KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
DOKTORA TEZİ

KANTOROVİCH TİPLİ BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Müzeyyen ÖZHAVZALI

Ekim, 2014

ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalında Müzeyyen ÖZHAVZALI tarafından hazırlanan KANTOROVİCH TİPLİ BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı Doktora Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Porf. Dr. Kerim KOCA
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Doktora Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Doç.Dr. Ali OLGUN
Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan	: Prof. Dr. Kerim KOCA	________________
Üye (Danışman)	: Doç.Dr. Ali OLGUN	_________________
Üye	:Prof. Dr. Fatma Taşdelen YEŞİLDAL	_________________
Üye	:Prof. Dr. Oktay DUMAN	_________________
Üye	:Prof.Dr. Ali ARAL	__________________

…/…/2014

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onaylamıştır.

Doç. Dr. E. Kamil YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Sevgili Eşim Fatih’e, Oğlum Burak Can’a, Kızım İlayda’ya….

ÖZET

KANTOROVİCH TİPLİ BAZI LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ÖZHAVZALI, Müzeyyen
Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Doktora tezi
Danışman: Doç.Dr. Ali OLGUN

Ekim,2014,80 sayfa

Bu tez çalışması, modifiye Kantorovich tipli bir operatörün yaklaşım özelliklerini incelemek için dört bölümden oluşturulmuştur. Birinci bölümünde çalışmaya temel olan konu ile ilgili yapılanlar hakkında bilgi verildi ve çalışmanın amacından bahsedildi. İkinci bölümde tezde kullanılacak temel tanımlar, teoremler ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri ile ilgili ihtiyaç duyulan teoremler açıklandı. Tezin üçüncü bölüm orijinal olup bu bölümde modifiye Kantorovich tipli bir operatör tanımlandı ve bu operatörün ağırlıklı uzaydaki yakınsaklık özellikleri incelendi. Son bölümde ise sonuçlar ve öneriler verildi.

Anahtar kelimeler: : Pozitif Lineer Operatörler, Korovkin Teoremi, Ağırlıklı Uzaylar, Süreklilik Modülü, Kantorovich Tipli Operatörler, Yaklaşım Özellikleri, Voronovskaya Teorem.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES FOR SOME LINEAR POSITIVE OPERATORS OF KANTOROVICH TYPE

ÖZHAVZALI, Müzeyyen
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, Ph. D. Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali OLGUN
October, 2014, 80 pages

This thesis consists of four chapters in order to investigate the approximation properties of a modified Kantorovich-type operators in polynomial weighted space. In the first chapter, information which is what kind of studies were done about fundamental of the subject for this study were given and the purpose of the study was mentioned. In the second chapter, the fundamental definitions, theorems which will be used in this thesis and theorems which are needed about the approximation properties in weighted spaces on were explained. The third chapter of the thesis is original and in this chapter, a modified Kantorovich-type operators in weighted spaces were defined and the approximation properties of these operators were investigated. In the last chapter, conclusions and recommendations were given.

Key Words: Linear Positive Operators, Korovkin Theorem, Weighted Spaces, Modulus of Continuity, Kantorovich-type operators, Approximation Properties, Voronovskaya Theorem.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanması esnasında hiçbir yardımı esirgemeyen ve biz genç araştırmacılara büyük destek olan, tez çalışmalarım esnasında, bilimsel konularda daima yardımını gördüğüm, tez yöneticisi Hocam, Sayın Doç. Dr. Ali OLGUN'a, başta Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Kerim KOCA ve Prof. Dr. Ali ARAL olmak üzere, Matematik bölümü Hocalarıma tüm destekleri için çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı.
$\lVert f(x)\rVert_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ uzayında norm.
$f_n \rightrightarrows f$	f_n fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması.
$L(f;x)$	L lineer pozitif operatörlerinin f fonksiyonuna uygulanması.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.
$L_n(f;x)$	Genelleştirilmiş fonksiyonlarla ilgili olarak lineer pozitif operatörler dizisi.
C_p^1	$f \in C_p$ olmak üzere $f' \in C_p$ şartını sağlayan fonksiyonların uzayı.
$\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$	φ reel eksende sürekli monoton artan bir fonksiyon olmak üzere ρ ağırlık fonksiyonu.
$B_\rho(R)$	$\lvert f(x)\rvert \le M_f \rho(x), M_f > 0$ eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesi.
$C_\rho[0,\infty)$	B_ρ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonlar uzayı.
$C_\rho^0[0,\infty)$	$\lim \dfrac{f(x)}{\rho(x)}$ sonlu değeri var olan C_ρ nin elemanı olan f fonksiyonlarının alt uzayı
$\lVert f\rVert_\rho = \sup\limits_{x\ge 0} \dfrac{\lvert f(x)\rvert}{\rho(x)}$	$C_\rho^0[0,\infty)$ uzayında norm.

