_1=z_2$ ise $F(z_2)=F(z_1)$ olacağından $\int_{\gamma} f=0$ olur.

Lemma 2.3.6: γ, r yarıçaplı ve $a\in\mathbb{C}$ merkezli bir çember olsun. $n\in\mathbb{Z}$ alalım. Bu durumda,

$$\int_{\gamma}(z-a)^n\,dz=\begin{cases}0 & , \ n\neq -1\\ 2\pi i & , \ n=-1\end{cases}$$

dir.

İspat: Önce $n \geq 0$ olsun. Bu durumda $f(z) = (z-a)^n$, $\mathbb{C}$'de analitik olduğundan Teorem 2.3.1 gereği sonuç görülür.

$n \leq -2$ olsun. Bu durumda $f(z) = (z-a)^n$, $\mathbb{C} - \{a\}$'da analitik olduğundan Teorem 2.3.1 gereği sonuç görülür.

Son olarak, $n = -1$ olsun. Bu durumda $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ olup buradan $\gamma'(t) = ire^{it}dt$ olması nedeniyle

$$\int_\gamma (z-a)^{-1} dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}dt}{re^{it} + a - a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

elde edilir.

2.4. Cauchy Teoremi ve Sonuçları

Kompleks analizin temelini oluşturan ve analitik fonksiyonları karakterize eden önemli teoremlerden birisi de Cauchy İntegral Teoremi'dir. Ayrıca bu teoremin sonuçları uygulama açısından çok önemlidir. Örneğin, hesaplanması çok zor olan bazı integraller bu sonuçlar yardımıyla kolayca hesaplanabilir. Cauchy tipi integraller yardımıyla analitik bir fonksiyonun sınırdaki değeri verilmesi halinde başka bir noktadaki değerini hesaplayabiliriz.

Teorem 2.4.1 (Cauchy Teoremi): D bir bölge ve ∂D, D'nin sınırı olsun. Eğer f fonksiyonu, D'nin içinde ve ∂D'de analitik ise

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

dir.

İspat: Bu klasik teoremin ispatı bütün kompleks analiz kitaplarında bulunabilir.

Örnek 2.4.1: (a) γ eğrisi birim karenin çevresi ve $f(z)=\sin\left(\exp\left(z^2\right)\right)$ olsun. Bu durumda

$$\int_\gamma f = 0$$

olur.

Gerçekten, f fonksiyonu γ eğrisi üzerinde ve içinde analitik (tam fonksiyon) olduğundan, Teorem 2.4.1 gereği integral sıfırdır.

(b) $\gamma : |z| = 1$, $\quad 0 \le \arg z < 2\pi$ olsun. Bu durumda

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z-2} dz = 0$$

olur.

$z = 2$ noktası birim çemberinin dışında olduğundan, $\dfrac{z^2}{z-2}$ fonksiyonu γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitiktir. Teorem 2.4.1 gereği integral sıfırdır.

Not (Homotopik Eğri Kavramı): Bazen f fonksiyonu bir γ eğrisinin içindeki bazı noktalarda analitik olmayabilir. Bu durumda, integral değerinin sıfır olması gerekmez.

Örneğin, $\gamma : |z| = 1$ olsun. $f(z) = \dfrac{1}{z}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $z = 0$ noktasında f fonksiyonu analitik değildir. Böylece,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

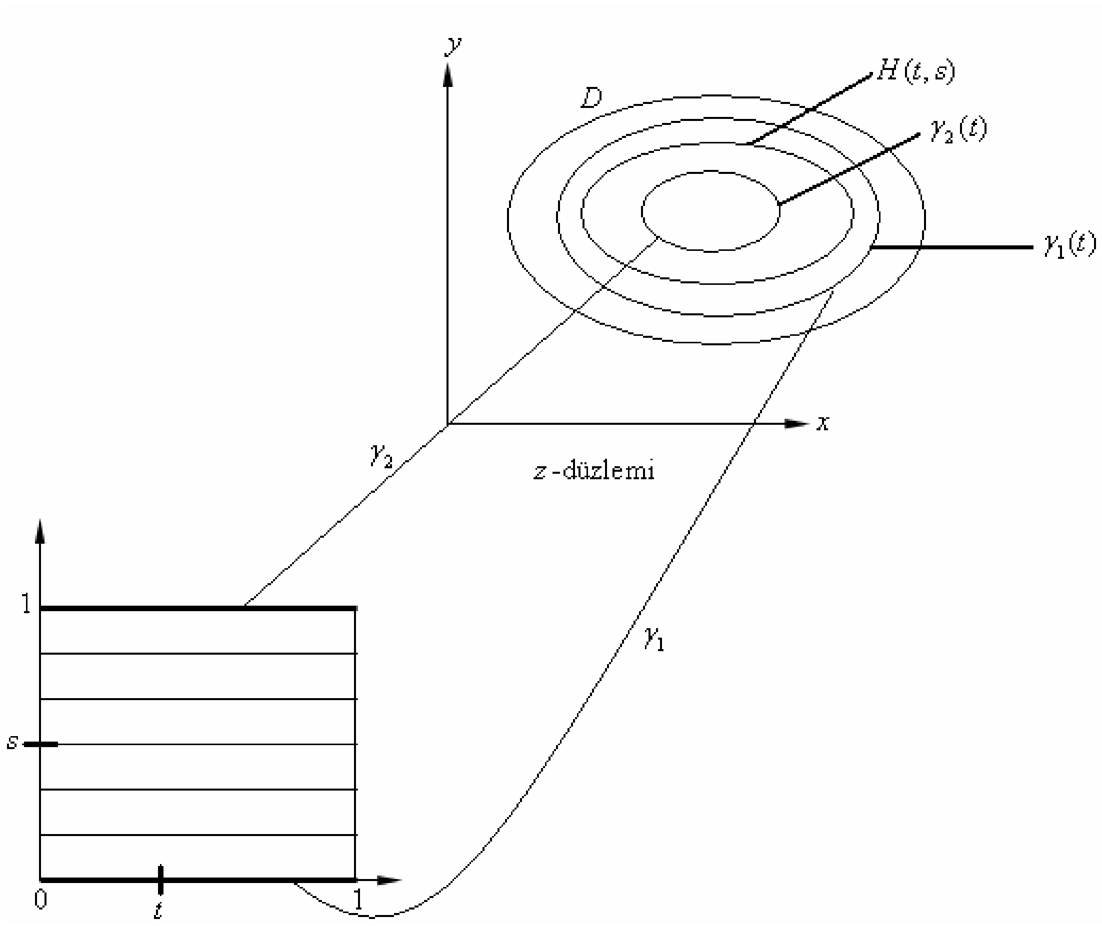
olduğunu Lemma 2.3.6'dan biliyoruz.

Bu tür fonksiyonların integralini alırken örneğin, $\int_{\gamma} f$ integrali yerine sonucu aynı olan $\int_{\tilde{\gamma}} f$ şeklinde bir integrali hesaplamak gerekebilir. Burada, $\tilde{\gamma}$ eğrisi γ eğrisinden daha basit olabilir. Örneğin, bu basit olan eğri bir çember, bir kare, yarım çember veya bir dikdörtgen olabilir. Bu gibi hallerde, $\int_{\tilde{\gamma}} f$ integralini hesaplamak daha kolaydır. γ yerine $\tilde{\gamma}$'yı almak için Cauchy integral teoreminden ve homotopi kavramından yararlanacağız.

Tanım 2.4.1: $D \subset \mathbb{C}$ bir alt bölge ve $\gamma_1 : [0,1] \to D$, $\gamma_2 : [0,1] \to D$ kapalı iki eğri olsun. Eğer aşağıdaki iki koşulu gerçekleyen sürekli bir $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ fonksiyonu bulunabilirse γ_1 ve γ_2 eğrilerine ***homotopiktirler*** denir:

(1) Her bir $s \in [0,1]$ için, $t \to H(t,s)$ kapalı bir eğridir.

(2) $H(t,0) = \gamma_1(t), \quad H(t,1) = \gamma_2(t), \quad 0 \le t \le 1$ (Bakınız Şekil 2.4.1).



Şekil 2.4.1

Not: γ_1 ve γ_2 iki homotopik eğri ise, bu genellikle $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.4.2: $\gamma_2(t) = d$ (sabit), yani γ_2 belli bir nokta olsun. Bu durumda γ_1, γ_2'ye homotop ise γ_1, D bölgesinde bir d noktasına ***büzülebiliyor (deforme edilebiliyor)*** denir.

Tanım 2.4.3: D *b*ölgesinin sınırı olan ∂D kapalı eğrisi D'nin her noktasına büzülebiliyorsa D bölgesine ***basit bağlantılıdır*** denir.

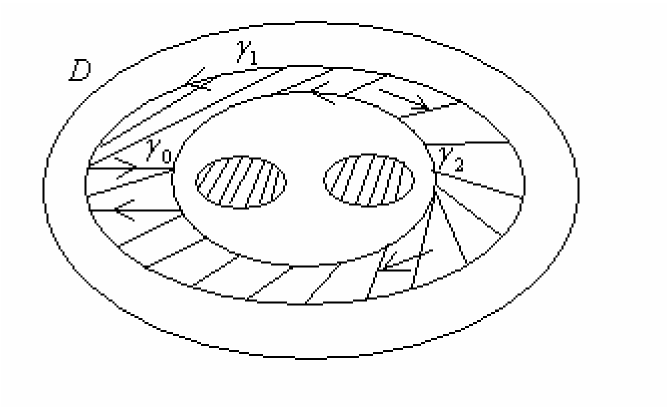
Not: Homotopi, kapalı eğriler kümesinde bir denklik bağıntısıdır.

Lemma 2.4.1: f bir D bölgesinde analitik ve γ_1 , γ_2 D'de basit kapalı iki eğri olsun. Eğer γ_1 , γ_2'ye D'de homotopikse,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

dir.

İspat: Bir γ_0 doğru parçası ile γ_1 ve γ_2 eğrilerini birleştirelim.



Şekil 2.4.2

Böylece sınırı $\gamma_1 + \gamma_0 - \gamma_2 - \gamma_0$ olan basit bağlantılı bir bölge elde edilir(Bakınız Şekil 2.4.2). Cauchy teoremi gereği

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz = 0$$

ve böylece de

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

bulunur.

Sonuç 2.4.1: f, bir D bölgesinde analitik ve γ_1 kapalı eğrisi D içinde bir noktaya homotopik olsun. Bu durumda,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$$

dir.

Lemma 2.4.2: Eğer f, basit bağlantılı bir bölge üzerinde analitik ise her $z_1, z_2 \in D$ sabit noktaları için

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

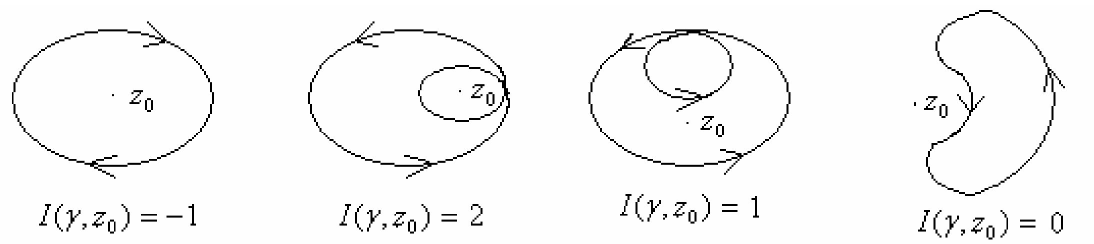
integrali, z_1'i z_2'ye bu bölge içinde birleştirilen yoldan bağımsızdır.

Tanım 2.4.4 (İndeks): γ, $\mathbb{C}$'de kapalı düzgün bir eğri ve $z_0 \in \mathbb{C}$, γ üzerinde bulunmayan sabit bir nokta olsun. Bu takdirde

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

integral değerine***γ'nın z_0 noktasına göre indeksi*** denir.

Not: Bu indeks γ'nın z_0 çevresindeki dönme sayısıdır (Bakınız Şekil 2.4.3)



Şekil 2.4.3

Kapalı Jordan Eğrisi Teoremini kullanarak, basit kapalı γ eğrisi için, z_0 noktası etrafında dönme sayısı

$$I(\gamma, z_0) = \begin{cases} \pm 1 & ; \quad z_0, \gamma' nın \;\; içinde \\ 0 & ; \quad z_0, \gamma' nın \;\; dışında \end{cases}$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 2.4.2: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ kapalı bir eğri ve $z_0 \in \mathbb{C}$ sabit bir nokta ve $z_0 \notin \gamma$ olsun. Bu durumda $I(\gamma, z_0)$ bir tamsayıdır.

İspat: $g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$

fonksiyonunu tanımlayalım.Bu durumda, integrantı sürekli olan noktalarda

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

yazılır. Böylece, $g'(t)$ fonksiyonunun varolduğu noktalarda

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)\right] = 0$$

olur. O halde $e^{-g(t)}(\gamma(t) - z_0)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan bu fonksiyon aynı aralıkta sabit olmalıdır. Bu sabit değer de, $t_0 = a$ için $e^{-g(a)}(\gamma(a) - z_0)$ ifadesi aynı sabite eşittir. Böylece,

$$e^{-g(a)}(\gamma(a) - z_0) = e^{-g(b)}(\gamma(b) - z_0)$$

olur. γ, kapalı bir eğri olduğundan $\gamma(a) = \gamma(b)$ yazılabilir. Böylece,

$$e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

integralinden $g(a)=0$ yazılabilir. Böylece, $e^{-g(b)}=1$ olur. Bu ise ancak n tamsayısı için $g(b)=2n\pi i$ olmasıyla mümkündür. Buradan,

$$I(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}ds=\frac{1}{2\pi i}g(b)=\frac{1}{2\pi i}2n\pi i=n$$

elde edilir.

2.5. Cauchy İntegral ve Türev Formülleri

Cauchy integral formülü, bazı kompleks integralleri hesaplamamızda kolaylıklar sağlar. Ayrıca, analitik bir fonksiyonun sonsuz kere türevlenebileceğini bu formülden elde edebiliriz.

