KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

GENELLEŞTİRİLMİŞ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

ZEKİ ERKOÇ

TEMMUZ 2005

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

Prof. Dr. Binali MUSAYEV

Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

ERKOÇ, Zeki

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof.Dr. Kerim KOCA

2005, 46 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin içinde geçen bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde "Vekua denklemi" olarak bilinen kompleks diferensiyel denklem için Wiener tipli bölgede önemli bir sınır değer problemi incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise düzgün sınırlı bölgeler için geçerli olan çözümle ilgili bir integral gösteriliminin Wiener tipli bölgede de geçerli olduğu ispatlanmıştır. Son bölümde ise tezde yapılanlar özetlenmiş ve daha ileri düzeyde neler yapılabileceği hakkında öneriler sunulmuştur.

Anahtar kelimeler : Vekua denklemi,Wiener tipli bölge,kapasite,Cauchy-Riemann denklemi, genelleştirilmiş analitik fonksiyon.

ABSTRACT

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR GENERALİZED ANALYTIC FUNCTIONS

ERKOÇ, Zeki

Kırıkkale University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department Of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor : Prof. Dr. Kerim KOCA

2005, 46 Pages

This thesis is composed of four parts. In the first part, some important definitions and concepts mentioned in the thesis are given. In the second part, for complex differantial equation so called “Vekua equation”; in the Wiener type domain an important boundary value problem is studied. In the third part, it is proven a realeted solution of integral shown that is valid for regular bondary areas has also validity in Wiener type domain. In the last part, the things done in the thesis is summarized and what can be done in higher level is suggested.

Key Words : Vekua equation, Wiener type domain, capacity,Cauchy-Riemann equation, generalized analytic function.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Kerim KOCA' ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam esnasında bana yardımcı olan Matematik Bölümü Akademik Personeline şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem (z-düzlemi)
D	Kompleks düzlemin bir alt bölgesi
∂D	D bölgesinin sınırı
$B_R(P_0)$	Kompleks düzlemde P_0-merkezli $R-$yarıçaplı disk
H	Hölder sabiti
$Cap_{(L,s)}E$	E kümsinin $(L-s)$ kapasitesi
L	Lineer operatör
$\mu(E)$	E kümesinin Lebesque ölçümü
$\Psi(\lvert z-z_0 \rvert)$	$w(z)$ nin z_0 daki süreklilik modülü
$dist(z,\partial D)$	$z\in D$ noktasının ∂D sınırına olan uzaklığı

1. GİRİŞ

Başlangıç değer ve sınır-değer problemleri reel ve kompleks diferensiyel denklemler teorisinde uygulama açısından önemli bir yer tutmaktadır. Gerek adi türevli, gerekse kısmi türevli denklemlerde genel çözümün varlığı bilinse bile belli tipten çözümlerin araştırılması ve bunların bazı başlangıç ve sınır değerlerinin sağlamasının istenmesi Fizik, Mühendislik ve temel bilimlerde oldukça sık karşılaşılan bir durumdur. Genel olarak Cauchy Problemi olarak isimlendirilen başlangıç ve sınır-değer problemlerindeki başlangıç ve sınır koşulları uygulamalarda doğal olarak ortaya çıkar. Örneğin bir bölgenin iç kısmındaki potansiyeli ölçme imkanımız olmayabilir, ancak sınırdaki potansiyel belirlendiğinde belli bir potansiyel denklemini çözüp sınır koşulları uygulanarak iç kısımdaki potansiyeli veren fonksiyonu belirleyebiliriz. Bu ise en basit anlamı ile eliptik diferensiyel denklemler için bir sınır-değer problemidir.

Özellikle sınır-değer problemlerinde problemin tanımlı olduğu bölgenin sırının düzgünlüğü çok önemlidir. Çünkü sınır-değer problemlerinin çözümleri için geliştirilen metodlarda integral kavramı kullanılmaktadır. İntegraller ise sınırı düzgün bölgeler için hesaplanabilmektedir. Bu nedenle sınırı düzgün olmayan bölgelerde tanımlanan çeşitli sınır-değer problemleri için değişik metodlar geliştirilmiş veya çözümün varlık ve tekliği için değişik kriterler ortaya konmuştur.

Sınır-değer problemlerindeki zorluklar bölgenin sınırının düzgün olmayışından kaynaklanabileceği gibi denklemin katsayılarının singülerliğinden de ortaya çıkabilir.

Reel uzayda olduğu gibi kompleks uzayda da sınır değer problemlerinin çok yaygın uygulamaları vardır. Bu tür problemlerin elastisite , gazlar dinamiği ve kabuk (Schalen) teorisindeki uygulamalar Vekua tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. (Bakınız [10], sayfa 181-521) . Kompleks anlamda ele alınan diferensiyel denklemler (özellikle Vekua denklemi) için gerekli olan problem Riemann-Hilbert sınır-değer problemidir. Bu problem , basit irtibatlı bir D bölgesinde

$$\left.\begin{array}{l} w_{\overline{z}} = Aw + B\overline{w} + F \quad ,z \in D \\ \alpha u + \beta v = \mathrm{Re}[\lambda(z)w] = \gamma(z), \quad z \in \partial D, \quad \lambda = \alpha + i\beta \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $w = u + iv$ dir. Eğer $A \equiv B \equiv F \equiv 0$ ise bu taktirde problem analitik fonksiyonlar için iyi bilinen Riemann-Hilbert sınır değer problemine indirgenir. Bu nedenle (1.1) sınır değer problemine genellikle genelleştirilmiş Riemann-Hilbert sınır-değer problemi denir.

Bölgenin sınırı klasik anlamda düzgün olmadığı zaman genelleştirilmiş anlamda çeşitli regülerlik kriterleri verilmektedir. Örneğin bir dikdörtgenin çevresi klasik anlamda düzgün olmadığı halde Vekua'nın geliştirdiği bir kritere göre dikdörtgenin çevresi düzgündür.(Bakınız [10])

Biz bu tezde sınırı klasik anlamda düzgün olmayan bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde bir sınır değer problemi inceleyeceğiz.

1.1 Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanışında konu ile ilgili olarak 5 adet kitap; bir Yüksek Lisans tezi ve üç makaleden yararlanılmıştır. Öncelikli olarak [5] ; [8] ve [9] nolu kaynaklardan çeşitli sınır değer problemleri incelenmiş ve [5] nolu kaynaktan ise

Wiener tipli bölgeler ve özellikleri öğrenilmiştir. Düzgün sınırlı olmayan bir bölgenin düzgün sınıra sahip bölgeler dizisi yardımıyla parçalanması tekniği [7] nolu kaynaktan incelenmiştir. Çeşitli sınır-değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliği ve Vekua Denklemi [10] nolu kaynakta ele alınmıştır. Tezin sonunda incelenen düzgün sınırlı bölgeler için geçerli olan bir kompleks sınır-değer probleminin incelenmesinde [1] ve [9] numaralı kaynaklardan yararlanılmıştır. Tezde İncelenen kompleks sınır-değer problemleri uygun koşullar altında reel sınır-değer problemlerine dönüştürülmüş ve düzgün sınırlı bölgelerdeki bu tür problemler [4] nolu kaynaktan öğrenilmiştir. Daha sonra limit yardımıyla düzgün sınırlı bölgelerdeki çözüm gösterilimleri Wiener tipli bölgeye genişletilmiştir.

1.2 Çalışmanın Amacı

Biz bu tezde önce Wiener Tipli bölge kavramını vereceğiz ve sınırı düzgün olmayan bu tip bölgelerin sınır noktalarının regülerliği için kriterler ortaya koyacağız. Burada hemen belirtelim ki bir bölgenin sınırının regülerliği denklemdeki L operatörüne (doğal olarak denklemin katsayılarına) bağlıdır. Daha sonra bundan yararlanarak Wiener tipli bölgelerde tanımlanan

$$\begin{aligned} & w_{\bar{z}} = Aw + B\overline{w} && , z \in D \\ & \operatorname{Re} w \Big|_{\partial D} = u \Big|_{\partial D} = \varphi && , \varphi \in C^{\alpha}(\partial D) \\ & \operatorname{Im} w(z_0) = c_0 && , \ (c_0 \ reel) \ z_0 \in \overline{D} \end{aligned}$$

şeklindeki bir sınır-değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği için bir kriter ortaya koyacağız.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde öncelikle tezde geçecek olan bazı temel tanım ve kavramları vereceğiz.

2.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1 $D \subset C$ kümesi açık ve irtibatlı ise D kümesine kompleks düzlemde bir bölge denir.

Tanım 2.1.2 X herhangi bir küme ve M aşağıdaki koşulları gerçekleyen X in bir alt küme ailesi olsun.

i) $\phi,\ X \in M$

ii) $A \in M$ ise $A^c = X \setminus A \in M$

iii) $A_1, A_2, ... \in M$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M$

koşullarını sağlayan M ailesine X üzerinde bir σ -cebiri denir.

Tanım 2.1.3 Tanım 2.1.2 deki iii) de sayılabilir birleşim yerine sonlu bileşim alınırsa μ ailesine cebir denir.

Tanım 2.1.4 $f:(X,M) \to R$ fonksiyonu verilsin. Her $\alpha \in R$ için $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in M$ ise f ye ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.1.5 (Lebesque Ölçümü) (R,B) ölçüm uzayını düşünelim , $E=(a,b)$ ise $\lambda(E) = b-a$ olarak tanımlanan ölçüme Lebesque ya da Borel ölçümü denir.

Tanım 2.1.6 $f : X \to X$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Bir $x^* \in X$ noktası $f(x^*) = x^*$ bağıntısını sağlıyorsa bu x^* noktasına f fonksiyonunun bir sabit noktası denir.

Tanım 2.1.7(Daralma Dönüşümü) (X, d) bir metrik uzay olsun ve $f : X \to X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine dönüştürsün. Her $x, y \in X$ nokta çifti ve $0 < k < 1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için

$$d\big(f(x), f(y)\big) \le kd(x, y)$$

koşulu sağlanıyorsa f bir daralma dönüşümü ya da kısaca daralma adını alır.