$\Omega(f;\delta)=\sup\limits_{\substack{x\geq 0,\\ |h|\leq\delta}}\dfrac{|f(x+h)-f(x)|}{1+(x+h)^2}$ f fonksiyonunun $C_\rho^k[0,\infty)$ uzayındaki Ağırlıklı süreklilik modülü.

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Yaklaşım, Matematiğin birçok dalında önemli bir kavramlardan birisidir. Matematiksel olarak anlamlı iki ifadeden birinin diğerine hangi şartlar altında nasıl yaklaştığının belirlenmesi önemli problemlerden birisidir. Öyle ki bu problem Yaklaşımlar teorisi olarak bilinen teoriye temel teşkil etmektedir. Bir fonksiyon dizisinin bir fonksiyona yakınsaması, fonksiyon dizisinin ve fonksiyonun tanım kümesine bağlı olduğu kadar, fonksiyon dizisinin ve fonksiyonun özelliklerine de bağlıdır. Bununla beraber yakınsamanın noktasal ya da düzgün olması da oldukça önemlidir.

Yaklaşımlar teorisi halen aktif çalışmaların yoğun olarak devam ettiği bir çalışma alanı olup, bu teorideki esas amaç verilen keyfi bir fonksiyonu bu fonksiyona göre daha basit ve daha kullanışlı olan bir başka fonksiyon cinsinden gösterimini elde ederek bu basit fonksiyonun özelliklerinden yararlanıp karmaşık fonksiyonun özelliklerini elde etmektir. Burada amaç bir fonksiyon uzayının elemanlarını belirli bir noktada ya da normda, bu uzayın bir alt uzayının veya daha iyi özelliklere sahip bir uzayın elemanlarından oluşturulmuş dizilerin limiti şeklindeki bir gösterimi elde etmektir. Çünkü amaç, kötü özellikli elemanları iyi özellikli elemanlara yaklaştırmaktır. Bu tip kullanışlı özelliklere sahip elemanlar cebirsel polinomlar, trigonometrik polinomlar, tam fonksiyonlar vb. şeklinde sıralanabilirler. Burada basit fonksiyon olarak polinomlar dizisi kullanmak işleri hep kolaylaştırmıştır. Çünkü polinomlar matematikte en kullanışlı fonksiyonlardan biridir. Ayrıca Weierstrass, 1885'de kapalı bir $[a,b]$ aralığında sürekli olan her f fonksiyonu için bu fonksiyona yakınsayan bir $\{P_n(x)\}$ polinomlar dizisinin varlığını göstermiştir. Bu teoremin geliştirilmesi Lineer pozitif operatörler için Yaklaşımlar teorisinin temelini oluşturmuştur.

Bu amaçla ilk olarak 1912 yılında Bernstein, $n \in N$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad 0 \le x \le 1$$

operatörünü tanımlamıştır ve bu operatörün $[0,1]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını göstermiştir.

Daha sonraları ise P.P. Korovkin sınırlı aralıklarda tanımlı lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri ile ilgilenmiş ve Yaklaşımlar teorisinde temel teoremlerden biri olan Korovkin teoremini vermiş ve ispatını yapmıştır.

