KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

ZAYIF KISMİ METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Gonca DURMAZ

OCAK 2015

Matematik Anabilim Dalında Gonca DURMAZ tarafından hazırlanan ZAYIF KISMİ METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA
Ana Bilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç. Dr. Ishak ALTUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Duran TÜRKOĞLU
Üye (Danışman)	: Doç. Dr. İshak ALTUN
Üye	: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN
Üye	: Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN

....../...../.......

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. Erdem Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Ailem için…

ÖZET

ZAYIF KISMİ METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

DURMAZ, Gonca
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora tezi
Danışman: Doç. Dr. İshak ALTUN
Kasım 2014, 86 sayfa

Bu tez çalışmasının giriş bölümünde, gündelik yaşam, matematik ve sabit nokta teori arasındaki ilişki hakkında bir bilgi verilmiştir. Ardından, materyal ve yöntem bölümünde, tez içerisinde yararlanılacak kısmi metrik uzay kavramı ve ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Daha sonra tezin orijinal kısmını oluşturan üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, zayıf kısmi metrik kavramı ile ilgili tanım verilerek, bu kavram örneklerle incelenmiştir. Bu tanımdan yararlanılarak önemli sabit nokta teoremleri olan Banach, Kannan, Chatterjea, Hardy-Rogers ve Berinde sabit nokta teoremleri ve bunların genelleştirmeleri zayıf kısmi metrik uzayda verilmiştir. İkinci kısımda, lineer olmayan dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilmiştir. Ayrıca bu sonuçların uygulamalarından da bahsedilmiştir. Elde edilen sonuçların literatürde daha önce verilen sabit nokta sonuçlarının genelleştirilmesi olduğu gösterilmiş ve örneklerle desteklenmiştir. Son bölüm olan tartışma ve sonuç bölümünde, elde edilen sonuçların önemi ve bunların literatürdeki bazı sabit nokta teoremlerinin genelleştirmeleri olduğu vurgulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Sabit Nokta, Zayıf Kısmi Metrik, Büzülme Dönüşümleri, α-Geçişli Dönüşüm.

ABSTRACT

SOME FIXED POINT THEOREMS ON WEAK PARTIAL METRIC SPACE

DURMAZ, Gonca
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Doç. Dr. İshak ALTUN
November 2014, 86 pages

In the introduction of this thesis, the information about the relationship between daily life, mathematics and fixed point theory is given. Then, in the material and method section, the basic definitions and theorems related to the concept of partial metric space to be utilized in the thesis are given. Later, the third section forming the original section of the thesis consists of two parts. In the first part, the concept of a weak partial metric is given and the examples of the concept have been examined. By utilizing the definition, Banach, Kannan, Chatterjea, Hardy-Rogers and Berinde fixed point theorems which are important for fixed point theory and their generalizations are given in the weak partial metric space. In the second part, fixed point theorems for non-linear mappings are given on metric space. It has also been mentioned about the application of the results. The obtained results are the generalization of fixed point results given previously in the literature and these results are supported with examples. In the last section including discussion and conclusions, it is emphasized that the importance of the obtained results and generalizations of some fixed point theorems in their literature.

Key words: Fixed Point, Weak Partial Metric, Contraction Mappings, α-Admissible Mapping.

TEŞEKKÜR

Bazı insanlar, yaşama bakış açınızı diğerlerinden farklı biçimde değerlendirirler. Öğrenmek istediğiniz şeyin sizin için gerçekten değerli olup olmadığını sizi tanıdıkları için bilirler. Yüksek lisans eğitimimde ve kendisinden aldığım derslerin başından itibaren yol gösterici olan, bu araştırmanın her aşamasında bana zaman ayıran ve daha iyi olanı yapmaya çalışmam konusunda beni cesaretlendiren saygıdeğer hocam, danışmanım Doç. Dr. İshak ALTUN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eğitime yönelik gerçekliklere ilişkin akademik bakış açımın oluşmasında büyük emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Kazım İLARSLAN hocama teşekkür ederim. Lisansüstü eğitimimin başından bu yana bütün süreçlerde yanımda olan, gerek yüksek lisans gerekse doktora tezimin izleme ve savunma süreçlerinde de katkılarını esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU ve Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK'e teşekkürlerim sonsuzdur. Ayrıca tez savunma komitesinde bulunarak değerli görüşlerini paylaşan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN'a teşekkürlerimi sunarım. Doktora eğitimim süresince, akademik ve kişisel gelişim bağlamında değerli deneyimlerini paylaşan ve üzerimde emeği olan hocalarıma teşekkürlerim sonsuzdur. Her türlü yardımlarını, bilgilerini benden esirgemeyip bana destek olan Kırıkkale Üniversitesindeki sevgili arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Bütün hayatım boyunca her konuda örnek aldığım sevgi dolu inanılmaz büyük bir yüreğe sahip, tanıdığım en mükemmel insan olan sevgili babam ile sonsuz sevgisiyle hayatımı her zaman kolaylaştıran canım anneme, hayattaki en iyi arkadaşım olan biricik ablam, abim, eşi ve yeğenlerime, kısacası destekleri ve sevgileriyle beni hayatta olunabilecek en şanslı kişi yapan canım aileme çok teşekkür ederim.

Gonca DURMAZ

Ocak 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{R}^{+}$	Pozitif Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
ω	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar

1. GİRİŞ

Fizik, kimya, biyoloji, ekonomi ve sosyal bilimler gibi gündelik yaşam alanlarımızın birçoğunda karşımıza çıkan çeşitli sorunları matematiksel modellemeler ile çözebiliriz. Bu modellemeler denklem sistemlerini ve bunların çeşitliliğini meydana getirmektedir. Farklı tipteki soyut uzaylar arasındaki operatörlerle çalışıldığında karşımıza çıkan sistemler daha karmaşık olur. Bu şekildeki denklemlerin çözümleri ile ilgili bazı temel sorular sorulabilir. Bu denklemlerin çözümü var mıdır? Kaç tane çözümü vardır? Var ise nasıl bulunur? Bu problemlerin bulunduğu kümenin yapısı nedir?

Çözümlerin varlığı problemi, belirli bir operatörün bir sabit noktasının bulunması problemiyle eş değerdir. Bu nedenle sabit nokta teorisindeki sonuçlar operatör denklemlerinin çözümünün varlığının elde edilmesi için kullanılmaya başlamıştır. Banach büzülme dönüşüm prensibi adi diferansiyel denklemler, kısmi türevli denklemler ve integral denklemleri içeren operatör denklemlerin çözümlerinin varlığında kullanılabilen bir sonuçtur. Bu prensip birçok alanda genişletilmiş ve genelleştirilmiştir. Metrik uzayda büzülme dönüşümü, farklı iki noktanın görüntüleri arasındaki uzaklığın bu noktalar arasındaki uzaklıktan daha küçük olduğunu ifade etmektedir. Bu tez çalışmasında temel olarak kullanacağımız tek değerli büzülme dönüşümlerinden bir kaçının metrik uzaydaki ifade edilmiş halini aşağıda verebiliriz.

(i) (Banach, 1922). $(X\,,d)$ bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(\,Tx, Ty) \leq \alpha\, d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ var ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

(ii) (Kannan, 1968). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq a\,[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olacak şekilde $a \in [0, \frac{1}{2})$ var ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

(iii) (Chatterjea, 1972). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

olacak şekilde $b \in [0, \frac{1}{2})$ var ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır.

(iv) (Zamfirescu, 1972). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$z_1)$ $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$
$z_2)$ $d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$
$z_3)$ $d(Tx, Ty) \leq \gamma[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$

şartlarından biri sağlanacak şekilde $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$ sayıları var ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır.

(v) (Bianchini 1972). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq h \max\ \{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

olacak şekilde $h \in [0,1)$ var ise T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır.

(vi) (Reich, 1971; Rus, 1971). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $a + 2b < 1$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümünün X de bir sabit noktası vardır.

(vi) (Hardy-Rogers, 1973). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $a + b + c + e + f < 1$ olacak şekildeki $a, b, c, e, f \in \mathbb{R}^+$ için

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, Ty) + ed(y, Tx) + fd(x, y)$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır.

(vii) (Berinde, 2004). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri var ise T dönüşümünün X de bir sabit noktası vardır.

1992 yılında Matthews kısmi metrik tanımını yapmıştır. Kısmi metrik, veri akış ağlarının denotasyonel anlambilim çalışmalarında kullanılabilmektedir. Denotasyonel anlambilimi semantik programlama dillerine ve sistemlerine matematiksel bir anlam vermek için kullanılan bir metottur. Başlangıçta bir analiz aracı olarak kullanılsa da semantik dillerin uygulanmasında ve dizaynında da kullanımı gelişmektedir. Kısmi metrik uzayı metrik uzaydan ayıran en önemli özellik ise bir noktanın kendisine olan uzaklığının sıfır olmayabileceğidir. Ayrıca T_2 uzayından daha da geniş olan T_0 uzayında çalışma imkânı vermesidir. Böylece sabit nokta teorisinin bilgisayar bilimindeki kullanılma alanı gelişmiştir.

Matthews'in bu tanımıyla beraber metrik uzayda yapılan sabit nokta teoremleri kısmi metrik uzaya taşınarak birçok yazar tarafından genelleştirilmiş ve örneklendirilmiştir. Matthews'in bu tanımından sonra Heckmann kısmi metrikten daha geniş olan zayıf kısmi metrik tanımını yapmıştır.

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde zayıf kısmi metrik ve sıralı zayıf kısmi metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerini ele alacağız. İkinci bölümde ise α-geçişli dönüşümler göz önüne alınarak metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri elde edeceğiz.

1.1. Kaynak Özetleri

1994 yılında S. G. Matthews, Genel Topoloji ve Uygulamaları 8. Yaz Konferansında yaptığı konuşmasında "Partial metric topology" adlı çalışmasını sunmuştur. Bu çalışmada kısmi metrik uzay ve topolojisi hakkında bilgi vermiştir. Bu metriğin en önemli özelliği bir noktanın kendisine olan uzaklığının sıfır olmayabileceğidir. Bu bakımdan kısmi metrik kavramının alışılmış metrik kavramından daha geniş olduğunu vurgulamıştır. Ayrıca bu çalışmasında Banach sabit nokta teoremini bu uzayda ifade ve ispat etmiştir[1]. Ardından, bu çalışma temel alınarak çeşitli yazarlar tarafından kısmi metrik uzayda bazı sabit nokta teoremleri ve genelleştirmeleri elde edilmiştir[2-12]. Kısmi metrik üzerine yapılan birçok çalışmadan sonra, 1999 yılında Heckman "Approximation of metric spaces by partial metric spaces" adlı makalesinde kısmi metriğin (p_2) şartını ihmal ederek zayıf kısmi metrik tanımını vermiştir. Böylece her kısmi metrik uzayın bir zayıf kısmi metrik uzay olduğunu fakat tersinin doğru olmadığını ifade etmiştir [13]. Bu tanımdan yararlanılarak tezin orijinal kısmının ilk bölümünde zayıf kısmi metrik uzayda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. İlk olarak Hardy ve Rogers'ın "A generalization of a fixed point theorem of Reich" adlı makalesi incelenmiştir[14]. Bu tip dönüşümlerin zayıf kısmi metrik uzaylarda sabit noktasının varlığı ve tekliği ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar Altun ve Durmaz tarafından "Weak partial metric spaces and some fixed point results" adlı çalışmada ele alınmıştır[15]. Ayrıca bu çalışmanın sonuçları olan Banach, Kannan ve Reich tip sabit nokta teoremleri de zayıf kısmi metrik uzayda ifade edilmiştir. Metrik uzaylarda lineer olmayan büzülme eşitsizlikleri kullanılarak elde edilen sabit nokta teoremlerinin zayıf kısmi metrik uzaydaki versiyonlarını elde etmek amacıyla lineer olmayan büzülmelerde kullanılan fonksiyonların yapılarının incelenmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bunun için Berinde'nin "Iterative approximation of fixed points" adlı kitabı incelenmiştir. Ayrıca bu dönüşümlerin sınıflandırılmaları da detaylı bir şekilde ele alınmıştır[16]. Bu bilgiler doğrultusunda yine Altun ve Durmaz' ın "Weak partial metric spaces and some fixed point results" adlı çalışmasında lineer olmayan büzülme eşitsizlikleri dikkate alınarak bazı tek değerli dönüşümlerin, zayıf kısmi metrik uzaylarda sabit noktasının varlığı ve tekliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir[15]. Ilic, Pavlovic ve Rakocevic' in "Some new extensions of Banach's contraction principle to partial metric space" adlı makalesi incelenmiş ve bu makaleden yararlanılarak bazı dönüşümlerin zayıf kısmi metrik uzayda sabit noktasının varlığı ve tekliği ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir[8]. Bu sonuçlar Durmaz, Acar ve Altun tarafından "Some fixed point results on weak partial metric spaces" adlı çalışmada verilmiştir[17]. Bu çalışmanın bir genelleştirmesi ve bazı sonuçları Durmaz, Altun ve Acar tarafından "Two general fixed point results on weak partial metric space" adlı çalışmada ele alınmıştır[18]. Metrik uzayda Berinde tip büzülme kavramı ile literatürde yer alan Banach, Kannan, Chatterjea gibi büzülmelerin, Berinde tip büzülmenin birer özel halleri olduğunu gösteren önermeler için, Berinde'nin makaleleri ve Berinde tip dönüşümlerdeki sabit noktalar için Păcurar'ın makalesi incelenmiştir.[19-23]. Bu çalışmalardan yararlanarak, Berinde tip dönüşümler için sabit noktanın varlığı ile ilgili bir sonuç zayıf kısmi metrik uzayda elde edilmiştir. Ayrıca sıralı zayıf kısmi metrik uzay için de bir sonuç elde edilmiştir. Bu sonuçlar Acar, Altun ve Durmaz tarafından "A fıxed point theorem for new type contractions on weak partial metric spaces" adlı çalışmada ele alınmıştır[24]. İkinci bölümde ise metrik uzaylarda α-geçişli dönüşümlerle ilgili tanımlar ve sabit nokta teoremleri için Samet, Vetro ve Vetro'nun "Fixed point theorems for $\alpha - \psi$-contractive type mappings" adlı makalesi incelenmiştir[25]. Ayrıca, küme değerli α-geçişli dönüşümler için sabit nokta teoremlerinin elde edildiği ve uygulamalarına da yer verildiği makaleler incelenmiştir[26-27]. Bu uygulamalar için ilave olarak Pei ve Chang'ın "Monotone iterative technique and symmetric positive solutions for fourth-order boundary value problems" ve Caballero, Harjani ve Sadarangani'nin "Uniqueness of positive solutions for a class of fourth-order boundary value problems" adlı çalışmaları da incelenmiştir[28-29]. Bu incelemelerden yararlanarak metrik uzayda α-geçişli dönüşümler için Berinde tip büzülme şartıyla sabit noktanın varlığı ve tekliği ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar dördüncü basamaktan lineer olmayan iki bilinmeyenli sınır değer problemlerinin çözümünün varlığının ve tekliğinin gösterilmesinde kullanılmaktadır. Elde edilen bu sonuçlar Durmaz, Mınak ve Altun tarafından "Fixed point results for $\alpha - \psi$-contractive mappings including almost contractions and applications" adlı çalışmada verilmiştir[30].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, literatürde var olan bazı temel tanım ve bunların bilinen sonuçlarını sonraki bölümlerde kullanabilmek için hatırlatmak amaçlanmıştır. Ayrıca bölümü makul uzunlukta tutabilmek için teoremlere ispatsız değinilecektir.

İlk olarak Matthews' in tanımlarını ve bu tanımlardan elde edilen sonuçları verelim.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme ve $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$p_1)$ $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y) \Leftrightarrow x = y$,
$p_2)$ $p(x,x) \leq p(x,y)$,
$p_3)$ $p(x,y) = p(y,x)$ ve
$p_4)$ $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

şartları sağlanırsa p ye X üzerinde bir kısmi metrik, (X,p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir.

Eğer $p(x,y) = 0$ ise (p_1) ve (p_2) özeliklerinden $x = y$ olduğu görülür. Fakat $x = y$ ise $p(x,y)$ sıfır olmayabilir. Bunu aşağıdaki Örnek 2.2 de görebiliriz.

Kısmi metrik uzay kavramı tanımlandıktan sonra, hesaplama teorisindeki matematiksel modellere uygunluğu elde edilmiştir. Matthews ise kısmen bu kavrama daha uygun olan Banach büzülme dönüşümünün bir değişik halini kısmi metrik uzayda vermiştir.

Kısmi metrik uzayın bilinen bazı örneklerini aşağıdaki gibi verebiliriz.

Örnek 2.1. Her metrik uzay bir kısmi metrik uzaydır.

Örnek 2.2. $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $p(x,y) = \max\ \{x,y\}$ ile tanımlı fonksiyon, $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kısmi metriktir.

Örnek 2.3. $a \leq b$ olmak üzere I, tüm $[a,b]$ aralıklarının kümesi olsun. $p: I \times I \to \mathbb{R}^+$, $p([a,b],[c,d]) = \max\ \{b,d\} - \min\ \{a,c\}$ ile tanımlanan fonksiyon I üzerinde bir kısmi metriktir.

Örnek 2.4. $p: \omega \times \omega \to \mathbb{R}^+$,

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & x=y \\ 2^{-|x|}, & x\neq 0\ ve\ y=0 \\ 2^{-|y|}, & x=0\ ve\ y\neq 0 \\ 2^{-\min\{|x|,|y|\}}, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

ile tanımlı fonksiyon ω üzerinde bir kısmi metriktir.