Teorem 2.5.1 (Cauchy İntegral Formülü): γ, D bölgesinin içinde basit kapalı bir eğri olsun. Eğer z, γ eğrisi içinde bir nokta ve $f(z)$, D'de analitik ise

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

dir.

İspat: Klasikleşmiş bu teoremin ispatı bütün Kompleks Analiz kitaplarında bulunabilir.

Teorem 2.5.2 (Cauchy Türev Formülü): $w=f(z)$ fonksiyonu basit kapalı bir γ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer z, γ'nın içinde bir nokta ise

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,1,2,...$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı n üzerinden tümevarımla kolayca yapılabilir.

Not: Cauchy Türev Formülü’ne dikkat edersek, $f(z)$’nin her basamaktan türevinin de analitik bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz.

Sonuç 2.5.1: Eğer $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu bir noktada analitik ise bu noktada u, v her basamaktan sürekli türevlere sahiptir.

Teorem 2.5.3 (Cauchy Eşitsizliği): $w = f(z)$ fonksiyonu bir $|z-a| < r$ diskinin içinde ve sınırında analitik olsun. $|f(z)|$’nin bu diskin sınırındaki maksimum değeri M ise,

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!M}{r^n}$$

dir.

İspat: Bu diskin sınırı γ olsun.O halde

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

yazılabilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

yazılır. γ eğrisi üzerindeki z değerleri için, $|f(z)| \le M$ ve ayrıca $|z-a| = r$ olduğundan

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}}\int_\gamma |dz| = \frac{n!M}{2\pi r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!M}{r^n}$$

olduğu görülür.

Teorem 2.5.4 (Cebirin Temel Teoremi): Sabit olmayan bir

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad , \quad a_n \neq 0$$

polinomunun en az bir sıfır yeri vardır.

İspat: $P(z)$ sonlu düzlemde analitik, yani tam fonksiyondur. $|z| \to \infty$ için $|P(z)| \to \infty$ dir. Bu nedenle $\dfrac{1}{|P(z)|}$ nin belli bir $|z| = r$ çemberinin dışındaki bölgede sınırlı olduğu görülür. Eğer her z için $P(z) \neq 0$ olursa, $\dfrac{1}{|P(z)|}$, $|z| \leq r$ 'nin içinde de sınırlı olur. O halde Liouville Teoremi gereği $\dfrac{1}{P(z)}$ sabittir, yani $P(z)$ sabittir. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiye her z için $P(z) \neq 0$ varsayımı ile varılır. O halde $P(z_0) = 0$ olacak şekilde bir z_0 vardır.

Teorem 2.5.5 ($\mathbb{C}_\infty$ 'da Liouville Teoremi): f , $\mathbb{C}_\infty$ 'da analitik ise sabittir.

İspat: $f(1/z)$, $z = 0$ 'da analitik olduğundan $|z| \leq r$ 'de $|f(1/z)| \leq M_1$, yani $|z| \geq 1/r$ 'de $|f(z)| \leq M_1$ 'dir. Eğer M_2, $|f(z)|$ 'nin $z \leq 1/r$ deki maksimumu ise tüm $z \in \mathbb{C}_\infty$ değerleri için $|f(z)| \leq M = \max\{M_1, M_2\}$, yani f sınırlıdır. O halde Liouville Teoremi gereği f sabittir.

2.6. Analitik Fonksiyonların Serisel Gösterilimleri

Analitik bir fonksiyonun başka bir tanımı daha vardır. O da f fonksiyonunun analitik olması için gerek ve yeter koşulun, herhangi bir noktanın komşuluğunda yakınsak bir kuvvet serisine açılabilmesidir. Bu seriye, f fonksiyonunun ***Taylor serisi*** adı verilir. Aynı zamanda, delinmiş bir komşulukta analitik olan bir fonksiyonun serilerle gösterilimlerine de ***Laurent serisi*** adı verilecektir. Bu bilgiler daha sonra göreceğimiz rezidüler ve uygulamalarına bir başlangıç olacaktır.

Tanım 2.6.1: $(z_k)_1^\infty$ kompleks terimli bir dizi olsun. Genel terimi

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

şeklinde tanımlanan (S_n) dizisini göz önüne alalım. $((z_k),(S_n))$ ikilisine ***seri*** adı verilir. Burada z_k terimine, serinin ***genel terimi,*** (S_n) dizisine de serinin ***kısmi toplamlar dizisi*** denir.

Tanım 2.6.2: $(z_k)_1^\infty$ kompleks terimli bir dizi olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

sonsuz serisini göz önüne alalım. Eğer

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

kısmi toplamlar disizi bir s sayısına yakınsak ise,

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

serisi de s sayısına ***yakınsaktır*** denir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.6.3: $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ kompleks serisi verilsin. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ serisine ***mutlak yakınsaktır*** denir.

Tanım 2.6.4: $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ şeklindeki bir seriye ***kompleks geometrik seri*** denir.

Eğer $|z| < 1$ ise $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ yakınsak ve yakınsadığı değerde $\frac{1}{1-z}$ 'dir. $|z| \geq 1$ için seri ıraksaktır.

Lemma 2.6.1: $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ serisi mutlak yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ serisi yakınsaktır. Tersi genel olarak doğru değildir.

İspat: $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ serisi mutlak yakınsak olsun. Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ serisi yakınsaktır. $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ serisi yakınsak olduğundan seriler için Cauchy kriterine göre, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda her $p > 0$ tamsayısı için

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| < \varepsilon$$

yazılır. Her $n \geq n_0$ ve her $p > 0$ için üçgen eşitsizliğinden,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece Cauchy kriterinden dolayı, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ serisi yakınsaktır.

Tersinin genel olarak doğru olmadığını bir örnekle gösterelim. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}$ serisi yakınsaktır. Fakat mutlak yakınsak değildir. Çünkü $\left| \frac{i^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonik serisi ıraksaktır.

Tanım 2.6.5: $f_k : D \to \mathbb{C}$

$$z \to f_k(z)$$

olmak üzere $(f_k(z))_1^\infty$, D'de tanımlanmış bir kompleks fonksiyonlar dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0(\varepsilon)$ olduğunda $|f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa verilen dizi D bölgesinde f fonksiyonuna ***düzgün yakınsaktır*** denir.

Tanım 2.6.6 : $z \in D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ fonksiyon serisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0(\varepsilon)$ olduğunda her $p > 0$ pozitif tamsayısı için $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa verilen seriye D bölgesinde ***düzgün yakınsaktır*** denir.

Not: $(f_k)_1^\infty$ bir D bölgesinde tanımlı ve kompleks değerli fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

biçiminde tanımlanan $(S_n)_1^\infty$ dizisine $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisinin ***kısmi toplamlar dizisi*** denir.

$(S_n)_1^\infty$ kısmi toplamlar dizisi düzgün yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisine ***düzgün yakınsaktır*** denir.

Teorem 2.6.1 (Weierstrass M-Kriteri): $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $(f_k(z))_1^\infty$, D'de tanımlanmış bir kompleks fonksiyonlar dizisi ve $(M_k)_1^\infty$ pozitif terimli reel dizisi verilsin. Eğer her $z \in D$ için $\left|f_k(z)\right| \leq M_k$, $(k \in \mathbb{N})$ olacak şekilde $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ serisi D'de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat: $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ reel terimli serisi yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0(\varepsilon)$ olduğunda her $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

yazılabilir. O halde her $n \geq n_0(\varepsilon)$ ve her $p \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon$$

elde edilir. Tanım 2.6.6 gereği $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ serisi D'de mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Örnek 2.6.1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k\sqrt{k+1}}$ serisinin $|z| \leq 1$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu gösterelim.

$$f_k(z) = \frac{z^k}{k\sqrt{k+1}}$$

diyelim. $|z| \leq 1$ olduğundan,

$$\left|f_k(z)\right| = \left|\frac{z^k}{k\sqrt{k+1}}\right| = \frac{|z|^k}{k\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{k\sqrt{k+1}}$$

yazılabilir. Ayrıca $\sqrt{k} < \sqrt{k+1}$'dir. Bu eşitsizlik ters çevrilirse $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$ olur. Buradan da eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{k}$ ile çarpılırsa $\frac{1}{k\sqrt{k+1}} < \frac{1}{k^{3/2}}$ elde edilir.

Böylece $M_k = \dfrac{1}{k^{3/2}}$ olup $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{3/2}}$ serisi yakınsak olduğundan Weierstrass M-Kriterinden dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k\sqrt{k+1}}$ serisi $|z| \le 1$'de düzgün yakınsaktır.

2.7. Kuvvet Serileri

Kuvvet serileri kompleks terimli serilerin bir özel halidir.

Tanım 2.7.1: $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ kompleks sabitler olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

biçimindeki serilere ***kuvvet serisi*** denir.

Tanım 2.7.2: Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ kuvvet serisi verilsin. Eğer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (z_1 - z_0)^k$$

kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise verilen seri z_1 noktasında ***yakınsaktır*** denir.

Not: $z - z_0 = w$ denirse bütün kuvvet serileri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ formunda daima yazılabilir.

Tanım 2.7.3: $f : D \to \mathbb{C}$

$$z \to f(z)$$

bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \ge n_0$ olduğunda her $z \in D$ için

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - f(z) \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ serisi D'de $f(z)$'ye ***düzgün yakınsaktır*** denir.

Lemma 2.7.1 (Kök Kriteri): Pozitif terimli $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi için $R = \limsup_{k\to\infty} (a_k)^{1/k}$ olsun. Eğer $R < 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır. Eğer $R > 1$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi ıraksaktır. Eğer $R = 1$ ise kök kriteri sonuç vermez.

İspat: Bu Lemma'nın ispatı Temel Kompleks Analiz kitaplarında bulunabilir.

Aşağıdaki teoremlerin ispatı Temel Kompleks Analiz kitaplarında bulunabilir.

Teorem 2.7.1: Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisi $|z - z_0| = R$'deki z noktalarında yakınsak ise seri

$$D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

bölgesinde mutlak yakınsak, $D(z_0, R)$'nin her kapalı alt diski üzerinde düzgün yakınsak ve bu nedenle de $D(z_0, R)$'nin her bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.7.2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kuvvet serisi verilsin ve

$$\gamma = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} \quad , \quad R = 1/\gamma$$

olsun. Bu durumda $|z| < R$ 'deki her bir z için seri mutlak yakınsaktır. $|z| > R$ için seri ıraksaktır. Ayrıca $0 < r < R$ ise o zaman $|z| \le r$ 'deki tüm z 'ler için seri mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Not (Limit Supremum): $(\alpha_n)_1^\infty$ reel sayıların bir dizisi olsun. N, yakınsak alt dizilerin tüm limitlerinin kümesini göstersin. O zaman α_n 'nin limit supremumu, $\sup N$ şeklinde tanımlanır ve

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n$$

şeklinde gösterilir. Bu durumda α_n üstten sınırlı değildir. Dolayısıyla

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n = +\infty$$

dir.

Teorem 2.7.3 (Taylor Teoremi): $f(z)$ fonksiyonu z_0 merkezli r_0 yarıçaplı bir γ_0 çemberi üzerinde analitik ise bu durumda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

dir.

Sonuç 2.7.1:

(a) Her analitik fonksiyon yakınsak bir kuvvet serisi ile tanımlanabilir.

(b) Her yakınsak kuvvet serisi bir analitik fonksiyon tanımlar.

(c) Farklı kuvvet serileri farklı analitik fonksiyonlar tanımlar.

2.8. Singülerliklerin Sınıflandırılması

Laurent açılımı, singülerliğe sahip fonksiyonların serisel gösteriliminde ortaya çıkar. Bu da bizi, kompleks analizin temel sonuçlarından biri olan Cauchy Rezidü Teoremine götürür.

Tanım 2.8.1: Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu, bir z_0 noktası hariç, z_0'ın en az bir komşuluğunda analitik ise z_0'a $f(z)$'nin ***ayrık aykırı noktası*** denir.

Eğer $f(z)$ kompleks fonksiyonu bir

$D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > r \}$

bölgesi üzerinde analitik, fakat $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, $z = 0$'da ayrık aykırılığa sahip ise f'nin $z = \infty$'da bir ***ayrık aykırılığı*** vardır denir.

Diğer taraftan $f(z)$, z_0 hariç z_0'ın en az bir komşuluğundaki her nokta sıfırdan farklı ve z_0'da sıfır oluyorsa (yani $f(z_0) = 0$ ise) z_0'a $f(z)$'nin ***ayrık bir sıfır yeridir*** denir.

O halde fonksiyonların ayrık olmayan sıfır yerleri de vardır. Örneğin, sürekli reel değerli bir f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon $x = 0$'da ayrık olmayan bir sıfır yerine sahiptir.

Örnek 2.8.1: $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$ fonksiyonunun $z = \mp 2i$ noktalarında ayrık aykırılıkları vardır. $f(z) = z^3 + 3$ fonksiyonunun da $z = \infty$'da bir ayrık aykırılığı vardır.

Uyarı: Analitik fonksiyonların, ayrık olmayan aykırı noktaları da vardır. Örneğin $f(z)=\dfrac{1}{\sin(\pi/z)}$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $z_n=\dfrac{1}{n}$ değerleri için ayrık aykırılığa sahiptir. Özel olarak $z=0$ noktası göz önüne alınırsa bu nokta ayrık olmayan bir aykırı noktadır. Çünkü n tamsayısını istediğimiz kadar büyük seçerek $z=0$'ın her komşuluğunda bir başka ayrık aykırı nokta olduğunu görebiliriz.

Teorem 2.8.1 (Laurent Teoremi): Bir f fonksiyonunun

$$D=\left\{z\in\mathbb{C}:R_1<\left|z-z_0\right|<R_2\right\}$$

halkasında tek değerli ve analitik olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $z\in D$ için $f(z)$, $z-z_0$'ın pozitif ve negatif kuvvetlerine göre D'de yakınsak bir seriye açılabilir. Yani,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

dir. Burada γ, D'de bulunan ve z_0 noktasını çevreleyen pozitif yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olmak üzere,

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \qquad , \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı bütün kompleks analiz kitaplarında bulunabilir.