Tanım 2.1.8 (Hölder-Süreklilik) Kapalı $\overline{D}$ bölgesinde tanımlanmış bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu verilsin. Eğer her $z_1, z_2 \in \overline{D}$ için

$$\left| f(z_2) - f(z_1) \right| \le H \left| z_2 - z_1 \right|^{\alpha} \quad 0 < \alpha \le 1 \tag{2.1.1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde H ve α sabitleri varsa $f(z)$ ye $\overline{D}$ bölgesinde Hölder süreklidir denir.

H sabiti tek değildir, ancak H sabiti

$$H(f) \equiv H(f, \alpha, \overline{D}) = \underset{z_1, z_2 \in \overline{D}}{Sup} \frac{\left| f(z_2) - f(z_1) \right|}{\left| z_2 - z_1 \right|^{\alpha}} \ , \qquad (z_1 \ne z_2)$$

olarak seçilirse H tektir ve Hölder sabiti adını alır. α'ya da Hölder üsteli denir. Bu durumda

$$\left| f(z_2) - f(z_1) \right| \le H(f) \left| z_2 - z_1 \right|^{\alpha}$$

(2.1.2)eşitsizliğine Hölder koşulu adı verilir. (2.1.2) eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların kümesini $H^{\alpha}(\overline{D})$ ile gösterelim. Eğer $f(z)$ nin 1.basamaktan türevleri Hölder - sürekli ise bu tür fonksiyonların sınıfı da $H_1^{\alpha}(\overline{D})$ olarak ifade edilir. (2.1.2) eşitsizliğini sağlayan bütün sınırlı fonksiyonların kümesi de $C^{\alpha}(\overline{D})$ ile gösterilir. Eğer D sınırlı bir bölge ise $H^{\alpha}(\overline{D}) \equiv C^{\alpha}(\overline{D})$ dir. Genel olarak D bölgesi sınırsız ise $C^{\alpha}(\overline{D}) \subset H^{\alpha}(\overline{D})$ dır. Örneğin $r^{\alpha} = |z|^{\alpha}$ fonksiyonu $H^{\alpha}(\overline{\mathbb{C}})$ sınıfına ait olduğu halde $C^{\alpha}(\overline{\mathbb{C}})$ sınıfına ait değildir.

Tanım 2.1.9(Sürekli Genişletme) $f(z), \partial D$ sınırında tanımlanmış bir fonksiyon olmak üzere

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & , \ z \in \partial D \\ h(z) & , z \in D \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon D bölgesinde sürekli ise $h(z)$ ye $f(z)$ nin sürekli genişletmesi denir. Tanımdan da görüleceği gibi sürekli genişletme tek olmayabilir.

2.2 Wiener Tipli Bölgelerde Genelleştirilmiş Analitik fonksiyonlar İçin Bir Sınır Değer Problemi

$D \subset C$ sınırlı keyfi bir bölge olsun. D bölgesinde tanımlanmış

$$\left.\begin{aligned} u_x - v_y &= a(x,y)u + b(x,y)v \\ u_y + v_x &= c(x,y)u + d(x,y)v \end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

homojen olmayan Cauchy-Riemann sistemini gözönüne alalım. Burada $z = x + iy \in D$ dir.

(2.2.1) sisteminde ikinci denklem i ile çarpılır, birinci denklemle taraf tarafa toplanır ve daha sonra da $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa

$$w_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left[a(x,y)u + b(x,y)v + ic(x,y)u + id(x,y)v\right] \tag{2.2.2}$$

elde edilir.

Ayrıca $\quad w = u + iv,\ \overline{w} = u - iv$ dir. (2.2.3)

(2.2.3) den u ve v çözülürse

$u = \dfrac{w+\overline{w}}{2}, \quad v = -\dfrac{i\,(w-\overline{w})}{2}$ elde edilir. Bu değerler de (2.2.2) de yerine yazılırsa

$$w_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left[a(x,y)(\frac{w+\overline{w}}{2}) + b(x,y)(\frac{-i(w-\overline{w})}{2}) + ic(x,y)(\frac{w+\overline{w}}{2}) + id(x,y)(\frac{-i(w-\overline{w})}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(a(x,y) + ic(x,y) - ib(x,y) + d(x,y)\right)w + \frac{1}{2}\left(a(x,y) - d(x,y) + ic(x,y) + ib(x,y)\right)\overline{w}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(a(x,y) + ic(x,y) - ib(x,y) + d(x,y)\right)w + \left(a(x,y) - d(x,y) + ic(x,y) + ib(x,y)\right)\overline{w}\right] \tag{2.2.4}$$

bulunur. (2.2.4) eşitliğinde

$$\mathrm{A} = \frac{1}{4}\left(a(x,y) + ic(x,y) - ib(x,y) + d(x,y)\right)$$
$$\mathrm{B} = \frac{1}{4}\left(a(x,y) - d(x,y) + ic(x,y) + ib(x,y)\right)$$

denirse (2.2.1) sistemine denk olan

$$w_{\overline{z}} = Aw + B\overline{w} \tag{2.2.5}$$

kompleks denklemi elde edilir.

Burada

$$\frac{\partial}{\partial\,\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ dir.}$$

Tanım 2.2.1 $w_{\,\overline{z}} = Aw + B\overline{w}$ diferensiyel denkleminin çözümlerine“Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyonlar” denir ve bu denklemin çözümü de

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}d\xi d\eta \qquad \zeta=\xi+i\eta$$

şeklinde bir gösterilime sahiptir.

D bölgesinin düzgün sınırlı ve ilgili katsayıların $L_p(D)(p>2)$ sınıfına ait olması halinde (2.2.5) denklemine ilişkin çeşitli sınır değer problemleri [9], [10] da incelenmiştir. Ayrıca bu [10] da "Genelleştirilmiş Analitik Fonksiyonların Teorisi" geniş olarak ele alınmıştır.

(2.2.1) sistemindeki katsayılar için,

$$\left.\begin{aligned}
&|a(x,y)|\le \frac{\dfrac{c_1}{r\log(\frac{2\gamma}{r})}}{r^{\lambda}}\ , \quad |b(x,y)|\le \frac{\dfrac{c_2}{r\log(\frac{2\gamma}{r})}}{r^{\lambda}}\\
&|c(x,y)|\le \frac{\dfrac{c_3}{r\log(\frac{2\gamma}{r})}}{r^{\lambda}}\ , \quad |d(x,y)|\le \frac{\dfrac{c_4}{r\log(\frac{2\gamma}{r})}}{r^{\lambda}}
\end{aligned}\right\} \quad 2\gamma<r\ ,\ 0<\lambda<1 \qquad (2.2.6)$$

$$|a_x(x,y)|\le\frac{c_5}{r^{\lambda+1}}\ ,\qquad |c_y(x,y)|\le\frac{c_6}{r^{\lambda+1}}\ ,\qquad |d_x|\le\frac{c^*_5}{r^{\lambda+1}}\ ,\qquad |b_y|\le\frac{c^*_6}{r^{\lambda+1}}$$

eşitsizliklerinin gerçeklendiğini varsayalım. Burada c_i ler ($i=1,...,6$) reel sabitler

$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, $(x,y)\in D$, $(\xi,\eta)\notin D$ dir. Ayrıca bu katsayıların D bölgesinde x ve y değişkenlerine göre birinci basamaktan kısmi türevlerinin mevcut olduğunu kabul edelim. Şimdi ,

$$\left.\begin{aligned}
&w_{\bar{z}}=Aw+B\overline{w}\ , \quad z\in D\\
&\operatorname{Re} w\Big|_{\partial D}=u\Big|_{\partial D}=\varphi\ ,\ \varphi\in C^{\alpha}(\partial D),\ 0<\alpha<1\\
&\operatorname{Im} w(z_0)=v(z_0)=c_0\ ,\quad z_0\in\overline{D}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.7)$$

sınır -değer problemini göz önüne alalım.

Diğer taraftan eğer (2.2.1) sisteminin b ve d katsayıları arasında $\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial d}{\partial y}$ şeklin de bir bağıntı varsa bu taktirde;

$$\left.\begin{aligned} P(z) &= -[\,a(z) + d(z)\,] \\ q(z) &= b(z) - c(z) \\ k(z) &= a(z)d(z) - b(z)c(z) - a_x(x,y) - c_y(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{2.2.8}$$

olmak üzere $u = \operatorname{Re} w$ için

$$Lu = \Delta u + p(z)u_x + q(z)u_y + k(z)u = 0 \tag{2.2.9}$$

(p, q reel fonksiyonlar) denklemine ulaşılır.(2.2.6) den dolayı (2.2.9) denkleminin katsayıları için de

$$|\, p(z)\,| \le \frac{c_1^*}{r^\lambda}, \qquad |\, q(z)\,| \le \frac{c_2^*}{r^\lambda}, \qquad -\frac{c_3^*}{r^{\lambda+1}} \le k(z) \le 0 \tag{2.2.10}$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu görülebilir.

Şimdi (2.2.9) yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} &Lu = 0, & z \in D \\ &u\,\big|_{\partial D} = \varphi\,, & z \in \partial D \end{aligned}\right\} \tag{2.2.11}$$

sınır değer problemini tanımlayalım. Bu sınır değer problemini incelemeden önce birkaç tanım ve önerme verelim:

Tanım 2.2.2 L operatörü (2.2.9) de ki gibi olmak üzere her $z \in D$ için

$$Lu \ge 0 \;\; (\,Lu \le 0)$$

eşitsizliği sağlanırsa u fonksiyonuna D bölgesinde alt-L çözüm(üst-L çözüm) denir.

Tanım 2.2.3 E ve T $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin Borel - ölçülebilir iki alt kümesi olsun ve $(x,y)\in T$, $(\xi,\eta)\in E$ olmak üzere $r = |z-\xi|$, $\zeta = \xi + i\eta$ uzaklığını gözönüne alalım. Özel halde $T \cap E = \emptyset$ ve $\overline{T} \cap \overline{E} \neq \emptyset$ olabilir. E nin bütün alt kümelerinden oluşan σ cebirleri üzerinde tanımlanmış ölçülerin kümesini M ile gösterelim. Ayrıca z∈ T ve $\zeta \in E$ için

$g(z,\zeta) = \left[log(\frac{\gamma}{r}) \right]^{s}$, $(r < \gamma)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada s pozitif sabit ve γ ise T ve E ye bağlı bir başka sabittir. $\mu \in M$ olmak üzere

$$\iint_E g(z;\zeta)\, d\mu(\xi,\eta) \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayan ölçülerin kümesi M_1 olsun. Bu takdirde $Lg \geq 0$ olmak üzere

$$\sup_{\mu \in M_1} \mu(E)$$

sayısına E kümesinin T kümesine göre logaritmik (L,s) kapasitesi denir ve

$$Cap_{(L,s)}E$$

ile gösterilir.