Önerme 2.1. p, X üzerinde bir kısmi metrik ise $p^s: X \times X \to \mathbb{R}^+$

$$p^s(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

biçiminde tanımlı fonksiyon X de bir metriktir. Ayrıca p, X üzerinde bir kısmi metrik ise $p^w: X \times X \to \mathbb{R}^+$,

$$p^w(x,y) = p(x,y) - \min\{p(x,x), p(y,y)\}$$

ile tanımlı fonksiyon da X üzerinde bir metriktir.

Önerme 2.2. (X,p) bir kısmi metrik uzay olsun. Bu takdirde p^s ile p^w metrikleri denk metriklerdir.

Tanım 2.2. (X,p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı olsun. $B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X: p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$ kümesine x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar denir. Benzer olarak $\overline{B_p}(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) \leq p(x,x) + \varepsilon\}$ kümesine ise x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir.

$\beta_p = \{B_p(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ açık yuvarlar ailesi X üzerinde bir τ_p topolojisinin bir tabanıdır. Bu durumda (X,τ_p) uzayı bir T_0 uzayıdır.

Örnek 2.5. $X = [0,\infty)$ ve $p(x,y) = \max \{x,y\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda (X,p) bir kısmi metrik uzaydır. Şimdi p metriğine göre X in elemanlarının herhangi bir $\varepsilon > 0$ için açık komşulukları

$$\begin{aligned} B_p(x,\varepsilon) &= \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\} \\ &= \{y \in X : \max \{x,y\} < x + \varepsilon\} \\ &= [0, x+\varepsilon) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece bu açık yuvarlardan elde edilen taban

$$\beta = \{[0,a) : a \in (0,\infty)\}$$

biçimindedir. O halde

$$\tau_p = \{\emptyset, X\} \cup \{[0,a) : a \in (0,\infty)\}$$

olarak elde edilir.

Önerme 2.3. (X,p) bir kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in X$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n)$$

olmasıdır.

Önerme 2.4. (X,p) bir kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. $\{x_n\}$ dizisinin (X,p^s) metriğinde bir $x \in X$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x,x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_m,x_n)$$

olmasıdır.

Tanım 2.3. (X,p) bir kısmi metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.
$i)$ Eğer $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ limiti var ve sonlu ise $\{x_n\}$ dizisine X de bir Cauchy dizisi denir.
$ii)$ X deki her Cauchy dizisi X in bir noktasına yakınsıyorsa yani $x \in X$ için $p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ ise X uzayına tamdır denir.

Not: Her metrik uzayda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisi olmasına rağmen her Cauchy dizisi her zaman yakınsak değildir. Kısmi metrik uzaylarda ise yakınsak bir dizinin Cauchy dizisi olması gerekmez. Ayrıca yakınsak bir dizinin limiti tek olmayabilir.

Örnek 2.6. $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $p(x,y) = \max\ \{x,y\}$ ile tanımlı fonksiyon, $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kısmi metriktir. $\{x_n\}$ dizisini

$$\{x_n\} = \begin{cases} 0, & n=2k \\ 1, & n=2k+1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi yakınsak olmasına rağmen $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ mevcut değildir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi değildir. Ayrıca $\{x_n\}$ dizisinin limiti tek değildir.

Aşağıdaki lemma (X,p^s) ve (X,p) uzaylarındaki Cauchy dizisi ve tamlık arasındaki ilişkiyi vermektir.

Lemma 2.1. (X,p) kısmi metrik uzay olsun.

$i)$ $\{x_n\}$ dizisinin (X,p) de bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin (X,p^s) de bir Cauchy dizisi olmasıdır.
$ii)$ (X,p) nin tam olması için gerek ve yeter şart (X,p^s) nin tam olmasıdır.

Örnek 2.7. $p: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ve

$$p(x,y) = \frac{1}{4}|x-y| + \frac{1}{2}\max \{x,y\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde bir kısmi metriktir fakat metrik değildir. Her $x,y \in \mathbb{R}^+$ için p metriğinden elde edilen p^s metriği $p^s(x,y) = |x-y|$ şeklindedir. $(\mathbb{R}^+, p^s)$ tam metrik uzay olduğundan $(\mathbb{R}^+, p)$ uzayı da bir tam kısmi metrik uzaydır.

Tanım 2.4. X boş olmayan bir küme ve $\preccurlyeq$, X de bir bağıntı olsun. Eğer her $x,y,z \in X$ için

$i)$ $x \preccurlyeq x$, (yansıma özelliği)
$ii)$ $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq x$ ise $x = y$ ve (simetri)
$iii)$ $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ ise $x \preccurlyeq z$ (geçişme özelliği)

şartları sağlanıyorsa $\preccurlyeq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

X kümesinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmış ise bu kümeye kısmi sıralı küme denir. Eğer kısmi sıralı bir kümede x,y elemanları için $x \preccurlyeq y$ veya $y \preccurlyeq x$ şartlarından en az biri doğru ise x ve y elemanlarına karşılaştırılabilir denir.

3. SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Zayıf Kısmi Metrik Uzayda Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde, tezin orijinal kısmını oluşturan çalışmalara yer verilecektir. İlk olarak Heckmann tarafından verilen zayıf kısmi metrik uzay tanımı verilecek ve Matthews' in tanımladığı kısmi metrik uzay ile aralarındaki ilişki incelenecektir. Daha sonra Zayıf Kısmi metrik uzay kavramı göz önüne alınarak bunun için sabit nokta sonuçları elde edilecektir. Son olarak ise α-geçişli dönüşümler göz önüne alınarak metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri elde edilecektir.

Zayıf kısmi metrik uzay kavramı, kısmi metrik uzay tanımındaki (p_2) özelliğinin göz ardı edilmesiyle tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1. X boş olmayan bir küme ve $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ ya tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için (p_1), (p_3) ve (p_4) şartları sağlanıyorsa p ye X de bir zayıf kısmi metrik, (X, p) ikilisine de zayıf kısmi metrik uzay denir.

Eğer p ye X de bir zayıf kısmi metrik ise (p_3) ve (p_4) şartları kullanılarak her $x, y \in X$ için

$$p(x, y) \geq \frac{p(x,x) + p(y,y)}{2}$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. Bu eşitsizliğe zayıf (p_2) şartı diyeceğiz.

Önerme 3.1.1. Her kısmi metrik uzay bir zayıf kısmi metrik uzaydır.

Örnek 3.1.1. $X = \mathbb{R}^+$ olsun. $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $p(x, y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}^+, p)$ bir zayıf kısmi metrik uzaydır fakat kısmi metrik uzay değildir.

Örnek 3.1.2. $a \leq b$ olmak üzere I, tüm $[a, b]$ aralıklarının kümesi olsun. $p: I \times I \to \mathbb{R}^+$, $p([a, b], [c, d]) = \frac{b+d-a-c}{2}$ ile tanımlanan fonksiyon, I üzerinde bir zayıf kısmi metriktir fakat kısmi metrik değildir.

Önerme 3.1.2. Eğer (X, p) bir zayıf kısmi metrik uzay fakat kısmi metrik uzay değilse p^s fonksiyonu aynı X kümesi üzerinde metrik olmayabilir. Aşağıda vereceğimiz örnek bunu açıklamaktadır.

Örnek 3.1.3. $X = \mathbb{R}^+$ olsun. $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ ve her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $p(x, y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlansın. Burada $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$p^s(x, y) = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda, p^s, X üzerinde bir metrik değildir. Dikkat edilirse

$$p^w(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|$$

olur ve dolayısıyla p^w, X üzerinde bir metriktir.

Önerme 3.1.3. Her $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ için

$$\min \ \{a, c\} + \min \ \{b, c\} \leq \min \ \{a, b\} + c$$

dir.

Önerme 3.1.4. (X, p) bir zayıf kısmi metrik uzay ise p^w, X üzerinde bir metriktir.

İspat: p bir zayıf kısmi metrik olduğundan

$$2p(x, y) \ \geq \ p(x, x) + p(y, y) \ \geq \ 2 \min \ \{p(x, x), p(y, y)\}$$

elde edilir. Buradan

$$p(x,y) - \min\ \{p(x,x), p(y,y)\} \geq 0$$

olur.

p^w, X üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim. $p^w(x,y) = 0$ ise $x = y$ ve $p^w(x,y) = p^w(y,x)$ bulunur. Her $x, y, z \in X$ ve Önerme 3.1.3 den

$$\begin{aligned} p^w(x,z) &= p(x,z) - \min\ \{p(x,x), p(z,z)\} \\ &\leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y) - \min\ \{p(x,x), p(z,z)\} \\ &\leq p(x,y) - \min\ \{p(x,x), p(y,y)\} + p(y,z) - \min\ \{p(y,y), p(z,z)\} \\ &= p^w(x,y) + p^w(y,z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda p^w, bir metriktir.

Zayıf kısmi metrik uzayda yakınsaklık, Cauchy dizisi, tamlık ve bir fonksiyonun süreklilik kavramları kısmi metrik uzaydakine benzer tanımlanabilir. Şimdi zayıf kısmi metrik uzaydaki bazı sabit nokta sonuçlarını vereceğiz. Bu sonuçlarda yaralanacağımız bazı kavramları zayıf kısmi metrik uzayda aşağıdaki gibi ifade ve ispat edelim.

Lemma 3.1.1. (X, p) bir zayıf kısmi metrik uzay olsun.
$i)$ $\{x_n\}$ dizisinin (X, p) de bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin (X, p^w) da bir Cauchy dizisi olmasıdır.
$ii)$ (X, p) uzayının tam olması için gerek ve yeter şart (X, p^w) uzayının tam olmasıdır.

İspat: İlk olarak (X, p) deki her Cauchy dizisinin (X, p^w) uzayında da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\{x_n\}$, (X, p) de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için her $n, m \geq n_0$ olduğunda

$$|p(x_n, x_m) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır şartını sağlayan bir $a \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan her $n, m \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} p^w(x_n, x_m) &= p(x_n, x_m) - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} \\ &= p(x_n, x_m) - a + a - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} \\ &\leq |p(x_n, x_m) - a| + |a - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} \ | \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$, (X, p^w) da bir Cauchy dizisidir.

Ayrıca, (X, p^w) uzayının tamlığı (X, p) uzayını tamlığından ispatlanmaktadır. Gerçekten; $\{x_n\}$, (X, p) de bir Cauchy dizisi ise $\{x_n\}$, (X, p^w) uzayında da bir Cauchy dizisidir. (X, p^w) uzayı tam olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p^w(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Bu durumda

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = p(x, x)$$

olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$, (X, p) de bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x, x)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_0$ için $p^w(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $n \geq n_0$ olduğunda

$$\begin{aligned} |p(x_n, x_n) - p(x, x)| &= \max \ \{p(x_n, x_n), p(x, x)\} - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x, x)\} \\ &= \left[2\{\left(\frac{\max \ \{p(x_n,x_n),p(x,x)\}+\min \ \{p(x_n,x_n),p(x,x)\}}{2}\right) \atop - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x, x)\} \right] \\ &= 2[\tfrac{p(x_n,x_n)+p(x,x)}{2} - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x, x)\}] \\ &\leq 2[p(x_n, x) - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x, x)\}] \end{aligned}$$

$$= 2p^w(x_n, x) < \varepsilon$$

bulunur. Yani, (X, p) uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu durumda (X, p) uzayı tamdır.

Şimdi ise (X, p^w) uzayındaki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisinin (X, p) uzayında da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ve her $m, n \geq n_0$ için

$$p^w(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} p(x_n, x_n) &= p(x_n, x_n) - p\left(x_{n_0}, x_{n_0}\right) + p\left(x_{n_0}, x_{n_0}\right) \\ &\leq \left|p(x_n, x_n) - p\left(x_{n_0}, x_{n_0}\right)\right| + p\left(x_{n_0}, x_{n_0}\right) \\ &\leq 2p^w\left(x_n, x_{n_0}\right) + p\left(x_{n_0}, x_{n_0}\right) \\ &< 1 + p\left(x_{n_0}, x_{n_0}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\{p(x_n, x_n)\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de sınırlıdır. $\mathbb{R}$ de sınırlı bir kümenin yakınsak bir alt dizisi vardır. Diğer taraftan $\{x_n\}$, (X, p^w) uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon > 0$ ve her $m, n \geq n_\varepsilon$ için

$$p^w(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$|p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m)| \leq 2dp^w(x_n, x_m) < \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\{p(x_n, x_n)\}$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = a$$

dır. Diğer taraftan ise

$$
\begin{aligned}
|p(x_n, x_m) - a| &\leq |p(x_n, x_m) - \min\{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\}| + \\
&\quad |\min \ \{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} - a| \\
&= p^w(x_n, x_m) + |\min \ \{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\} - a|
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = a$$

olup $\{x_n\}$, (X, p) uzayında bir Cauchy dizisidir.

Ayrıca, (X, p) uzayının tamlığının (X, p^w) uzayının tamlığını gerektirdiğini ispatlayalım. Eğer $\{x_n\}$, (X, p^w) uzayında bir Cauchy dizisi ise (X, p) uzayında da bir Cauchy dizisidir. (X, p) uzayı tam olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ var olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda

$$\max \ \{|p(x_n, x) - p(x_n, x_n)|, |p(x_n, x) - p(x, x)|\} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuç olarak $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
p^w(x_n, x) &= p(x_n, x) - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x, x)\} \\
&= |p(x_n, x) - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x, x)\}| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda (X, p^w) uzayı tamdır.

Önerme 3.1.5. Önerme 2.4 zayıf kısmi metrik içinde sağlanır.

Yapılan bu hazırlıktan sonra, orijinal teoremlerimizi ifade ve ispat edelim. İlk olarak Hardy ve Rogers tipi sabit nokta teoremini zayıf kısmi metrik uzayda inceleyelim.

Teorem 3.1.1. (X,p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $a,b,c,d,e \geq 0$ için $d \geq e$ ise $a+b+c+2d<1$, $d<e$ ise $a+b+c+2e<1$ olsun. Her $x,y \in X$ için

$$p(Tx,Ty) \leq ap(x,y) + bp(x,Tx) + cp(y,Ty) + dp(x,Ty) + ep(y,Tx) \qquad (3.1)$$

şartı sağlayan T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $\{x_n\}$ dizisi X de $n = 1,2,3,\dots$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olacak şekilde tanımlansın. Eğer $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ ise x_{n_0}, T nin bir sabit noktasıdır. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. (3.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} p(x_{n+1},x_n) &= p(Tx_n,Tx_{n-1}) \\ &\leq ap(x_n,x_{n-1}) + bp(x_n,Tx_n) + cp(x_{n-1},Tx_{n-1}) + dp(x_n,Tx_{n-1}) + ep(x_{n-1},Tx_n) \\ &= ap(x_n,x_{n-1}) + bp(x_n,x_{n+1}) + cp(x_{n-1},x_n) + dp(x_n,x_n) + ep(x_{n-1},x_{n+1}) \\ &\leq (a+c+e)p(x_n,x_{n-1}) \\ &\quad +(b+e)p(x_n,x_{n+1}) + (d-e)p(x_n,x_n) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

elde edilir. Her n sayısı için $d \geq e$ ise (3.2) eşitsizliğinin sağ tarafına $(d-e)p(x_{n+1},x_{n+1})$ veya $(d-e)p(x_{n-1},x_{n-1})$ terimleri eklenip zayıf (p_2) özelliği kullanılarak

$$p(x_{n+1},x_n) = \max\left\{\frac{a+c+e}{1-b-2d+e}, \frac{a+c+2d-e}{1-b-e}\right\} p(x_n,x_{n-1}) \qquad (3.3)$$

elde edilir. Eğer $d<e$ ise (3.2) eşitsizliğinden $(d-e)p(x_n,x_n)$ terimi çıkartılarak

$$p(x_{n+1},x_n) \leq \frac{a+c+e}{1-b-e} p(x_n,x_{n-1}) \qquad (3.4)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (3.3) ve (3.4) eşitsizliklerinde

$$\lambda = \begin{cases} \max\left\{\frac{a+c+e}{1-b-2d+e}, \frac{a+c+2d-e}{1-b-e}\right\}, & d \geq e \\ \frac{a+c+e}{1-b-e}, & d < e \end{cases}$$

olarak kabul edildiğinde $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n p(x_1, x_0)$$

elde edilir. $\lambda \in [0,1)$ olduğu açıktır. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} p(x_{n+1}, x_n) = 0 \tag{3.5}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} p^w(x_{n+1}, x_n) &\leq p(x_{n+1}, x_n) - \min \{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \\ &\leq p(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \lambda^n p(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p^w(x_{n+1}, x_n) = 0$$

elde edilir. Bu durumda $k = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$\begin{aligned} p^w(x_{n+k}, x_n) &\leq p^w(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \cdots + p^w(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \lambda^{n+k-1} p(x_1, x_0) + \cdots + \lambda^n p(x_1, x_0) \\ &= [\lambda^{n+k-1} + \cdots + \lambda^n] p(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} p(x_1, x_0) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $\{x_n\}$, (X, p^w) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, p) uzayı tam olduğundan ve Lemma 3.1.1 ile $\{x_n\}$, (X, p^w) metrik uzayında yakınsaktır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} p^w(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde $x \in X$ vardır. Yine Lemma 3.1.1 den

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) \tag{3.6}$$

elde edilir. Ayrıca $\{x_n\}$, (X, p^w) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{n,m\to\infty} p^w(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan ise

$$p(x_n, x_n) + p(x_{n+1}, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+1})$$

olup (3.5) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$$

elde edilir. Bu durumda p^w nın tanımından

$$p(x_n, x_m) = p^w(x_n, x_m) + \min \ \{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\}$$

ve

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. (3.6) eşitliğiyle

$$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

bulunur. Şimdi $p(x, Tx) = 0$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. Yani $p(x, Tx) \neq 0$ olsun. (3.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
p(x,Tx) &\le p(x,Tx_n)+p(Tx_n,Tx)-p(Tx_n,Tx_n)\\
&\le p(x,x_n)+p(Tx_n,Tx)\\
&\le p(x,x_{n+1})+ap(x,x_n)+bp(x,Tx)+cp(x_n,x_{n+1})+dp(x,x_{n+1})+ ep(x_n,Tx)\\
&\le p(x,x_{n+1})+ap(x,x_n)+bp(x,Tx)+cp(x_n,x_{n+1})+dp(x,x_{n+1})+ ep(x_n,x)+ep(x,Tx)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$p(x,Tx) \le (b+e)p(x,Tx)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $p(x,Tx)=0$ olmalı ve $x=Tx$ elde edilir. Ayrıca $p(x,x)=0$ dır.