Not: Bir holomorf fonksiyonunun Laurent serisi bir tektir.

Örnek 2.8.2: Eğer $D=\{z:|z|>1\}$ bölgesi ise bu bölgede

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$$

fonksiyonunun Laurent açılımı,

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z(1-1/z)}\right]=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

biçimindedir. Diğer yandan,

$$D=\{z:0<|z|<1\}$$

olsun. Bu halde, aynı

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}$$

fonksiyonunun bu D bölgesindeki Laurent açılımı

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)=-\frac{1}{z}\left(1+z+z^2+\cdots\right)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

olur.

Tanım 2.8.2: z_0, $f(z)$'nin ayrık aykırı noktası ve z_0 noktası komşuluğundaki Laurent açılımı

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

olsun. Eğer Laurent serisindeki tüm a_{-n} katsayıları sıfır ise bu durumda z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun ***kaldırılabilir ayrık aykırı noktası*** denir.

Teorem 2.8.2 (Riemann Teoremi): Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu, bir z_0 noktası hariç z_0'ın en az bir komşuluğunda tek değerli ve analitik olsun. Eğer $f(z)$, z_0'ın en az bir komşuluğunda sınırlı ise bu durumda z_0 noktası kaldırılabilir ayrık aykırı noktadır.

İspat: z noktası , merkezi z_0'da olan γ_1, γ_2 çemberlerinin belirttiği D bölgesinde bir nokta olsun. O halde

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

şeklinde yazılır. z noktasının γ_2'ye olan uzaklığını d ile gösterelim. $\left|f(z)\right|\leq M$ olduğuna göre

$$\lim_{R_2\to 0}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leq\lim_{R_2\to 0}\frac{1}{2\pi}\frac{M}{d}2\pi R_2=0$$

dır. Böylece bütün $z\neq z_0$'lar için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

olur. γ_1'in içindeki bütün z'ler için

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

yazarsak, $f_1(z)$, γ_1'in içinde analitiktir ve z_0 noktası hariç, γ_1'in içindeki diğer tüm noktalarda $f(z)=f_1(z)$'dir. Bu ise teoremi ispatlar.

Uyarı: Eğer $f(z)$ fonksiyonu, z_0'da kaldırılabilir bir ayrık aykırı noktaya sahipse tanım gereği

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

dir. Burada $f(z_0)=a_0$ yazılırsa $f(z)$, z_0'da analitik olur. Başka bir ifade ile "$f(z)$'nin , z_0'da kaldırılabilir bir ayrık aykırı noktaya sahip olması için gerek ve yeter koşul eğer $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ olarak tanımlanırsa $f(z)$, z_0'da analitik olur" demektir.

Örnek 2.8.3: $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$, $z_0=0$ 'da analitik değildir. Ancak $z\neq 0$ özelliğindeki tüm z 'ler için $f(z)$ analitiktir. O halde $z_0=0$, $f(z)$ için bir ayrık aykırı noktadır. $z_0=0$ 'ın en az bir komşuluğunda bu fonksiyonun Laurent açılımı

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

dir. Bu durumda

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)$$

olur. Dolayısıyla $z_0=0$ kaldırılabilir bir ayrık aykırı noktadır. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1=f(0)$ olarak alınırsa $f(z)$, $z_0=0$ 'da analitik olur.

Tanım 2.8.3: z_0, $f(z)$ 'nin ayrık aykırı noktası olsun. Eğer Laurent açılımında negatif kuvvetlerin sayısı yalnız sonlu sayıda terim içeriyorsa yani,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{k}a_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad , \quad a_{-k}\neq 0$$

veya

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

ise bu durumda $z=z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun ***k. mertebeden kutup noktası*** veya ***kutup yeri*** denir. Özel olara $k=1$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun ***basit kutup noktasıdır*** denir.

Teorem 2.8.3: Eğer $z=z_0$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası ise $z\to z_0$ için $|f(z)|\to\infty$ 'dir.

İspat:

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n}\right| = \left|z-z_0\right|^{-k}\left|\sum_{n=1}^{k} a_{-n}\left(z-z_0\right)^{k-n}\right|$$
$$\geq \left|z-z_0\right|^{-k}\left|\left|a_{-k}\right| - \sum_{n=1}^{k-1}\left|a_{-n}\right|\left|z-z_0\right|^{k-n}\right|$$

dır. Şimdi $z \to z_0$ için ikinci çarpan $\left|a_{-k}\right|$'ya yakınsaktır. O halde

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n}\right| \to \infty$$

olur. Bu ise teoremi ispatlar.

Örnek 2.8.4: $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ fonksiyonunu ele alalım. $z_0 = 1$ noktası ayrık aykırı noktadır. $f(z)$ fonksiyonunun Laurent açılımındaki negatif kuvvetlerine bakalım. e^z fonksiyonunun Taylor açılımı

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

şeklindedir. $z-1=u$ olsun. Bu durumda

$$f(z) = f(1+u) = \frac{e^{2u+2}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2u)^n}{n!} = e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n u^{n-3}}{n!} = e^2\left[\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^2}+\frac{2}{u}+\cdots\right]$$
$$= e^2\left[\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}(z-1)+\cdots\right]$$

olur. Dolayısıyla $z_0 = 1$, $3.$ mertebeden kutup noktasıdır.

Tanım 2.8.4: z_0, $f(z)$'nin ayrık aykırı noktası olsun. Eğer Laurent açılımında negatif kuvvetlerin sayısı sonsuz çoklukta ise yani,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\left(z-z_0\right)^{-n}$$

yazılışında a_{-n} katsayılarından sonsuz çokluktakiler sıfırdan farklıysa bu durumda $z = z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun ***esas ayrık aykırı noktası*** denir.

Teorem 2.8.4 (Casorati –Weierstrass Teoremi): $f(z)$, z_0'da esas ayrık aykırı noktaya sahip olsun. Bu durumda w_0, keyfi bir kompleks sabit olmak üzere z_0'ın her komşuluğunda $|f(z) - w_0|$ ifadesi yeterince küçük kılacak şekilde z noktaları vardır.

İspat: Teoremin iddiasının aksini kabul edelim. Bu durumda z_0'ın her komşuluğundaki z'ler için

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon_0$$

olacak şekilde w_0 ve ε_0 sayıları vardır. Bu

$$|g_1(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$$

anlamına gelir. Burada

$$g_1(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

dir. Kaldırılabilir ayrık aykırı noktalar hakkındaki Riemann Teoremi gözönüne alındığında z_0'daki g_1'in ayrık aykırılığı kaldırılabilirdir. Bu durumda

$$g_1(z) = (z - z_0)^k g_2(z)$$

yazılabilir. Burada g_2 holomorftur ve z_0'ın bir komşuluğunda sıfırdan farklıdır. Bu nedenle z_0'ın bir komşuluğunda

$$g_3 = \frac{1}{g_2}$$

holomorftur. Burada

$$g_3(z_0) = \frac{1}{g_2(z_0)} \neq 0$$

dır. Sonuç olarak

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g_1(z)} = w_0 + \frac{g_3(z)}{(z - z_0)^k}$$

bağıntısı elde edilir. Buradan da görülüyor f 'in Laurent serisi, negatif üslü sonlu çoklukta terime sahiptir. Bu da z_0'ın esas ayrık aykırı nokta olması hipoteziyle çelişir.

Şimdi ispatı, ileri düzeydeki Kompleks Analiz kitaplarında bulunabilecek önemli bir teoremin ifadesini verelim:

Teorem 2.8.5 (Picard Teoremi): z_0, f fonksiyonunun esas ayrık aykırı noktası ve $D_{(z_0,r)}$, z_0 noktasının yeterince küçük delinmiş bir komşuluğu olsun. Bu durumda bir değer hariç tüm $w \in \mathbb{C}$ değerleri için $f(z) = w$ denkleminin $D_{(z_0,r)}$ komşuluğunda sonsuz tane çözümü vardır.

Örnek 2.8.5: $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ fonksiyonunu ele alalım. $z_0 = 0$ noktası ayrık aykırı noktadır. $\sin z$ fonksiyonunun Taylor açılımı

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

şeklindedir. Bu durumda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \cdots = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \cdots\right)$$

olur. Dolayısıyla negatif kuvvetler sonsuz tane olduğundan $z_0 = 0$, esas ayrık aykırı noktadır.

Tanım 2.8.5: Laurent açılımındaki a_{-1} katsayısına $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki ***rezidüsü*** denir.

Tanım 2.8.6: Bir f fonksiyonunun bir D bölgesindeki aykırılıkları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna D'de bir ***meromorf fonksiyondur*** denir.

Teorem 2.8.6: $f(z)$, D bölgesinde z_0 noktası hariç, analitik bir fonksiyon ve $z_0 \in D$ noktası da bu fonksiyonun ayrık aykırı noktası olsun.

(1) z_0 noktasının kaldırılabilir ayrık aykırı nokta olması için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki üç koşuldan herhangi birisinin gerçeklenmesidir:

(a) $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının delinmiş komşuluğunda sınırlıdır.

(b) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ limiti vardır.

(c) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ dır.

(2) z_0 noktasının $f(z)$ fonksiyonunun basit kutup noktası olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

limiti var, bu limit sıfırdan farklı ve bu limitin $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü olan a_{-1} değerine eşit olmasıdır. Yani,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1}$$

dir.

(3) z_0 , $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası (z_0, kaldırılabilir ayrık aykırı bir nokta da olabilir) olsun. Kutup noktasının mertebesi de en fazla k kadar olması için gerek ve yeter koşul, aşağıdaki üç koşuldan herhangi birisinin gerçeklenmesidir.

(a) $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının delinmiş komşuluğunda

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^k}$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti ve $k \geq 1$ tamsayısı vardır.

(b) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0$ dır.

(c) $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ limiti vardır.

(4) $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki kutup noktasının mertebesinin $k \geq 1$ olması için gerek ve yeter koşul, $z \in D_{(z_0,r)}$ ve $z \neq z_0$ için

$$D_{(z_0,r)} - \{z_0\} \subset D \quad , \quad G(z_0) \neq 0$$

ve

$$f(z) = \frac{G(z)}{(z - z_0)^k}$$

olacak biçimde, z_0 noktasının bir $D_{(z_0,r)}$ komşuluğunda tanımlı analitik bir $G(z)$ fonksiyonunun olmasıdır.

İspat: Bu teoremin bazı kısımlarının ispatı aşikar olmakla birlikte teoremin tamamının ispatı [1] nolu kaynakta vardır.

Lemma 2.8.1: $f(z)$ analitik fonksiyon olsun. z_0, $f(z)$'nin bir sıfır yeri olmak üzere $f(z)$ sabit değilse z_0 ayrık sıfır yeridir.

İspat: $f(z)$'nin z_0 noktası komşuluğundaki kuvvet serisi gösterilimi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\zeta - z_0)^n \qquad \textbf{(2.8.1)}$$

olsun. f , özel olarak sıfır olmamak koşuluyla en azından bir katsayı sıfırdan farklı olmalıdır. a_k sıfırdan farklı ilk katsayı olsun. Bu takdirde z_0'ın bir komşuluğunda f fonksiyonu

$$f(\zeta) = (\zeta - z_0)^k \left(a_k + a_{k+1}(\zeta - z_0) + \cdots\right) \qquad \textbf{(2.8.2)}$$

şeklinde yazılabilir. $a_k \neq 0$ ilk katsayı olması nedeniyle

$$a_k + a_{k+1}(\zeta - z_0) + \cdots$$

kuvvet serisi, z_0'ın yeterince küçük bir komşuluğunda sıfırdan farklı olan sürekli bir fonksiyon tanımlar. Bu durumda (2.8.2)'deki gösterilim şekli z_0 noktasının $f(z)$'nin bir ayrık sıfır yeri olduğunu gösterir.

Kuvvet serisinin gösterilimindeki a_n katsayıları, f'nin z_0'daki türevi olarak ifade edilebilir. Yani,

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dz^n}(z_0)$$

dir. Eğer a_k , (2.8.1)'de gösterilen kuvvet serisindeki sıfırdan farklı ilk katsayı ise bu takdirde, $\frac{d^k f}{dz^k}(z_0) \neq 0$ olduğunda z_0,

$$f(z_0) = 0, \; \frac{df}{dz}(z_0) = 0, \ldots, \; \frac{d^{k-1} f}{dz^{k-1}}(z_0) = 0$$

elde edilir. Bu durumda z_0, k. mertebeden bir sıfır yeri olarak isimlendirilir.

Teorem 2.8.7: f fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda analitik olsun. f fonksiyonunun z_0 noktasında $k.$ mertebeden sıfır yerine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $g(z_0) \neq 0$ ve g, z_0'da analitik olmak üzere, z_0 ın bir komşuluğunda f fonksiyonunun

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

şeklinde yazılabilmesidir.

İspat: f, z_0'da analitik ve z_0 notası da $k.$mertebeden sıfır yeri olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n &= (z - z_0)^k \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z - z_0) + \cdots \right] \\ &= (z - z_0)^k g(z) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$g(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$$

ve g'nin z_0'ın bir komşuluğunda analitik olduğu görülür.Tersine, eğer

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

ise, f'nin analitikliği ve z_0 noktasının da $k.$ mertebeden sıfır yeri olduğu açıktır.

Teorem 2.8.8: f, bir z_0 noktasında analitik ve $f(z_0) \neq 0$ olsun. Bu takdirde $f(z)$'nin sıfır değerini almadığı en az bir $D_{(z_0,\varepsilon)}$ komşuluğu vardır.

İspat: $f(z)$, z_0'da analitik ve $f(z_0) \neq 0$ olsun. z_0'ın en az bir $D_{(z_0,\varepsilon)}$ komşuluğunda $f(z)$'nin hiç bir sıfır yerinin olmadığını gösterelim. Bunun için aksini kabul edelim. Her $\varepsilon_n > 0$ için $D_{(z_0,\varepsilon_n)}$ komşuluğunda f'nin bir sıfır yeri varsa

f'nin z_0'a yakınsayan sıfır yerlerinin bir $(z_n)_1^\infty$ dizisi vardır. Dizisel süreklilik tanımı gereği ve her $f(z_n)=0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = f(z_0) = 0$$

olur. Bu ise $f(z_0) \neq 0$ varsayımı ile çelişir.