Lemma 2.2.1 $Cap_{(L,s)}E$ aşağıdaki özeliklere sahiptir:

a) $E_1 \subset E_2$ ise $Cap_{(L,s)}E_1 \leq Cap_{(L,s)}E_2$

b) $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ise $Cap_{(L,s)}E \leq \sum_{i=1}^{n} Cap_{(L,s)}E_i$

c) $B_R(P_0)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ merkezli R yarıçaplı bir disk olsun. Bu taktirde $B_R(P_0)$ ın

T ye göre kapasitesi için

$$Cap_{(L,s)} B_R(P_0) \geq \frac{1}{\left[log(\frac{\gamma}{R}) \right]} \quad s$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradaki T Tanım 2.2.3 deki gibidir.

İspat: a) ve b) özellikleri tanımdan hemen görülebilir. Şimdi c) şıkkını ispat edelim. Bunun için $B_R(P_0)$ ın merkezine yığılan bir $\mu_0 \in \mu_1$ ölçüsünü ve $0 < \delta < R$ olmak üzere

$$e_\delta = \left\{ (x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2 \right\}$$

diskini gözönüne alalım. Bu durumda $r \geq R - \delta$ eşitsizliğinin de kullanılmasıyla

$$\iint_{B_R(P_0)} g(x,y;\xi,\eta) d\mu_0(\xi,\eta) \ , \ z = x + iy$$

$$= \iint_{e_\delta} \left[log\left(\frac{\gamma}{r} \right) \right]^s d\mu_0(\xi,\eta)$$

$$\leq \left[log\left(\frac{\gamma}{R\text{-}\delta} \right) \right]^s \iint_{e_\delta} d\mu_0(\xi,\eta)$$

$$= \left[log\left(\frac{\gamma}{R\text{-}\delta} \right) \right]^s \alpha$$ yazılabilir. Burada

$$\alpha = \iint_{e_\delta} d\mu_0(\xi,\eta)$$

dir. Eğer α sayısı

$$\alpha = \frac{1}{\left[log\left(\frac{\gamma}{R-\delta} \right) \right]^s}$$

olarak seçilirse

$$\iint\limits_{B_R(P_0)} g(x, y;\xi,\eta) d\mu_0(\xi,\eta) \le 1$$

eşitsizliği ve

$$Cap_{(L,s)} B_R(P_0) \ge \mu_0(B_R(P_0)) \ge \frac{1}{\left[log\left(\frac{\gamma}{R-\delta} \right) \right]^s}$$

bağıntısı ortaya çıkar. Son eşitsizliğin sol tarafı δ dan bağımsız olduğu için $\delta \to 0$ yaklaşımı için bu eşitsizlik yine doğrudur. O halde iddia edilen eşitsizlik ortaya çıkar.

Lemma 2.2.2 $F(r) = \left[log\left(\frac{2\gamma}{r} \right) \right]^s$, $2\gamma > r$, $r = |\zeta - z| = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$

olarak tanımlanan fonksiyon D bölgesinde $Lu = 0$ denkleminin alt çözümü olacak şekilde s>1 sayısı vardır.

İspat: Elemanter hesaplarla

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -s\left[\left(\frac{(x-\xi)}{r^2} \right) log^{s-1}\left(\frac{2\gamma}{r} \right) \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -s\left[\left(\frac{(y-\eta)}{r^2} \right) log^{s-1}\left(\frac{2\gamma}{r} \right) \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} = -\frac{s}{r^3}\left[\frac{(x-\eta)^2 - (x-\xi)^2}{r} log^{s-1}\left(\frac{2\gamma}{r} \right) + (s-1) log^{s-2}\left(\frac{2\gamma}{r} \right)(x-\xi) \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y^2} = \frac{s(y-\eta)}{r^3}\left[2log^{s-1}\left(\frac{2\gamma}{r} \right) + (s-1) log^{s-1}\left(\frac{2\gamma}{r} \right)(y-\eta) \right]$$

olduğu görülebilir. Bu türevler $LF(r)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$LF(r)=\left[log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\right]^{s-2}\frac{1}{r}\left[\frac{s-1}{r}-plog\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\frac{(x-\xi)}{r}-qlog\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\frac{(y-\eta)}{r}+k\frac{r}{s}\left(log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\right)^2\right] \quad (2.\ 2.12)$$

olur. Katsayılar için verilen (2.2.10) eşitsizlikleri ve $\frac{|x-\xi|}{r}\leq 1$ ve $\frac{|y-\eta|}{r}\leq 1$ oldukları da gözönüne alınırsa (2.2.12) den

$$LF(r)\geq s\left[log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\right]^{s-2}\frac{1}{r}\left[\frac{s-1}{r}+log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)(p+q)+\frac{kr}{s}\left(log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\right)^2\right]$$

$$\geq s\left[log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\right]^{s-2}\frac{1}{r}\left[\frac{s-1}{r}+log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\left(-\frac{c_1}{r\log\frac{(2\gamma)}{r}}-\frac{c_2}{r\log\frac{(2\gamma)}{r}}\right)-\frac{r}{sr^2}c_3\right]$$

$$=s\left[log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\right]^{s-2}\frac{1}{r}\left[\frac{s-1}{r}-\frac{c_1}{r}-\frac{c_2}{r}-\frac{c_3}{sr}\right]$$

$$=s\left[log\left(\frac{2\gamma}{r}\right)\right]^{s-2}\frac{1}{r^2}\left(s-1-c_1-c_2-\frac{c_3}{s}\right)$$

elde edilir. Eğer s sayısı,

$$s^2-(1+c_1+c_2)s-c_3\geq 0$$

olacak şekilde seçilirse

$$LF(r)\geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2.3 (1.Temel Lemma): $B_R(z_0)=\{z\in \mathbb{C}|\ |z\text{-}z_0|<R\}$ olmak üzere $D\subset \mathbb{C}$ bölgesi $B_{4R}(z_0)$ diski tarafından tamamen kapsansın.

Yani ,

$$D\subset B_{4R}(z_0)=\{z\in \mathbb{C}\ |\ |z\text{-}z_0|<4R\}$$

olsun. Diğer taraftan D nin sınırı $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D$ şeklinde iki parçadan oluşsun. Burada Γ_1, D nin sınırının $B_{4R}(z_0)$ diski içinde kalan parçası ve Γ_2 , $\partial B_{4R}(z_0)$ sınırında en az bir yığılma noktasına sahip ∂D sınırının diğer parçasıdır. Ayrıca D bölgesinde

$$Lu = 0$$

denklemi gerçeklensin ve L nin katsayıları (2.2.10) eşitsizliklerini sağlasın. Öte yandan

$$E_R = B_R(z_0) \setminus D$$

kümesinin boş olmadığını varsayalım. (Bakınız Şekil 2.2.1) Bu taktirde

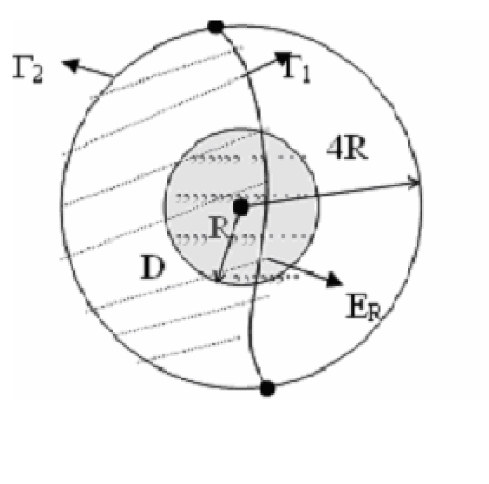
$$Lu = 0, \quad z \in D$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0$$

şeklinde tanımlanan problemin her pozitif reel değerli $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ çözümleri

için $$\sup_D u(z) \geq \left[1 + c_7 Cap_{(L,s)} E_R\right] \sup_{D \cap B_R(z_0)} u(z)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde c_7 sabiti vardır.



Şekil 2.2.1

İspat: Önce $r = |z-\zeta|$, $z \in D$, $\zeta \in E_R$ ve

$$M = \sup_{z \in D} u(z)$$

olmak üzere $B_{4R}(z_0)$ bölgesinde

$$\phi(z) = \left\{ 1 - \iint_{E_R} \left[\log\left(\frac{4R}{r}\right) \right]^s d\mu(\xi,\eta) + \lambda \right\} M \ \ , (\lambda > 0 \ , \ \lambda \text{ sabit})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada μ,

$$\iint_{E_R} \left[\log\left(\frac{4R}{r}\right) \right]^s d\mu(\xi,\eta) \le 1 \ ,(x,y) \in D, (\xi,\eta) \in E_R$$

$$\sup_{\mu \in M_1} \mu(E_R) = Cap_{(L,s)} E_R \tag{2.2.13}$$

özelliklerine sahip bir ölçü ve $\zeta = \xi + i\eta$ dir. (2.2.13) den dolayı her $\varepsilon > 0$ için

$$\mu_0(E_R) \ge Cap_{(L,s)} E_R - \varepsilon \tag{2.2.14}$$

yazılabilir. Burada $\mu_0 \in M_1$ dir.