Eğer y, T nin diğer bir sabit noktası ise

$$p(y,y)=p(Ty,Ty) \le (a+b+c+d+e)p(y,y)$$

ve buradan $p(y,y)=0$ elde edilir. $p(x,y)>0$ olduğunu kabul edelim

$$
\begin{aligned}
p(x,y) &= p(Tx,Ty)\\
&\le (a+d+e)p(x,y)+bp(y,Ty)+cp(x,Tx)\\
&= (a+d+e)p(x,y)
\end{aligned}
$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla sabit nokta tektir.

Yukarıdaki orijinal teoremden aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Sonuç 3.1.1. (Banach Tip Sabit Nokta Teoremi)(X,p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ ve $0 \le \alpha < 1$ için

$$p(Tx,Ty) \le \alpha p(x,y)$$

şartı sağlanıyorsa, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.1.2. (Kannan Tip Sabit Nokta Teoremi) (X, p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\beta, \gamma \geq 0$ için $\beta + \gamma < 1$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \beta p(x, Tx) + \gamma p(y, Ty)$$

şartı sağlanıyorsa, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.1.3. (Reich Tip Sabit Nokta Teoremi) (X, p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ için $\alpha + \beta + \gamma < 1$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha p(x, y) + \beta p(x, Tx) + \gamma p(y, Ty)$$

şartı sağlanıyorsa, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Şimdi ise zayıf kısmi metrik uzayda lineer olmayan sabit nokta teoremleri ile ilgilenilecektir. İlk olarak kıyaslama fonksiyonlarını ve bunların bazı özelliklerini inceleyerek (c)-kıyaslama fonksiyonu yardımıyla sabit nokta teoremi ele alınacaktır. Aşağıda verilecek tanımlar ve örnekler sonraki bölümde de kullanılacaktır.

Tanım 3.1.2. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki özellikleri göz önüne alalım.

ψ_1) ψ azalmayandır. Yani $t_1 \leq t_2$ için $\psi(t_1) \leq \psi(t_2)$ dir.
ψ_2) Her $t \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty} \psi^{\mathrm{n}}(t) = 0$ dır.
ψ_3) Her $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^{\mathrm{n}}(t) < \infty$ dır.
ψ_4) Her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir.
ψ_5) $\psi(0) = 0$ dır.
ψ_6) ψ-üstten yarı süreklidir. Yani $t \geq 0$ için $t_n \to t$ iken $\limsup_{n\to\infty} \psi(t_n) \leq \psi(t)$ dir.
ψ_7) ψ-sürekli bir fonksiyondur.

ψ_1 ve ψ_2 şartlarını sağlayan fonksiyon sınıfını Ψ, ψ_4 ve ψ_6 şartlarını sağlayan fonksiyon sınıfını ¥, ψ_1 ve ψ_3 şartlarını sağlayan fonksiyon sınıfını ise Φ ile gösterelim. Literatürde Ψ sınıfına ait fonksiyonlara kıyaslama fonksiyonları, Φ sınıfına ait fonksiyonlara da (c)-kıyaslama fonksiyonları adı verilir.

Tanımlardan $\Phi \subseteq \Psi$ olduğu açıktır. Yani her (c)-kıyaslama fonksiyonu bir kıyaslama fonksiyonudur.

Lemma 3.1.2. Eğer $\psi \in \Psi$ ise her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir.

İspat: ψ_2 den her $t > 0$ için $\lim_{n\to\infty} \psi^{\mathrm{n}}(t) = 0$ dır. En az bir $t_0 > 0$ için $\psi(t_0) \geq t_0$ olduğunu kabul edelim. ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$t_0 \leq \psi(t_0) \leq \psi(\psi(t_0)) \leq \cdots \leq \psi^{\mathrm{n}}(t_0) \leq \cdots$$

olur. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$t_0 \leq \lim_{n\to\infty} \psi^{\mathrm{n}}(t) = 0$$

olur ki bu çelişkidir. Bu durumda her $t > 0$ için $\psi(t) < t$ dir.

Lemma 3.1.3. Eğer $\psi \in \Psi$ ise $\psi(0) = 0$ dır.

İspat: $\psi(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\psi(0) = t_1 > 0$ dır. ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan $\psi(0) \leq \psi(t_1)$ ve buradan da Lemma 3.1.2 den

$$0 < t_1 = \psi(0) \leq \psi(t_1) < t_1$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $\psi(0) = 0$ dır.

Lemma 3.1.4. Eğer $\psi \in \Psi$ ise ψ fonksiyonu sıfır noktasında süreklidir.

İspat: $\psi \in \Psi$ olsun. Bu durumda Lemma 3.1.3 gereğince $\psi(0) = 0$ dır. $t_n \to 0$ olsun. $\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$ olduğunu göstereceğiz. $t_n \to 0$ olduğundan $t_n \to 0^+$ olur ki bu ise her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq t_n$ demektir. ψ azalmayan bir fonksiyon olduğundan

$$0 = \psi(0) \leq \ \psi(t_n) \leq t_n$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $\psi(t_n) \to \psi(0) = 0$ olur. Bu durumda ψ, sıfır noktasında süreklidir.

Örnek 3.1.4. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\lambda \in [0,1)$ olmak üzere $\psi(t) = \lambda t$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Phi \cap ¥$ olduğu açıktır.

Örnek 3.1.5. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{3}, \ 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{18}, \frac{2}{3} < t \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Phi$ dır, fakat $\psi \notin ¥$ dir.

Örnek 3.1.6. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Psi \cap ¥$ dır, fakat $\psi \notin \Phi$ dir.

Örnek 3.1.7. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t}, 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{2t}{3}, t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in \Psi$ olur. Fakat $\psi \notin \Phi \cup ¥$ dir.

Örnek 3.1.8. $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2t}, & t > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\psi \in ¥$ olur. Fakat $\psi \notin \Psi$ dir.

Teorem 3.1.2. (X, p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\psi \in \Phi$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq \psi\left(\max \left\{p(x,y), p(x,Tx), p(y,Ty), \frac{1}{2}[p(x,Ty) + (y,Tx)]\right\}\right) \quad (3.7)$$

şartı sağlanıyorsa T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. $\{x_n\}$, X de $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $x_n = Tx_{n-1}$ olacak şekilde tanımlansın. Eğer $n_0 \in \mathbb{N}$ için $p(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ ise x_{n_0}, T nin bir sabit noktasıdır. Kabul edelim ki her $n \in \mathbb{N}$ için $p(x_n, x_{n+1}) > 0$ olsun. (3.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} p(x_{n+1}, x_n) &= p(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \psi\left(\max \left\{\begin{matrix} p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, Tx_n), p(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \\ \frac{1}{2}[p(x_n, Tx_{n-1}) + p(x_{n-1}, Tx_n)] \end{matrix}\right\}\right) \\ &\leq \psi\left(\max \left\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}[p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n-1}, x_n)]\right\}\right) \\ &= \psi(\max \{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

ψ-azalmayan ve

$$p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})$$

olduğu bulunabilir. Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ sayıları için

$$\max \{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\} = p(x_n, x_{n+1})$$

ise (3.8) eşitsizliğinden

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \psi\big(p(x_n, x_{n+1})\big) < p(x_n, x_{n+1})$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\max \ \{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\} = p(x_n, x_{n-1})$$

olur. (3.8) eşitsizliğinden

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \psi\big(p(x_n, x_{n-1})\big)$$

bulunur. Böylece

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n(p(x_1, x_0)) \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{3.10}$$

dır. Diğer taraftan ise

$$\begin{aligned} p^w(x_{n+1}, x_n) &\leq p(x_{n+1}, x_n) - \min \ \{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \\ &\leq p(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \psi^n(p(x_1, x_0)) \end{aligned}$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} p^w(x_{n+1}, x_n) = 0$ elde edilir. Bu durumda $m > n$ için

$$\begin{aligned} p^w(x_m, x_n) &\leq p^w(x_m, x_{m-1}) + \cdots + p^w(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \psi^{m-1}(p(x_1, x_0)) + \cdots + \psi^n(p(x_1, x_0)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \psi^k(p(x_1, x_0)) \end{aligned}$$

bulunur. ψ, (c)-kıyaslama fonksiyonu olduğundan $\{x_n\}$, (X, p^w) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, p) uzayı tam olduğundan ve Lemma 3.1.1 ile $\{x_n\}$, (X, p^w) metrik uzayında yakınsaktır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} p^w(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde $x \in X$ vardır. Yine Lemma 3.1.1 den dolayı

$$p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) \tag{3.11}$$

elde edilir. Ayrıca $\{x_n\}$, (X, p^w) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n,m\to\infty} p^w(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. Diğer taraftan ise

$$p(x_n, x_n) + p(x_{n+1}, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+1})$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$ olur. Bu durumda p^w nın tanımından

$$p(x_n, x_m) = p^w(x_n, x_m) + \min \{p(x_n, x_n), p(x_m, x_m)\}$$

ve $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. (3.11) eşitliğini kullanarak

$$p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0 \tag{3.12}$$

bulunur. Şimdi ise $p(x, Tx) = 0$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $p(x, Tx) > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} p(x_{n+1}, x_n) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = 0$ olduğundan. $n > n_0$ için

$$p(x_{n+1}, x_n) < \frac{1}{3} p(x, Tx) \tag{3.13}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Yine $n > n_1$ için

$$p(x_n, x) < \frac{1}{3} p(x, Tx) \tag{3.14}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n > \max \{n_0, n_1\}$ alınırsa (3.13), (3.14) eşitsizlikleri ve (p_4) özelliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[p(x_n, Tx) + p(x, Tx_n)] &\leq \frac{1}{2}[p(x_n, x) + p(x, Tx) - p(x, x) + p(x, Tx_n)] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}p(x, Tx) + p(x, Tx) + \frac{1}{3}p(x, Tx)\right] \\
&= \frac{5}{6}p(x, Tx) \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

elde edilir. $n > \max \{n_0, n_1\}$ için (3.13), (3.14) ve (3.15) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
p(x_{n+1}, Tx) &= p(Tx_n, Tx) \\
&\leq \psi\left(\max \left\{p(x_n, x), p(x_n, Tx_n), p(x, Tx), \frac{1}{2}[p(x_n, Tx) + (x, Tx_n)]\right\}\right) \\
&\leq \psi(p(x, Tx))
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $p(x, Tx) \leq \psi(p(x, Tx))$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda $p(x, Tx) = 0$ olup x, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Ayrıca (3.12) eşitliği ile $p(x, x) = 0$ dır. (3.7) eşitsizliğinden, sabit noktanın tek olduğu görülebilir.

Örnek 3.1.9. $X = \{0,1, \dots ,10\}$ ve $p(x, y) = \frac{x+y}{2}$ olsun. Bu durumda $p^w(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|$olur. Buradan (X, p^w) metrik uzayı tam olduğu için ve Lemma 3.1.1 den (X, p) zayıf kısmi metrik uzayı tamdır. $T: X \to X$

$$Tx = \begin{cases} x-1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Teorem 3.1.2 nin büzülme şartının $\psi(t) = \frac{9}{10}t$ fonksiyonu ile sağlandığını gösterelim. Bunun için aşağıdaki dört durumu inceleyelim.

Durum 1. Eğer $x = y = 0$ ise $p(Tx, Ty) = 0 \leq \frac{9}{10}p(x, y)$ dir.

Durum 2. Eğer $x = y > 0$ ise

$$p(Tx,Ty) = p(x-1,y-1) = x-1 \leq \frac{9}{10}x = \frac{9}{10}p(x,y)$$

dir.

Durum 3. Eğer $x > y = 0$ ise

$$p(Tx,Ty) = p(x-1,0) = \frac{x-1}{2} \leq \frac{9}{10}\frac{x}{2} = \frac{9}{10}p(x,y)$$

dir.

Durum 4. Eğer $x > y > 0$ ise

$$p(Tx,Ty) = p(x-1,y-1) = \frac{x+y-2}{2} \leq \frac{9}{10}\frac{x+y}{2} = \frac{9}{10}p(x,y)$$

dir. Bu ise Teorem 3.1.2 nin tüm şartlarının sağlandığını gösterir. Ayrıca T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Eğer X kümesi üzerinde alışılmış metrik göz önüne alınırsa bu büzülme şartının sağlanmayacağını görebiliriz.

Ilic ve arkadaşlarının kısmi metrik uzayda verdiği sabit nokta teoremini zayıf kısmi metrik uzay için ifade ve ispat edeceğiz. Ayrıca vereceğimiz bir örnekle her iki metrik uzay arasındaki farkı göstereceğiz.

Teorem 3.1.3. (X,p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(Tx,Ty) \leq \max \ \{\alpha p(x,y), \min\{p(x,x), p(y,y)\}\} \tag{3.16}$$

şartı sağlansın. Bu durumda

$i)$ $\rho_p = inf\{p(x,y): x,y \in X\}$ ile gösterildiğinde $X_p = \{x \in X: p(x,x) = \rho_p\}$ kümesi boştan farklıdır,

$ii)$ $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X_p$ vardır ve

$iii)$ Her $x \in X_p$ için $\{T^n x\}$ dizisi p^w metriğine göre u noktasına yakınsaktır.

İspat: $x \in X$ alalım. (3.16) eşitsizliğinden

$$p(Tx, Tx) \leq \max \ \{\alpha p(x, x), \min \ \{p(x, x), p(x, x)\}\} = p(x, x)$$

olup, $p(T^n x, T^n x)$ azalmayan bir dizi ve her $m > n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} p(T^n x, T^m x) &\leq \max \ \{\alpha p(T^{n-1}x, T^{m-1}x), \min \ \{p(T^{n-1}x, T^{n-1}x), p(T^{m-1}x, T^{m-1}x)\}\} \\ &\leq \max \ \{\alpha p(T^{n-1}x, T^{m-1}x), p(T^{m-1}x, T^{m-1}x)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi

$$r_x \coloneqq \lim_{n\to\infty} p(T^n x, T^n x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} p(T^n x, T^n x) \geq 0$$

ve

$$M_x \coloneqq \frac{1}{1-\alpha} p(x, Tx) + p(x, x)$$

şeklinde belirleyelim. İlk olarak her $n \geq 0$ için

$$p(x, T^n x) \leq M_x \tag{3.17}$$

olduğunu gösterelim. $n = 0,1$ için (3.17) eşitsizliği doğrudur. Kabul edelim ki $n \leq n_0 - 1$ için (3.17) eşitsizliği doğru olsun ve $n = n_0 \geq 2$ için de (3.17) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} p(x, T^{n_0}x) &\leq p(x, Tx) + p(Tx, T^{n_0}x) \\ &\leq p(x, Tx) + \max \ \{\alpha p(x, T^{n_0-1}x), \min \ \{p(x, x), p(T^{n_0-1}x, T^{n_0-1}x)\}\} \\ &\leq p(x, Tx) + \frac{\alpha}{1-\alpha} p(x, Tx) + p(x, x) = M_x \end{aligned}$$

olduğundan eşitsizlik sağlanmış olur. Şimdi

$$r_x = \lim_{n,m\to\infty} p(T^n x, T^m x) \tag{3.18}$$

olduğunu gösterelim. Zayıf (p_2) özelliği kullanılarak her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$2p(T^n x, T^m x) \geq p(T^n x, T^n x) + p(T^m x, T^m x) \geq 2r_x$$

elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ için $p(T^{n_0} x, T^{n_0} x) < r_x + \varepsilon$ ve $2M_x \alpha^{n_0} < r_x + \varepsilon$ şartını sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $n, m \geq 2n_0$ için

$$\begin{aligned}
r_x &\leq p(T^n x, T^m x) \\
&\leq \max \ \{\alpha p(T^{n-1}x, T^{m-1}x), \min \ \{p(T^{n-1}x, T^{n-1}x), p(T^{m-1}x, T^{m-1}x)\}\} \\
&\leq \max \ \{\alpha^2 p(T^{n-2}x, T^{m-2}x), \min \ \{p(T^{n-2}x, T^{n-2}x), p(T^{m-2}x, T^{m-2}x)\}\} \\
&\qquad \vdots \\
&\leq \max \ \left\{ \begin{matrix} \alpha^{n_0} p(T^{n-n_0}x, T^{m-n_0}x), \\ \min \ \{p(T^{n-n_0}x, T^{n-n_0}x), p(T^{m-n_0}x, T^{m-n_0}x)\} \end{matrix} \right\} \\
&< r_x + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (3.18) eşitliği sağlanır ve $\{T^n x\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, p) uzayı tam olduğundan

$$r_x = p(z_x, z_x) = \lim_{n\to\infty} p(z_x, T^n x) = \lim_{n,m\to\infty} p(T^n x, T^m x) \tag{3.19}$$

eşitliğini sağlayan bir $z_x \in X$ vardır. Şimdi ise

$$p(z_x, Tz_x) \leq p(z_x, z_x) \tag{3.20}$$

olduğunu gösterelim. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$p(z_z, Tz_x) \leq \ p(z_z, T^n x) + p(T^n x, Tz_x) - p(T^n x, T^n x) \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.16) eşitsizliğinden $k \geq 1$ için

$$p(Tz_x, T^{n_k} x) \leq \alpha p(z_x, T^{n_k - 1} x)$$

veya

$$p(Tz_x, T^{n_k}x) \leq p(T^{n_k-1}x, T^{n_k-1}x)$$

veya

$$p(Tz_x, T^{n_k}x) \leq p(z_x, z_x)$$

şartlarını sağlayan bir $\{n_k\}_{k\geq 1}$ alt dizisi vardır. Bu durumların her biri için (3.21) eşitsizliğinde $k \to \infty$ için limit alınırsa $p(z_x, Tz_x) \leq p(z_x, z_x)$ elde edilir.