Yaklaşımlar teorisi yaygın olarak çalışılmakta olup bilinen bazı temel operatörlerin değişik şekilleri oluşturularak çeşitli fonksiyon uzaylarının yaklaşım özellikleri incelenmeye halen devam edilmektedir.

1930 yılında L.V. Kantorovich klasik Bernstein operatörlerinden yararlanarak $K_n = L_1[0,1] \to C[0,1]$, $f \in L_1[0,1]$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(s)ds$$

operatörünü inşa etti ve çeşitli çalışmalar yaptı [1]. Daha sonra bu operatörün modifiye şekilleri üzerine çeşitli çalışmalar yapıldı [2-6] .

Bu temel operatörler içerisinde en bilinenlerinden bir tanesi de Szász-Mirakyan operatörüdür. 1941 de G.M. Mirakyan ve 1950 de Otto Szász, $x \in [0,\infty)$ ve $n \in \mathrm{N} := \{1,2,3,...\}$ olmak üzere

$$S_n(f;x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde operatörü tanımladılar ve çalışmalar yaptılar[7,8].

Daha sonra Szász-Mirakyan Kantorovich operatörü $x \in R_0 := [0,\infty)$, $n \in \mathrm{N}$ ve $f \in C\left[\frac{k+a}{n}, \frac{k+b}{n}\right]$ olmak üzere

$$T_n(f;x) = ne^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt$$

şeklinde tanımlanmıştır[9]. Sonra birçok araştırmacı Szász-Mirakyan operatörünün Kantorovich operatörünü kullanarak değişik şekillerini oluşturmuş ve bu tip operatörlerin çok çeşitli özellikleri incelemişlerdir [10-12]. Halen de bu tip incelemeler devam etmektedir.

1.1. Çalışmanın Amacı

İntegrallenebilen fonksiyonlar için yaklaşım özelliklerinin incelenmesi teorideki ana çalışma konularından birisidir. Bu tezde daha önce Walczak[13] tarafından ağırlıklı uzaylarda incelenmiş bir operatörü kullanarak, Kantorovich operatörüne benzeyen halini tanımlayıp böyle bir operatör için yakınsaklık özellikleri incelenecektir.

1.2. Kaynak Özetleri

Bu çalışmadaki temel kaynak Walczak tarafından 2003 yılında yapılan [13] nolu çalışmadır. Bu kaynaktaki temel operatör göz önüne alınıp, bu operatörün Kantorovich tipine benzer bir şekli oluşturulduktan sonra, bu konuda daha önceden yapılmış diğer çalışmalardan temel olanlardan [12,14-17] faydalanarak çalışmayı orijinal olacak şekilde ortaya koymaya çalışacağız. Tezdeki Materyal ve Yöntem bölümünde verilen tanımlar [18-23] nolu kaynaklardan alınmıştır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Lineer Pozitif Operatörler ile ilgili temel kavramlar

Bu bölümde lineer pozitif operatörlerle ilgili bazı temel kavramlar verilip daha sonra yaklaşım özelliklerine bakılacaktır.

2.1.1.Sonlu Aralıkta Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.1.1. N boş olmayan bir cümle ve R, reel sayılar cismi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa N ye R üzerinde *lineer uzay* veya *vektör uzayı* denir.

i) N, $+$ işlemine göre değişmeli gruptur.

ii) $\forall x, y \in \mathrm{N}$ ve $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

a) $\alpha x \in \mathrm{N}$,

b) $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$,

c) $x(\alpha+\beta) = \alpha x + \beta y$,

d) $(\alpha\beta)x = \alpha(x\beta)$,

e) $1x = x.$ Burada $1, R$ nin birim elemanıdır.

Yukarıdaki c) şartındaki $+$ sembolü birinci tarafta R deki toplamayı; ikinci tarafta ise N deki toplamayı belirtmektedir. d)deki çarpma işlemleri de sırasıyla aynı kümelerdeki çarpma işlemleri ile aynıdır.