Şimdi ϕ nin ∂D üzerindeki değerini inceleyelim.

$$\phi(z)\,\Big|_{\Gamma_1} \ge 0 , \quad u(z)\,\Big|_{\Gamma_1} = 0$$

olması nedeniyle

$$u(z)\,\Big|_{\Gamma_1} \le \phi(z)\,\Big|_{\Gamma_1}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$\phi(z)\,\Big|_{\partial B_{4R}(z_0)} \ge \left\{ 1 - \sup_{z \in \partial B_{4R}(z_0)} \iint_{E_R} \left[\log\left(\frac{4R}{r}\right) \right]^s d\mu(\xi,\eta) + \lambda \right\} M$$

$$\geq \left\{1-\left[log(\frac{4}{3})\right]^{s}\mu(E_R)+\lambda\right\}M$$

$$\geq \left\{1-\left[log\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{s} Cap_{(L,s)}(E_R)+\lambda\right\}M$$

dir. λ sayısını

$$\lambda=\left[log\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{s} Cap_{(L,s)}E_R$$

olarak seçersek bu durumda

$$\phi(z)\Big|_{\partial B_{4R}(z_0)} \geq M = \sup_{z\in D} u(z)$$

olur. Böylece

$$\phi(z)\Big|_{\partial D} \geq u(z)\Big|_{\partial D}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Lemma (2.2.2) ve (2.2.6) den

$$L\phi(z)\leq -M\iint_{E_R} L\left[log\left(\frac{4R}{r}\right)\right]^{s} d\mu(\xi,\eta)\leq 0$$

yazılabilir. O halde $\phi(z)$ reel fonksiyonu $Super-L$ çözümdür. $Super-L$ çözüm fonksiyonları için bilinen maksimum prensibi nedeniyle her $z\in$ D için

$$\phi(z)\geq u(z)$$

eşitsizliği her zaman doğrudur. Buradan

$$u(z)\leq \left\{1-\iint_{E_R}\left[log\left(\frac{4R}{r}\right)\right]^{s} d\mu(\xi,\eta)+\left[log\left(\frac{4}{3}\right)\right]^{s} Cap(_{L,s)}(E_R)\right\}M$$

yazılabilir.

Şimdi $u(z)$ nin $D \cap B_R(z_0)$ bölgesinde üstten sınırlı olduğunu gösterelim.

Bunun için önce

$$\sup_{z\in D\cap B_R(P_0)} u(z) \leq \left\{ 1 - \inf_{z\in D\cap B_R(P_0)} \iint_{E_R} \left[log\left(\frac{4R}{r}\right)\right]^s d\mu(\xi,\eta) \right.$$

$$\left. + \left[log\left(\frac{4}{3}\right)\right]^s Cap\,(L,s)\; E_R \right\} \sup_{z\in D} u(z) \;\; , \zeta = \xi + i\eta$$

eşitsizliğini gözönüne alalım. Buradan (2.2.13) bağıntısının da kullanılmasıyla

$$\sup_{z\in D\cap B_R(P_0)} u(z) \leq \left\{ 1 - \left[log\frac{4}{2}\right]^s \mu(E_R) + \left[log\left(\frac{4}{3}\right)\right]^s Cap_{(L,s)} E_R \right\} \sup_{z\in D} u(z)$$

$$= \left\{ 1 - [log2]^s - \left[log\left(\frac{4}{3}\right)\right]^s Cap_{(L,s)} E_R + \varepsilon\,[\log 2]^s \right\} M$$

$$= \left\{ 1 - c_7^* Cap_{(L,s)} E_R + \varepsilon\,[log2]^s \right\} M$$

olur. Bu eşitsizlik her $\varepsilon > 0$ sayısı için sağlandığından

$$\sup_{z\in D\cap B_R(P_0)} u(z) \leq \left[1 - c_7^*\, Cap_{(L,s)} E_R \right] \sup_{z\in D} u(z)$$

bulunur. Burada

$$c_7^* = [log2]^s - \left[log\left(\frac{4}{3}\right)\right]^s \text{ dir .}$$

Böylece,

$$\sup_{z\in D} u(z) \geq \left[1 + \frac{c_7^*}{1 - c_7^* Cap_{(L,s)} E_R} Cap_{(L,s)} E_R \right] \sup_{z\in D\cap B_R(P_0)} u(z)$$

veya

$$\sup_{z\in D} u(z) \geq \left[1 + c_7\, Cap_{(L,s)} E_R\right] \sup_{z\in D\cap B_R(P_0)} u(z)$$ olur ki bu da Lemma2.2.3 ün

ispatını tamamlar. Burada

$$c_7 = \frac{c_7^*}{1 - c_7^* Cap_{(L,s)} E_R}$$ dir.

Not : $Lu = 0$ ın her u çözümü için

$$\sup_{z\in D} u(z) \geq \sup_{z\in D\cap B_R(P_0)} u(z)$$

eşitsizliği daima doğrudur. Eğer ;

$$M = \sup_{z\in D} u(z) \geq \sup_{z\in D\cap B_R(P_o)} u(z) \quad ;\; M_1 = \sup_{z\in D\cap B_R(P_o)} u(z)$$

dersek bu taktirde Lemma 2.2.3 ün bir sonucu olarak

$$M \geq \left[1 + c_7 Cap_{(L,s)} E\right] M_1$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde c_7 sabitinin mevcut olduğunu söyleyebiliriz.

Lemma 2.2.4 E , $B_R(P_0)$ diskinin bir alt kümesi olsun. Bu taktirde;

$$Cap_{(L,s)} E \geq a_0(s) \frac{mes_2 E}{R^2}, \qquad E \subset B_R(P_0)$$

olacak şekilde bir $a_0(s)$ sayısı vardır. Burada $mes_2 E$, E nin lebesque anlamında ölçüsüdür.

İspat: Önce

$$\iint_E \left[log\left(\frac{2R}{r}\right)\right]^s d\mu(\xi,\eta) \leq 1 \quad ,\zeta \in E, \quad z \notin E \;\; \zeta = \xi + i\eta \quad , z = x + iy$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\mu \in M_1$ ölçüsünün var olduğunu gösterelim.

Bunun için önce

$$d\mu = A_0 d\xi\, d\eta \quad (A_0 \text{ sabit}),\ \ r < R \qquad 0 < r_0 \le r \le R$$

seçelim. Böylece

$$\iint_E \left[log\left(\frac{2R}{r}\right)\right]^s d\mu(\xi,\eta) = A_0 \iint_E \left[log\left(\frac{2R}{r}\right)\right]^s d\xi d\eta$$

$$\le A_0 \iint_{B_{5R}(P_0)} \left[\log\left(\frac{5R}{t}\right)\right]^s dt$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte kutupsal koordinatların kullanılmasıyla

$$\iint_E \left[log\left(\frac{2R}{r}\right)\right]^s d\mu(\xi,\eta) \le A_0 c_8(s) R^2$$

elde edilir. A_0 sayısını

$$A_0 = \frac{1}{c_8(s)R^2}$$

olarak seçersek

$$\iint_E \left[log\left(\frac{2R}{r}\right)\right]^s d\mu(\xi,\eta) \le 1$$

eşitsizliği elde edilir. O halde μ istenilen özelliklere sahip bir ölçüdür.

Diğer taraftan,

$$d\mu = \frac{1}{c_8(s)R^2} d\xi\, d\eta$$

olması nedeniyle

$$Cap_{(L,s)}E \geq \frac{1}{c_8(s)R^2} mes_2 E \tag{2.2.15}$$

eşitsizliği ortaya çıkar ve bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.2.5 Lemma 2.2.3 ün hipotezleri geçerli olsun. Bu taktirde $Lu = 0$ ın çözümleri için,

$$\sup_{z\in D} u(z) \geq \left[1 + c_9(s)\frac{mes_2 E}{R^2}\right] \sup_{z\in D\cap B_R(P_0)} u(z) \tag{2.2.16}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $c_9(s)$ sayısı vardır.

İspat: Lemma 2.2.4 ve (2.2.15) eşitsizliği göz önüne alınırsa bu lemmanın doğruluğu görülebilir.

Tanım 2.2.4 Düzgün sınırlı olmayan $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde

$$Lu = 0 \quad , \quad D \text{ bölgesinde}$$
$$u\Big|_{\partial D} = \varphi \quad , \quad (\varphi \in C(\partial D))$$

şeklinde tanımlanan sınır-değer problemini gözönüne alalım. $\phi_0(z), \varphi$ nin D bölgesine sürekli genişletmesi olsun. Şimdi D bölgesini

$$D_m \subset D_{m+1} , \quad \overline{D}_m \subset D \quad , \lim_{m\to\infty} D_m = D \ ; \ (m = 1,2,...)$$

özellikleri sağlanacak şekilde parçalayalım. Burada D_m ler düzgün sınırlı alt bölgelerdir. Her bir $m \in IN$ için D_m bölgelerinde

$$Lu_m = 0 , \quad D_m \text{ bölgesinde}$$

$$u_m\Big|_{\partial D_m} = \phi_0\Big|_{\partial D_m} = \phi_{0m} \quad , \phi_{0m} \in C(\partial D_m)$$

sınır-değer problemlerini göz önüne alalım. (D_m ler düzgün sınırlı olduklarından bu şekilde tanımlanan sınır değer problemlerinin çözümü mevcuttur.) Diğer taraftan

$$\lim_{m \to \infty} u_m(z) = u_\varphi(z)$$

limitinin mevcut olduğunu varsayalım. Bu taktirde $u_\varphi(z)$ limit fonksiyonuna $Lu=0$ denkleminin "Wiener anlamında genelleştirilmiş çözümü "denir.

Tanım 2.2.5 $z_0 \in \partial D$ sabit bir nokta ve u_φ , $Lu = 0$ ın Wiener anlamında genelleştirilmiş çözümü olsun. Eğer her $\varphi \in C(\partial D)$ için

$$\lim_{z \to z_0} u_\varphi(z) = \varphi(z_0) \ , z \in D$$

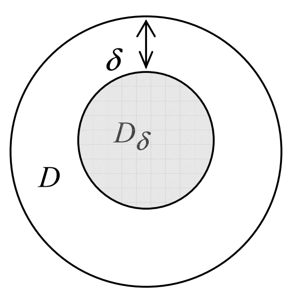
oluyorsa bu takdirde z_0 sınır noktasına ∂D nin bir " Regüler noktası" ; aksi takdirde "Irregüler noktası" denir.

Tanım 2.2.6 Tüm sınır noktaları Wiener anlamında regüler olan bölgeye Wiener tipli bölge denir

Teorem 2.2.1 Tanım 2.2.5 deki u_m $(m = 1,2........)$ fonksiyonları D_m bölgelerinde $Lu = 0$ denkleminin çözümleri olsun. Diğer taraftan her δ>0 için tanımlanan

$$D_\delta = \{z \in D \mid dist(z, \partial D) \geq \delta\} \ ; \ \overline{D}_m \subset D_\delta$$

bölgelerini gözönüne alalım. Bu taktirde $\{u_m(z)\}$ çözümler dizisi yakınsaktır.