Şimdi X_p kümesinin boştan farklı olduğunu gösterelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p(x_k, x_k) < \rho_p + \frac{1}{k}$ olacak şekilde $x_k \in X$ seçelim. İlk olarak

$$\lim_{n,m\to\infty} p\left(z_{x_n}, z_{x_m}\right) = \rho_p \tag{3.22}$$

olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $n_0 := \left[\left|\frac{3}{\varepsilon(1-\alpha)}\right|\right] + 1$ alalım. Eğer $k \geq n_0$ ise

$$\begin{aligned}\rho_p &\leq p\left(Tz_{x_k}, Tz_{x_k}\right) \leq p\left(z_{x_k}, z_{x_k}\right) = r_{x_k} \leq p(x_k, x_k)\\ &< \rho_p + \frac{1}{k} \leq \rho_p + \frac{1}{n_0} < \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}\end{aligned}$$

elde edilir. Her $k \geq n_0$ için

$$U_k := p\left(z_{x_k}, z_{x_k}\right) - p\left(Tz_{x_k}, Tz_{x_k}\right) < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} \tag{3.23}$$

olur. Ayrıca, $k \geq n_0$ için $p\left(z_{x_k}, z_{x_k}\right) = r_{x_k} \leq p(x_k, x_k) \leq \rho_p + \frac{1}{n_0}$ olur ve her $k \geq n_0$ için

$$p\left(z_{x_k}, z_{x_k}\right) \leq \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} \tag{3.24}$$

sağlanır. $n, m \geq n_0$ için

$$p\left(z_{x_n}, z_{x_m}\right) \leq \left\{\begin{matrix} p\left(z_{x_n}, Tz_{x_n}\right) + p\left(Tz_{x_n}, Tz_{x_m}\right) + p\left(Tz_{x_m}, z_{x_m}\right) \\ -p\left(Tz_{x_n}, Tz_{x_n}\right) - p\left(Tz_{x_m}, Tz_{x_m}\right) \end{matrix}\right\}$$

elde edilir ve bu eşitsizliğe (3.20) eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} p\left(z_{x_n}, z_{x_m}\right) &\leq U_n + U_m + p\left(Tz_{x_n}, Tz_{x_m}\right) \\ &< U_n + U_m + \max\ \left\{\alpha p\left(z_{x_n}, z_{x_m}\right), \min\ \left\{p\left(z_{x_n}, z_{x_n}\right), p\left(z_{x_m}, z_{x_m}\right)\right\}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.23) ve (3.24) eşitsizlikleri de kullanıldığında

$$\begin{aligned} \rho_p &\leq p\left(z_{x_n}, z_{x_m}\right) \\ &\leq \max\ \left\{\frac{2}{3}\varepsilon, \frac{2}{3}\varepsilon(1-\alpha) + p\left(z_{x_n}, z_{x_n}\right), \frac{2}{3}\varepsilon(1-\alpha) + p\left(z_{x_m}, z_{x_m}\right)\right\} \\ &\leq \max\ \left\{\frac{2}{3}\varepsilon, \rho_p + \varepsilon(1-\alpha)\right\} < \rho_p + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\lim_{n,m\to\infty} p\left(z_{x_n}, z_{x_m}\right) = \rho_p$ olur. (X, p) zayıf kısmi metrik uzayı tam olduğundan

$$p(y, y) = \lim_{n\to\infty} p\left(y, z_{x_n}\right) = \lim_{n,m\to\infty} p\left(z_{x_n}, z_{x_m}\right) = \rho_p$$

olacak şekilde $y \in X$ vardır. Yani $y \in X_p$ dir. Dolayısıyla $X_p \neq \emptyset$ dir. X_p kümesi boştan farklı olduğundan keyfi bir $x \in X_p$ alalım. (3.19) eşitliğinden

$$\rho_p \leq p(z_x, Tz_x) \leq p(z_x, z_x) = r_x = \rho_p$$

bulunur. Dolayısıyla $Tz_x = z_x \in X_p$ dir. (3.19) eşitliği ve Lemma 3.1.1 den $\{T^n x\}$ dizisi p^w metriğine göre z_x noktasına yakınsar.

Eğer $u, v \in X_p$, T nin iki farklı sabit noktası ise

$$p(u,v) = p(Tu,Tv) \leq \max \ \{\alpha p(u,v), \min \ \{p(u,u), p(v,v)\}\}$$

olur ve buradan $(1-\alpha)p(u,v) \leq 0$, $p(u,v) = 0$ veya $p(u,v) \leq p(u,u)$ veya $p(u,v) \leq p(v,v)$ elde edilir. Buradan $u, v \in X_p$ olup $p(u,u) = p(v,v) = \rho_p$ elde edilir. Zayıf (p_2) özelliğinden ise bu durumlar için

$$p(u,v) = p(u,u) = p(v,v)$$

elde edilir ve $u = v$ dir.

Örnek 3.1.10. $X = [0,1] \cup [2,3]$ ve $p: X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \{x,y\} \cap [2,3] \neq \emptyset \\ |x-y|, & \{x,y\} \cap [2,3] = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,p) uzayı bir tam zayıf kısmi metrik uzaydır. $T: X \to X$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ x-2, & x \in [2,3] \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Teorem 3.1.3 ün tüm şartlarının sağlandığını gösterelim.

Durum 1. Eğer $x, y \in [0,1]$ ise herhangi bir $\alpha \geq 0$ için

$$p(Tx,Ty) = p(0,0) \leq \max \ \{\alpha p(x,y), \min\{p(x,x), p(y,y)\}\}$$

elde edilir.

Durum 2. Eğer $x, y \in [2,3]$ ise $\alpha \geq \frac{1}{2}$ için

$$p(Tx, Ty) = p(x-2, x-2) = |x-y| \leq \max \left\{\alpha \frac{x+y}{2}, \min\{x, y\}\right\}$$
$$= \max \{\alpha p(x, y), \min\{p(x, x), p(y, y)\}\}$$

elde edilir.

Durum 3. Eğer $x \in [0,1]$ ve $y \in [2,3]$ ise $\alpha \geq \frac{2}{3}$ için

$$p(Tx, Ty) = p(0, y-2) = |y-2| \leq \alpha \frac{x+y}{2}$$
$$= \max \{\alpha p(x, y), \min\{p(x, x), p(y, y)\}\}$$

elde edilir. Böylece $\alpha \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$ için Teorem 3.1.3 ün tüm şartları sağlanmış olur. Yani X_p kümesi boş değil ve $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X_p$ vardır. Bu küme $X_p = [0,1]$ ve $T0 = 0 \in X_p$ bir tek sabit noktasıdır. Ayrıca her $x \in X_p$ için $\{T^n x\}$ dizisi p^w metriğine göre u noktasına yakınsaktır.

Tanım 3.1.3. $\varphi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ tanımlı fonksiyonu eğer sürekli, azalmayan ve $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon ise φ-fonksiyonuna uzaklık değiştiren fonksiyonu denir.

Teorem 3.1.4. (X, p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm ve ψ ve φ iki ayrı uzaklık değiştiren fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\psi\big(p(Tx, Ty)\big) \leq \psi\big(p(x, y)\big) - \varphi(p(x, y)) \tag{3.25}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Eğer $Tx_0 = x_0$ ise x_0, T nin bir sabit noktasıdır. Kabul edelim ki $Tx_0 \neq x_0$ olsun. $n \geq 1$ için (3.25) eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\psi\big(p(x_{n+1}, x_n)\big) &= \psi\big(p(Tx_n, Tx_{n-1})\big) \\
&\leq \psi\big(p(x_n, x_{n-1})\big) - \varphi\big(p(x_n, x_{n-1})\big) \\
&\leq \psi\big(p(x_n, x_{n-1})\big) \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

bulunur. ψ-fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) \qquad (3.27)$$

dir. Yani $\{p(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalan ve alttan sınırlıdır. Eğer $p\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big) = 0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $x_{n_0} = x_{n_0+1} = Tx_{n_0}$ olur ve buradan x_{n_0}, bir sabit noktadır. Kabul edelim ki $p\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\{p(x_n, x_{n+1})\}$ dizisi azalan ve alttan sınırlı olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = r \qquad (3.28)$$

olacak şekilde $r \geq 0$ sayısı vardır. Kabul edelim ki $r > 0$ olsun. (3.26) eşitsizliğinin her iki yanından $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \varphi(r) \qquad (3.29)$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $r = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0 \qquad (3.30)$$

bulunur. Zayıf (p_2) özelliğiyle $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$ bulunur.

Kabul edelim ki $\{x_n\}$, (X, p^w) uzayında bir Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda $\varepsilon > 0$ sayısı için $\{x_n\}$ dizisinin $n_k > m_k > k$ için

$$p^w\big(x_{m_k}, x_{n_k}\big) \geq \varepsilon \qquad (3.31)$$

olacak şekilde $\{x_{n_k}\}$ ve $\{x_{m_k}\}$ alt dizileri bulanabilir. Burada m_k ya karşılık gelen n_k sayısını (3.31) eşitsizliğini sağlayan en küçük sayı olarak alalım. O halde

$$p^w(x_{m_k}, x_{n_k-1}) < \varepsilon \tag{3.32}$$

olur. (3.32) eşitsizliğine (p_4) şartının uygulanması ve (3.31) eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq p^w(x_{m_k}, x_{n_k}) \\
&\leq p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}) + p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&\leq p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_{k+1}}, x_{n_k}) + 2p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&\leq p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k}, x_{n_k}) + 2p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&\leq 2p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k}) + p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + 2p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&= 3p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k}) + 2p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&\leq 3p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}) + p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) + 2p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&= 3p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}) + 3p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&\leq 3p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k+1}, x_{m_k}) + p^w(x_{m_k}, x_{n_k-1}) + 3p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&= 4p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}) + 3p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k}) \\
&< 4p^w(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + \varepsilon + 3p^w(x_{n_k-1}, x_{n_k})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} p^w(x_{m_k}, x_{n_k}) &= \lim_{k\to\infty} p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}) \\
&= \lim_{k\to\infty} p^w(x_{m_k+1}, x_{n_k}) \\
&= \lim_{k\to\infty} p^w(x_{m_k}, x_{n_k-1}) = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Her $x, y \in X$ için $p^w(x, y) = p(x, y) - \min\ \{p(x, x), p(y, y)\}$ olduğundan ve $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$ eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} p\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) &= \lim_{k\to\infty} p\left(x_{m_k+1}, x_{n_k-1}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} p\left(x_{m_k+1}, x_{n_k}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} p\left(x_{m_k}, x_{n_k-1}\right) = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremdeki büzülme şartı x_{m_k}, x_{n_k-1} için kullanılırsa

$$\psi\left(p\left(x_{m_k+1}, x_{n_k}\right)\right) = \psi\left(p\left(Tx_{m_k}, x_{n_k-1}\right)\right) \le \psi\left(p(x_{m_k}, x_{n_k-1})\right) - \varphi\left(p(x_{m_k}, x_{n_k-1})\right)$$

bulunur. $k \to \infty$ için limit alındığında ve ψ ve φ fonksiyonlarının süreklilik şartıyla

$$\psi(\varepsilon) \le \psi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Yani $\{x_n\}$, (X, p^w) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, p) uzayı tam olduğundan Lemma 3.1.1den (X, p^w) uzayı da tamdır. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi bir $z \in X$ noktasına yakınsaktır. Yine Lemma 3.1.1 den

$$p(z,z) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, z) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) \tag{3.33}$$

elde edilir. Ayrıca $\{x_n\}$, (X, p^w) metrik uzayında bir Cauchy dizisi, $\lim_{n,m\to\infty} p^w(x_n, x_m) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} p^w(x_n, x_n) = 0$ olduğundan p^w nın tanımıyla beraber $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. (3.33) eşitliğiyle

$$p(z,z) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, z) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

bulunur. Teoremin büzülme şartından

$$\psi(p(x_{n+1}, Tz)) = \psi(p(Tx_n, Tz)) \le \psi(p(x_n, z)) - \varphi(p(x_n, z))$$

olup $n \to \infty$ için limit alındığında

$$\psi(p(z, Tz)) \le \psi\left(p(z,z)\right) - \varphi\left(p(z,z)\right) = 0$$

elde edilir. Böylece $p(z,Tz)=0$ olup zayıf (p_2) özelliğiyle $z=Tz$ dir. Sabit noktanın tekliği ise diğer teoremlerdeki gibi kolayca görülebilir.

Örnek 3.1.11. $X=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ve her $x,y\in X$ için $p(x,y)=\frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda (X,p) uzayı bir tam zayıf kısmi metrik uzaydır. $T:X\to X$ dönüşümü $Tx=x^2$ olsun. Bu durumda (3.25) şartı $\psi(t)=t$ ve $\varphi(t)=\frac{1}{2}t$ şeklinde tanımlı ψ ve φ uzaklık değiştiren fonksiyonları ile birlikte sağlanır.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\psi\big(p(Tx,Ty)\big) &= \psi\big(p(x^2,y^2)\big)\\
&=\psi\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)=\frac{x^2+y^2}{2}\\
&\le \frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y}{2}\\
&=\frac{1}{2}\frac{x+y}{2}\\
&=\frac{1}{2}p(x,y)\\
&=p(x,y)-\frac{1}{2}p(x,y)\\
&\le \psi\big(p(x,y)\big)-\varphi\big(p(x,y)\big)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin bütün şartları sağlandığından T dönüşümü $X=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ kümesinde $z=Tz$ olacak şekilde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Lemma 3.1.5. (X,p) bir zayıf kısmi metrik uzay olsun. $\{x_n\}$, (X,p) uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerek yeter şart her $\varepsilon>0$ için $n_0\le n\le m$ olduğunda $p(x_n,x_m)-p(x_n,x_n)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ var olmasıdır.

Şimdi Teorem 3.1.3 ün bir genelleştirmesini verelim.

Teorem 3.1.5. (X,p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve $a,b,c\in[0,1)$ ve $d\in[0,\frac{1}{2})$ olsun. Her $x,y\in X$ için

$$p(Tx,Ty) \leq \max \begin{Bmatrix} ap(x,y), bp(x,Tx), cp(y,Ty), \\ d[p(x,Ty)+p(y,Tx)], \min \{p(x,x), p(y,y)\} \end{Bmatrix} \tag{3.34}$$

şartı sağlansın. Bu durumda

$i)$ $X_p = \{x \in X : p(x,x) = inf\{p(y,y) : y \in X\}\}$ kümesi boştan farklı ve

$ii)$ $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X_p$ vardır.

İspat: $x_0 \in X$ alalım ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisini, $x_n = Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlayalım. İlk olarak X_p kümesinin boştan farklı olduğunu gösterelim. (3.34) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alınırsa

$$\begin{aligned} p(Tx_{n-1}, Tx_n) &\leq \max \begin{Bmatrix} ap(x_{n-1}, x_n), bp(x_{n-1}, Tx_{n-1}), cp(x_n, Tx_n), \\ d[p(x_{n-1}, Tx_n) + p(x_n, Tx_{n-1})], \\ \min \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\} \end{Bmatrix} \\ &\leq \max \begin{Bmatrix} ap(x_{n-1}, x_n), bp(x_{n-1}, Tx_{n-1}), cp(x_n, Tx_n), \\ d[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})], \\ \min \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\} \end{Bmatrix} \\ &\leq \max \begin{Bmatrix} ap(x_{n-1}, x_n), bp(x_{n-1}, Tx_{n-1}), cp(x_n, Tx_n), \\ 2dp(x_{n-1}, x_n), 2dp(x_n, x_{n+1}), \\ \min \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $\alpha = \max \{a, b, c, 2d\}$ olarak kabul edelim. Böylece

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \max \begin{Bmatrix} \alpha p(x_{n-1}, x_n), \alpha p(x_n, x_{n+1}), \\ \min \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\} \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

bulunur. Bu eşitsizlik aşağıdaki iki durumda incelenebilir.

Durum 1. En az bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\max \{\alpha p(x_{n-1}, x_n), \alpha p(x_n, x_{n+1}), \min \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\}\} = \alpha p(x_n, x_{n+1})$$

ise ve $\alpha \in [0,1)$ olduğundan (3.35) eşitsizliği ile

$$p(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha p(x_n, x_{n+1})$$

bulunur. Bu durumda $p(x_n, x_{n+1}) = 0$ ve $x_n = Tx_n$ olur. $p(x_n, x_n) \leq 2p(x_n, x_{n+1})$ olduğundan $p(x_n, x_n) = 0$ elde edilir. Bu ise X_p kümesinin boş olmadığını gösterir.

Durum 2. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\max\ \{\alpha p(x_{n-1}, x_n), \alpha p(x_n, x_{n+1}), \min\ \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\}\} \neq \alpha p(x_n, x_{n+1})$$

olsun. (3.35) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) &\leq \max\ \{\alpha p(x_{n-1}, x_n), \min\ \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\}\} \\ &\leq \max\ \left\{\alpha p(x_{n-1}, x_n), \tfrac{p(x_{n-1}, x_{n-1}) + p(x_n, x_n)}{2}\right\} \\ &\leq p(x_{n-1}, x_n) \end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. $\{p(x_n, x_{n+1})\}$ negatif olmayan reel sayıların azalan bir dizisi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = r$$

olacak şekilde bir $r \geq 0$ vardır.