Tanıma dikkat edildiğinde lineer uzay, N cümlesi ve sırasıyla *i*) ve *ii*) şartlarını sağlayan toplama ve skalerle çarpma dönüşümlerinden ibarettir.

Tanım 2.1.2. N bir lineer uzay olsun. $\| \ \| : \mathrm{N} \to R$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için;

i) $\|x\| \geq 0$,

$ii)\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

$iii)\ \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|,$

$iv)\ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\ \|$ fonksiyonu N üzerinde *norm* denir. Eğer bir Lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya *Normlu uzay* denir.

Tanım 2.1.3.(Noktasal süreklilik) $A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ dır.

Tanım 2.1.4. (Düzgün süreklilik) $A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|x-t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dır.

Tanım 2.1.5. $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilmektedir.

Teorem 2.1.1(Weierstrass): $\forall \varepsilon > 0$ ve $f(x) \in C[a,b]$ için öyle bir $P(x)$ polinomu vardır ki, $\forall x \in [a,b]$ için $|P(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Başka bir ifade ile $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $f(x)$e, $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $\{P(x)\}$ polinom dizisi vardır.

Weierstrass teoremine göre $C[a,b]$ uzayından olan her bir f fonksiyonu için sonlu bir $\max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ sayısı vardır. Bunun bir norm olduğu gösterebilir. Gerçekten

$i)\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\ge 0,$

$ii)$Eğer f uzayın sıfırı ise yani $[a,b]$ aralığında $f\equiv 0$ ise o zaman bu fonksiyonun maksimumu aynı aralıkta sıfırdır. Diğer yandan eğer $\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|=0$ ise o zaman $f\equiv 0$ olur.

$iii)$ a keyfi reel sayı olmak üzere

$$\max_{a\le x\le b}|af(x)|=|a|\max_{a\le x\le b}|f(x)|,$$

$iv)$ f ve g, $[a,b]$de sürekli iki fonksiyon olmak üzere $\forall x\in[a,b]$ için

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\max_{a\le x\le b}|f(x)+g(x)| &\le \max_{a\le x\le b}\left(|f(x)|+|g(x)|\right)\\ &\le \max_{a\le x\le b}|f(x)|+\max_{a\le x\le b}|g(x)|\end{aligned}$$

dir. Böylece norm aksiyomları sağlanır.

$C[a,b]$ uzayında norm;

$$\|f(x)\|=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$$

ile gösterilir. Bu uzayda yakınsaklığın düzgün yakınsaklık olduğu da gösterilebilir.

Kabul edilsin ki $C[a,b]$de olan bir $(f_n(x))$ fonksiyonlar dizisi $[a,b]$ aralığında $f(x)$e düzgün yakınsasın. Bu taktirde keyfi $\varepsilon>0$ verildiğinde öyle bir $N=N(\varepsilon)$ bulunur ki $n>N$ olduğunda $\forall x\in[a,b]$ $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ eşitsizliği , $f(x)\in C[a,b]$ olduğu ve dolayısı ile $|f_n(x)-f(x)|\in C[a,b]$dir. Weierstrass teoreminden dolayı öyle bir $x^*\in[a,b]$ vardır ki $f_n(x)-f(x)$ fark fonksiyonunun x^*daki değeri $[a,b]$nin diğer noktalarındaki değerinden büyüktür. Ayrıca $x^*\in[a,b]$ olduğundan

$$|f_n(x^*)-f(x^*)|=\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$ sağlanır ve

$$\|f_n-f\|_{C[a,b]}<\varepsilon,\quad (n>N(\varepsilon))$$ olur.

$C[a,b]$de olan $(f_n(x))$ dizisi $C[a,b]$ uzayının normuna göre yakınsak olsun. Bu durumda keyfi pozitif ε sayısına göre öyle bir N bulunur ki $n \geq N$ olan tüm bir n ler için

$\max\limits_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ sağlanır. Bundan dolayı $[a,b]$de tüm x ler için

$|f_n(x^*) - f(x^*)| < \varepsilon, n \geq \mathrm{N}$ eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak, $C[a,b]$ uzayının normuna göre yakınsama, düzgün yakınsamadır.