Şekil 2.2.2

İspat: Önce her $\varepsilon > 0$ sayısı için $|G(z)-\phi_0(z)|\Big|_{\overline{D}} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $G(z)$ ve $\phi_0(z)$ reel değerli fonksiyonlarını gözönüne alalım. Diğer taraftan $\overline{D}$ bölgesinde $G(z)$ yardımıyla

$$G_1(z) = \frac{1}{2}G(z) + e^{2\delta K}\ e^{[K\,\mathrm{Re}(1-i)(z-z_0)]}$$

$$G_2(z) = \frac{1}{2}G(z) - e^{2\delta K}\ e^{[K\,\mathrm{Re}(1-i)(z-z_0)]}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Burada K herhangi bir sabit ve δ ise bölgenin çapıdır. Ayrıca $G(z)$ nin 2.basamaktan kısmi türevlerinin var ve sınırlı olduklarını kabul edelim. Bu hipotezler altında $G_1(z)$ $Sup-L$ çözüm olacak şekilde K sabiti seçilebilir. Bunun için önce

$$\begin{aligned} LG_1(z) &= \frac{1}{2}\left[\Delta G + p(z)G_x + q(z)G_y + k(z)G\right] \\ &\quad + 2K^2 e^{2\delta K}\ e^{K[\mathrm{Re}(1-i)(z-z_0]} + p(z)K\,e^{2\delta K}\ e^{K[\mathrm{Re}((1-i)(z-z_0)]} \\ &\quad + q(z)K\,e^{2\delta K}\ e^{K[\mathrm{Re}(1-i)(z-z_0]} + k(z)K\,e^{2\delta K}\ e^{K[\mathrm{Re}((1-i)(z-z_0))]} \qquad (2.2.17) \end{aligned}$$

ifadesini gözönüne alalım. Diğer taraftan

$$M_1^{*} = \max_{z\in D}\left(\left|\frac{\Delta G}{2}\right|, |G_x|, |G_y|, |G|\right) \qquad (2.2.18)$$

diyelim.(2.2.10) nedeniyle

$$\max\left(|p(z)|, |q(z)|, |k(z)|\right) \le c_{10}(r)$$

olacak şekilde $c_{10}(r)$ sayısı mevcuttur. Bu bağıntılar (2.2.17) de kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa yeterince büyük bir K sabiti için

$$LG_1(z) \ge 0$$

yazılabilir. Tamamen benzer şekilde yine yeterince büyük K sabitleri için

$$L_2 G(z) \leq 0$$

olduğu görülebilir. Böylece yeterince büyük K lar için D bölgesinde G_1 Sup - L çözüm ; G_2 $Super - L$ çözüm olduğu görülmüş olur. Diğer taraftan

$$G(z) = \frac{1}{2} G(z) + e^{2\delta K} e^{[K \operatorname{Re}(1-i)(z-z_0)]} + \frac{1}{2} G(z) - e^{2\delta K} e^{[K \operatorname{Re}(1-i)(z-z_0)]}$$

$$= G_1(z) + G_2(z)$$

yazılabilir. Şimdi

$$\left.\begin{array}{ll} L v_m^+ = 0 & , \; z \in D_m \\ v_m^+ \underset{\partial D_m}{|} = G_1(z) & , \; z \in \partial D_m \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} L v_m^- = 0 & , \; z \in D_m \\ v_m^- \underset{\partial D_m}{|} = G_2(z) & , \; z \in \partial D_m \end{array}\right\}$$

şeklinde tanımlanan sınır-değer problemlerini gözönüne alalım.

$G_1(z)$, D_m bölgesinde Sup - L çözüm ($G_2(z)$ $Super - L$ çözüm) olduğundan maksimum prensibi nedeniyle,

$$v_m^+ \geq G_1 \quad , \quad (v_m^- \leq G_1)$$
$$v_{m-1}^+ \leq v_m^+ , \; (v_m^- \geq v_{m-1}^-)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. O halde $\{v_m^+\}, \{v_m^-\}$ monoton fonksiyon dizilerdir. Ayrıca maksimum prensibine göre bu fonksiyonlar sınırlıdır. Bu durumda D_m bölgesinde

$$L u_m = 0 \quad , \quad z \in D$$

$$u_m \underset{\partial D}{|} = \phi_0$$

sınır değer probleminin çözümleri için $v_m = v_m^+ + v_m^-$ olmak üzere yeterince büyük m ler için

$$\max_{z \in D} |u_m - v_m| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\{u_m(z)\}$ reel fonksiyonlar dizisi yakınsaktır. Yani

$\lim_{m \to \infty} u_m(z) = u_\varphi(z)$ limiti mevcuttur.

Schauder kestirimi yardımıyla $u_\varphi(z)$ limit fonksiyonunun da Lu=0 denkleminin çözümü olduğu gösterilebilir. Özel hallerde $Lu = 0$ ın klasik anlamdaki çözümü ile Wiener anlamındaki genelleştirilmiş çözümü çakışabilir. Bu nedenle ortaya konulan sınır değer probleminin çözümünün tek olduğu gösterilebilir.

Şimdi hangi koşullar altında u_φ fonksiyonunun $\overline{D}$ da sürekli olduğunu yani hangi koşullar altında ∂D sınırında u_φ ile φ fonksiyonunun çakıştığını araştırmamız gerekmektedir. Bunun için önce aşağıdaki tanımı verelim:

Tanım 2.2.7 (2.2.9) denklemindeki katsayıların (2.2.10) eşitsizliklerini sağladıklarını kabul edelim. $z_0 \in \partial D$ sabit bir nokta olsun. Eğer D nin her D' alt bölgesinde tanımlı, $\overline{D}'$ da sürekli, her $z \in D'$ için $u(z) < 1$ eşitsizliğini sağlayan her u^* $Sup - L$ çözüm fonksiyonu için aşağıdaki özellikleri sağlayan ψ reel değerli fonksiyonu bulunabilirse z_0 sınır noktasına

$$\left.\begin{array}{ll} Lu = 0 \quad , & z \in D \\ u|_{\partial D} = \varphi \quad , & \varphi \in C(\partial D) \end{array}\right\} \qquad (2.2.19)$$

şeklindeki sınır-değer problemi için "$\psi -$regüler nokta" denir.

i) $0 < r < r_0$ için $\psi(r) > 0$ ve $\lim_{r \to 0} \psi(r) = 0$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

ii) $u|_{D' \cap \sigma} \leq 0$

olduğu sürece

$$u\Big|_{D\cap\sigma_1} \leq \psi(\sqrt{(x\text{-}x_0)^2+(y\text{-}y_0)^2} = \psi(r)$$

eşitsizliği geçerli olsun. Burada σ_1 ve σ z_0 ın keyfi iki komşuluğudur. Bu komşuluklar L operatörü ve s sayısına bağlı u ve D' den bağımsızdır.

Teorem 2.2.2 $z_0 \in \partial D$ olsun. Ayrıca (2.2.9) daki L operatörünün katsayılarının (2.2.10) özelliklerine sahip olduğunu kabul edelim. Eğer z_0 noktası (2.2.19) sınır değer problemi için $\psi-$regüleı ise bu taktirde z_0 aynı zamanda Wiener anlamında regüler bir noktadır.

İspat : ϕ_0 **,** φ nin D bölgesine sürekli bir genişletmesi olsun. Ayrıca her $z\in\overline{D}\cap B_\varepsilon(P_0)$ için ,

$$\left|\phi_0(z)-\varphi(z_0)\right| \leq \frac{\varepsilon_1}{2},\ \ z_0 = x_0 + iy_0$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde ε_1 sayısının mevcut olduğunu kabul edelim.

Ayrıca $u_m(z)$ ler

$$\begin{array}{ll} Lu_m = 0 & ,z\in D \\ u_m\Big|_{\partial D_m} = \phi_0\Big|_{\partial D_m} = \phi_{0m} & ,(m=1,2...) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan sınır-değer probleminin çözümleri olsun. Diğer taraftan D_m bölgelerinde

$$w_m(z) = u_m(z) - \varphi(z_0) - \frac{\varepsilon_1}{2},\ (m=1,2....)$$

reel değerli fonksiyonlarını tanımlayalım. z_0, $\psi-$regüler olduğundan

$$w_m(z)\Big|_{\partial D_m\cap B_\varepsilon(z_0)} \leq 0$$

olduğunda

$$w_m(z) \le \psi(|z - z_0|)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $z \in D_m \cap B_\delta(z_0)$ noktaları ve $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$u_m(z) - \varphi(z_0) \le \psi(|z - z_0|)$$

yazılabilir. Teorem 2.2.1 nedeniyle son eşitsizlikten

$$u_\varphi(z) - \varphi_1(z_0) \le \psi(|z - z_0|)$$

eşitsizliği yazılabilir. Tamamen benzer şekilde $u_m(z)$ ler yerine $-u_m(z)$ ler almak suretiyle

$$u_\varphi(z) - \varphi_1(z_0) \ge -\psi(|z - z_0|)$$

elde edilebilir. Böylece

$$|u_{\varphi_1}(z) - \varphi(z_0)| \le \psi(|z - z_0|)$$

ifadesi elde edilmiş oldu. Diğer taraftan

$$\lim_{r \to 0} \psi(r) = 0$$

olması nedeniyle buradan

$$\lim_{z \to z_0} u_{\varphi_1(z)} = \varphi_1(z_0)$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış oldu.