Eğer $r = 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $p(x_n, x_n) \leq 2p(x_n, x_{n+1})$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$ elde edilir. $r > 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$r_n = \max\ \{\alpha p(x_{n-1}, x_n), \min\ \{p(x_{n-1}, x_{n-1}), p(x_n, x_n)\}\}$$

olsun. (3.36) eşitsizliğinden ve $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = r$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ olur.

Şimdi sonlu tane n için $r_n = \alpha p(x_n, x_{n-1})$ olduğunu gösterelim. Sonsuz çokluktaki n sayısı için $r_n = \alpha p(x_n, x_{n-1})$ ise

$$r_{n_k} = \alpha p\left(x_{n_k}, x_{n_k-1}\right)$$

olacak şekilde pozitif tam sayıların bir $\{n_k\}$ alt dizisi vardır. $n_k \to \infty$ için limit alınırsa $r = \alpha r$ bulunur ki $\alpha \in [0,1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Yani sonlu tane n sayısı için $r_n = \alpha p(x_n, x_{n-1})$ dir. Buradan r_n nin tanımıyla beraber

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = r$$

bulunur. Zayıf kısmi metrik uzay tanımının (p_4) şartından her bir $n = 1,2,\cdots$ için

$$\begin{aligned} \min \ \{p(x_n, x_n), p(x_{n+2}, x_{n+2})\} &\leq \tfrac{p(x_n, x_n) + p(x_{n+2}, x_{n+2})}{2} \\ &\leq p(x_n, x_{n+2}) \\ &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten ve

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = r$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+2}) = r$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle her pozitif s tam sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+s}) = r$$

bulunur ve böylece $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = r$ olur. Bu durumda $\{x_n\}$, (X, p) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, p) uzayı tam olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Yani

$$\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = p(u, u) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, u) = r$$

dir. Şimdi ise $p(u, Tu) \leq p(u, u)$ olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\min \{p(u,u), p(Tu,Tu)\} \leq \frac{p(u,u)+p(Tu,Tu)}{2}$$
$$\leq p(u,Tu)$$
$$\leq p(u,x_n) + p(x_n,Tu) - p(x_n,x_n) \tag{3.37}$$

elde edilir. $p(x_n, Tu)$ için teoremdeki büzülme şartının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
p(Tu,x_n) &= p(Tu,Tx_{n-1}) \\
&\leq \max \left\{ \begin{matrix} ap(u,x_{n-1}), bp(u,Tu), cp(x_{n-1},Tx_{n-1}), \\ d[p(u,Tx_{n-1}) + p(x_{n-1},Tu)], \\ \min \{p(x_{n-1},x_{n-1}), p(u,u)\} \end{matrix} \right\} \\
&\leq \max \left\{ \begin{matrix} ap(u,x_{n-1}), bp(u,Tu), cp(x_{n-1},x_n), \\ 2dp(u,x_n), 2dp(x_{n-1},Tu), \\ p(u,x_{n-1}) \end{matrix} \right\} \\
&\leq \max \left\{ \begin{matrix} p(u,x_{n-1}), bp(u,Tu), cp(x_{n-1},x_n), \\ 2dp(u,x_n), 2dp(x_{n-1},Tu) \end{matrix} \right\} \\
&\leq \max \left\{ \begin{matrix} p(u,x_{n-1}), bp(u,Tu), cp(x_{n-1},x_n), 2dp(u,x_n), \\ 2d[p(x_{n-1},u) + p(u,Tu) - p(u,u)] \end{matrix} \right\} \\
&\leq \max \{p(u,u), bp(u,Tu), 2dp(u,Tu)\} \\
&\leq \max \{p(u,u), \alpha p(u,Tu)\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. Bu durumda $\{p(Tu,x_n)\}$ dizisinin sınırlıdır. Dolayısıyla $\{p(Tu,x_{n_k})\}$ şeklinde bir yakınsak alt dizisi vardır. (3.38) eşitsizliğinden $n_k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n_k \to \infty} p(Tu,x_n) \leq \max \{p(u,u), \alpha p(u,Tu)\}$$

elde edilir. Ayrıca (3.37) eşitsizliğinde $n_k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
p(u,Tu) &\leq p(u,u) + \max \{p(u,u), \alpha p(u,Tu)\} - p(u,u) \\
&\leq \max \{p(u,u), \alpha p(u,Tu)\} \\
&\leq p(u,u)
\end{aligned}$$

bulunur.

$\rho_p = inf\{p(y,y) : y \in X\}$ olsun. Her bir $k = 1,2,...$ için

$$p(x_k, x_k) \leq \rho_p + \frac{1}{k}$$

olacak şekilde $x_k \in X$ seçelim. $k = 1,2,...$ için $n \to \infty$ iken $T^n x_k \to u^k$ olacak şekilde u^k sayıları mevcut olup

$$p(Tu^k, u^k) \leq p(u^k, u^k) = r_{u^k}$$

olur. Şimdi ise $\lim_{n,m\to\infty} p(u^n, u^m) = \rho_p$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ için $n_0 \geq \frac{3}{\varepsilon(1-\alpha)}$ olsun. $k \geq n_0$ için teoremin büzülme şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \rho_p &\leq p(Tu^k, Tu^k) \\ &\leq \max \left\{ \begin{array}{c} ap(u^k, u^k), bp(u^k, Tu^k), cp(u^k, Tu^k), \\ d[p(u^k, Tu^k) + p(u^k, Tu^k)], \min \ \{p(u^k, u^k), p(u^k, u^k)\} \end{array} \right\} \\ &\leq \{\alpha p(u^k, Tu^k), p(u^k, u^k)\} \\ &\leq p(u^k, u^k) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\rho_p \leq p\left(Tu^k, Tu^k\right) \leq p\left(u^k, u^k\right) = r_{u_k} \leq p(x_k, x_k) < \rho_p + \frac{1}{k} \leq \rho_p + \frac{1}{n_0} < \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}$$

bulunur. Bu ise her $k \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} U_k &:= p(x_k, x_k) - p(Tx_k, Tx_k) \\ &< \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} - \rho_p < \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

olduğunu gösterir. Ayrıca, $k \geq n_0$ için

$$p(u^k, u^k) = r_{u_k} \leq p(x_k, x_k) < \rho_p + \frac{1}{k} < \rho_p + \frac{1}{n_0}$$

olur ve her $k \geq n_0$ için

$$p(u^k, u^k) \leq \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}$$

sağlanır. Her $n, m \geq n_0$ ve $k = 1,2,\cdots$ için $p(u^k, Tu^k) \leq p(u^k, u^k)$ olduğundan

$$\begin{aligned} p(u^n, u^m) &\leq p(u^m, Tu^m) + p(Tu^n, u^n) + p(Tu^m, Tu^n) - p(Tu^m, Tu^m) - p(Tu^n, Tu^n) \\ &\leq p(u^m, u^m) + p(u^n, u^n) + p(Tu^m, Tu^n) - p(Tu^m, Tu^m) - p(Tu^n, Tu^n) \\ &= U_n + U_m + p(Tu^m, Tu^n) \\ &\leq 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} + p(Tu^m, Tu^n) \end{aligned} \tag{3.40}$$

elde edilir. Diğer taraftan ise

$$\begin{aligned} p(Tu^n, Tu^m) &\leq \max \begin{Bmatrix} ap(u^m, u^n), bp(u^m, Tu^m), cp(Tu^n, u^n), \\ d[p(u^m, Tu^n) + p(u^n, Tu^m)], \min \ \{p(u^m, u^m), p(u^n, u^n)\} \end{Bmatrix} \\ &\leq \max \begin{Bmatrix} ap(u^m, u^n), bp(u^m, Tu^m), cp(Tu^n, u^n), \\ d\begin{bmatrix} p(u^m, u^n) + p(u^n, Tu^n) - p(u^n, u^n) + \\ p(u^m, u^n) + p(u^m, Tu^m) - p(u^m, u^m) \end{bmatrix}, \\ \min \ \{p(u^m, u^m), p(u^n, u^n)\} \end{Bmatrix} \\ &\leq \max \begin{Bmatrix} ap(u^m, u^n), bp(u^m, Tu^m), cp(Tu^n, u^n), \\ d\begin{bmatrix} p(u^m, u^n) + p(u^n, u^n) - p(u^n, u^n) + \\ p(u^m, u^n) + p(u^m, u^m) - p(u^m, u^m) \end{bmatrix}, \\ \min \ \{p(u^m, u^m), p(u^n, u^n)\} \end{Bmatrix} \\ &\leq \max \begin{Bmatrix} ap(u^m, u^n), bp(u^m, Tu^m), cp(Tu^n, u^n), \\ 2dp(u^m, u^n), \\ \min \ \{p(u^m, u^m), p(u^n, u^n)\} \end{Bmatrix} \\ &\leq \max \ \{\alpha p(u^m, u^n), p(u^m, u^m), p(u^n, u^n)\} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.40) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} p(u^n, u^m) &\leq 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} + p(Tu^m, Tu^n) \\ &\leq 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} + \max \ \{\alpha p(u^m, u^n), p(u^m, u^m), p(u^n, u^n)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$p(u^n,u^m) \leq \max \begin{Bmatrix} \alpha p(u^m,u^n) + 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}, p(u^m,u^m) + 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}, \\ p(u^n,u^n) + 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} \end{Bmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \rho_p &\leq p(u^n,u^m) \\ &\leq \max \left\{\frac{2}{3}\varepsilon, p(u^n,u^m) + 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}, p(u^n,u^n) + 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}\right\} \\ &\leq \max \left\{\frac{2}{3}\varepsilon, \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} + 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}, \rho_p + \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3} + 2\frac{\varepsilon(1-\alpha)}{3}\right\} \\ &\leq \max \left\{\frac{2}{3}\varepsilon, \rho_p + \varepsilon(1-\alpha)\right\} \\ &\leq \max \left\{\frac{2}{3}\varepsilon, \rho_p + \varepsilon\right\} = \rho_p + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\lim_{n,m\to\infty} p(u^n,u^m) = \rho_p$ olup $\{u^n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. (X,p) zayıf kısmi metrik uzayı tam olduğundan

$$p(y,y) = \lim_{n\to\infty} p(y,u^n) = \lim_{n,m\to\infty} p(u^n,u^m) = \rho_p$$

olacak şekilde $y \in X$ vardır. Yani $y \in X_p$ dir. Dolayısıyla $X_p \neq \emptyset$ dir.

Keyfi bir $y \in X_p$ için $\lim\limits_{n\to\infty} T^n y = u$ olmak üzere $p(u,Tu) \leq p(u,u) = r_y$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Buradan

$$\rho_p \leq p(Tu,Tu) \text{ ve } \rho_p \leq p(u,u) = p(u,Tu)$$

ve

$$\rho_p \leq \frac{p(Tu,Tu)+p(u,u)}{2} \leq p(u,Tu) = p(u,u) = r_y \leq p(y,y) = \rho_p$$

elde edilir. Yani $p(u,Tu) = p(u,u) = p(Tu,Tu)$ veya $u = Tu$ elde edilir.

$u,v \in X_p$, T nin iki farklı sabit noktası olsun. $p(u,u) = p(v,v) = \rho_p$ olduğundan

$$p(u,v) = p(Tu,Tv) \leq \max \begin{Bmatrix} ap(u,v), bp(u,Tu), cp(v,Tv), \\ d[p(u,Tv) + p(v,Tu)], \\ \min \ \{p(u,u), p(v,v)\} \end{Bmatrix}$$
$$\leq \max \ \{\alpha p(u,v), p(u,u), p(v,v)\}$$

olur. Buradan $(1-\alpha)p(u,v) \leq 0$ yada $p(u,v) \leq p(u,u) = p(v,v) = \rho_p$ elde edilir. Eğer

$$(1-\alpha)p(u,v) \leq 0$$

ise $p(u,v) = 0$ yani $u = v$ olur. Eğer

$$p(u,v) \leq p(u,u) = p(v,v) = \rho_p$$

ise $p(u,v) = p(u,u) = p(v,v)$ dir. Yani $u = v$ dir.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuçları elde edilebiliriz.

Sonuç 3.1.4. (X,p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $a,b,c \in [0,1)$ ve $d \in [0,\frac{1}{2})$ olsun. Her $x,y \in X$ için

$$p(Tx,Ty) \leq \max \ \{ap(x,y), bp(x,Tx), cp(y,Ty), d[p(x,Ty) + p(y,Tx)]\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda X_p kümesi boştan farklıdır ve $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X_p$ vardır.

Sonuç 3.1.5. (X,p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $a \in [0,1)$ olsun. Her $x,y \in X$ için

$$p(Tx,Ty) \leq \max \ \{ap(x,y), \min \ \{p(x,x), p(y,y)\}\}$$

şartı sağlansın. Bu durumda X_p kümesi boştan farklıdır ve $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X_p$ vardır.

Sonuç 3.1.6. (X, p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm, olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(Tx, Ty) \leq ap(x, y) + bp(x, Tx) + cp(y, Ty) + d[p(x, Ty) + p(y, Tx)]$$

şartı sağlayan $a + b + c + d < 1$ özelliğine uygun $a, b, c, d \geq 0$ sayıları var olsun Bu durumda X_p kümesi boştan farklıdır ve $Tu = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X_p$ vardır.

Tanım 3.1.4. (X, p) bir zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = Tx_n$ olacak şekilde tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Eğer $\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x, x)$ iken

$$\lim_{n\to\infty} p(Tx, x_n) = p(Tx, Tx)$$

ise T ye orbital sürekli denir.

Aşağıdaki teoremde Berinde tip büzülme dönüşümlerinin zayıf kısmi metrik uzaydaki halini vereceğiz.

Teorem 3.1.6 (X, p) tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ orbital sürekli bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} p(Tx, Ty) \leq\ & k[p(x, y) - p(x, x)] + p(y, y) \\ & + L \min \ \{p^w(x, Ty), p^w(y, Tx)\} \end{aligned} \tag{3.41}$$

olacak şekilde $k \in (0,1)$ ve $L \in \mathbb{R}^+$ sabitleri varsa T, X kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisini $x_{n+1} = Tx_n$ şeklinde tanımlayalım. İlk olarak (3.41) eşitsizliğinde $x = x_{n-1}$ ve $y = x_n$ alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&p(x_n, x_{n+1}) = p(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\leq k[p(x_{n-1}, x_n) - p(x_{n-1}, x_{n-1})] + p(x_n, x_n) + L \min \ \{p^w(x_n, Tx_{n-1}), p^w(x_{n-1}, Tx_n)\} \\
&= k[p(x_{n-1}, x_n) - p(x_{n-1}, x_{n-1})] + p(x_n, x_n)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n) &\leq k[p(x_{n-1}, x_n) - p(x_{n-1}, x_{n-1})] \\
&\leq k^2[p(x_{n-2}, x_{n-1}) - p(x_{n-2}, x_{n-2})] \\
&\ \ \vdots \\
&\leq k^n[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + \cdots + p(x_{m-1}, x_m) - p(x_n, x_n) \\
&\leq k^n[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)] + k^{n+1}[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)] \\
&\quad + \cdots + k^{m-1}[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)] \\
&\leq \frac{k^n}{1-k}[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)]
\end{aligned}
$$

bulunur. Her $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \leq n < m$ için

$$p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda Lemma 3.1.5 den dolayı $\{x_n\}$, (X, p) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X, p) tam zayıf kısmi metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(z, x_n) = p(z, z) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$$

olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Yani $\lim_{n\to\infty} p^w(z, x_n) = 0$ olur.

Şimdi ise $z \in X$ in bir sabit nokta olduğunu gösterelim. (3.41) şartının kullanılmasıyla

$$p(z,Tz) \leq p(z,x_n) + p(x_n,Tz) - p(x_n,x_n)$$
$$\leq \begin{Bmatrix} p(z,x_n) + k[p(x_{n-1},z) - p(x_{n-1},x_{n-1})] + p(z,z) + \\ L\min\ \{p^w(z,Tx_{n-1}), p^w(x_{n-1},Tz)\} - p(x_n,x_n) \end{Bmatrix}$$

elde edilip bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$p(z,Tz) \leq p(z,z)$$

bulunur. Diğer taraftan ise

$$p(Tz,Tz) \leq k[p(z,z) - p(z,z)] + p(z,z) + L\min\ \{p^w(z,Tz), p^w(z,Tz)\}$$
$$= p(z,z) + Lp^w(z,Tz)$$
$$= p(z,z) + L[p(z,Tz) - \min\ \{p(z,z), p(Tz,Tz)\}]$$

olur. Bu eşitsizlikten

$p(Tz,Tz) \leq\ p(z,z)$ dir. T orbital sürekli olduğundan

$$p(z,Tz) \leq p(z,x_n) + p(Tz,x_n) - p(x_n,x_n)$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$p(z,Tz) \leq p(Tz,Tz)$$

elde edilir. Zayıf (p_2) özelliğinin kullanılmasıyla

$$p(Tz,Tz) + p(z,z) \leq 2p(Tz,z)$$

elde edilir. $p(z,Tz) \leq p(Tz,Tz)$ olduğundan

$p(Tz,Tz)+p(z,z)\leq 2p(Tz,Tz)$

olur. Buradan $p(z,z)\leq p(Tz,Tz)$ bulunur. Böylece

$p(Tz,Tz)\leq\ p(z,z)$ ve $p(z,z)\leq p(Tz,Tz)$

olduğundan $p(z,z)=p(Tz,Tz)$ dir. Diğer taraftan ise bulunan bu eşitlik $p(Tz,Tz)+p(z,z)\leq 2p(Tz,z)$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$p(Tz,Tz)+p(Tz,Tz)\leq 2p(Tz,z)$

ve $p(Tz,Tz)\leq p(Tz,z)$ elde edilir. Ayrıca $p(z,Tz)\leq p(Tz,Tz)$ olduğundan $p(z,Tz)=p(Tz,Tz)$ bulunur. Yani $p(z,z)=p(Tz,Tz)=p(z,Tz)$ dir. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

Not. Bu teorem T nin orbital sürekliliği yerine T nin p^w metriğine göre sürekliliği de alınarak ispatlanabilir.