Düzgün yakınsama ;

$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad n \to \infty$

şeklinde gösterilir.

2.2. Lineer Pozitif Operatör

X ve Y boş olmayan iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonuna karşılık getiren bir $Lf = g$ şeklinde L kuralı varsa bu durumda L ye X den Y ye bir *operatör* denir.

$g(x) = L(f;x)$

biçiminde gösterilir. X uzayı L operatörünün tanım bölgesidir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Bu durumda $L(f;x) = g(x),$ Y uzayının bir elemanı olur ve bu şekildeki g fonksiyonları kümesine L operatörünün *değer kümesi* denir. Bu küme de $R(L)$ ile gösterilir. Yani operatörler fonksiyonu fonksiyona dönüşümlerdir.

Tanım 2.2.1. f_1 ve f_2, X uzayında herhangi iki fonksiyon, α ve β keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü;

$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1;x) + \beta L(f_2;x)$ koşulunu gerçekliyorsa L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 2.2.2. Negatif olmayan bir f fonksiyonu için $X^+ = \{f \in X : f \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g \geq 0\}$ fonksiyon sınıflarını göz önüne alalım. Eğer X uzayında tanımlanan L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu Y^+ kümesindeki bir pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa o taktirde bu lineer operatöre *Lineer Pozitif Operatör* denir. $f \geq 0$ olması durumunda $L(f;x) \geq 0$ dır.

Lemma 2.2.1: Lineer pozitif operatörler monotondur.

İspat:

$\forall x$ için $g(x) \geq f(x)$ ise $g(x) - f(x) \geq 0$ dır. L lineer pozitif operatör olduğundan ve operatörün pozitifliğinden $L(g - f;x) \geq 0$ dır. Yine operatörün lineerliğinden $L(g;x) - L(f;x) \geq 0$ olur. Dolayısı ile $L(g;x) \geq L(f;x)$ sağlanır. Bu eşitlikte L operatörünün monoton olduğunu gösterir.

Lemma 2.2.2: Eğer L lineer pozitif operatör ise

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

dir.

İspat:

$|x| \leq a$ ise $-a \leq x \leq a$ olduğundan

$$-|(f;x)| \leq (f;x) \leq |(f;x)|$$

dir. L lineer pozitif bir operatör olduğundan yukarıdaki lemma (2.2.1) den dolayı monoton artandır. O halde

$$L|-(f;x)| \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

yazılabilir. L operatörünün lineerliğinden

$$-L|(f;x)| \leq L(f;x) \leq L(|f|;x)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise,

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yaklaşım teorileri ile ilgili en önemli teoremlerden Korovkin Teoremi aşağıda verilmiştir.

2.3. Korovkin Teoremi

Yaklaşımlar teorisinde önemli bir yer tutan aşağıdaki teorem 1953 yılında P.P. Korovkin tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.3.1 (P. P. Korovkin): Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında;

$i)\ L_n(1;x) \rightrightarrows 1,$

$ii)\ L_n(t;x) \rightrightarrows x,$

$$iii)\ L_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2 \qquad (2.1)$$

koşullarını gerçekliyorsa o taktirde $C[a,b]$ uzayında olan ve tüm reel eksende sınırlı herhangi bir f fonksiyonu için $n \to \infty$ iken

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x), \ a \leq x \leq b \qquad (2.2)$$

olur.

İspat:

f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan tüm x ler için

$$|f(x)| \leq M \tag{2.3}$$

olacak şekilde M pozitif sayısı vardır.

$f \in C[a,b]$ olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $t \in R$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

sağlanır.

$x,t \in [a,b]$ olduğunda son eşitsizlik f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sürekli olmasından dolayı gerçeklenir. $x \in [a,b]$, $t \notin [a,b]$ olduğunda ise aynı eşitsizlik f fonksiyonu a noktasında soldan ve b noktasında sağdan sürekli bir fonksiyon olduğu için gerçeklenir. (2.3) ve (2.4) eşitsizliklerinden dolayı her $t \in R$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon.$ Ayrıca $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 0$ olduğundan $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2$ sağlanır.