Sonuç 2.8.1: f analitik fonksiyonunun sıfır yerleri ayrık noktalardır.

Sonuç 2.8.2: f, z_0'ın bir komşuluğunda analitik olsun. f'nin z_0'da $k.$ mertebeden sıfır yerine sahip olması için gerek ve yeter koşul, $1/f$'nin z_0'da $k.$ mertebeden kutup noktasına sahip olmasıdır.

2.9. Rezidü ve Hesaplama Teknikleri

Kapalı bir eğrinin içindeki bütün noktalarda analitik ve eğrinin üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun bu eğri üzerinden integral değerinin sıfır olduğunu Cauchy İntegral Teoremi'nden biliyoruz. Ancak bir f analitik fonksiyonunun kapalı eğri içerisinde aykırı noktaları bulunuyorsa, bu eğri üzerinden alınan integralin değeri sıfır olmayabilir. Gerçekte bu integralin değeri, fonksiyonun ayrık aykırı noktalardaki rezidüleri toplamının $2\pi i$ katıdır.

$f(z)$'nin z_0 ayrık aykırı noktasındaki rezidüsünü $\operatorname{Re}z(f, z_0) = a_{-1}$ şeklinde gösterelim.

Not: z_0, basit kutup noktası ise bu takdirde

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z)$$

dir.

Teorem 2.9.1: γ, basit kapalı bir eğri ve z_0, γ'nın içinde $f(z)$ fonksiyonunun bir ayrık aykırı noktası yani $f(z)$, z_0'ın dışında γ'nın içinde ve üzerinde analitik olsun. Bu durumda rezidü tanımından

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}$$

dir.

İspat: f nin z_0 noktası komşuluğundaki Laurent açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

olsun. Ayrıca

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & , \quad n = -1 \\ 0 & , \quad n \neq -1 \end{cases}$$

olduğuna göre

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} (z - z_0)^n\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 2\pi i a_{-1}$$

olur.

Teorem 2.9.2 (Cauchy Rezidü Teoremi): γ basit kapalı bir eğri olsun. $f(z), \gamma$'nın içinde ve üzerinde sonlu sayıda $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ayrık aykırı noktaları dışında tek değerli ve analitik ise bu durumda

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z(f, z_k)$$

dır.

İspat: Her z_k noktasını, merkezi z_k'da olan γ_k çemberleri ile çevirelim. γ_k çemberleri yeterince küçük ve birbirlerini kesmeyecek şekilde tamamıyla γ'nın içinde olsun. Bu durumda $f(z)$, γ ve γ_k'ların belirttiği bölgede tek değerli ve analitik olduğundan Cauchy Teoremi gereği,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$$

yazılabilir. Bu durumda Teorem 2.9.1 gereği,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Re} z(f, z_1) + 2\pi i \operatorname{Re} z(f, z_2) + \cdots + 2\pi i \operatorname{Re} z(f, z_n)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z(f, z_k)$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi bir fonksiyon için kaldırılabilir ayrık aykırı noktaların bazı temel özelliklerini inceleyelim:

Teorem 2.8.6'dan da görüldüğü gibi, $f(z)$ fonksiyonunun bir z_0 noktasında kaldırılabilir ayrık aykırı noktaya sahip olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

olmasıdır. Şimdi bu teoremden daha kullanışlı olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.9.3: $g(z)$ ve $h(z)$ analitik iki fonksiyon olsun. z_0 noktası bu iki fonksiyonun aynı mertebeden bir sıfır yeri ise bu taktirde z_0 noktası

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

fonksiyonunun kaldırılabilir ayrık aykırı noktasıdır.

İspat: $G(z_0) \neq 0$ ve $H(z_0) \neq 0$ olmak üzere, sırasıyla

$g(z)=(z-z_0)^k G(z)$ ve $h(z)=(z-z_0)^k H(z)$ olacak biçimde G ve H gibi analitik iki fonksiyon vardır. O halde,

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{G(z)}{H(z)}$$

fonksiyonu z_0 noktasında analitik ve limiti vardır. Bu nedenle Teorem 2.8.6 gereği, $f(z)$, z_0 noktasında kaldırılabilir ayrık aykırı noktaya sahiptir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi bir kompleks fonksiyonun kutup yerlerini ve bu yerlerdeki rezidülerin nasıl hesaplandığını ele alalım.

Teorem 2.8.6 gereği,

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

limiti var ve bu limit sıfırdan farklı ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun basit kutup noktasıdır ve bu noktadaki rezidüsü de

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=a_{-1}$$

dir. Şimdi bu teoremden daha kullanışlı olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.9.4: $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları bir z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$ ve $h'(z_0)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$$

fonksiyonunun z_0 da basit kutup noktası vardır ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re} z(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

dır.

İspat:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}g(z)\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)}=g(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\dfrac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}$$

$$=g(z_0)\frac{1}{h'(z_0)}\neq 0$$

dır. Böylece Teorem 2.8.6'daki (2) özelliği gereği, $f(z)$'nin, z_0'da basit kutup noktası vardır ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re}z(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

dır.

Teorem 2.9.5: $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu verilsin. z_0 noktasında $g(z)$'nin k. mertebeden, $h(z)$'nin de $(k+1)$. mertebeden bir sıfır yeri olsun. Bu takdirde z_0 noktası $f(z)$'nin basit kutup noktasıdır ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re}z\left(\frac{g}{h},z_0\right)=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

dır.

İspat: Varsayım gereği,

$$g(z_0)=g'(z_0)=\ldots=g^{(k-1)}(z_0)=0,\ g^{(k)}(z_0)\neq 0$$

ve

$$h(z_0)=h'(z_0)=\ldots=h^{(k)}(z_0)=0,h^{(k+1)}(z_0)\neq 0$$

dır. Dolayısıyla $G(z)$ ve $H(z)$ iki analitik fonksiyon olmak üzere Taylor teoreminden,

$$g(z)=\frac{(z-z_0)^k}{k!}g^{(k)}(z_0)+(z-z_0)^{k+1}G(z)$$

ve

$$h(z)=\frac{(z-z_0)^{k+1}}{(k+1)!}h^{(k+1)}(z_0)+(z-z_0)^{k+2}H(z)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{\dfrac{g^{(k)}(z_0)}{k!}+(z-z_0)G(z)}{\dfrac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}+(z-z_0)H(z)}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanının $z \to z_0$ için limitleri alınırsa

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)}=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

olduğu görülür. Teorem 2.8.6'daki (2) özelliği gereği, $f(z)$'nin z_0'da basit kutup noktası vardır ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re} z(f,z_0)=(k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bir önceki kesimde katlı kutup yerlerini ve bazı basit özelliklerini incelemiştik. Şimdi bu noktalardaki rezidülerin nasıl hesaplanacağını görelim.

Teorem 2.9.6: $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu verilsin. $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları bir z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)=0$ ve $h''(z_0)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(z)$'nin z_0'da 2. mertebeden kutup yeri vardır ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re} z\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{\left[h''(z_0)\right]^2}$$

dir.

İspat: Varsayım gereği $g(z_0) \neq 0$ ve $h(z) = (z - z_0)^2 H(z)$ dir. Dolayısıyla $H(z)$, z_0'ın komşuluğunda analitik ve $H(z_0) \neq 0$ olduğundan $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2 H(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^2}\frac{g(z)}{H(z)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g(z_0) \neq 0$ ve $H(z_0) \neq 0$ olduğundan $f(z)$'nin z_0'da 2.mertebeden kutup yeri vardır. O halde z_0, $f(z)$'nin 2. mertebeden kutup yeri olduğuna göre z_0'ın delinmiş komşuluğunda

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \qquad \textbf{(2.9.1)}$$

biçiminde yazılabilir. Diğer yandan $h(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları z_0 noktasında analitik olduklarından z_0'ın bir komşuluğunda Taylor açılımları sırasıyla

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \frac{g''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \cdots \qquad \textbf{(2.9.2)}$$

ve

$$h(z) = \frac{h''(z_0)}{2}(z - z_0)^2 + \frac{h'''(z_0)}{6}(z - z_0)^3 + \cdots$$

olur. Varsayım gereği $g(z) = h(z)f(z)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(z) &= h(z)\left[\frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots\right] \\ &= \frac{a_{-2}h''(z_0)}{2} + \left[\frac{a_{-1}h''(z_0)}{2} + \frac{a_{-2}h'''(z_0)}{6}\right](z - z_0) + \cdots \end{aligned} \qquad \textbf{(2.9.3)}$$

dır. Böylece (2.9.2) ve (2.9.3)'den

$$g(z_0)=\frac{a_{-2}h''(z_0)}{2}, \qquad g'(z_0)=\frac{a_{-2}h'''(z_0)}{6}+\frac{a_{-1}h''(z_0)}{2}$$

elde edilir. Bu son eşitliklerinden

$$a_{-1}=\operatorname{Re}z\left(f,z_0\right)=\operatorname{Re}z\left(\frac{g}{h},z_0\right)=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{\left[h''(z_0)\right]^2}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.9.1: $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ fonksiyonunun $z_0=1$ noktasındaki rezidüsünü bulalım.

$g(z)=e^z$ ve $h(z)=(z-1)^2$ denirse, $g(1)=e\neq 0$, $h(1)=0$, $h'(z)=2(z-1)$ ve $h'(1)=0$ ve $h''(1)=2\neq 0$ olduğundan $z_0=1$ noktası $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$'nin 2. mertebeden kutup yeri olur ve

$$\operatorname{Re}z\left(f,z_0\right)=2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)}-\frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{\left[h''(z_0)\right]^2}=2\cdot\frac{e}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{e\cdot 0}{4}=e$$

elde edilir.

Sonuç 2.9.1: $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu verilsin. $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları bir z_0 noktasında analitik olsun. $g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$, $h(z_0)=0$, $h'(z_0)=0$, $h''(z_0)=0$ ve $h'''(z_0)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda z_0 noktası $f(z)$'nin 2. mertebeden kutup yeridir ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re}z\left(\frac{g}{h},z_0\right)=3\frac{g''(z_0)}{h'''(z_0)}-\frac{3}{2}\frac{g'(z_0)h^{(4)}(z_0)}{\left[h'''(z_0)\right]^2}$$

dır.

Örnek 2.9.2: $f(z)=\dfrac{e^{z}-1}{\sin^{3} z}$ fonksiyonunun $z_0=0$ noktasındaki rezidüsünü bulalım.

$g(z)=e^{z}-1$ ve $h(z)=\sin^{3} z$ denirse, $g(0)=0$, $g'(0)=1\neq 0$, $h(0)=0$, $h'(z)=3\sin^{2} z\cdot\cos z$, $h'(0)=0$, $h''(z)=6\sin z\cdot\cos^{2} z-3\sin^{3} z$, $h''(0)=0$, $h'''(z)=6\cos^{3} z-12\sin^{2} z\cdot\cos z-9\sin^{2} z\cdot\cos z$, $h'''(0)=6\neq 0$ olduğundan $z_0=0$ noktası $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ nin 2. mertebeden kutup yeridir ve

$$\operatorname{Re}z\left(f,z_0\right)=3\frac{g''\left(z_0\right)}{h'''\left(z_0\right)}-\frac{3}{2}\frac{g'\left(z_0\right)h^{(4)}\left(z_0\right)}{\left[h'''\left(z_0\right)\right]^{2}}=3\cdot\frac{1}{6}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1\cdot 0}{36}=\frac{1}{2}$$

bulunur.

Teorem 2.9.7: $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında bir ayrık aykırı noktaya sahip olsun. $k\geq 0$ sayısını, $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{k} f(z)$ limitini mevcut yapan en küçük pozitif tamsayı olarak ele alalım. Bu durumda, z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun ya kaldırılabilir ayrık aykırı noktası ya da $k.$ mertebeden kutup noktasıdır. Eğer

$$\psi(z)=(z-z_0)^{k} f(z)$$

alınırsa $\psi(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik olacak biçimde tek olarak elde edilir. Böylece $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re}z(f,z_0)=\frac{\psi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

dır.

İspat: Varsayım gereği $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{k} f(z)$ limitinin mevcut olduğu verildiğine göre Teorem 2.8.6'daki (1) özelliği gereği z_0 noktası $\psi(z)=(z-z_0)^{k} f(z)$

fonksiyonunun kaldırılabilir ayrık aykırı noktası olur. Dolayısıyla bu fonksiyon, z_0 noktasının komşuluğunda Taylor serisine açılabilir.

$$\begin{aligned}\psi(z)=(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+a_{-k+2}(z-z_0)^2+\cdots+\\ +a_{-1}(z-z_0)^{k-1}+a_0(z-z_0)^k+\cdots\end{aligned} \qquad \textbf{(2.9.4)}$$

yazılabilir. Buradan,

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

bulunur. Eğer $a_{-k}=0$ ise

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k-1}f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[a_{-k+1}+a_{-k+2}(z-z_0)+\cdots\right]=a_{-k+1}$$

olur ve $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k-1}f(z)$ limiti mevcuttur. Bu da varsayımda verilen k sayısının tanımı ile bir çelişkidir. O halde $a_{-k}\neq 0$ ve $f(z)$'nin z_0'da k. mertebeden kutup noktası vardır. (2.9.4)'deki formülden $\psi(z)$, z_0'da analitiktir.(2.9.4)'deki formülde $\psi(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında $(k-1)$ kere türevi alınırsa

$$\psi^{(k-1)}(z_0)=(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)\cdots 1\cdot a_{-1}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\operatorname{Re}z(f,z_0)=\frac{\psi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

dir.

Örnek 2.9.3: $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$ fonksiyonunun $z_0=1$ noktasındaki rezidüsünü bulalım.