Örnek 3.1.12. $X=[0,1]$ ve

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{2}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (X,p) bir tam zayıf kısmi metriktir. Ayrıca $p^w(x,y)=p(x,y)$ şeklindedir. $T: X\to X$ e dönüşümü

$$T(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,\frac{1}{2})\\ 0, & x\in[\frac{1}{2},1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

şeklinde olsun. $k=\frac{1}{2}$ ve $L=1$ için (3.41) büzülme şartı sağlanır. Bunun için aşağıdaki durumları inceleyelim.

Durum 1. $x = y$ ise $p(Tx, Ty) = 0$ olur. Bundan dolayı $x \neq y$ olacak şekilde seçelim.

Durum 2. $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ise $p(Tx, Ty) = 0$ olur.

Durum 3. $x, y \in [0, \frac{1}{2})$ ise

$$p(Tx, Ty) = \frac{x^2+y^2}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}p(x, y) \leq \frac{1}{2}p(x, y) + \min\ \{p^w(y, Tx), p^w(x, Ty)\}$$

olur.

Durum 4. $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ve $y = 1$ ise

$$\begin{aligned} p(Tx, Ty) &= \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}p(x, y) + \min\ \{p(1,0), p(x, 1)\} \\ &= \frac{1}{2}p(x, y) + \min\ \{p(y, Tx), p(x, Ty)\} \\ &= \frac{1}{2}p(x, y) + \min\ \{p^w(y, Tx), p^w(x, Ty)\} \end{aligned}$$

olur.

Durum 5. $x \in [0, \frac{1}{2})$ ve $y = 1$ ise

$$\begin{aligned} p(Tx, Ty) &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) < \frac{1}{2}\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + 1) \\ &= \frac{1}{2}p(x, y) + \min\ \{p(1, x^2), p(x, 1)\} \\ &= \frac{1}{2}p(x, y) + \min\ \{p(y, Tx), p(x, Ty)\} \\ &= \frac{1}{2}p(x, y) + \min\ \{p^w(y, Tx), p^w(x, Ty)\} \end{aligned}$$

olur.

Durum 6. $x \in [0, \frac{1}{2})$ ve $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ ise

$$
\begin{aligned}
p(Tx, Ty) &= \frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}\frac{x+y}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}p(x,y) \\
&\leq \frac{1}{2}p(x,y) + \min \ \{p^w(x,Ty), p^w(y,Tx)\}
\end{aligned}
$$

olur. T orbital sürekli olduğundan ve bu teoremin bütün şartlarını sağlandığından T bir sabit noktaya sahiptir. Ancak,

$$p(T0, T1) = \frac{1}{2} = p(0,1)$$

olduğundan T bu zayıf kısmi metrik uzay üzerinde bir Banach büzülme değildir.

Şimdi Teorem 3.1.6 yı sıralı kümeler üzerinde yeniden ifade ve ispat edeceğiz.

Not: $(X, \preccurlyeq)$ sıralı bir küme ve p, X üzerinde bir zayıf kısmi metrik olsun. $(X, \preccurlyeq, p)$ üçlüsüne sıralı zayıf kısmi metrik uzay diyeceğiz. Ayrıca (X, p) uzayı tam ise $(X, \preccurlyeq, p)$ üçlüsüne sıralı tam zayıf kısmi metrik uzayı diyeceğiz.

Teorem 3.1.7. $(X, \preccurlyeq, p)$ sıralı tam zayıf kısmi metrik uzay, $T: X \to X$ orbital sürekli ve azalmayan bir dönüşüm olsun. $y \preccurlyeq x$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$
\begin{aligned}
p(Tx, Ty) \leq\ & k[p(x,y) - p(x,x)] + p(y,y) \\
& + L \min \ \{p^w(x,Ty), p^w(y,Tx)\} \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini sağlayan $k \in (0,1)$ ve $L \in \mathbb{R}^+$ sabitleri var olsun. Eğer $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ ve X kümesinde $x_n \to z$ olacak şekildeki azalmayan her $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \preccurlyeq z$ şartları sağlansın. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. Eğer $x_0 = Tx_0$ ise ispat tamamlanır. Bu durumda $x_0 \neq Tx_0$ alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisini $x_n = Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlayalım. Eğer $n_0 \in \mathbb{N}$

için $x_{n_0} = Tx_{n_0}$ ise x_{n_0} noktasının T nin bir sabit noktası olduğu açıktır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olarak kabul edelim. $x_0 \preccurlyeq Tx_0$ ve T azalmayan olduğundan

$$x_0 \preccurlyeq Tx_0 = x_1 \preccurlyeq Tx_1 = x_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq Tx_{n-1} = x_n \preccurlyeq Tx_n \preccurlyeq \cdots$$

elde edilir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n-1} \preccurlyeq x_n$ olduğundan teoremin büzülme şartı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&p(x_n, x_{n+1}) = p(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\leq k[p(x_{n-1}, x_n) - p(x_{n-1}, x_{n-1})] + p(x_n, x_n) + L \min \ \{p^w(x_n, Tx_{n-1}), p^w(x_{n-1}, Tx_n)\} \\
&= k[p(x_{n-1}, x_n) - p(x_{n-1}, x_{n-1})] + p(x_n, x_n)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n) &\leq k[p(x_{n-1}, x_n) - p(x_{n-1}, x_{n-1})] \\
&\leq k^2[p(x_{n-2}, x_{n-1}) - p(x_{n-2}, x_{n-2})] \\
&\quad\vdots \\
&\leq k^n[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + \cdots + p(x_{m-1}, x_m) - p(x_n, x_n) \\
&\leq k^n[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)] + k^{n+1}[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)] \\
&\quad + \cdots + k^{m-1}[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)] \\
&\leq \frac{k^n}{1-k}[p(x_0, x_1) - p(x_0, x_0)]
\end{aligned}$$

bulunur. Her $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \leq n < m$ için

$$p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda Lemma 3.1.5 den dolayı $\{x_n\}$, (X,p) uzayında bir Cauchy dizisidir. (X,p) tam zayıf kısmi metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(z,x_n) = p(z,z) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n)$$

olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Yani $\lim_{n\to\infty} p^w(z,x_n) = 0$ elde ederiz.

Şimdi ise $z \in X$ in bir sabit nokta olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$ dizisi azalmayan ve $x_n \to z$ olduğundan teoremdeki verilen şart gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preccurlyeq z$ olur. Bu durumda (p_4) ve (3.42) şartının kullanılmasıyla ve

$$\begin{aligned} p(z,Tz) &\le p(z,x_n) + p(x_n,Tz) - p(x_n,x_n) \\ &\le \begin{Bmatrix} p(z,x_n) + k[p(x_{n-1},z) - p(x_{n-1},x_{n-1})] + p(z,z) + \\ L\min\ \{p^w(z,x_{n-1}), p^w(x_{n-1},Tz)\} - p(x_n,x_n) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$p(z,Tz) \le p(z,z)$$

bulunur. Diğer taraftan ise

$$\begin{aligned} p(Tz,Tz) &\le k[p(z,z) - p(z,z)] + p(z,z) + L\min\ \{p^w(z,Tz), p^w(z,Tz)\} \\ &= p(z,z) + Lp^w(z,Tz) \\ &= p(z,z) + L[p(z,Tz) - \min\ \{p(z,z), p(Tz,Tz)\}] \end{aligned}$$

olur. Eğer $\min\ \{p(z,z), p(Tz,Tz)\} = p(z,z)$ ise

$p(Tz,Tz) \le p(z,z)$ dir. T orbital sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(Tz,x_n) = p(Tz,Tz)$$

ve

$p(z, Tz) \leq p(z, x_n) + p(Tz, x_n) - p(x_n, x_n)$

olur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$p(z, Tz) \leq p(Tz, Tz)$

elde edilir. Zayıf (p_2) özelliğinin kullanılmasıyla

$p(Tz, Tz) + p(z, z) \leq 2p(Tz, z)$

elde edilir. $p(z, Tz) \leq p(Tz, Tz)$ olduğundan $p(Tz, Tz) + p(z, z) \leq 2p(Tz, Tz)$ olup buradan $p(z, z) \leq p(Tz, Tz)$ bulunur. Böylece

$p(Tz, Tz) \leq \ p(z, z)$ ve $p(z, z) \leq p(Tz, Tz)$

olduğundan $p(z, z) = p(Tz, Tz)$ dir. Diğer taraftan ise bulunan bu eşitlik $p(Tz, Tz) + p(z, z) \leq 2p(Tz, z)$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$p(Tz, Tz) + p(Tz, Tz) \leq 2p(Tz, z)$

olup $p(Tz, Tz) \leq p(Tz, z)$ elde edilir. Ayrıca $p(z, Tz) \leq p(Tz, Tz)$ olduğundan $p(z, Tz) = p(Tz, Tz)$ bulunur. Yani $p(z, z) = p(Tz, Tz) = p(z, Tz)$ dir. Bu durumda T, X de bir sabit noktaya sahiptir.

3.2. Metrik Uzaylarda α-Geçişli Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri ve Uygulamaları

Bir önceki bölümde $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları ile ilgili Ψ, ¥, Φ sınıfları incelenmişti. Bu bölümde bu sınıflar dikkate alınarak metrik uzayda α-geçişli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri incelenecektir. Bu teoremler ispatlanırken farklı ispat metotları kullanılacaktır. Sonrasında teoremler ek şartlar altında incelenip sabit noktanın tekliği garanti edilecektir. Ayrıca teoremleri destekleyici örnekler verilecektir. Son olarak ise verilen bu teoremlerin sınır değer problemlerine uygulanmasına değinilecektir.

İlk olarak Samet tarafından verilen α-geçişlik tanımını ve bununla ilgili örnekleri verelim.

Tanım 3.2.1. X boş olmayan bir küme, $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ oluyorsa T dönüşümüne α-geçişli dönüşüm denir.

Örnek 3.1.1. $X = \mathbb{R}^+$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = \sqrt{x}$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} e^{x-y}, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü α-geçişlidir.

Örnek 3.2.2. $X = (0, \infty)$ olmak üzere $T: X \to X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = 2^x$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü α-geçişlidir.

Samet, Vetro ve Vetro, (c)-kıyaslama fonksiyonlarını ve α-geçişli dönüşümleri kullanarak $\alpha - \psi$-büzülme kavramını vermişlerdir. Ardından bu yeni tip büzülmeler için bazı sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir. Elde edilen sonuçlar literetürde sıralı metrik uzaylarda verilen sabit nokta teoremleri ile yakından ilgilidir.

Tanım 3.2.2. (X, d) bir metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm, $\psi \in \Phi$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y)d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) \tag{3.43}$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümüne bir $\alpha - \psi$-büzülme denir.

Tanım 3.2.2 de eğer $\alpha(x, y) = 1$ ve $\delta \in [0,1)$ olmak üzere $\psi(t) = \delta t$ şeklinde alınırsa her Banach büzülme dönüşümünün bir $\alpha - \psi$-büzülme olduğu görülür.

Teorem 3.2.1. (X, d) bir tam metrik uzay $T: X \to X$ α-geçişli sürekli bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\psi \in \Phi$ olmak üzere T nin $\alpha - \psi$-büzülme olduğunu kabul edelim. Eğer $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ varsa T bir sabit noktaya sahiptir.

Tanım 3.2.3. (X, τ) bir topolojik uzay, $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x$ iken $\alpha(x_n, x) \geq 1$ şartını sağlıyorsa *(B)* özelliğine (regülerlik) sahiptir denir.

Tanım 3.2.4. X boş olmayan bir küme, $T: X \to X$ bir dönüşüm ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in F(T) = \{x \in X: Tx = x\}$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ ve $\alpha(y, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ var ise α dönüşümüne *(H)* özelliğine sahiptir denir.

Teorem 3.2.2. (X, d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ fonksiyonu α-geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ olsun. Ayrıca $\psi \in \Phi$ ve

$$m(x, y) = \max \left\{d(x, y), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \psi(m(x,y))$$

şartı sağlansın. Eğer T sürekli veya α regüler ise T bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıda, α-geçişli dönüşümler için Berinde tip büzülme şartıyla sabit nokta teoremini ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 3.2.3. (X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ fonksiyonu α-geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olsun. Ayrıca $\psi \in \Phi, L \geq 0$ ve

$$M(x,y) = \max \left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$$

olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \psi(M(x,y)) + L \min \{d(y,Tx), d(x,Ty)\} \tag{3.44}$$

şartı sağlansın. Eğer T sürekli veya α regüler ise T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ noktası $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şeklide bir nokta olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^{\mathrm{n}}x_0 = Tx_{n-1}$ olacak şekilde X de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Eğer $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda x_{n_0}, T nin bir sabit noktası olur. Böylece ispat tamamlanır. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. T, α-geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olduğundan

$$\alpha(x_1, x_2) = \alpha(Tx_0, T^2x_0) \geq 1$$

olur. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ elde edilir. (3.44) eşitsizliğinde $x = x_n$ ve $y = x_{n+1}$ alarak

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_{n+2}) &= d(Tx_n,Tx_{n+1}) \\
&\le \psi(M(x_{n+1},x_n)) + L\min\ \{d(x_{n+1},Tx_n), d(x_n,Tx_{n+1})\ \} \\
&= \psi(M(x_{n+1},x_n)) + L\min\ \{d(x_{n+1},x_{n+1}), d(x_n,Tx_{n+1})\ \} \\
&= \psi(M(x_{n+1},x_n)) \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki burada

$$
\begin{aligned}
M(x_n,x_{n+1}) &= \max\ \left\{\begin{matrix} d(x_n,x_{n+1}), d(x_n,Tx_n), d(x_{n+1},Tx_{n+1}), \\ \frac{1}{2}[d(x_n,Tx_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx_n)] \end{matrix}\right\} \\
&= \max\ \left\{d(x_n,x_{n+1}), d(x_{n+1},x_{n+2}), \frac{1}{2}d(x_n,x_{n+2})\right\} \\
&= \max\ \{d(x_{n+1},x_{n+2}), d(x_n,x_{n+1})\}
\end{aligned}
$$

dir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d(x_{n+1},x_{n+2}) \ge d(x_n,x_{n+1})$ ise (3.45) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1},x_{n+2}) &\le \psi(M(x_n,x_{n+1})) \\
&= \psi(\max\ \{d(x_n,x_{n+1}), d(x_{n+1},x_{n+2})\}) \\
&= \psi(d(x_{n+1},x_{n+2})) \\
&< d(x_{n+1},x_{n+2})
\end{aligned}
$$

olur ki bu bir çelişkidir. Buradan her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $d(x_{n+1},x_{n+2}) < d(x_n,x_{n+1})$ dir. Bu durumda (3.45) eşitsizliğinden

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \le \psi(d(x_n,x_{n+1}))$$

olur ve buradan her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \le \psi^{n+1}(d(x_0,x_1)) \qquad (3.46)$$

elde edilir. Şimdi her $m,n \in \mathbb{N}, m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \textstyle\sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \textstyle\sum_{k=n}^{m-1} \psi^k(d(x_0, x_1)) \\ &\leq \textstyle\sum_{k=n}^{\infty} \psi^k(d(x_0, x_1)) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(d(x_0, x_1))$ serisinin yakınsaklığından $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisi olur. X tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır.

Eğer T sürekli ise

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = Tz$$

elde edilir ki bu T nin sabit noktasının var olduğunu gösterir.

Eğer α regüler ise her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ eşitsizliği ve $n \to \infty$ için $x_n \to x$ olduğu göz önüne alınarak

$$\alpha(x_n, z) \geq 1$$

elde edilir. (3.44) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Tz) &= d(Tx_n, Tz) \\ &\leq \psi(M(x_n, z)) + L \min \ \{d(z, Tx_n), d(x_n, Tz)\} \\ &= \psi(M(x_n, z)) + L \min \ \{d(z, x_{n+1}), d(x_n, Tz)\} \end{aligned} \tag{3.47}$$

elde edilir ki burada

$$\begin{aligned} M(x_n, z) &= \max \begin{Bmatrix} d(x_n, z), d(x_n, Tx_n), d(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[d(x_n, Tz) + d(z, Tx_n)] \end{Bmatrix} \\ &= \max \begin{Bmatrix} d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), d(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[d(x_n, Tz) + d(z, x_{n+1})] \end{Bmatrix} \\ &\leq \max \begin{Bmatrix} d(x_n, z), d(x_n, x_{n+1}), d(z, Tz), \\ \frac{1}{2}[d(x_n, z) + d(z, Tz) + d(z, x_{n+1})] \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Şimdi $d(z,Tz) > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.45) eşitsizliğini ve $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğunu göz önüne alınırsa her $n \geq n_0$ için $d(x_n,z) < \frac{d(z,Tz)}{2}$ ve $d(x_n,x_{n+1}) < \frac{d(z,Tz)}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} M(x_n,z) &\leq \max \left\{ \begin{array}{c} d(x_n,z), d(x_n,x_{n+1}), d(z,Tz), \\ \frac{1}{2}[d(x_n,z) + d(z,Tz) + d(z,x_{n+1})] \end{array} \right\} \\ &\leq d(z,Tz) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi (3.47) eşitsizliğinden her $n \geq n_0$ için

$$d(x_{n+1},Tz) \leq \psi\big(d(z,Tz)\big) + L \min \ \{d(z,x_{n+1}), d(x_n,Tz)\}$$

elde edilir. Son eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$d(z,Tz) \leq \psi(d(z,Tz)) < d(z,Tz)$$

olur ki bu çelişkidir. Bu durumda $d(z,Tz) = 0$ olup T nin bir sabit noktası vardır.