Şimdi hangi şartlar altında z_0 sınır noktasının $\psi-$regüler olduğunu araştıralım. Bunu bir teoremle ifade edelim:

Teorem 2.2.3 Sınırlı $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $Lu=0$ denklemi verilsin ve L operatörünün katsayıları D bölgesinde (2.2.10) eşitsizliklerini sağlasın. Ayrıca $u(z)$ reel çözümü $\overline{D} \setminus \{z_0\}$ bölgesinde sürekli, D de sınırlı, $\partial D \cap B_{R_0}(z_0)$ üzerinde $Lu=0$ ın sıfır değerini alan çözümü olsun. Diğer taraftan $0 < R < R_0$

$R = 4^{-m}, m \in IN$ olmak üzere

$$E_R = B_R(z_0) \setminus D \quad , Cap_{(L,s)} E_R = K(R)$$

veya

$$Cap_{(L,s)} E_m = K(m)$$

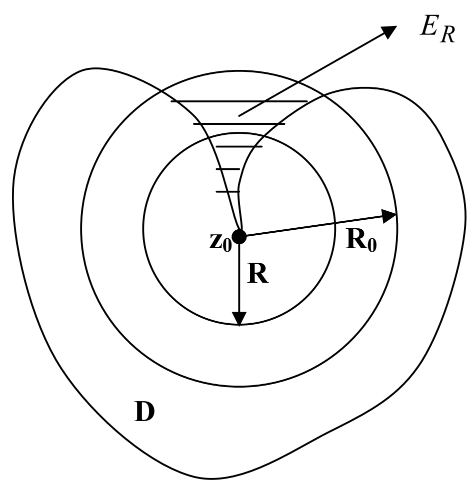
tanımlamasını yapalım. Bu şartlar altında eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m$$

serisi ıraksak ise bu taktirde $z_0 \in \partial D$ sınır noktası $\psi -$regülerdir. Bunun dışında

$$\psi(|z - z_0|) = c_0 \; exp \left[- \sum_{m=1}^{\left[\log \frac{1}{|z-z_0|}\right]} \right]$$

eşitliği sağlanacak şekilde c_0 sabiti vardır. (Bakınız şekil 2.2.3)



Şekil 2.2.3

İspat: Önce $u(z_1) > 0$ ve $|z_1 - z_0| < l$ olacak şekilde $z_1 \in B_{R_0}(z_0)$ noktasının mevcut olduğunu kabul edelim. Burada l herhangi bir sabittir. Diğer taraftan

$$4^{-m_0} < R_0 \quad , \qquad 4^{-m} < |z - z_0| < 4^{-m+1}$$

eşitsizlikler sağlanacak şekilde en küçük m ve m_0 sayılarını gözönüne alalım. Ayrıca

$$M_i = \sup_{z \in D \cap B_{4^{-i}}(z_0)} u(z) \qquad , \; i = m_{0+1}, ..., m$$

olsun. Diğer taraftan l sayısını

$$m > m_0$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçelim. $B_{4^{-i+1}}(z_0)$, $B_{4^{-i}}(z_0)$ dairesel bölgelerinin yanında $u(z) > 0$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $D_i^* \subset D \cap B_{4^{-i+1}}(z_0)$ alt bölgelerini düşünelim. Yani her $z \in D_i^*$ için $u(z) > 0$ olsun. D_i^* irtibatlı olmayabilir. G_i ile D_i^* in bileşenlerini gösterelim. Üzerinde $u(z)$ nin maksimum değerini aldığı bileşen $G_i^{'}$ olsun. Eğer $Lu = 0$ ın çözümleri için $G_i^{'}$ bölgesinde Lemma 2.1.3 (Temel Lemma) yı kullanırsak ve ayrıca $B_{4^{-i+1}}(z_0)$, $B_{4^{-i}}(z_0)$ bölgelerinin de kullanılmasıyla

$$M_{i-1} \geq (1 + c_{10} K_i) M_i$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada

$$K_i = Cap_{(L,s)}(B_{4^{-i+1}}(P_0) \setminus D_i^*)$$

dir. Buradan ardışık yerine yazmalarla $i = m_{0+1}, m_{0+2} ...., m$ için

$$M_{m_0} \geq \prod_{i=m_0}^{m} (1 + c_{10} Ki) M_i \geq M_m \prod_{i=m_0}^{m} (1 + c_{10} K_i)$$

eşitsizliği ortaya çıkar. Son eşitsizlikten

$$lnM \geq lnM_m + \sum_{i=m_0}^{m} ln(1 + c_{10}K_i) \tag{2.2.20}$$

yazılabilir. Burada

$$M = \max_{z \in D} u(z)$$

dir. Şimdi $l_1 > 0$ sayısını

$$ln(1 + c_{10}K_i) \geq l_1 K_i$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde seçelim. Bu taktirde z_0 ın yeterince küçük komşuluğunda

$$u(z) \leq Mexp\left[-l_2 \sum_{i=1}^{\left[log\frac{1}{z-z_0}\right]} K_i\right]$$

yazılabilir. Çünkü

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i$$

serisi ıraksak ve

$$4^{-m} < |z - z_0| < 4^{-m+1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada l_2, l_1 ve c_{10} sabitlerine bağlı bir başka sabittir. Eğer ψ fonksiyonu

$$\psi(|z - z_0|) = Mexp\left[-l_2 \sum_{i=1}^{\left[\log\frac{1}{z-z_0}\right]} K_i\right]$$

olarak seçersek bu durumda $z_0 \in \partial D$ sınır noktasının $\psi -$regüler olduğu ortaya çıkar.

Böylece Teorem 2.1.3 tam olarak ispatlanmış oldu.

Teorem 2.2.4 Sınırlı $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde (2.2.11) ile verilen sınır-değer problemini göz önüne alalım. $z_0 \in \partial D$ herhangi bir sınır noktası olsun. Eğer

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_i$$

serisi ıraksak ise bu taktirde z_0, Wiener anlamında regüler sınır noktasıdır. Burada K_i ler Teorem 2.2.3 te tanımlandığı gibidir.

İspat: Teorem 2.2.3 yardımıyla bu teoremin doğruluğu görülebilir.

Teorem 2.2.5 Teorem 2.2.4 ün hipotezleri geçerli olduğunu varsayalım. Bu taktirde (2.2.11) ile tanımlanan sınır-değer probleminin u çözümünün z_0 noktasında süreklilik modülü

$$g(|z-z_0|) = k\, exp\left[-\sum_{m=1}^{\left[\log\frac{1}{z-z_0}\right]} Km\right]$$

dır.

İspat : Bu teremin ispatı yine Teorem 2.2.3 ten kolayca elde edilebilir.

Sonuç: Teorem 2.2.3 ün hipotezleri geçerli olsun. Eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m} mes_2 E_m$$

serisi ıraksak ise bu taktirde $z_0 \in \partial D$ sınır noktasıWiener anlamında regülerdir. Burada $mes_2 E_m$, E_m kümesinin ölçüsüdür.

O halde genelleştirilmiş analitik fonksiyonların reel kısmı olan $u(z)$ (2.2.11) sınır-değer probleminin çözümü olarak elde edilebilir.

2.3 Sanal Kısmın Bulunması

Önceki bölümde $w = u + iv$ genelleştirilmiş analitik fonksiyonunun u reel kısmı, (2.2.11) ile verilen sınır-değer probleminin çözümü olarak bulunmuştu.

Bu bölümde aynı D bölgesinde (2.2.10) şartlarının sağlanması ve u nun belli olması halinde sanal kısım olan v nin nasıl elde edileceğini araştıracağız.

Bilindiği gibi

$$w_{\overline{z}} = Aw + B\overline{w} \tag{2.3.1}$$

kompleks denklemi, $w = u + iv$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} u_x - v_y &= a(x,y)u + b(x,y)v \\ u_y + v_x &= c(x,y)u + d(x,y)v \end{aligned}\right\} \tag{2.3.2}$$

reel kısmi türevli denklem sistemine denktir. Burada,

$$A = \frac{1}{4}(a + d + ic\text{-}ib), \quad B = \frac{1}{4}(a - d + ic + ib)$$

dir.

$$\left.\begin{aligned} & w_{\overline{z}} = Aw + B\overline{w} \ , \ z \in D \\ & \operatorname{Re} w \Big|_{\partial D} = u \Big|_{\partial D} = \varphi \ , \ \varphi \in C^{\alpha}(\partial D) \ , 0 < \alpha < 1 \\ & \operatorname{Im} \ w(z_0) = v(z_0) = c_0 \ , \ z_0 \in \overline{D} \end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}$$

problemindeki $u = \operatorname{Re} w$ fonksiyonunun Wiener tipli bölgede varlığı uygun koşullar altında gösterildi. Bulunan bu u değeri (2.3.2) de yerine yazılırsa

$$\left.\begin{aligned} v_x &= d(x,y)v + c(x,y)u - u_y \\ v_y &= -b(x,y)v - a(x,y)u + u_x \end{aligned}\right\} \tag{2.3.4}$$

reel sistemi elde edilir. (2.3.4) sistemi tam diferensiyeldir ve çözülebilirlik koşulu

$$v_{xy} = v_{yx}$$

$$\left(d(x,y)v + c(x,y)u - u_y)\right)_y = \left(-b(x,y)v - a(x,y) + u_x\right)_x$$

dir . (2.3.4) sistemi $v(z_0) = c_0$ koşulu altında tek olarak çözülebilir. Bu durumda (2.3.3) sınır-değer problemi Wiener tipli bölgede tam olarak çözülmüş oldu. Böylece (2.3.3) probleminin çözümü $w = u + iv$ şeklinde elde edilir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1 Wiener Tipli Bölgede Bir Çözüm Gösterilimi

Şimdi $f \in C^{\alpha}(D)$ olmak üzere

$$T_D : C^{\alpha}(D) \to C^{\alpha}(D)$$
$$f :\to T_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta\,, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

olarak tanımlanan T_D operatörünü göz önüne alalım. Sınırı düzgün D bölgesinde (2.3.1) dekleminin

$$w(z) = \phi(z) + T_D(Aw + B\overline{w})(z)$$

şeklinde bir çözüm gösterilimi vardır. Burada $\phi(z)$ keyfi holomorf bir fonksiyondur. T_D operatörü için

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(T_D f(z)\right) = f(z)$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(T_D f(z)\right) = \phi'(z) + \Pi_D f(z)$$

özellikleri vardır. Burada

$$\Pi_D f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta$$

dir.

D bölgesini, $\overline{D}_m \subset D_{m+1}$, $\lim\limits_{m\to\infty} D_m = D$ düzgün sınırlı D_m alt bölgeleri yardımıyla parçalayalım. ϕ_0 , φ nin D bölgesine sürekli genişletmesi olsun.