$z_0=1$ noktası $f(z)$ fonksiyonunun 3. mertebeden kutup noktasıdır. Dolayısıyla

$$(z-1)^3 f(z) = \frac{z^2}{z+1} = \psi(z)$$

dir. Buna göre

$$\psi'(z) = \frac{2z(z+1) - z^2}{(z+1)^2} = \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2} = 1 - \frac{1}{(z+1)^2}$$

ve

$$\psi''(z) = \frac{2}{(z+1)^3}$$

olur. $k = 3$ olduğundan

$$\operatorname{Re} z\left(\frac{z^2}{(z-1)^3 (z+1)}, 1 \right) = \frac{\psi''(1)}{(3-1)!} = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

bulunur.

Daha genel olarak bu tür rezidü hesaplarını aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz:

Sonuç 2.9.2: $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ fonksiyonu verilsin. $g(z)$ ve $h(z)$ fonksiyonları bir z_0 noktasında analitik olsun.

$$g(z_0) \neq 0 \quad , \quad h(z_0) = h'(z_0) = \ldots = h^{(k-1)}(z_0) = 0 \text{ ve } h^{(k)}(z_0) \neq 0$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, z_0 noktası $f(z)$'nin k. mertebeden kutup yeridir ve bu noktadaki rezidüsü,

$$\operatorname{Re}z\left(\frac{g}{h},z_0\right)=\left[\frac{k!}{h^{(k)}(z_0)}\right]^k\times\begin{vmatrix}\frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g(z_0)\\ \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & 0 & \cdots & 0 & g'(z_0)\\ \frac{h^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} & \cdots & 0 & \frac{g''(z_0)}{2!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ \frac{h^{(2k-1)}(z_0)}{(2k-1)!} & \frac{h^{(2k-2)}(z_0)}{(2k-2)!} & \frac{h^{(2k-3)}(z_0)}{(2k-3)!} & \cdots & \frac{h^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} & \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}\end{vmatrix}$$

dır.

Örnek 2.9.4: $f(z)=\dfrac{e^z}{\sin^3 z}$ fonksiyonunun $z_0=0$ noktasındaki rezidüsünü bulalım.

$k=3$ olduğu görülmektedir. $g(z)=e^z$ ve $h(z)=\sin^3 z$ diyelim. Böylece

$h'''(z_0)=h'''(0)=6$, $h^{(4)}(z_0)=h^{(4)}(0)=0$, $h^{(5)}(z_0)=h^{(5)}(0)=-60$, $\dfrac{h'''(0)}{3!}=1$,

$\dfrac{h^{(4)}(0)}{4!}=0$ ve $\dfrac{h^{(5)}(0)}{5!}=-\dfrac{1}{2}$ olur. Ayrıca $g(z_0)=g(0)=1$, $g'(z_0)=g'(0)=1$ ve

$\dfrac{g''(z_0)}{2!}=\dfrac{g''(0)}{2!}=\dfrac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\operatorname{Re}z\left(\frac{g}{h},0\right)=\left(\frac{3!}{6}\right)^3\times\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=1$$

olarak bulunur.

2.10. Argümenlerin Değişimi Prensibi

Rezidü teoreminin uygulamalarının önemli bir örneği olan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz$$

integralini göz önüne alalım.

Tanım 2.10.1: $f(z_0)=A$ olacak şekilde z_0 noktasına $f(z)$'nin ***A yeridir*** denir.

Burada $f(z)$, D bölgesinde tek değerli bir fonksiyondur ve kutup noktaları hariç hiçbir ayrık aykırı noktası yoktur. A keyfi bir kompleks sayıdır. $\varphi(z)$, aynı bölgede tek değerli ve analitik bir fonksiyondur. γ, D bölgesi içinde düzgün kapalı Jordan eğrisidir. Ayrıca γ eğrisi üzerinde $f(z)$'nin ayrık aykırı noktaları ve A yerleri bulunmasın.

$$F(z)=\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}$$

nin singülerlikleri sadece $f(z)$'nin kutup yerleri ve $f(z)$'nin A yerleridir.

$a_1,\ldots,a_m$, γ'nın içindeki $f(z)$'nin A yerleri ve $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, bu A yerlerinin mertebeleri olsun. $b_1,\ldots,b_n$, γ'nın içindeki $f(z)$'nin kutup noktaları ve $\beta_1,\ldots,\beta_n$ ler de bu kutup noktalarının mertebeleri olsun. a_j noktasının bir komşuluğunda $\varphi(z)$ ve $f(z)$ fonksiyonları

$$\varphi(z)=\varphi(a_j)+\cdots$$

$$f(z)-A=c_{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}+\cdots$$

$$f'(z)=c_{\alpha_j}\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}+\cdots$$

$$F(z)=\left[\varphi(a_j)+\cdots\right]\frac{c_{\alpha_j}\alpha_j\left(z-a_j\right)^{\alpha_j-1}+\cdots}{c_{\alpha_j}\left(z-a_j\right)^{\alpha_j}+\cdots}$$

$$=\frac{\alpha_j}{z-a_j}\left[\varphi(a_j)+\cdots\right]\frac{1+\cdots}{1+\cdots}=\frac{\alpha_j}{z-a_j}\left[\varphi(a_j)+\cdots\right]=\frac{\alpha_j\varphi(a_j)}{z-a_j}+\cdots$$

açılımlara sahiptir.

Yazmadığımız terimler $(z-a_j)$'nin daha yüksek dereceden kuvvetleridir. Böylece $z=a_j$, $F(z)$'nin basit kutup yerleridir ve bu noktadaki rezidü $\alpha_j\varphi(a_j)$'dir. Eğer $\varphi(a_j)=0$ ise bu rezidü sıfıra eşittir. Bu durumda a_j, $F(z)$'nin bir kutup noktası değildir.

Şimdi $f(z)$'nin b_j kutup noktalarına dönelim. Bu noktadaki açılımları,

$$\varphi(z)=\varphi(b_j)+\cdots$$

$$f(z)-A=d_{-\beta_j}\left(z-b_j\right)^{-\beta_j}+\cdots$$

$$f'(z)=-\beta_j d_{-\beta_j}\left(z-b_j\right)^{-\beta_j-1}-\cdots$$

$$F(z)=\left[\varphi(b_j)+\cdots\right]\frac{-\beta_j d_{-\beta_j}\left(z-b_j\right)^{-\beta_j-1}-\cdots}{d_{-\beta_j}\left(z-b_j\right)^{-\beta_j}+\cdots}$$

$$=\frac{-\beta_j}{z-b_j}\left[\varphi(b_j)+\cdots\right]\frac{1+\cdots}{1+\cdots}=-\frac{\beta_j}{z-b_j}\left[\varphi(b_j)+\cdots\right]=-\frac{\beta_j\varphi(b_j)}{z-b_j}-\cdots$$

şeklinde yazılır. Böylece $z=b_j$, $F(z)$'nin basit kutup yeridir ve bu noktadaki rezidü $-\beta_j\varphi(b_j)$'dir. Eğer $\varphi(b_j)=0$ ise bu rezidü sıfıra eşittir. Rezidü teoremini

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz$$

integraline uygularsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\varphi(a_j)-\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi(b_j) \tag{2.10.1}$$

elde ederiz.

(2.10.1) eşitliğinin sağındaki ilk toplam $\varphi(z)$'nin, $f(z)$'nin A yerlerinde aldığı değerle ilgili bir toplamdır ve her terim, herbiri A yerlerinin mertebesi kadar birçok kez tekrarlanır. Bu ilk toplama dikkat edersek herbir terim φ'nin a_j noktalarında aldığı değeriyle a_j'nin mertebesi olan α_j tamsayısının çarpımlarından oluşmuştur. Burada a_j'ler $f(z)$'nin A yerleridir. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi(a_j)$$

için $f(z)$'nin A noktalarında $\varphi(z)$'nin değerlerinin toplamı olduğunu söyleyebiliriz. Benzer bir ifade ikinci toplam için de geçerlidir. Burada toplam, $f(z)$'nin kutup noktaları üzerinden alınmaktadır. Bunları şimdi şöyle özetleyebiliriz:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz$$

integrali, γ'nın içinde yer alan $f(z)$'nin A yerlerinde $\varphi(z)$'nin aldığı değerlerin toplamı ile γ'nın içinde yer alan $f(z)$'nin kutup noktalarında $\varphi(z)$'nin aldığı değerlerin toplamı arasındaki farka eşittir.

Burada yukarıdaki ifadenin iki özel durumu vardır.

(a) $\varphi(z) = z$ denirse

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz = \sum_{j=1}^{m}\alpha_j a_j - \sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j \qquad \textbf{(2.10.2)}$$

olur. Bu integral, γ'nın içindeki $f(z)$'nin A yerlerinin toplamı ile γ'nın içindeki bu fonksiyonun kutup noktalarının toplamı arasındaki farka eşittir.

(b) $\varphi(z) \equiv 1$ denirse

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-A}dz=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{j=1}^{n}\beta_j \qquad \textbf{(2.10.3)}$$

olur. Bu integral, γ'nın içindeki $f(z)$'nin A yerlerinin sayısı ile γ'nın içindeki kutup noktalarının sayısı arasındaki farka eşittir.

Eğer $A=0$ ise bu durumda A yerleri, $f(z)$'nin sıfır yerleridir. Eğer γ'nın içinde bunların sayısı N ve γ'nın içinde kutup noktalarının sayısı P ise bu takdirde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P \qquad \textbf{(2.10.4)}$$

elde edilir.

Eşitliğin sol tarafındaki integral, γ eğrisine göre $f(z)$'nin logaritmik rezidüsü olarak bilinir (Çünkü integrant $\ln\left[f(z)\right]$'nin türevidir).

Teorem 2.10.1: Bir $f(z)$ fonksiyonunun kapalı bir γ eğrisine göre logaritmik rezidüsü, $f(z)$'nin γ'nın içindeki sıfır yerlerinin sayısı ile kutup yerlerinin sayısı farkına eşittir.

Şimdi logaritmik rezidü kavramını biraz yorumlayalım. Bunun için önce

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{d}{dz}\left\{\ln\left[f(z)\right]\right\}dz$$

yazılışını göz önüne alalım.

γ üzerinde keyfi bir z_0 noktası alalım. Bu z_0 noktası integralin başlangıç ve bitiş noktası olsun. O zaman γ'nın içindeki bir z noktası pozitif yönde hareket ettiğinde $\ln\left[f(z)\right]$ sürekli değişir ve eğriyi tamamen katettikten sonra z_0 noktasındaki değeri, aynı noktada başlangıç değerinden farklı olur. Fakat aynı $f(z_0)$ için $\ln\left[f(z_0)\right]$'ın değerleri sadece $\arg f(z_0)$'da katetmeden önce ve sonra farklı değerler almasından dolayı değişiklik gösterir. Eğer $\arg f\left(z_0\right)$’ın başlangıç değerini Φ_0 ve $\arg f\left(z_0\right)$’ı katettikten sonraki değerini de Φ_1 ile gösterirsek

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\left\{\left[\ln\left|f\left(z_0\right)\right|+i\,\Phi_1\right]-\left[\ln\left|f\left(z_0\right)\right|+i\,\Phi_0\right]\right\}=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi}$$

olur.

Bu yüzden (2.10.4) eşitliğinden,

$$N-P=\frac{\Phi_1-\Phi_0}{2\pi} \qquad \textbf{(2.10.5)}$$

elde edilir. Eğer $\Phi_1-\Phi_0$, $\operatorname{var}_{\gamma}\arg f\left(z\right)$ ile ifade edilirse (Burada var ifadesi açıdaki değişme miktarı anlamına gelmektedir)

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\operatorname{var}_{\gamma}\arg f\left(z\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece yukarıdaki açıklamaları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

Not (Argümen Prensibi): Kapalı γ eğrisi içindeki $f(z)$’nin kutup ve sıfır yerlerinin sayısı arasındaki fark $\arg f\left(z\right)$’nin varyasyonuna eşittir. Bu fark, γ’nın içindeki bir z noktasında $f(z)$’nin pozitif yöndeki varyasyonunun 2π’ye bölümüne eşittir.

Bu durumu geometrik olarak aşağıdaki şekilde açıklayabiliriz:

z’ler γ eğrisi üzerinde pozitif yönde dolandığında $w=f(z)$’nin bitiş noktası kapalı bir γ' eğrisi çizer. z, γ çevresinde bir tam tur dolandığında $w=f(z)$’nin dolanma sayısını ν ile gösterelim. Bir tur pozitif yönde ise $+1$, negatif yönde ise -1 olarak ifade edilir. Bu durumda $\arg f\left(z\right)$’nin varyasyonu $2\pi\nu$ olur.

Tek değerli $f(z)$ fonksiyonunun bir kapalı γ eğrisi içinde bulunan kutup ve sıfır yerlerinin sayıları farkı; z 'nin γ üzerinde pozitif yönde bir tur dönmesi halinde $f(z)$'nin orijin çevresindeki dönme sayısı olan ν 'ye eşittir.

Özel olarak $f(z)$'nin, γ eğrisi içinde kutup yeri yoksa aşağıdaki durum ortaya çıkar:

Tek değerli $f(z)$ fonksiyonunun bir γ eğrisinin içinde bulunan sıfır yerlerinin sayısı; z 'nin γ üzerinde pozitif yönde bir tur dönmesi halinde $w = f(z)$ vektörünün orijin çevresindeki dönme sayısına eşit olur.

Argümen prensibi yardımıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.10.2 (Rouche Teoremi): $f(z)$ ve $\varphi(z)$, rektiflenebilen kapalı bir γ eğrisi içinde ve üzerinde tek değerli ve analitik fonksiyonlar olsun. γ 'nın üzerinde $|f(z)| > |\varphi(z)|$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $f(z)+\varphi(z)$'nin γ eğrisi içindeki sıfır yerlerinin sayısı, $f(z)$'nin sıfır yerleri sayısına eşittir.