Eğer Teorem 3.2.3 de $L = 0$ alınırsa Teorem 3.2.1 in bir genelleştirmesi elde edilir.

Teorem 3.2.4. (X,d) bir tam metrik uzay $T: X \to X$ fonksiyonu α-geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0,Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olsun. Ayrıca $\psi \in \Psi$ ve $M(x,y)$, Teorem 3.2.3 deki gibi olmak üzere her $x,y \in X$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \psi(M(x,y)) \tag{3.48}$$

şartı sağlansın. Eğer T sürekli veya α regüler ise T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ noktası $\alpha(x_0,Tx_0) \geq 1$ olacak şeklide bir nokta olsun. Teorem 3.2.3 ün ispatında olduğu gibi $\{x_n\}$ dizisini tanımlayalım. Eğer ardışık terimler farklı ise

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \psi^{n+1}(d(x_0,x_1))$$

elde edilir. Aksi takdirde T bir sabit noktaya sahiptir.

Şimdi $\{x_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. (3.46) eşitsizliği dikkate alındığında $d\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big) < \varepsilon - \psi(\varepsilon)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
M\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big) &= \max \begin{Bmatrix} d\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big), d\big(x_{n_0}, Tx_{n_0}\big), d\big(x_{n_0+1}, Tx_{n_0+1}\big), \\ \frac{1}{2}\big[d\big(x_{n_0}, Tx_{n_0+1}\big) + d\big(x_{n_0+1}, Tx_{n_0}\big)\big] \end{Bmatrix} \\
&= \max \ \big\{d\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big), d\big(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}\big)\big\} \\
&< \max \ \{\varepsilon - \psi(\varepsilon), \psi(\varepsilon - \psi(\varepsilon))\} \\
&= \varepsilon - \psi(\varepsilon)
\end{aligned}$$

ve teoremde verilen büzülme şartından

$$\begin{aligned}
d\big(x_{n_0}, x_{n_0+2}\big) &\le d\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big) + d\big(x_{n_0+1}, x_{n_0+2}\big) \\
&< \varepsilon - \psi(\varepsilon) + d(Tx_{n_0}, Tx_{n_0+1}) \\
&\le \varepsilon - \psi(\varepsilon) + \psi\Big(M\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big)\Big) \\
&\le \varepsilon - \psi(\varepsilon) - \psi\big(\varepsilon - \psi(\varepsilon)\big) \\
&\le \varepsilon - \psi(\varepsilon) + \psi(\varepsilon) = \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine büzülme şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}
d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) &\le d\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big) + d\big(x_{n_0+1}, x_{n_0+3}\big) \\
&< \varepsilon - \psi(\varepsilon) + d(Tx_{n_0}, Tx_{n_0+2}) \\
&\le \varepsilon - \psi(\varepsilon) + \psi\Big(M\big(x_{n_0}, x_{n_0+2}\big)\Big)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
M\big(x_{n_0}, x_{n_0+2}\big) &= \max \begin{Bmatrix} d\big(x_{n_0}, x_{n_0+2}\big), d\big(x_{n_0}, Tx_{n_0}\big), d\big(x_{n_0+2}, Tx_{n_0+2}\big), \\ \frac{1}{2}\big[d\big(x_{n_0}, Tx_{n_0+2}\big) + d\big(x_{n_0+2}, Tx_{n_0}\big)\big] \end{Bmatrix} \\
&= \max \begin{Bmatrix} d\big(x_{n_0}, x_{n_0+2}\big), d\big(x_{n_0}, x_{n_0+1}\big), d\big(x_{n_0+2}, x_{n_0+3}\big), \\ \frac{1}{2}\big[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + d\big(x_{n_0+2}, x_{n_0+1}\big)\big] \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\leq \max \begin{Bmatrix} \varepsilon, \varepsilon - \psi(\varepsilon), \psi^2\big(\varepsilon - \psi(\varepsilon)\big), \\ \frac{1}{2}\left[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + \psi\big(\varepsilon - \psi(\varepsilon)\big)\right] \end{Bmatrix}$$

$$\leq \max \left\{\varepsilon, \frac{1}{2}\left[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + \psi(\varepsilon)\right]\right\}$$

dir. Eğer $\varepsilon \leq \frac{1}{2}\left[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + \psi(\varepsilon)\right]$ ise (3.49) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) &< \varepsilon - \psi(\varepsilon) + \psi\left(\frac{1}{2}\left[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + \psi(\varepsilon)\right]\right) \\ &< \varepsilon - \psi(\varepsilon) + \frac{1}{2}\left[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + \psi(\varepsilon)\right] \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{2} d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) < \varepsilon - \frac{\psi(\varepsilon)}{2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{2}\left[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + \psi(\varepsilon)\right] < \varepsilon$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $\varepsilon > \frac{1}{2}\left[d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) + \psi(\varepsilon)\right]$ olup (3.49) eşitsizliğinden

$$d\big(x_{n_0}, x_{n_0+3}\big) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d\big(x_{n_0}, x_{n_0+k}\big) < \varepsilon$$

elde edilir. $m > n > n_0$ olacak şekildeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d\big(x_n, x_{n_0}\big) + d(x_{n_0}, x_m) \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

olup $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir. Teoremin kalan kısmının ispatı Teorem 3.2.3 de olduğu gibi yapılabilir.

Aşağıdaki teoremde Teorem 3.2.4 den farklı olarak ψ-fonksiyonu ¥ sınıfından alınmıştır.

Teorem 3.2.5. (X, d) bir tam metrik uzay $T: X \to X$ fonksiyonu α-geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olsun. $\psi \in$ ¥ ve $M(x, y)$, Teorem 3.2 3 deki gibi olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x, y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \psi(M(x, y)) \tag{3.50}$$

şartı sağlansın. Eğer T sürekli veya α regüler ise T bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ noktası $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şeklide bir nokta olsun. Teorem 3.2.3 ün ispatında olduğu gibi X de bir $\{x_n\}$ dizisini tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olsun. $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ olarak alalım. T, α-geçişli bir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq \psi(M(x_n, x_{n+1})) \\ &= \psi(\max\ \{d_n, d_{n+1}\}) \end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilebilir. Böylece her $n \geq 0$ tam sayısı için (3.51) eşitsizliğinden

$$d_{n+1} \leq \psi(d_n) < d_n \tag{3.52}$$

elde edilir. Böylece $\{d_n\}$ dizisi pozitif sayıların azalan ve alttan sınırlı bir dizisidir. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} d_n = \lambda$ olacak şekilde $\lambda \geq 0$ sayısı vardır. Şimdi $\lambda > 0$ olduğunu kabul edelim. ψ-nin üstten yarı sürekli bir fonksiyon olduğunu kullanarak (3.52) eşitsizliğinden

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} d_{n+1} \le \limsup_{n\to\infty} \psi(d_n) \le \psi(\lambda) < \lambda$$

olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $\lambda = 0$ olmak zorundadır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \tag{3.53}$$

dır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için aksini kabul edelim yani $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisi olmasın. Bu durumda en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $m_k > n_k \ge k$ olduğunda

$$d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \ge \varepsilon \tag{3.54}$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{m_k}\}$ ve $\{x_{n_k}\}$ alt dizileri vardır. m_k sayısını (3.54) eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı olarak seçelim. Böylece

$$d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k}\right) < \varepsilon$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden

$$\varepsilon \le d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \le d\left(x_{m_k}, x_{m_k-1}\right) + d\left(x_{m_k-1}, x_{n_k}\right) < d_{m_k} + \varepsilon$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınıp (3.53) eşitliği kullanılırsa

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) = \varepsilon \tag{3.55}$$

elde edilir. Her $k \ge k_0$ için $d_{m_k} < \varepsilon$ ve $d_{n_k} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda her $k \ge k_0$ için

$$d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \le M\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \le d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) + \frac{1}{2}\left(d_{n_k} + d_{m_k}\right) \tag{3.56}$$

olur. (3.53) ve (3.55) eşitlikleri kullanılarak (3.56) eşitsizliğinden $k \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} M\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) = \varepsilon$$

bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $M\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \geq \varepsilon$ ve ψ-üstten yarı sürekli olduğundan

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty} \psi(M(x_{m_k}, x_{n_k})) \leq \psi(\varepsilon)$$

dır. Diğer taraftan her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq d\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right) \\
&\leq d\left(x_{m_k}, x_{m_k+1}\right) + d\left(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}\right) + d\left(x_{n_k+1}, x_{n_k}\right) \\
&= d_{m_k} + d\left(Tx_{m_k}, Tx_{n_k}\right) + d_{n_k} \\
&\leq d_{m_k} + \psi\left(M\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right)\right) + d_{n_k}
\end{aligned}$$

olup

$$\varepsilon \leq \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \psi\left(M\left(x_{m_k}, x_{n_k}\right)\right) \leq \psi(\varepsilon) < \varepsilon$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir. T sürekli ise

$$Tz = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_{n+1} = z$$

elde edilir ki buradan z, T nin bir sabit noktadır.

Diğer taraftan α regüler ve $d(z, Tz) > 0$ olsun. Bu durumda

$$d(z, Tz) \leq M(x_n, z)$$

ve ψ nin alttan yarı sürekliliğinden

$\limsup_{n\to\infty}\psi(M(x_n,z)) \leq \psi(d(z,Tz))$

olur. α regüler olduğundan her $n \geq 0$ için $\alpha(x_n,z) \geq 1$ olur. (3.50) eşitsizliğinden

$d(x_{n+1},Tz) = d(Tx_n,Tz) \leq \psi(M(x_n,z))$

elde edilir ve limit sup alınırsa

$$\begin{aligned} d(z,Tz) &\leq \limsup_{n\to\infty}\psi(M(x_{n-1},z)) \\ &\leq \psi(d(z,Tz)) \\ &< d(z,Tz) \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $d(z,Tz) = 0$ olup T bir sabit noktaya sahiptir.

Yukarıda verilen teoremlerde T nin sabit noktasının tekliği garanti değildir Ancak, α nın (H) özelliğini sağladığı kabul edilirse bazı durumlarda T nin sabit noktasının tekliği garanti edilebilir.

Teorem 3.2.6. Teorem 3.2.4 in bütün şartları sağlansın ve α kümesi (H) özelliğine sahip olsun. Bu durumda T nin sabit noktası tektir.

İspat: z ve w, T nin farklı iki sabit noktası olsun. α nın (H) özelliği göz önüne alınarak $\alpha(z,u) \geq 1$ ve $\alpha(w,u) \geq 1$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. T, α-geçişli bir dönüşüm olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$\alpha(z,T^{n}u) \geq 1$ ve $\alpha(w,T^{n}u) \geq 1$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} d(z,T^{n+1}u) &= d(Tz,T^{n+1}u) \\ &\leq \psi(M(z,T^{n}u)) \\ &\leq \psi(\max\ \{d(z,T^{n}u), d(z,T^{n+1}u)\}) \end{aligned} \tag{3.57}$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın her n için $d(z, T^{n+1}u) > 0$ olduğunu kabul edelim. (3.57) eşitsizliğinden

$$d(z, T^{n+1}u) \leq \psi(d(z, T^{n}u)) \leq \cdots \leq \psi^{n}\big(d(z,u)\big)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa $T^{n}u \to z$ elde edilir. Benzer olarak $T^{n}u \to w$ olarak bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda T nin sabit noktası tektir.

Teorem 3.2.3, (H) şartıyla ile kabul edilse dahi sabit noktanın tekliğini garanti edilmez.

Örnek 3.2.2. $X = [0,1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T: X \to X$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonları

$$T(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, \frac{1}{4}) \\ 0, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

ve

$$\alpha(x,y) \geq 1$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T dönüşümü α-geçişli bir dönüşüm ve α regülerdir. Ayrıca $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ vardır. (3.44) eşitsizliğinin $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ve $L = 10$ için sağlandığını gösterelim.

Durum1**.** $x, y \in [0, \frac{1}{4})$ ise

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |x^2 - y^2| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - y| \end{aligned}$$

$$\leq \psi(M(x,y)) + L \min \{d(y,Tx), d(x,Ty)\}$$

olur.

Durum 2. $x, y \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ ise $d(Tx,Ty) = 0$ olur.

Durum 3. $x, y \in [\frac{1}{3}, 1)$ ise $d(Tx,Ty) = 0$ olur.

Durum 4. $x \in [0, \frac{1}{4})$ ve $y \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ ise

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= x^2 \\ &\leq \min \{x, y - x^2\} \\ &\leq \psi(M(x,y)) + L \min \{d(y,Tx), d(x,Ty)\} \end{aligned}$$

olur.

Durum 5. $x \in [0, \frac{1}{4})$ ve $y \in [\frac{1}{3}, 1]$ ise

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= 1 - x^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(y - x) + 10 \min \{1 - x, y - x^2\} \\ &\leq \psi(M(x,y)) + L \min \{d(y,Tx), d(x,Ty)\} \end{aligned}$$

olur.

Durum 6. $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ ve $y \in [\frac{1}{3}, 1]$ ise

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= 1 \\ &\leq \frac{1}{2}(y - x) + 10 \min \{1 - x, y\} \\ &\leq \psi(M(x,y)) + L \min \{d(y,Tx), d(x,Ty)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda Teorem 3.2.3 in bütün şartları sağlanır ve T bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\alpha, (H)$ özelliğini sağlanmasına rağmen T nin sabit noktası tek değildir.

Aşağıdaki teoremde sabit noktanın tekliği garanti edilmiştir.

Teorem 3.2.7. Teorem 3.2.3 ün koşullarının yanı sıra $\alpha, (H)$ özelliğine sahip olsun Ayrıca $\psi_1 \in \Psi, L_1 \geq 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \psi_1(M(x,y)) + L_1 \min \{d(x,Tx), d(y,Ty)\} \qquad (3.58)$$

şartı sağlansın. Bu durumda T nin sabit noktası tektir.

İspat: z ve w, T nin farklı iki sabit noktası olsun. $\alpha, (H)$ özelliğine sahip olduğundan $\alpha(z,u) \geq 1$ ve $\alpha(w,u) \geq 1$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. T, α-geçişli bir dönüşüm olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(z, T^{n}u) \geq 1 \text{ ve } \alpha(w, T^{n}u) \geq 1$$

elde edilir. Böylece (3.58) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(z, T^{n+1}u) &= d(Tz, T^{n+1}u) \\ &\leq \psi_1(M(z, T^n u)) + L_1 \min \{d(z,Tz), d(T^n u, T^{n+1}u)\} \\ &\leq \psi_1(\max \{d(z, T^{n}u), d(z, T^{n+1}u)\}) \end{aligned}$$

elde edilir. Genelliği bozmaksızın her n için $d(z, T^{n+1}u) > 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$d(z, T^{n+1}u) \leq \psi_1(d(z, T^{n}u)) \leq \cdots \leq \psi_1{}^{n}\big(d(z,u)\big)$$

elde edilir. Eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $T^{n}u \to z$ elde edilir. Benzer olarak $T^{n}u \to w$ olarak bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda T nin sabit noktası tektir.

Teorem 3.2.3, Teorem 3.2.4, Teorem 3.2.5, Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.7 dikkate alındığında aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 3.2.1. (X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ fonksiyonu α-geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olsun. Ayrıca $\psi \in \Phi$ ve $L \geq 0$ ve her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \psi\big(d(x,y)\big) + L \min\ \{d(y,Tx), d(x,Ty)\} \tag{3.59}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T sürekli veya α regüler ise T, bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.2. (X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\psi \in \Phi$, $L \geq 0$ ve $M(x,y)$, Teorem 3.2.3 deki gibi olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \psi\big(M(x,y)\big) + L \min\ \{d(y,Tx), d(x,Ty)\} \tag{3.60}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T, bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.3. (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\psi \in \Phi$ ve $L \geq 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \leq \psi\big(d(x,y)\big) + L \min\ \{d(y,Tx), d(x,Ty)\} \tag{3.61}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T, bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.4. (X,d) bir tam metrik uzay, T, α-geçişli bir dönüşüm ve $\alpha(x_0, Tx_0) \geq 1$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var olsun. Ayrıca $\psi \in \Psi$($\psi \in$ ¥) ve $L \geq 0$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Rightarrow d(Tx,Ty) \leq \psi\big(d(x,y)\big) \tag{3.62}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T sürekli veya α regüler ise T, bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, eğer her $x, y \in F(T) = \{x \in X : Tx = x\}$ için $\alpha(x, z) \geq 1$ ve $\alpha(y, z) \geq 1$ olacak şekilde bir $z \in X$ var ise T, bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.5. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ fonksiyon olsun. Ayrıca $\psi \in \Psi(\ \psi \in ¥)$ ve $M(x, y)$, Teorem 3.2.3 deki gibi olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi\big(M(x, y)\big) \tag{3.63}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T, bir tek sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.6. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\psi \in \Psi(\ \psi \in ¥)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \psi\big(d(x, y)\big) \tag{3.64}$$

şartı sağlansın. Bu durumda T, bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 3.2.3. $X = [0,1]$ kümesini alışılmış metrik ile göz önüne alalım. $T: X \to X$ ve $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın. Her $x, y \in X$ için

$$T(x) = \begin{cases} x^2, \ x \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{5x-1}{4}, \ x \in (\frac{1}{4}, 1] \end{cases}$$

ve

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, \ x, y \in [0, \frac{1}{4}] \cup \{1\} \\ 0, \ diğer\ durumlar \end{cases}$$

olsun. T, α-geçişli ve sürekli bir dönüşümdür. Ayrıca $\alpha(1, T1) \geq 1$ dir. Fakat $\alpha(1, \frac{1}{4}) \geq 1$ olmasına rağmen

$d(T1, T\frac{1}{4}) = \frac{15}{16} \leq \psi(\frac{27}{32}) = \psi(M(x,y))$

olacak şekilde bir $\psi \in \Phi$ yoktur. Bu durumda Teorem 3.2.1 bu örnek için uygulanamaz. Şimdi $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ve $L = \frac{4}{3}$ için Teorem 3.2.3 deki (3.44) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $\alpha(x,y) \geq 1$ ise $x, y \in [0, \frac{1}{4}] \cup \{1\}$ olduğu açıktır. Bu durumda aşağıdaki durumları göz önüne alalım.