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ sağlanır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için (2.4) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq 2M \\ &< \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \varepsilon \end{aligned} \tag{2.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Şimdi L_n operatör dizisinin (2.2) koşullarını sağladığını gösterelim. L_n in lineerliği ve üçgen eşitsizliğinden

$$\|L_n(f;x) - f(x)\| = \|L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)L_n(1;x) - f(x)\|$$

$$\leq \left\| L_n(f(t)-f(x);x) \right\| + \|f\|_{C[a,b]} \left\| L_n(1;x)-1 \right\|$$

$$\leq \left\| L_n(|f(t)-f(x)|;x) \right\| + \|f\|_{C[a,b]} \left\| L_n(1;x)-1 \right\|$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikteki ikinci terim (2.1)den dolayı sıfıra yakınsar.

Yani,

$$\|f\|_{C[a,b]} \left\| L_n(1;x)-1 \right\| \leq \varepsilon_n \qquad (n \to \infty,\ \varepsilon_n \to 0)$$

eşitsizliğini sağlayan ε_n dizisi vardır. O halde

$$\left\| L_n(f;x)-f(x) \right\| \leq \left\| L_n(|f(t)-f(x)|;x) \right\| + \varepsilon_n \tag{2.6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi yukarıdaki (2.6) ifadesindeki birinci terimi hesaplayalım. (2.5) eşitsizliğinden ve lineer pozitif operatörün özelliklerinden dolayı

$$L_n(|f(t)-f(x)|;x) \leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2;x \right)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2;x)$$

$$= \varepsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2 L_n(1;x) \right]$$

$$= \varepsilon\left[L_n(1;x)-1 \right] + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\left\{ \left[L_n(t^2;x)-x^2 \right] - 2x\left[L_n(t;x)-x \right] + x^2\left[L_n(1;x)-1 \right] \right\}$$

$$= \varepsilon + \left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2 \right)\left[L_n(1;x)-1 \right] + \frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(t^2;x)-x^2 \right] - \frac{4M}{\delta^2}x\left[L_n(t;x)-x \right]$$

elde edilir.

$x \in [a,b]$ olduğundan

$$\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}x^2 \right) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}b^2,\ \frac{4M}{\delta^2}x \leq \frac{4M}{\delta^2}b$$

dir.

O halde $C_1 = \frac{2M}{\delta^2}$, $C_2 = 2bC_1$, $C_3 = \varepsilon + C_1 b^2$ dersek

$$\left\| L_n \left| (f(t) - f(x) \right|; x) \right\| \leq \varepsilon + C_1 \left\| L_n(t^2; x) - x^2 \right\| + C_2 \left\| L_n(t; x) - x \right\| + C_3 \left\| L_n(1; x) - 1 \right\|$$

yazılabilir ve burada $\varepsilon > 0$ istenilen kadar küçük sayıdır. Tanım$(2.2.1)$,(2.5) ve (2.6) eşitsizliklerinden dolayı $n \to \infty$ için

$$\left\| L_n \left| (f(t) - f(x) \right|; x) \right\|_{c[a,b]} \to 0$$

olur ve operatörün monotonluk özelliği kullanılarak

$$\left\| L_n(f; x) - f(x) \right\| \to 0$$

elde edilir. Böylece istenen sonuç elde edilir.

2.4. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım

Korovkin Teoremi reel eksenin sonlu ve kapalı aralıklarında verilmiştir. Reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşullarını Gadjiev [8,9] araştırmıştır. Ağırlıklı uzaylar için Korovkin yeterli olmamaktır. Bu sebeple ağırlıklı uzaylarda Korovkin teoreminin karşılığı olarak Baskakov teoremi verilmiştir.