İspat: $f(z)+\varphi(z)$'nin sıfır yerlerinin sayısını bulmak için argümen prensibini kullanmamız gerekir. Eğer bu toplamı γ üzerindeki noktalar için

$$f(z)+\varphi(z) = f(z)\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$$

şeklinde yazarsak (γ üzerindeki $|f(z)|$, $|\varphi(z)|$'den daha büyük olması nedeniyle $f(z)$, γ üzerinde sıfır yerini alamaz)

$$\arg\left[f(z)+\varphi(z)\right] = \arg f(z) + \arg\left[1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$$

olur. Fakat

$$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| < 1$$

dir. Bu yüzden, $1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ vektörünün bitiş noktası, yarıçapı ve merkezi 1 olan birim çember içinde yer alan kapalı eğriyi tam olarak kateder. Sonuç olarak, bahsedilen vektör, koordinatların orijini etrafında tek tur yapmaz ve z noktası γ'yı katettiğinde $\arg\left[1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right]$'nin varyasyonu sıfırdır. Böylece $\arg\left[f(z)+\varphi(z)\right]$ ile $\arg f(z)$'nin varyasyonu aynıdır. Argümen prensibi nedeniyle $f(z)$ ve $f(z)+\varphi(z)$'nin sıfır yerlerinin sayısı aynıdır.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.10.3 (Hurwitz Teoremi): $\left(f_n(z)\right)_1^{\infty}$, D bölgesinde tanımlanmış analitik fonksiyonların dizisi olsun ve bu dizi bölgenin içinde özdeş olarak sıfır olmayan $f(z)$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsasın. Bu takdirde, bir $z_0 \in D$ noktasının $f(z)$'nin bir sıfır yeri olması için gerek ve yeter koşul z_0'ın, $f_n(z)$ fonksiyonlarının sıfır yerlerinin bir limit noktası olmasıdır.

İspat: $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0)=0$ olsun. Bu takdirde $f(z)\not\equiv 0$ olduğundan $\gamma : |z-z_0| = r \subset D$ olacak şekilde bir γ çemberi bulunabilir. γ'nın içinde $f(z)$'nin z_0'dan başka sıfır yeri olmayacak şekilde r yeterince küçük seçilebilir. Ayrıca μ, γ'nın üzerinde $|f(z)|$'nin minimum değeri olsun. Yani $|f(z)| \geq \mu > 0$'dır. $\left(f_n(z)\right)_1^{\infty}$ dizisinin düzgün yakınsaklığından $n > n_0$ olduğunda γ üzerinde $|f_n(z)-f(z)| < \mu$ olacak şekilde en az bir $n_0(\mu)$ sayısı vardır. Buradan

$$|f_n(z)-f(z)| < \mu \leq |f(z)|$$

olur. Rouche teoreminden dolayı $n > n_0$ olduğunda γ'nın içindeki her z için $f_n(z)$'lerin sıfır yerlerinin sayısı, $f(z)$'nin sıfır yerleri sayısına eşittir. Dolayısıyla

z_0, $f(z)$'nin bir sıfır yeri ise bu durumda $f_n(z)$'nin γ içinde en az bir sıfır yeri vardır. z_0, $f(z)$'nin sıfır yeri değilse bu durumda $f_n(z)$'nin hiçbir sıfır yeri yoktur. γ istenildiği kadar küçük seçilebileceğinden teorem böylece ispatlanmış olur.

Örnek 2.10.1: (a) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ denkleminin modülü 1'den küçük olan köklerinin sayısını bulalım.

Rouche teoremini uygularsak, $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ ifadesini $f(z) + \varphi(z)$ şeklinde yazabiliriz. Burada $f(z) = -4z^5$ ve $\varphi(z) = z^8 + z^2 - 1$ dir. $|z| = 1$ için

$$|\varphi(z)| = \left| z^8 + z^2 - 1 \right| \leq \left| z^8 \right| + \left| z^2 \right| + 1 = 3$$

ve

$$|f(z)| = \left| -4z^5 \right| = 4$$

olur. Dolayısıyla

$$|\varphi(z)| < |f(z)|$$

elde edilir.

Bu nedenle, Rouche teoreminden $f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ fonksiyonu ile $f(z) = -4z^5$ fonksiyonunun $|z| = 1$ çemberi içinde sıfır yerlerinin sayısı aynıdır. $f(z) = -4z^5$ fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında 5. mertebeden bir sıfır yerine sahiptir. Bundan dolayı birim çemberin içinde beş tane sıfır yerine sahiptir. Bu nedenle $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ denklemi, birim çemberinin içinde beş tane köke sahiptir. Başka bir deyişle modülü, 1'den küçük olan beş tane kök vardır.

(b) $a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta = 0$ denklemini gözönüne alalım. Burada $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ olmak üzere

$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta = 0$ denkleminin $0 < \theta < 2\pi$ aralığında ayrık $2n$ tane köke sahiptir ve bu köklerin hepsi reeldir.

Bunu göstermek için önce $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ polinomunun bütün sıfır yerlerinin birim diskte olduğunu ispatlayalım. Polinomun katsayıları pozitif olduğundan $P(z)$'nin pozitif reel kökü yoktur. Fakat, eğer z, pozitif değilse bu durumda

$$\begin{aligned}
|P(z)(z-1)| &= \left| a_n z^{n+1} - \left[a_0 + (a_1 - a_0) z + \cdots + (a_n - a_{n-1}) z^n \right] \right| \\
&\geq \left| a_n z^{n+1} \right| - \left| a_0 + (a_1 - a_0) z + \cdots + (a_n - a_{n-1}) z^n \right| \\
&> a_n |z|^{n+1} - \left[a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \cdots + (a_n - a_{n-1})|z|^n \right]
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlik a_0 , $a_1 - a_0$, …, $a_n - a_{n-1}$ pozitif ve z 'ler reel ve negatif olduğunda doğrudur. Bu ise a_0 , $(a_1 - a_0)z$, …, $(a_n - a_{n-1})z^n$ vektörlerinin aynı yönde olmadığını gösterir. Bu nedenle

$$\left| a_0 + (a_1 - a_0)z + \cdots + (a_n - a_{n-1})z^n \right| < a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \cdots + (a_n - a_{n-1})|z|^n$$

şeklinde yazılabilir.

Bununla birlikte, eğer $|z| \geq 1$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \cdots + (a_n - a_{n-1})|z|^n & \\
&\leq a_0 |z|^{n+1} + (a_1 - a_0)|z|^{n+1} + \cdots + (a_n - a_{n-1})|z|^{n+1} \\
&= \left[a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \right] |z|^{n+1} \\
&= a_n |z|^{n+1}
\end{aligned}$$

dir. Böylece pozitif olmayan z ve $|z| \geq 1$ için

$$|P(z)(z-1)| > a_n |z|^{n+1} - a_n |z|^{n+1} = 0$$

olur. Başka bir deyişle

$$P(z)(z-1) \neq 0$$

dir. Böylece pozitif olmayan z'ler ve modülü 1'den büyük negatif reel z'ler için $P(z)\neq 0$'dır. Bu pozitif reel z'ler için de geçerlidir. Bu ise, $P(z)$'nin birim çemberin dışında ve üzerinde sıfır yerlerinin olmadığını gösterir. O halde $P(z)$ polinomunun n tane sıfır yeri, kesinlikle birim çemberin içindedir.

$|z|=1$ çemberinin pozitif yönde yönlendirilmesini gözönüne alalım. Bu takdirde, Argümen Prensibi'ne göre $P(z)$'yi ifade eden vektör, $P(z)$'nin sıfır yerleri sayısı kadar orijin çevresinde dönme yapar. Başka bir deyişle; her turda eğri, vektörün uç noktaları bir tam dönme sırasında sanal ekseni iki defa keser.

Bu nedenle, $P(z)=P\left(e^{i\theta}\right)$'yi ifade eden noktalar, 0'dan 2π'ye kadar olan aralıkta θ'nın en az $2n$ tane farklı değeri sanal eksen üzerindedir. Bu değerlerin her biri için

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left[P\left(e^{i\theta}\right)\right] &= \operatorname{Re}\left(a_0+a_1e^{i\theta}+\cdots+a_ne^{in\theta}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left[a_0+a_1\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)+\cdots+a_n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)\right]\\ &= a_0+a_1\cos\theta+\cdots+a_n\cos n\theta\end{aligned}$$

ifadesinin değeri sıfırdır. Bundan dolayı, $(0\,,\,2\pi)$ aralığında

$$a_0+a_1\cos\theta+\cdots+a_n\cos n\theta=0$$

denkleminin en az $2n$ tane kökü vardır.

Şimdi bu aralıktaki köklerin toplam sayısının gerçekten $2n$ olduğunu gösterelim. Burada $e^{i\theta}=\zeta$ denirse bu durumda

$$\cos k\theta=\frac{e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}}{2}=\frac{\zeta^k+\zeta^{-k}}{2}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}&a_0+a_1\cos\theta+\cdots+a_n\cos n\theta=\\ &\qquad=\frac{1}{2}\zeta^{-n}\left(a_n+a_{n-1}\zeta+\cdots+a_1\zeta^{n-1}+2a_0\zeta^n+a_1\zeta^{n+1}+\cdots+a_n\zeta^{2n}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $\zeta_1 , \zeta_2 , \ldots, \zeta_{2n}$ noktaları, sağ tarafta parantez içindeki polinomun sıfır yerleri ise sol taraftaki trigonometrik polinomun sıfır yerleri

$$e^{i\theta} = \zeta_j \qquad , \qquad (j = 1,2,\ldots,2n)$$

bağıntısını sağlar.

Bu trigonometrik polinomun farklı reel sıfır yerlerinin sayısı, $(0 , 2\pi)$ aralığında $2n$ 'yi geçmeyeceğini ifade eder. Fakat biz daha önce $(0 , 2\pi)$ aralığında bu polinomun farklı reel sıfır yerlerinin en az $2n$ olduğunu ispatladık. Bu durumda sıfır yerlerinin sayısı tam olarak $2n$ 'dir. $\zeta_j = e^{i\theta_j}$ nin modülü, 1'e eşittir. Bu yüzden verilen trigonometrik polinomunun sıfır yerlerinin içinde tek bir sanal sıfır yeri bulunamaz.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Belirli Tipten Bazı Genelleştirilmiş Reel İntegrallerin Hesaplanması

Kompleks analizin en önemli amaçlarından birisi, belirli integralleri hesaplamaktır. Rezidü teoreminden yararlanarak bu amacı gerçekleştireceğiz. Fakat her reel integralin rezidü yardımıyla hesaplanamayacağını belirtelim. Örneğin,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

integrali rezidü yöntemiyle hesaplanamaz.

Şimdi bu konuyu bazı lemma ve teoremler yardımıyla görelim.

Lemma 3.1.1: f, $|z|$'nin yeterince büyük olduğu z değerleri için sürekli ve $\lim\limits_{z\to\infty} z\,f(z)=k$ olsun. Bu durumda $\gamma_R=\{z : z=R\,e^{it}\ \ ,\ \ \alpha\le t\le\beta\}$ olmak üzere

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = i(\beta-\alpha)k$$

dir.

İspat: $h(z)=z\,f(z)-k$ denirse $\lim\limits_{z\to\infty} h(z)=0$ ve $f(z)=\dfrac{h(z)}{z}+\dfrac{k}{z}$ olur. Dolayısıyla

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = k\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z}+\int_{\gamma_R}\frac{h(z)}{z}\,dz = k\,I_1+I_2 \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

yazılabilir. Verilen bir $\varepsilon>0$ için $|z|\ge R$ olduğunda $|h(z)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir R seçelim. Böylece

$$I_1=\int_{\gamma_R}\frac{dz}{z}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{iRe^{it}}{Re^{it}}\,dt=(\beta-\alpha)i$$

ve

$$|I_2| < R(\beta-\alpha)\frac{\varepsilon}{R} = (\beta-\alpha)\varepsilon$$

olur. O halde $|z| \geq R$ için, (3.1.1) gereği

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz - i(\beta-\alpha)k\right| < (\beta-\alpha)\varepsilon$$

yani

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = i(\beta-\alpha)k$$

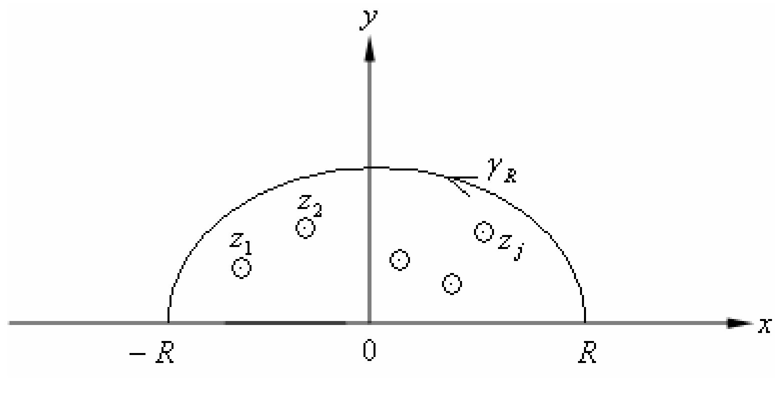
elde edilir.

Teorem 3.1.1: $f(z)$, sonlu çokluktaki kutup yerleri hariç diğer yerlerde analitik olsun ve reel eksen üzerinde $f(z)$'nin kutup yeri bulunmasın. Ayrıca $|z| > R$ olmak üzere $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$ olduğunu kabul edelim. z_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ ler $f(z)$'nin üst yarı düzlemdeki kutup yerleri olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Re} z(f, z_j)$$

dir. Burada $f(x)$, $f(z)$'nin reel eksen üzerindeki değeridir.

İspat: Şekil 3.1.1'de belirtilen $\gamma = -\overline{RR} + \gamma_R$ kapalı eğrisini göz önüne alalım.



Şekil 3.1.1

f'nin üst yarı düzlemdeki (Varsayım gereği f'nin $\mathbb{R}$ üzerinde kutup yeri yoktur) tüm z_j kutup yerleri γ'nın içinde kalacak şekilde R'yi büyük seçelim. O halde Cauchy Rezidü Teoremi gereği,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} z\left(f, z_j\right) \qquad \textbf{(3.1.2)}$$

yazabiliriz. Burada $I\left(\gamma, z_j\right)=1$ dir. Diğer yandan,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

olduğu Şekil 3.1.1'den görülüyor. Varsayım gereği f, γ'nın dışında süreklidir. Varsayımda $k=0$ olduğundan Lemma 3.1.1 gereği $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} f(z)dz = 0$ dır. Böylece (3.1.2) ve (3.1.3)'den

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} z\left(f, z_j\right)$$

bulunur.