Durum 1. $x, y \in [0, \frac{1}{4}]$ ise

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |x^2 - y^2| \leq \frac{1}{2}|x - y| \\ &\leq \psi(M(x,y)) + L \min \{d(x, Ty), d(y, Tx)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 2. $x \in [0, \frac{1}{4}]$ ve $y = 1$ ise

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= 1 - x^2 \leq \frac{1}{2}(1 - x) + 1 \\ &\leq \psi(M(x,y)) + L \min \{d(x, Ty), d(y, Tx)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.3 in tüm şartları sağlandığından T bir sabit noktaya sahiptir.

Son olarak verdiğimiz teoremlerin uygulamaları ile ilgileneceğiz. Sonuç 3.2.4 kullanılarak aşağıda verilen dördüncü basamaktan lineer olmayan iki bilinmeyenli sınır değer problemini için bir varlık ve tekil teoremleri elde edeceğiz.

$$\begin{aligned} &y^{(4)} = f(t, y(t)), t \in [0,1] \\ &y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Sınır değer problemini göz önüne alalım. Bu problem her iki ucu kenetlenmiş elastik bir kirişin eğilmesini açıklar. J. Caballero, J. Harjani ve K. Sadarangani, Geraghty sabit nokta teoreminin sıralı bir versiyonunu kullanarak bu sınır değer probleminin negatif olmayan çözümleri için bir varlık teoremi vermiştir. Bu sınırı değer problemi

$$G(t,s) = \frac{1}{6}\begin{cases} t^2(1-s)^2[(s-t)+2(1-t)s], & 0\le t\le s\le 1 \\ s^2(1-t)^2[(t-s)+2(1-s)t], & 0\le s\le t\le 1 \end{cases} \tag{3.66}$$

Green fonksiyonu ile birlikte

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,y(s))ds \tag{3.67}$$

İntegral denklemine denktir. Dikkat edilecek olursa, $G(t,s)$ fonksiyonu $[0,1]\times[0,1]$ üzerinde süreklidir ve her $t,s\in[0,1]$ için $G(0,s)=G(1,s)=0$, $G(t,s)\ge 0$ ve $\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)ds = \frac{1}{384}$ dür.

Her $x,y\in C[0,1]$ için $d_\infty(x,y)=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(C[0,1],d_\infty)$ bir Banach uzaydır. $C[0,1]$ üzerindeki T operatörünü de $t\in[0,1]$ için

$$Tx(t)=\int_0^1 G(t,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds$$

şeklinde tanımlayalım.

Bu tanımlamalardan yararlanarak aşağıdaki teoremleri ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.2.8. Aşağıda verilen şartlar altında (3.65) problemi bir çözüme sahiptir.
A) $f:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlıdır,
B) Aşağıdaki şartı sağlayan $\psi\in\Psi$ ve $\theta: C[0,1]\times C[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonları vardır.

$\theta(x,y)\ge 0$ ise $0\le f\big(s,x(s)\big)-f\big(s,y(s)\big)\le 384\psi(|x(s)-y(s)|)$,

$C)$ $\theta(x,y) \geq 0$ ise $\theta(Tx,Ty) \geq 0$ dır,

$D)$ $\theta(x_0,Tx_0) \geq 0$ olacak şekilde $x_0 \in C[0,1]$ vardır,

$E)$ $C[0,1]$ de her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\theta(x_n,x_{n+1}) \geq 0$ ve $x_n \to x$ olacak şekildeki her $\{x_n\}$ dizisi için $\theta(x_n,x) \geq 0$ dır.

İspat: $X = C[0,1]$ kümesini d_∞ metriği ile göz önüne alalım. İlk olarak T operatörü için $T: X \to X$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in X$ ve $t, t' \in [0,1]$ olsun. f fonksiyonu sınırlı olduğundan $\sup_{s\in[0,1]} f\big(s,x(s)\big) \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Şimdi G fonksiyonu sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Tx(t')| &= \left|\int_0^1 G(t,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds - \int_0^1 G(t',s)f\big(s,x(s)\big)\,ds\right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t,s) - G(t',s)|\left|f\big(s,x(s)\big)\right|\,ds \\
&\leq \sup_{s\in[0,1]}|G(t,s) - G(t',s)| \int_0^1 \left|f\big(s,x(s)\big)\right|\,ds \\
&\leq M \sup_{s\in[0,1]}|G(t,s) - G(t',s)| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

$|t - t'| \longrightarrow 0$ için elde edilir. $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & \theta(x,y) \geq 0 \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (C) şartından T, α-geçişli bir dönüşümdür. Ayrıca $\alpha(x,y) \geq 1$ olacak şekildeki $x, y \in X$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds - \int_0^1 G(t,s)f\big(s,y(s)\big)\,ds\right| \\
&\leq \int_0^1 G(t,s)\left|f\big(s,x(s)\big) - f\big(s,y(s)\big)\right|\,ds \\
&\leq \int_0^1 G(t,s)384\psi(|x(s) - y(s)|)\,ds \\
&\leq 384\psi\big(d_\infty(x,y)\big)\int_0^1 G(t,s)\,ds \\
&\leq \psi\big(d_\infty(x,y)\big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\alpha(x,y) \geq 1 \Longrightarrow d_\infty(Tx,Ty) \leq \psi\big(d_\infty(x,y)\big)$$

olur. Son olarak (E) şartından, α regülerdir. Bu durumda Sonuç 3.2.4 ün sabit noktanın varlığını göstermek için yeterli olan tüm şartları sağlanır ve dolayısıyla T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Böylece (3.65) probleminin $C[0,1]$ de bir çözümü vardır.

Aşağıda (3.65) problemi için bir varlık ve teklik teoremi verilecektir.

$C[0,1]$ üzerinde $t \in [0,1]$ için $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t)$ şeklinde tanımlı sıralamayı göz önüne alalım.

Teorem 3.2.9. Aşağıda verilen şartlar altında (3.65) problemi bir tek çözüme sahiptir.
$F)$ $f: [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı, ikinci değişkenine göre azalmayan ve $t \in [0,1]$ için $f(t,0) \geq 0$,
$G)$ Aşağıdaki şartı sağlayan $\psi \in \Psi$ fonksiyonu vardır.

$x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki her $x,y \in C[0,1]$ ve $s \in [0,1]$ için

$$0 \leq f\big(s,y(s)\big) - f\big(s,x(s)\big) \leq 384\psi(|x(s) - y(s)|).$$

İspat: Teorem 3.2.8 de olduğu gibi T operatörü için $T: X \to X$ olduğunu gösterebiliriz. $\alpha: X \times X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & x \preccurlyeq y \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda eğer $\alpha(x,y) \geq 1$ ise $x \preccurlyeq y$ ve böylece her $t \in [0,1]$ için $x(t) \leq y(t)$ olur. f, ikinci değişkenine göre azalmayan olduğundan her $t \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
Tx(t) &= \int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big)\, ds \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) f\big(s, y(s)\big)\, ds \\
&= Ty(t)
\end{aligned}
$$

dır. Buradan $Tx \preccurlyeq Ty$ ve $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$ elde edilir. $\alpha(x, y) \geq 1$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$
\begin{aligned}
|Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big)\, ds - \int_0^1 G(t,s) f\big(s, y(s)\big)\, ds \right| \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) \big| f\big(s, x(s)\big) - f\big(s, y(s)\big) \big|\, ds \\
&= \int_0^1 G(t,s) \big| f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, x(s)\big) \big|\, ds \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) 384 \psi(|x(s) - y(s)|)\, ds \\
&\leq 384 \psi\big(d_\infty(x, y)\big) \int_0^1 G(t,s)\, ds \\
&\leq \psi\big(d_\infty(x, y)\big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\alpha(x, y) \geq 1 \Longrightarrow d_\infty(Tx, Ty) \leq \psi\big(d_\infty(x, y)\big)
$$

olur. Ayrıca $f(s, 0) \geq 0$ olduğundan $0 \leq \int_0^1 G(t,s) f(s, 0)\, ds = T0$ ve böylece $\alpha(0, T0) \geq 1$ elde edilir.

X kümesinde her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x_n \to x$ alalım. Bu durumda $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$ ve böylece her $t \in [0,1]$ için $x_n(t) \leq x_{n+1}(t)$ olur. Bu durumda her $t \in [0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n(t) \leq x(t)$ olur ki her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n \preccurlyeq x$ ve buradan $\alpha(x_n, x) \geq 1$ elde edilir. Böylece α regülerdir. Sonuç 3.2.4 ün tüm şartları sağlanır ve dolayısıyla T, X de bir sabit noktaya sahiptir. Böylece (3.65) probleminin $C[0,1]$ de bir çözümü vardır.

Son olarak x ve y (3.65) probleminin iki ayrı çözümü olsun. Bu durumda $u = \max \ \{x, y\} \in C[0,1]$ için $x \preccurlyeq u$ ve $y \preccurlyeq u$ dir. Bu durumda $\alpha(x, u) \geq 1$ ve

$\alpha(y,u) \geq 1$ elde edilir. Bu durumda Sonuç 3.2.4 ün tüm şartları sağlanır ve dolayısıyla T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 3.2.4. $\gamma \geq 0$ ve $0 \leq \beta \leq 191$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &y^{(4)}=\gamma t+(1+t^2)\arctan\big(\beta y(t)\big), t\in[0,1] \\ &\qquad y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0 \end{aligned} \tag{3.68}$$

dördüncü dereceden iki bilinmeyenli sınır değer problemini göz önüne alalım.. Bu durumda $f(t,y)=\gamma t+(1+t^2)\arctan(\beta y)$ diyelim. Bu durumda $f\colon[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ sınırlı ve ikinci değişkenine göre azalmayandır. Ayrıca her $t\in[0,1]$ için $f(t,0)=\gamma t\geq 0$ olur. $x \preccurlyeq y$ olacak şekildeki $x,y\in C[0,1]$ ve $s\in[0,1]$ için $\psi(t)=\frac{191}{192}t$ olduğunda

$$\begin{aligned} f\big(s,x(s)\big)-f\big(s,y(s)\big) &= (1+s^2)\big[\arctan\big(\beta y(s)\big)-\arctan\big(\beta x(s)\big)\big] \\ &\leq (1+s^2)\arctan(\beta[y(s)-x(s)]) \\ &\leq (1+s^2)\beta[y(s)-x(s)] \\ &\leq 2\beta[y(s)-x(s)] \\ &\leq 382[y(s)-x(s)] \\ &= 384\psi[y(s)-x(s)] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.2.9 nin (F) ve (G) şartları sağlanır. Bu durumda (3.68) denklemiyle verilen sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır.

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının ilk kısımda zayıf kısmi metrik kavramı üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Bu kavramın kısmi metrik kavramından daha da genel olduğu örneklerle gösterilmiştir. Ayrıca, temel sabit nokta teoremleri olan Banach, Kannan, Chatterjea, Hardy-Rogers ve Berinde tip dönüşümler için sabit nokta teoremleri zayıf kısmi metrik uzayda ifade edilip, ispatları detaylı bir şekilde verilmiştir. Verilen örnekler ile zayıf kısmi metrik uzayda yapılan sabit nokta teoremleri ile kısmi metrik uzayda yapılan sabit nokta teoremleri karşılaştırılmıştır. İkinci kısımda ise metrik uzayda α-geçişli dönüşümler için elde edilen sabit nokta teoremlerinin farklı metotlarla ispatları yapılmıştır. Ayrıca detaylı örneklere yer verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] S. G. Matthews, Partial metric topology, Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci., 728, 183-197, 1994.

[2] T. Abdeljawad, E. Karapinar, K. Tas, Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces, Appl. Math. Lett., 24, 1900-1904, 2011.

[3] Ö. Acar, İ. Altun and S. Romaguera, Caristi's type mappings in complete partial metric space, Fixed Point Theory, 14, 3-10, 2013.

[4] İ. Altun and Ö. Acar, Fixed point theorems for weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces, Topology and its Applications, 159, 2642-2648, 2012.

[5] İ. Altun, F. Sola and H. Simsek, Generalized contractions on partial metric spaces, Topology and its Applications, 157, 2778-2785, 2010.

[6] K.P. Chi, E. Karapınar and T.D. Thanh, A generalized contraction principle in partial metric space, Mathematical and Computer Modelling, 55, 16731681, 2012.

[7] M. H. Escardo, Pcf Extended with real numbers, Theoretical Computer Sciences, 162, 79-115, 1996.

[8] D. Ilic, V. Pavlovic and V. Rakocevic, Some new extensions of Banach's contraction principle to partial metric space, Appl. Math. Lett., 24, 1326-1330, 2011.

[9] S. Oltra and O. Valero, Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, Rend. Istid. Math. Univ. Trieste, 36, 17-26, 2004.

[10] S. Romaguera, Fixed point theorems for generalized contractions on partial metric spaces, Topology and its Applications, 218, 2398-2406, 2011.

[11] S. Romaguera, Matkowski's type theorems for generalized contractions on ordered partial metric spaces, Appl. General Topology, 12, 213-220, 2011.

[12] O. Valero, On Banach fixed point theorems for partial metric spaces, Appl. General Topology, 6, 229-240, 2005.

[13] R. Heckmann, Approximation of metric spaces by partial metric spaces, Appl. Categ. Structures 7, 71-83, 1999.

[14] G. E. Hardy, T. D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 16, 201-206, 1973.

[15] İ. Altun and G. Durmaz, Weak partial metric spaces and some fixed point results, Applied General Topology, 13, 179-191, 2012.

[16] V. Berinde, Iterative approximation of fixed points, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[17] G. Durmaz, Ö. Acar and İ. Altun, Some fixed point results on weak partial metric spaces, Filomat, 27, 317-326, 2013.

[18] G. Durmaz, İ. Altun and Ö. Acar, Two general fixed point results on weak partial metric space, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, 5, 27-35, 2014.

[19] V. Berinde, Approximating fixed points of weak φ-contractions using the Picard iteration, Fixed Point Theory, 4, 131-147, 2003.

[20] Berinde, On the approximation of fixed points of weak contractive mappings. Carpathian J. Math., 19, 7-22, 2003.

[21] V. Berinde, Some remarks on a fixed point theorem for Ćirić-type almost contractions, Carpathian J. Math., 25, 157-162, 2009.

[22] V. Berinde, General constructive fixed point theorems for Ćirić-type almost contractions in metric spaces, Carpathian Journal of Mathematics, 24, 10-19, 2008.

[23] M. Păcurar, Sequences of almost contractions and fixed points, Carpathian Journal of Mathematics, 24, 101-109, 2008.

[24] Ö. Acar, İ. Altun and G. Durmaz, "A fixed point theorem for new type contractions on weak partial metric spaces",Vietnam J. Math., DOI 1007/s10013-014-0112-0.

[25] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro, Fixed point theorems for $\alpha-\psi$-contractive type mappings, Nonlinear Analysis 75, 2154-2165, 2012.

[26] H. Nawab, E. Karapınar, P. Salimi and F. Akbar, α-admissible mappings and related fixed point theorems, Journal of Inequalities and Applications 114, 11 pages, 2013.

[27] P. Salimi, A. Latif and N. Hussain, Modified $\alpha-\psi$-contractive mappings with applications, Fixed Point Theory and Applications, 151, 2013.

[28] M. Pei and S. K. Chang, Monotone iterative technique and symmetric positive solutions for fourth-order boundary value problems, Mathematical and Computer Modelling, 51, 1260-1267, 2010.

[29] J. Caballero, J. Harjani and K. Sadarangani, Uniqueness of positive solutions for a class of fourth-order boundary value problems, Abstract and Applied Analysis, Article ID, 543035, 13 pages, 2011.

[30] G. Durmaz, G. Mınak and İ. Altun, Fixed point results for α-ψ-contractive mappings ıncluding almost contractions and applications, Abstract and Applied Analysis, Article ID 869123, 10 pages, 2014.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gonca DURMAZ
Doğum Tarihi : 10.01.1987
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Hacı Ömer Tarman Anadolu Lisesi-Ankara 2004
Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü 2008
Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 2010

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl/Yıllar:

Yayınları (SCI) :

1) G. Durmaz, Ö. Acar and İ. Altun, "Some fixed point results on weak partial metric spaces", Filomat, 27(2013), 317-326. (SCI-Expanded)

2) G. Durmaz, G. Mınak and İ. Altun, "Fixed point results for α-ψ- contractive mappings including almost contractions and applications", Abstract and Applied Analysis, Volume 2014,Article ID 869123, 10pg. (SCI-Expanded)

Yayınları (Diğer) :

1) I. Altun and G. Durmaz, " Weak partial metric space and some fixed point results", Applied General Topology, 2(2012), 179-191.

2) G. Durmaz, Ö. Acar and İ. Altun, "Two General Fixed Point Results On Weak Partial Metric Space", Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Applications, 5, no 1, 27-35, 2014.

3) Ö. Acar, İ. Altun and G. Durmaz, “A fixed point theorem for new type contractions on weak partial metric spaces”,Vietnam J. Math., DOI 1007/s10013-014-0112-0.

Araştırma Alanları : Matematik, Topoloji, Kısmi Metrik, Zayıf Kısmi Metrik, Sabit Nokta.