Düzgün sınırlı D_m bölgelerinde,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_m}{\partial \bar{z}} = Aw_m + B\overline{w}_m \ , z \in \overline{D}_m \\
&\operatorname{Re} w_m \Big|_{\partial D_m} = \phi_0(z) \Big|_{\partial D_m} = \phi_{0m}(z) \\
&\operatorname{Im} w_m(z_{0m}) = c_{0m} \ , \ z_{0m} \in D_m \ \ , m = 1,2,...
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.1}$$

sınır-değer problemlerini tanımlayalım. Burada

$$\lim_{m\to\infty} c_{0m} = c_0 \ ve \ \lim_{m\to\infty} z_{0m} = z_0, \ z_0 \in \overline{D} \ \ dir.$$

Teorem 3.1.1 $A, B, w \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ olmak üzere

$$w_m(z) = \phi_m(z) + T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m); \ m = 1,2,... \tag{3.1.2}$$

integral denklemi ile tanımlanan fonksiyonunun (3.1.1) denklemi ile tanımlanan sınır değer probleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul (3.1.2) deki $\phi_m(z)$ holomorf fonksiyonlarının

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\phi_m(z) = \phi_{0m}(z) - \operatorname{Re} T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m), z \in \partial D_m \\
&\operatorname{Im}\phi_m(z_{0m}) = c_{0m} - T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m)(z_{0m}), z_{0m} \in \overline{D}_m
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

koşullarını sağlamasıdır.

İspat : $\phi(z) = w(z) - T_D(Aw + B\overline{w})(z)$ olup buradan $z \in \partial D$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \ \phi(z) = \operatorname{Re} \ w(z) \text{-} \operatorname{Re} \ T_D(Aw + B\overline{w})(z), z \in \partial D$$

$$= \varphi(z) \text{ - } Re \, T_D(Aw + B\overline{w})(z)$$

ve

$$\operatorname{Im}\phi(z_0) = \operatorname{Im} w(z_0) - \operatorname{Im} T_D(Aw + B\overline{w})(z_0)$$

$$= c_0 \text{ - } Im T_D(Aw + B\overline{w})(z_0)$$

olur. Bu teoremin karşıtı benzer işlemlerle ispatlanabilir. Böylece ispat tamamlanmış oldu.

Şimdi D bölgesi Wiener Tipli bölge olduğunda (3.1.2) çözüm gösteriliminin geçerli olup olmadığını araştıralım.

Bunun için önce

$$\left.\begin{aligned} &P : C^{\alpha}(\overline{D}_m) \to C^{\alpha}(\overline{D}_m) \\ &w_m : \to P(w_m) = \phi_{m(w_m)} + T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m) \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.4)$$

operatörünü tanımlayalım. Burada $\phi_{m(w_m)} \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)$

$$\operatorname{Re}\phi_{m(w_m)} = \phi_{0m}(z) - \operatorname{Re}T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m), z \in \partial D_m$$
$$\operatorname{Im}\phi_{m(w_m)} = c_{0m} - \operatorname{Im}T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m)(z_{0m}), z_{0m} \in \overline{D}_m;\ m = 1,2,...$$

sınır koşullarını sağlayan holomorf fonksiyonlardır. Bu durumda $P(w_m)$ (3.1.1) sınır değer probleminin tüm koşullarını sağlar. Eğer $w_m{}^*$, P operatörünün sabit bir noktası ise o zaman

$$w^*{}_m = \phi_m(w^*) + T_{D_m}(Aw^*{}_m + B\overline{w}^*{}_m)$$

olup bu sabit nokta (3.1.1) probleminin çözümü olur.

P operatörünün hangi koşullar altında sabit noktaya sahip olacağını araştırmadan önce $C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ sınıfındaki alışılmış normu

$h \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ için

$$\| h \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} = max\left[\sup_{\overline{D}_m} | h(z) | \quad , \quad \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{| h(z_2) - h(z_1)|}{| z_2 - z_1 |^{\alpha}}\right], \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (3.1.5)$$

olarak tanımlayalım.

T_{D_m} operatörünün bu norma göre sınırlı olduğu ve çeşitli norm özellikleri için [8] e bakılabilir.

Teorem 3.1.2 $A, B, w, \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ olmak üzere (3.1.4) ile tanımlanan integral operatörü için

$$\| A \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \| B \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \leq \frac{1}{(K+1) \| T_{D_m} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}} \tag{3.1.6}$$

olacak şekilde K sabiti varsa P bir daralma dönüşümüdür.

İspat: $w_{m_1}, w_{m_2} \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ olmak üzere

$$P(w_{m_i}) = \phi_m(w_{m_i}) + T_{D_m}(Aw_{m_i} + B\overline{w}_{m_i}), i = 1,2,.. \tag{3.1.7}$$

sistemini göz önüne alalım. Burada $\phi_{m(w_{mi})}$ ler

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}\phi_{m(w_{m_i})} = \phi_{0m} - \operatorname{Re} T_{D_m}(Aw_{m_i} + B\overline{w}_{m_i}),\ z \in \partial D_m \\ &\operatorname{Im}\phi_m(w_{m_i}) = c_{om} - \operatorname{Im} T_{D_m}(Aw_{m_i} + B\overline{w}_{m_i})(z_{0m}),\ z_{0m} \in \overline{D}_m\ ,\ i = 1,2... \end{aligned}\right\} \tag{3.1.8}$$

sınır koşullarını sağlayan holomorf fonksiyonlardır. Diğer taraftan

$$\left[P(w_{m_1}) - P(w_{m_2})\right](z_{0m}) = \left[\phi_{m(w_{m_1})}(z_{0m}) - \phi_{m(w_{m_2})}(z_{0m})\right] + T_{D_m}\left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B\overline{(w_{m_1} - w_{m_2})}\right](z_{0m}) \tag{3.1.9}$$

ve (3.1.8) den

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left[\phi_{m(w_{m_1})}(z_{0m}) - \phi_{m(w_{m_2})}(z_{0m})\right] = -\operatorname{Re} T_{D_m}\left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B\overline{(w_{m_1} - w_{m_2})}\right](z_{0m}) \\ &\operatorname{Im}\left[\phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})}\right](z_{0m}) = -\operatorname{Im} T_{D_m}\left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B\overline{(w_{m_1} - w_{m_2})}\right](z_{0m}) \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

yazılabilir. $C^{\alpha}(D_m)$ sınıfında (3.1.5) ile tanımlanan norm özelliklerinden

$$\begin{aligned} &\| T_{D_m}\left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B\overline{(w_{m_1} - w_{m_2})}\right] \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \leq \| T_{D_m} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \\ &\left[\| A \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \| B \|_{C^{\alpha}(\overline{D}m)}\right] \| w_{m_1} - w_{m_2} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}m)} \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

olduğu kolayca elde edilebilir.

Şimdi $\phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})}$ fonksiyonunun ∂D_m sınırındaki değerini inceleyelim: $z_1, z_2 \in \partial D_m$ olmak üzere T_{D_m} operatörünün norm özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\left| -\mathrm{Re}T_{D_m}\left[A(w_{m_1}-w_{m_2})+B(\overline{w}_{m_1}-\overline{w}_{m_2})\right](z_1)+\mathrm{Re}T_{D_m}\left[A(w_{m_1}-w_{m_2})+B(\overline{w}_{m_1}-\overline{w}_{m_2})\right](z_2)\right|$$

$$\leq \| T_{Dm} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}\left[\| A\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}+\| B\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}\right]\| w_{m_1}-w_{m_2}\|_{C^{\alpha}(\overline{D}m)}| z_1 - z_2|^{\alpha} \qquad (3.1.12)$$

yazılabileceği yine basit bir hesapla görülebilir. O halde $\phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})}$ fonksiyonunun reel kısmı ∂D_m sınırında Hölder sabiti

$$K = \| T_{Dm} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}\left[\| A\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}+\| B\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}\right]\| w_{m_1}-w_{m_2}\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \qquad (3.1.13)$$

olmak üzere Hölder süreklidir. Bir holomorf fonksiyonun reel kısmı ∂D_m sınırında Hölder sürekli ise sanal kısmı da Hölder süreklidir.(Bakınız: [8] ,sayfa 130,Lemma1) Böylece

$$\left| \left[\phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})}\right](z_2) - \left[\phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})}\right](z_1)\right|$$

$$\leq k \| T_{D_m} \| C^{\alpha}(T_{D_m})\left[\| A\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}+\| B\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}\right]\| w_{m_1}-w_{m_2}\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}| z_2 - z_1|^{\alpha} \qquad (3.1.14)$$

yazılabilir. Burada $k = \dfrac{2\alpha+3}{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}\left[\dfrac{2}{\alpha\pi}(1+2^{\alpha})+1\right]$ dir. (Bakınız[8],sayfa131,Teorem1).

Burada her $z \in \overline{D}_m$ için

$$\left|\left[\phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})}\right](z)\right| \leq 2^{\alpha} k \| T_{D_m} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \left[\| A \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \| B \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \right]$$

$$\| w_{m_1} - w_{m_2} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \underset{\partial D_m}{Sup} \left| -\operatorname{Re} T_{D_m} \left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B(\overline{w}_{m_1} - \overline{w}_{m_2}) \right] \right|$$

$$+ \left| -\operatorname{Im} T_{D_m} \left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B(\overline{w}_{m_1} - \overline{w}_{m_2}) \right](z_0) \right| \qquad (3.1.15)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $C^{\alpha}(\overline{D}\ )$ daki norm özelliklerinden

$$\underset{\partial D_m}{sup} \left| -\operatorname{Re} T_{D_m} \left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B(\overline{w}_{m_1} - \overline{w}_{m_2}) \right](z_{0m}) \right|$$

$$\leq \| T_{D_m} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \left[\| A \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \| B \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \right] \| w_{m_1} - w_{m_2} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \qquad (3.1.16)$$

ve

$$\left| -\operatorname{Im} T_{D_m} \left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B(\overline{w}_{m_1} - \overline{w}_{m_2}) \right](z_{0m}) \right|$$

$$\leq \| T_{D_m} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \left[\| A \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \| B \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \right] \| w_{m_1} - w_{m_2} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \qquad (3.1.17)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (3.1.16) ve (3.1.17) eşitsizliklerinin (3.1.15) de kullanılmasıyla her $z \in D_m$ için

$$\left|\left[\phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})}\right](z)\right|$$

$$\leq (2^{\alpha} k + 2) \| T_{D_m} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \left[\| A \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \| B \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \right] \| w_{m_1} - w_{m_2} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \qquad (3.1.18)$$

olur. Böylece (3.1.5) norm tanımının da kullanılmasıyla (3.1.15) ve (3.1.18) den

$$\| \phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}$$

$$\leq (2^{\alpha} k + 2) \| T_{D_m} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \left[\| A \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \| B \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \right] \| w_{m_1} - w_{m_2} \|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \qquad (3.1.19)$$

yazılabilir. $K_1 := 2^{\alpha} k + 2$ diyelim. (3.1.11) ve (3.1.19) eşitsizliklerinin dikkate alınmasıyla (3.1.9) dan

$$\left\| P(w_{m_1}) - P(w_{m_2}) \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}$$

$$\leq \left\| \phi_{m(w_{m_1})} - \phi_{m(w_{m_2})} \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \left\| T_{D_m}\left[A(w_{m_1} - w_{m_2}) + B(\overline{w}_{m_1} - \overline{w}_{m_2}) \right] \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}$$

$$\leq (K_1 + 1) \left\| T_{D\,m} \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \left[\left\| A \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \left\| B \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \right] \left\| w_{m_1} - w_{m_2} \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}$$

elde edilir. O halde son eşitsizlikte

$$\left(\left\| A \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \left\| B \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \right) < \frac{1}{(K_1 + 1) \left\| T_{D_m} \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}} \qquad (3.1.20)$$

özelliği sağlanırsa P operatörü $C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ sınıfında bir daralma dönüşümüdür.