Lemma 3.1.2: P ve Q kompleks polinomlar olmak üzere $derQ \geq 2 + derP$ eşitsizliği sağlansın. Q'nun $\mathbb{R}$ üzerinde sıfır yeri olmasın. Eğer $f = \dfrac{P}{Q}$ biçiminde ve f'nin üst yarı düzlemde sonlu çokluktaki kutup yerleri z_j ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} z\left(f, z_j\right)$$

dir.

İspat: Varsayım gereği f, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} z \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$$

dır. O halde Teorem 3.1.1 gereği,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} z\left(\frac{P}{Q}, z_j\right)$$

dir.

Lemma 3.1.3 (Jordan Lemması): $|z|$ yeterince büyük olduğunda $f(z)$ sürekli ve $M_R = \max_{|z|=R} |f(z)|$ olmak üzere, $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$ olsun. Bu durumda $m > 0$ ve γ_R orijin merkezli, R yarıçaplı üst yarı çemberi göstermek üzere,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)dz = 0$$

dır.

İspat: $\int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)\, dz = \int_0^{\pi} e^{imR\, e^{it}} f\left(Re^{it}\right) iRe^{it} dt$

dir. Diğer yandan $0 \le t \le \pi/2$ için $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left| \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)dz \right| \le R M_R \int_0^{\pi} e^{-mR\sin t} dt = 2 R M_R \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin t} dt$$

$$\le 2 R M_R \int_0^{\pi/2} e^{-2mR(t/\pi)} dt = \left(1 - e^{-mR}\right)\frac{\pi}{m} M_R \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

olur.

Lemma 3.1.4: f , reel eksen üzerinde bulunmayan sonlu sayıdaki kutup yeri dışında, $\mathbb{C}$'de analitik ve $\lim_{R\to\infty} M_R = \lim_{R\to\infty} \max_{|z|=R} |f(z)| = 0$ olsun. Bu durumda, $m > 0$ ise z_j'ler üst yarı düzlemde sonlu çoklukta kutup yerleri olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)dx = 2\pi i \sum_j \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)$$

dir.

İspat: $\gamma = -\overline{RR} + \gamma_R$ şeklindeki γ kapalı eğrisini göz önüne alalım ve $e^{imz} f(z)$

fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki tüm kutup yerleri γ'nın içinde kalacak şekilde R'yi seçelim. O halde

$$\int_{\gamma} e^{imz} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{imx} f(x)dx + \int_{\gamma_R} e^{imz} f(z)dz$$

yazabiliriz. Cauchy Rezidü Teoremi gereği,

$$\int_{\gamma} e^{imz} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j} \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)$$

olduğundan, Jordan Lemması 3.1.3 gereği, $R \to \infty$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j} \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)$$

bulunur.

Not: Eğer $m < 0$ ise bu eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin önüne "$-$" işareti konur ve alt yarı düzlemdeki kutup yerleri alınır.

Sonuç 3.1.1: P ve Q birer polinom olmak üzere $f = \dfrac{P}{Q}$ fonksiyonunu ele alalım. Eğer Q'nun reel eksen üzerinde sıfır yeri yok ve $derQ \geq 1 + derP$ ve $m > 0$ ise z_j ler üst yarı düzlemdeki kutup yerleri olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j} \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)$$

olur.

Lemma 3.1.5: Eğer f, reel eksen üzerinde bulunmayan sonlu sayıdaki kutup yeri dışında, $\mathbb{C}$'de analitik ve $\lim\limits_{R\to\infty} \max\limits_{|z|=R} |f(z)| = 0$ ise, $m > 0$ iken z_j'ler üst yarı düzlemdeki kutup yerleri olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i \sum_{j} \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)\right] \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(mx)\,dx = \dot{I}m\left[2\pi i \sum_j \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z),\, z_j\right)\right] \tag{3.1.5}$$

dir.

İspat: $\gamma = -\overline{RR} + \gamma_R$ şeklindeki γ kapalı eğrisini göz önüne alalım ve $e^{imz} f(z)$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki tüm kutup yerleri γ'nın içinde kalacak şekilde R'yi yeterince büyük seçelim. Lemma 3.1.4 gereği,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{Re}\left(e^{imx}\right)dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)\,dx$$

$$= \operatorname{Re}\left[2\pi i \sum_j \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)\right]$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(mx)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\dot{I}m\left(e^{imx}\right)dx = \dot{I}m\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)\,dx$$

$$= \dot{I}m\left[2\pi i \sum_j \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)\right]$$

elde edilir.

Sonuç 3.1 2: f fonksiyonu Lemma 3.1.5'deki gibi olsun. Eğer f çift fonksiyon ise,

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(mx)\,dx = \operatorname{Re}\left[\pi i \sum_j \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z),\, z_j\right)\right]$$

ve f tek fonksiyon ise,

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(mx)\,dx = \dot{I}m\left[\pi i \sum_j \operatorname{Re} z\left(e^{imz} f(z), z_j\right)\right]$$

olduğu kolayca görülür.

Lemma 3.1.6: $R(\cos t, \sin t)$, $\cos t$ ve $\sin t$ ye göre rasyonel bir fonksiyon olsun. Eğer R'nin birim çember üzerinde hiçbir kutup yeri yoksa,

$$f(z)=R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}$$

ve $\left|z_j\right|<1$ olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt=2\pi i\sum_j \operatorname{Re}z\left(f(z),z_j\right)$$

dir.

İspat: $z=e^{it}$ denirse,

$$\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{z-1/z}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}\quad,\quad \cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{z+1/z}{2}=\frac{z^2+1}{2z}$$

ve

$$dz=ie^{it}dt=iz\,dt\Rightarrow dt=\frac{dz}{iz}$$

bulunur. Böylece γ birim çember olmak üzere, Cauchy Rezidü Teoremi gereğince

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos t,\sin t)\,dt&=\int_\gamma R\left(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}\\&=\int_\gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_j \operatorname{Re}z\left(f(z),z_j\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse, R ’nin birim çember üzerinde kutup yeri olmadığında, f ’in de birim çember üzerinde kutup yeri olmayacağı sonucu, son eşitlikte göz önüne alınmıştır.

3.2. $\int_0^\infty x^{a-1}f(x)\,dx$ Formundaki İntegraller

Lemma 3.2.1: f, hiçbiri pozitif reel eksen üzerinde olmayan sonlu sayıdaki kutup yerleri hariç $\mathbb{C}$ de analitik olsun ve a pozitif fakat tamsayı olmasın.

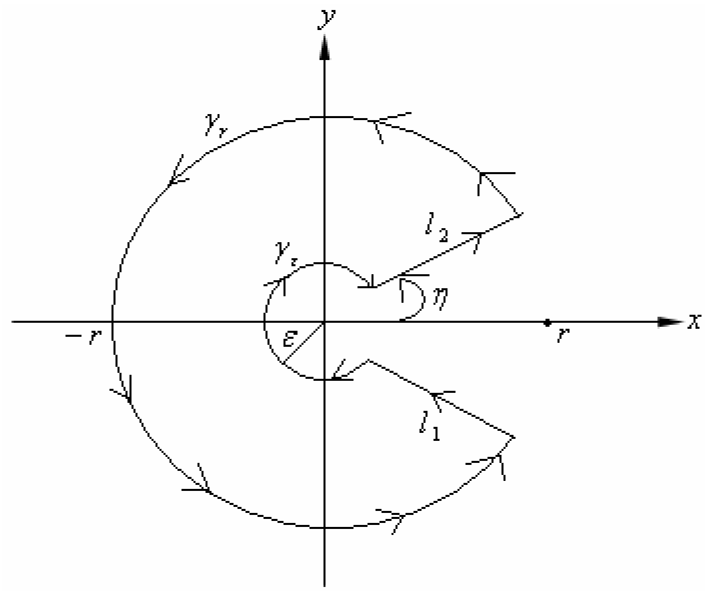
$$
|f(z)| \leq \begin{cases} M_1 \big/ |z|^b & , \quad |z| \geq r \\ M_2 \big/ |z|^d & , \quad 0 < |z| \leq \varepsilon \end{cases}
$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $M_1 , M_2 , r , \varepsilon > 0$, $b > a$, $0 < d < a$ sayılarının var olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $z_i \neq 0$ noktaları, $z^{a-1} f(z)$'nin kutup yerleri olmak üzere,

$$
\int_0^\infty x^{a-1} f(x) dx = \frac{-\pi e^{-\pi i a}}{\sin(a\pi)} \sum_k \operatorname{Re} z\left(z^{a-1} f(z), z_k\right)
$$

dir. Burada $0 < \arg(z) < 2\pi$ ve $z^{a-1} = e^{(a-1)\ln z}$ dir.

İspat: $\gamma = \gamma_r + l_1 + l_2 + \gamma_\varepsilon$ kapalı eğrisini, l_1 ve l_2 pozitif *x*-ekseni ile η açısı yapacak biçimde ele alalım. γ, $f(z)$'nin tüm kutup yerlerini içinde bulunduracak şekilde r , ε ve η'yı seçelim.



Şekil 3.2.1

$$\int_{\gamma} z^{a-1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\,dz + \int_{l_1} z^{a-1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon} z^{a-1} f(z)\,dz + \int_{l_2} z^{a-1} f(z)\,dz \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

olduğu açıktır. Cauchy Rezidü Teoremi gereği,

$$\int_{\gamma} z^{a-1} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k} \operatorname{Re} z\left(z^{a-1} f(z),\, z_k\right) \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

yazabiliriz. Dikkat edilirse $f(z)$ ile $z^{a-1} f(z)$'nin kutup yerleri, sıfır noktası dışında, aynıdır. Şimdi (3.2.1) ifadesinin sağ tarafındaki 1. integralin $r \to \infty$ için ve 3. integralin $\varepsilon \to 0$ için sıfıra yaklaştığını gösterelim. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\,dz \right| &\le \int_{\gamma_r} \left|z^{a-1}\right| \left|f(z)\right| |dz| \le M_1 \int_{\gamma_r} \left(|z|^{a-1} / |z|^{b} \right) |dz| \\ &\le 2\pi M_1 r^{a-b} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} z^{a-1} f(z)\,dz \right| &\le \int_{\gamma_\varepsilon} \left|z^{a-1}\right| \left|f(z)\right| |dz| \le M_2 \int_{\gamma_\varepsilon} \left(|z|^{a-1} / |z|^{d} \right) |dz| \\ &\le M_2\, \varepsilon^{a-d-1}\, l(\gamma_\varepsilon) < 2\pi M_2\, \varepsilon^{a-d} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

olduğu görülüyor. Diğer yandan ε ve r sabit olmak üzere $\eta \to 0$ için 2. ve 4. integralleri gözönüne alalım. l_1 üzerinden alınan integralin tanımı ve integral içindeki ifadenin $[\varepsilon\,,\, r]$ üzerinde düzgün yakınsadığı gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{\eta\to 0} \int_{l_1} z^{a-1} f(z)\,dz &= -\lim_{\eta\to 0} \int_{\varepsilon}^{r} \left(t\, e^{i(2\pi-\eta)} \right)^{a-1} f\left(t\, e^{i(2\pi-\eta)} \right) e^{i(2\pi-\eta)}\,dt \\ &= -\int_{\varepsilon}^{r} t^{a-1} e^{2\pi i a} f(t)\,dt \end{aligned} \qquad \textbf{(3.2.5)}$$

ve benzer şekilde

$$\lim_{\eta\to 0} \int_{l_2} z^{a-1} f(z)\,dz = \int_{\varepsilon}^{r} t^{a-1} f(t)\,dt \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

olur. Bu nedenle (3.2.5) ve (3.2.6)'dan

$$\lim_{\eta\to 0}\left[\int_{l_1} z^{a-1} f(z)\,dz + \int_{l_2} z^{a-1} f(z)\,dz\right] = \left(1-e^{2\pi i a}\right)\int_{\varepsilon}^{r} t^{a-1} f(t)\,dt$$

$$= -2\,i\,e^{\pi i a}\sin(\pi a)\int_{\varepsilon}^{r} t^{a-1} f(t)\,dt$$

elde edilir. Verilen $\delta > 0$ için r yeterince büyük ve ε yeterince küçük seçilerek

$$\left|\int_{\varepsilon}^{r} t^{a-1} f(t)\,dt - \int_{0}^{\infty} t^{a-1} f(t)\,dt\right| < \delta/4$$

yazılabilir. Dolayısıyla r ’yi büyük, ε ve η sayılarını da küçük seçerek

$$\frac{\left|\int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\,dz\right|}{\left|-2i\,e^{\pi i a}\sin(\pi a)\right|} < \delta/4$$

$$\frac{\left|\int_{\gamma_\varepsilon} z^{a-1} f(z)\,dz\right|}{\left|-2i\,e^{\pi i a}\sin(\pi a)\right|} < \delta/4$$

ve

$$\left|\frac{\int_{l_1} z^{a-1} f(z)\,dz + \int_{l_2} z^{a-1} f(z)\,dz}{-2\,i\,e^{\pi i a}\sin(\pi a)} - \int_{\varepsilon}^{r} t^{a-1} f(t)\,dt\right| < \delta/4$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\left|\int_{0}^{\infty} t^{a-1} f(t)\,dt - \frac{\int_{\gamma} z^{a-1} f(z)\,dz}{-2i\,e^{\pi i a}\sin(\pi a)}\right| < \delta$$

olur. δ keyfi olduğundan,

$$\int_{0}^{\infty} t^{a-1} f(t)\,dt = \frac{\int_{\gamma} z^{a-1} f(z)\,dz}{-2i\,e^{\pi i a}\sin(\pi a)} = \frac{-\pi\,e^{-\pi i a}}{\sin(\pi a)}\sum_{k}\operatorname{Re}z\left(z^{a-1} f(z),\, z_k\right)$$

bulunur. Bu ise istenilen sonuçtur.

3.3. Genelleştirilmiş İntegraller ve Cauchy Esas Değeri

Tek değişkenli fonksiyonların belirli integrallerinde integral sınırlarından en az biri veya ikisi sonsuz ancak fonksiyon sürekli; integral sınırları sonlu fakat integralleme aralığındaki bir noktada fonksiyon sınırsız ya da integral sınırlarından en az bir tanesi sonsuz ve aynı zamanda fonksiyonun integralleme aralığındaki bir noktada sınırsız ise bu tip integrallere genelleştirilmiş integraller denir.

Genelleştirilmiş integrallerin sonuçlarının mevcut olması durumunda integrale yakınsak aksi halde ıraksak denir.

Tanım 3.3.1: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ genelleştirilmiş integrali verilsin.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{c}^{r} f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{c} f(x)\,dx$

integral değeri mevcutsa $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin ***alışılmış değeri***;

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx$

integralinin sonucu mevcut ise bu sonuca da $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin ***Cauchy Esas Değeri*** denir.

Bu iki hali birbirinden ayırt etmek için alışılmış değeri,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

simgesi ile, Cauchy Esas Değerini de

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

simgesi ile gösterelim.

Not: Bir genelleştirilmiş integralin alışılmış değeri ile Cauchy Esas Değeri mevcut ise bu sonuçlar eşit olmak zorundadır. Ancak bir integralin Cauchy Esas Değeri mevcut olduğu halde alışılmış değeri olmayabilir. Çünkü (a) şıkkındaki limitlerden bir tanesi mevcut olmayabilir. Bu durumda integral alışılmış anlamda ıraksaktır. Diğer taraftan (b) şıkkındaki Cauchy Esas Değeri'nde iki limit bir arada olduğunda, birisi diğerinin ıraksaklığını ortadan kaldırabilir. Örneğin,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{2\varepsilon^2} \right) + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} \right) = \pm\infty$$

yani alışılmış değeri yoktur. Halbuki,

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \frac{dx}{x^3} = \lim_{r \to \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Bigg|_{-r}^{r} = \lim_{r \to \infty} \left(-\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2r^2} \right) = 0$$

yani Cauchy Esas Değeri vardır.

Olası bir yanlışlığı önlemek için (a) daki tanımı

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{c}^{\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to \infty} \int_{-\eta}^{c} f(x)\,dx$$

biçiminde yazmakta yarar vardır. Çünkü çoğu kez, limitleri ayrı ayrı almak yerine, aynı değişkene bağlılığı nedeniyle toplamın limiti alınabilir. Bu da yanlış sonuç verir. Buna göre yukarıdaki örnekte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{dx}{x^3} + \lim_{\eta \to 0} \int_{\eta}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$$

şeklinde yazılması daha uygun olur. Bu uyarıya göre, örneğin;

f, $[a,b]$ aralığında c noktası hariç sürekli ise, $\int_a^b f(x)dx$ integralinin alışılmış değeri ve Cauchy Esas Değeri sırasıyla,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)dx$$

ve

$$P.V.\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$$

olarak tanımlanır.

Not: f, $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ özelliğindeki x_i noktaları dışında $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx \qquad \text{ve} \qquad \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx$$

integralleri yakınsak ve

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx\right\}$$

var ve sonlu ise $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ genelleştirilmiş integralinin $P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ ile gösterilen Cauchy Esas Değeri

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}+\varepsilon}^{x_n-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx\right\}$$

şeklinde hesaplanır.

Lemma 3.3.1: f fonksiyonunun, z_0 daki rezidüsü $b_1 = \operatorname{Re} z(f, z_0)$ olan bir basit kutup yeri bulunsun. $\gamma = \gamma(\varepsilon, t)$, $|z - z_0| = \varepsilon$ çemberi üzerinde bulunan ve merkezden θ açısı ile görülen bir yay olsun. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\gamma f(z)\,dz = i\theta b_1$$

dir.

İspat: Varsayım gereği g, z_0'ın bir komşuluğunda, dolayısıyla bir $\delta > 0$ için $|z - z_0| \le \delta$ üzerinde analitik olmak üzere, $f(z) = g(z) + b_1 (z - z_0)^{-1}$ yazabiliriz. Eğer $|z - z_0| = \varepsilon$ çemberi bu komşulukta bulunuyor ve γ bu çemberin yayı oluyor ise

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = \int_{\gamma} g(z)\, dz + b_1 \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \tag{3.3.1}$$

olur. M, $|g(z)|$ için $|z - z_0| \le \varepsilon$ üzerinde bir sınır olmak üzere $\left|\int_{\gamma} g(z)\, dz\right| \le \varepsilon \theta M$ dir. γ üzerinde $z = z_0 + \varepsilon e^{it}$ noktası alınırsa,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{t_0}^{t_0+\theta} \frac{i e^{it} dt}{e^{it}} = i\theta$$

dır. Böylece bu değerler (3.3.1)'de yerine konup $\varepsilon \to 0^+$ için limit alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.1: $f(z)$, sonlu sayıda kutup noktası hariç analitik fonksiyon ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktaları f'nin reel eksen üzerindeki basit kutup yerleri olsun. Bu durumda, $\mathit{İm}z \ge 0$ ve $|z| \ge R$ için $|f(z)| \le M / |z|^2$ olacak biçimde $M > 0$ ve $R > 0$ sayıları varsa,

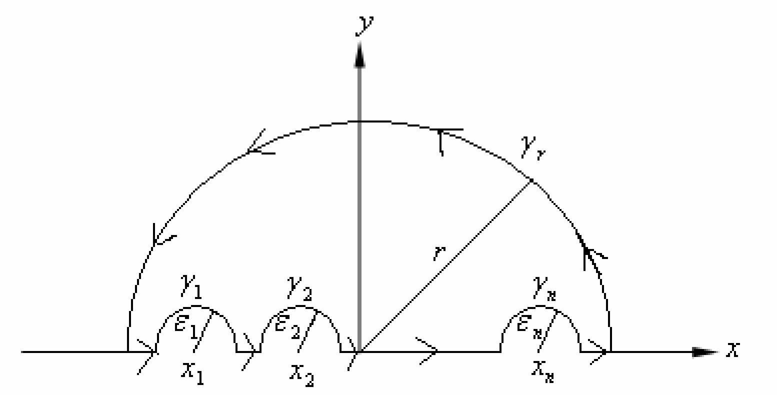
$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

vardır ve z_j ler f'nin üst yarı düzlemdeki aykırı noktaları olmak üzere,

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{j} \operatorname{Re} z\left(f(z), z_j\right) + \pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z\left(f(z), x_k\right)$$

dir.

İspat: Şekil 3.3.1 de görüldüğü gibi her bir x_i merkez olmak üzere ε_i yarıçaplı çemberler çizelim ve bunların üst yarı düzlemdeki yaylarını sırasıyla $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ ile gösterelim.



Şekil 3.3.1

Orijin merkezli r yarıçaplı çember bütün γ_i yaylarını ve üst yarı düzlemdeki kutup yerlerini içinde bulunduracak şekilde bir r seçelim ve bunun üst yarı düzlemdeki kısmını da γ_r ile gösterelim. $\tilde{\gamma}$ da reel eksen üzerinde belirtilen doğru parçalarının toplamı olsun. Bu durumda $\gamma = \gamma_r + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + \tilde{\gamma}$ kapalı bir eğri olur ve

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)\,dz &= \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\,dx \\ &= \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(x)\,dx\end{aligned} \quad \textbf{(3.3.2)}$$

eşitliği yazılabilir. Cauchy Rezidü Teoremi gereğince,

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j} \operatorname{Re} z\big(f(z), z_j\big) \quad \textbf{(3.3.3)}$$

dir. Diğer yandan Teorem 3.1.1 gereği,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 0 \tag{3.3.4}$$

olur. Çünkü $\dot{I}mz \geq 0$ özelliğindeki büyük $|z|$ ler için $|f(z)| \leq M/|z|^2$ dir. Lemma 3.3.1 dikkate alınırsa, $i = 1,2,\ldots,n$ için

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} f(z)\,dz = -\pi i\,\mathrm{Re}\,z(f, x_i) \tag{3.3.5}$$

yazılabilir. Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad \text{ve} \qquad \int_{x_n+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx$$

integrallerinin yakınsak olduğu, $\dot{I}mz \geq 0$ özelliğindeki büyük $|z|$ ler için $|f(z)| \leq M/|z|^2$ oluşundan ve integraller için karşılaştırma kriterinden görülür. Bu nedenle

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\tilde{\gamma}} f(x)\,dx$$

limiti vardır. O halde

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{r\to\infty}\int_{\tilde{\gamma}} f(x)\,dx\right) \tag{3.3.6}$$

değeri vardır ve bu eğer, Cauchy Esas Değerinin tanımı gereği,

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

dir. Dolayısıyla (3.3.2),(3.3.3),(3.3.4),(3.3.5) ve (3.3.6)'dan

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{j}\mathrm{Re}\,z\big(f(z), z_j\big) + \pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,z\big(f(z), x_k\big)$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.1: **(i)** $P.V.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\pi\, i$ **(ii)** $P.V.\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$

dir.

Örnek 3.3.1: $P.V.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\pi\, i$ olduğunu gösterelim.

Teorem 3.3.1 gereği, $f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ nin sadece $z=0$'da bir basit kutup yeri vardır. Buradaki rezidü ise,

$$\operatorname{Re}z(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to 0}z\,\frac{e^{iz}}{z}=1$$

dir. Böylece Teorem 3.3.1 gereği,

$$P.V.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\pi\, i$$

elde edilir.

Örnek 3.3.2: $P.V.\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ olduğunu gösterelim.

$\dot{I}m\left(e^{ix}\right)=\sin x$ ve $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ çift fonksiyon olduğundan,

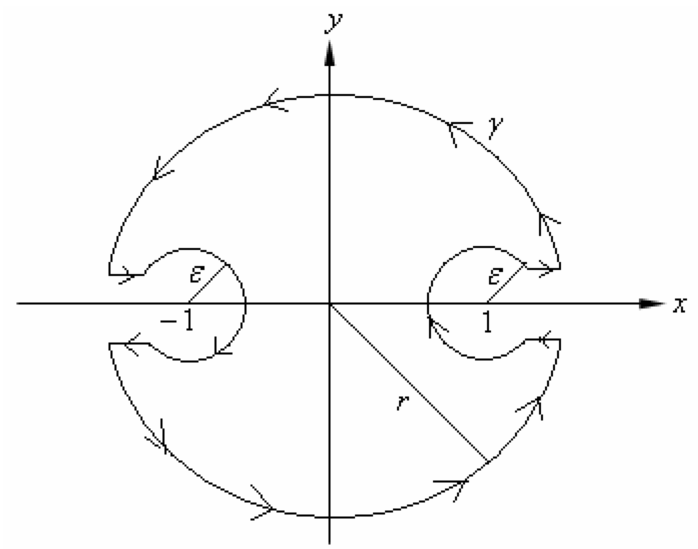
$$P.V.\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}P.V.\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\,\dot{I}m\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx=\dot{I}m\left(\frac{\pi\, i}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

elde edilir.

3.4. Çok Değerli Fonksiyonların İntegralleri

Çok değerli fonksiyonların integrallerini hesaplarken fonksiyonun sadece bir dalına uygun bir eğri seçmek gerekir. Bu tip integrallerin nasıl hesaplanacağını bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.4.1: $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ integralinin değerinin, $\dfrac{\pi}{2}$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.4.1

$\sqrt{z^2-1}$ için uygun bir bölgenin, $\mathbb{C}$'den $x \geq 1$ ve $x \leq -1$ doğruları çıkarıldığında elde edilen bölge olarak alınabilir olduğunu biliyoruz. γ, Şekil 3.4.1 deki eğri olsun. Bu durumda $\dfrac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$, $\mathbb{C}$'den $x \geq 1$ ve $x \leq -1$ yarım doğruları çıkarılarak elde edilen bölgede, $z = 0$ daki basit kutup yeri hariç analitiktir.

Cauchy Rezidü Teoremi gereğince,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = 2\pi i \operatorname{Re} z\left(\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\ ,\ 0\right) = 2\pi \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

dir. Diğer yandan

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = 0 \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

olduğu görülmektedir. Çünkü modülü büyük z 'ler için,

$$\left|\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\right| \leq \frac{M}{|z|^2}$$

dır. Ayrıca

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = 0 \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

olduğu görülür. Çünkü bu çember üzerinde,

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}\right| \leq \frac{\varepsilon k}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}k,\ (k\ \ sabit) \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

dır. ε ve r sabit olduğunda, yatay doğrular üzerindeki integral ise,

$$4\int_{1+\varepsilon}^{r}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

değerine yaklaşır. Böylece (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3) ve (3.4.4)'den

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}$$

olduğu görülür.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde önce analitik(holomorf) fonksiyonların bazı temel özellikleri verildi. Daha sonra teknik ve mühendislikte önemli uygulamalara sahip rezidü kavramı ve rezidü hesaplama metodları incelendi. Rezidünün bir uygulaması olan belli tipten reel genelleştirilmiş integrallerin rezidü yardımıyla hesaplanması tez içinde ele alındı. Son olarak bazı genelleştirilmiş integrallerin klasik ve Cauchy esas değeri karşılaştırmalı olarak incelenmiş ve çok değerli fonksiyonlar için rezidü hesabı örneklerle ortaya konmuştur.

KAYNAKLAR

[1] BAŞKAN, T., "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", Uludağ Üniv. Basımı, 1996.

[2] BROWN, J. W. and CHURCHILL, R. V., "Complex Variables and Applications", MC GRAW-HILL, Inc., 1996.

[3] EVGRAFOV, M. A., "Analytic Functions", W. B. Saunders Company, Philadelphia and London, 1966 [Trans. from Russian by GELBAUM, B. R.].

[4] MARKUSHEVICH, A. I., "The Theory of Analytic Functions: A Brief Course", MIR PUBLISHERS, MOSCOW, 1983 [Trans. from Russian by YANKOVSKY, E.].

[5] TUTSCHKE, W., "Funktionentheorie für Physiker", Lecture Notes, Institut für Mathematik D, TU. GRAZ, 1999.

[6] ULUÇAY, C., "Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri", Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, 1978.