Sonuç: P bir daralma dönüşümü ise P nin bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (3.1.2) sınır değer probleminin bir çözümüdür.

$\{w_m\}^{\infty}$, (3.1.1) sınır değer problemlerinin bir çözümlerinin bir dizisi olsun. Ayrıca ,

$$\lim_{m \to \infty} w_m = w_{\varphi}(z) \qquad (3.1.21)$$

limitinin mevcut olduğunu kabul edelim.

Tanım 3.1.1 (4.1.21) ile verilen $w_{\varphi}(z)$ limit fonksiyonuna $w_{\overline{z}} = Aw + B\overline{w}$ denkleminin "Wiener anlamında genelleştirilmiş çözümü"denir.

Eğer $z_0 \in \partial D$ olmak üzere

$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} w_{\varphi}(z) = \varphi(z_0)$$

oluyorsa bu durumda z_0 Wiener anlamında regüler nokta olur.

Lemma 3.1.1 $f \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ olmak üzere

$$\lim_{\delta\to 0} \iint_{|z-z_0|\le\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = 0 \text{ dır.}$$

İspat: $f \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)$ olduğundan $f(z)$ $\overline{D}_m$ da sınırlıdır. Yani her $z \in D_m$ $|f(z)| \le M$ olacak şekilde bir M sayısı vardır.

$$\left| \iint_{|z-z_0|\le\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\xi d\eta \right| \le M \iint_{|z-z_0|\le\delta} \frac{d\xi d\eta}{|z_0 - \zeta|}$$

olur. Diğer taraftan

$$\zeta - z_0 = |\zeta - z_0| e^{it} = re^{it} \ , \ 0 < \mathrm{t} \le 2\pi \quad \text{olarak alınırsa}$$

$\displaystyle\int_{t=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\delta} \frac{rdrd\theta}{r} = 2\pi(\delta - 0)$ bulunur. $\delta \to 0$ için integralin değeri sıfıra eşit olur bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3 Her $n \in IN$ için $w_n = \phi_n + T_{\overline{D}_n}(Aw_n + B\overline{w}_n)$ çözüm gösteriliminde $\{\phi_n\}^{\infty}$, bir Cauchy dizisi olsun. Eğer (3.1.20) eşitsizliği sağlanırsa $\{w_n\}^{\infty}$, çözümler dizisi $C^{\alpha}(D)$ uzayında bir Cauchy dizisidir.

İspat: $\{w_n\}$ çözümler dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Bunun için önce $\{\phi_n\}$ holomorf fonksiyolar dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim.

$$w_m = \phi_m(z) + T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m)\,;\, A,B \in C^{\alpha}(\overline{D}_m)\,,\, m = 1,2,... \text{ ve } m < n$$

olmak üzere

$$\|w_m - w_n\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} \le \|\phi_m - \phi_n\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)} + \left\| T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m) - T_{D_n}(Aw_n + B\overline{w}_n) \right\|_{C^{\alpha}(\overline{D}_m)}$$

$$\leq \left\|\phi_m - \phi_n\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m) - T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_n)\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}$$

$$+ \left\|T_{D_m}(Aw_n + B\overline{w}_n) - T_{D_n}(Aw_n + B\overline{w}_n)\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}$$

$$\leq \left\|\phi_m - \phi_n\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|T_{D_m}\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} \left\|A\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|B\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} \left\|w_m - w_n\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}$$

$$+ \left\|T_{D_n - D_m}\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_n)} \left[\left\|A\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|B\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}\right] \left\|w_n\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_n)}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\left\|w_m - w_n\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} \leq \frac{\left\|\phi_m - \phi_n\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}}{1 - \left\|T_{D_m}\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} \left[\left\|A\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|B\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}\right]}$$

$$+ \frac{\left\|T_{D_m / D_n}\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} \left[\left\|A\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|B\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}\right] \left\|w_m\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}}{1 - \left\|T_{D_m}\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} \left[\left\|A\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|B\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)}\right]} \qquad (3.1.22)$$

olur. Diğer taraftan (3.1.20) eşitsizliği nedeniyle

$$\left\|T_{D_m}\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} \left\|A\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} + \left\|B\right\|_{C^\alpha(\overline{D}_m)} < 1$$

dir. Böylece $m \to n$ için (3.1.22) nin sağ tarafı sıfır olur. O halde $\{w_n\}^\infty$ dizisi yakınsaktır. Bu da $\{w_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Diğer taraftan $C^\alpha(\overline{D}_m)$ uzayı tanımlanan norma göre tam olduğundan bu Cauchy dizisinin Hölder uzayında limiti mevcuttur. Ayrıca T_{D_m} operatörü $C^\alpha(\overline{D}_m)$

uzayını yine kendi içine dönüştürdüğünden $m \to \infty$ için $\phi_m(z) \to \phi(z)$ olmak üzere $m \to \infty$ için

$$w_m(z) = \phi_m(z) + T_{D_m}(Aw_m + B\overline{w}_m)(z) \to \phi(z) + T_D(Aw + B\overline{w})(z) = w(z) \quad (3.1.23)$$

elde edilir. (3.1.23) ifadesi bize düzgün sınırlı D_m bölgelerinde geçerli olan çözüm gösteriliminin aynı zamanda Wiener tipli bölgede de geçerli olduğunu gösterir.

4.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde temel olarak klasik anlamda sınırı düzgün olmayan bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde

$$\left.\begin{array}{l} w_{\overline{z}} = Aw + B\overline{w} \quad , \quad z \in D \\ \operatorname{Re} w \underset{\partial D}{|} = u \underset{\partial D}{|} = \varphi \ , \varphi \in C^{\alpha}(\partial D), \ 0 < \alpha < 1 \\ \operatorname{Im} w(z_0) = v(z_0) = c_0 \ , \quad z_0 \in \overline{D} \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

olarak tanımlanan bir sınır-değer problemi incelendi. Bu problemin çözümünün varlığı için önce kapasite kavramı yardımıyla sınır noktalarının regülerliği için bir regülerlik kriteri verildi. Wiener tipli bölge adı verilen D bölgesi düzgün sınıra sahip bölgeler yardımıyla parçalandı. Düzgün sınıra sahip bu alt böldelerde (4.1) sınır değer problemlerinin çözümleri vardır. Daha sonra düzgün sınırlı bölgelerde $\{u_m\}^{\infty}$ çözümler dizisi elde edildi ve bu çözümler dizisinin Hölder uzayında bir Cauchy dizisi olması için sağlanması gereken bağıntılar ortaya kondu. Yakınsaklık nedeniyle limit alınarak sınırı düzgün olmayan Wiener tipli bölgelerde (4.1) probleminin çözümü elde edildi.

Sınırı düzgün olmayan bölgelerde Dirichlet problemlerinin çözümleri genelde yoktur. Çünkü çözümler sınır integralleri ile ifade edilmektedir. Problemlerin çözümlerini bulunuşunu, çözümün varlık ve tekliğini araştırmak için çeşitli regülerlik kriterleri geliştirilmiştir.Wiener anlamında regülerlik de bunlardan biridir.

Bu tez orijinal sonuç içermemesine rağmen sınırı düzgün olmayan bölgelerde sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğini araştırmak için iyi bir temel oluşturmaktadır. Bazı belli kriterlerin sağlanması durumunda değişik tipten kompleks diferensiyel denklemler için Wiener tipli bölgelerde Dirichlet problemleri ortaya kounulup incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1]. AKIN , Ü ; "On a boundary value problem for generalized analytic functions", Master thesis ,METU,(2000).

[2].BERS, L. ;"Theory of Pseudo-analytic Functions", Lecture Notes, New York University,(1953).

[3].CARLESON, L.;"Selected Problems on Exceptional Sets", D.Van Nostrand Comp. Inc.Print.; New Jersey,(1967).

[4].GILBARG, D. and TRUDINGER ,N.S;"Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Second Edition , Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, New York,Tokyo,(1983).

[5].KOCA ,K. and NOVRUZOV,A.A; "Ein Singulares Randwertproblems für elliptische Diferentialgleichungen in der Ebene." The Scientific Annals of "Al .I.Cuza"University of Iasi .Tom. XLVI , 373-392,(2000).

[6].KOCA ,K "Über einen Satz vom Phragmen-Lindelöf Typus für analytische Funktionen", Rivista Mat., Vol.3 , 303-310, (2000).

[7].NOVRUZOV, A.A; ”The modulus of continuity of the solution of the Dirichlet Problem at a regular boundarypoint”,Mat.Zametki12,P.6772,(1972).

[8].TUTSCHKE ,W. ; ”Partielle Differentialgleichungen , klassische , Funktionalanalytische und komplexe Methoden” , TEUBNER TEXTE zur Mathematik. Band 27,(1983).

[9].TUTSCHKE ,W.; “Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordung in der Ebene durch Verwendung einer komplexen Normalform”, Math.Nachr.No:75, 283-298, (1976).

[10].VEKUA, I.N.; “Verallgemeinerte analytische Funktionen” , Akademie Verlag ,Berlin, (1959),[Übersetzung aus dem Russischen von Dr.W.Schmidt, (1963)].