Tanım 2.4.1. $\varphi(x)$ reel eksende sürekli monoton artan bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2 \tag{2.7}$$

şeklinde ρ fonksiyonu tanımlansın:

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \qquad M_f > 0 \tag{2.8}$$

eşitsizliğini sağlayan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların kümesi $B_\rho(R)$ ile bu uzaydaki sürekli fonksiyonların kümesi ise $C_\rho(R)$ ile gösterilmektedir.

Yani

$B_\rho(R) = \{ f : |f(x)| \leq M_f . \rho(x) \}$,

$C_\rho(R) = \{ f \in B_\rho(R) : f \text{ sürekli} \}$

şeklinde ifade edilmektedir. $B_\rho(R)$ uzayında, toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$+ : B_\rho(R) \to B_\rho(R)$$
$$(f,g) \to f+g.$$

Bu durumda $\forall x \in R$ için

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)|$$
$$\leq |f(x)| + |g(x)|$$
$$\leq M_f\rho(x) + M_g\rho(x)$$

olur ve bu eşitsizlikte (2.4.2)den dolayı

$$|(f+g)(x)| = (M_f + M_g)\rho(x)$$

elde edilir. Buna göre her $f, g \in B_\rho(R)$ için $f+g \in B_\rho(R)$ dir.

F herhangi bir cisim olmak üzere

$$F \times B_\rho(R) \to B_\rho(R)$$
$$(\alpha, f) \to \alpha f$$

$\forall x \in R$ için $(\alpha.f)(x) = \alpha.f(x)$

şeklinde tanımlansın.

$f \in B_\rho(R)$ ise $(\alpha f)(x) = \alpha f$

dır. (2.4.2) ve $(\alpha f)(x) = \alpha f \leq \alpha.M_f.\rho(x) = M'_f\rho(x)$ olduğundan $\forall f \in B_\rho(R)$ için $\alpha \in F$ olmak üzere $(\alpha f) \in B_\rho(R)$ dir.

$B_\rho(R)$ yukarıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_\rho = \sup_{x\in R}\frac{|f(x)|}{\rho(x)} \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır. Bu norm ile $B_\rho(R)$ ve $C_\rho(R)$ lineer normlu uzaylardır. Burada ρ fonksiyonuna *Ağırlık fonksiyonu*, $B_\rho(R)$ ve $C_\rho(R)$ uzaylarına ise *Ağırlıklı uzaylar* denir.

$C_\rho(R)$ uzayında

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \tag{2.10}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $C_\rho^k(R)$ ile gösterilir. $C_\rho^k(R)$ ve $C_\rho(R)$, $B_\rho(R)$nin alt uzayıdır.

Lemma 2.4.1: $C_\rho(R)$de tanımlı bir lineer pozitif operatörün $C_\rho(R)$den $B_\rho(R)$ye dönüşüm yapması için gerek ve yeter koşul

$$\|L(\rho;x)\|_\rho \le M \tag{2.11}$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunmasıdır.

İspat:

Önce $f \in C_\rho(R)$ olsun ve $L: C_\rho(R) \to B_\rho(R)$ dönüşümünün var olduğu kabul edilsin. Buna göre $\forall f \in C_\rho(R)$ için $L(f;x) \in B_\rho(R)$ olur.

Özel olarak $M_1 > 0$ olmak üzere $|\rho(x)| \le M_1.\rho(x)$ olduğu için $\rho(x) \in C_\rho(x)$ ve $L(\rho;x) \in B_\rho(x)$ olur. Bu ise (2.8) kullanılarak

$$|L(\rho;x)| \le M.\rho(x)$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunması demektir. Buradan $\dfrac{L(\rho;x)}{\rho(x)} < M$ eşitsizliği elde edilir. Böylece son eşitsizlik,

$\sup\limits_{x\in R} \dfrac{|f(x)|}{\rho(x)} < M$ olur. (2.8) kullanılarak, buradan $\|L(\rho;x)\|_\rho \le M$ sonucu elde edilmiş olur.

$\|L(\rho;x)\|_\rho \le M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısının var olduğu kabul edildiğinde

$$\|L(\rho;x)\|_\rho = \sup_{x\in R} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \le M$$

olduğuna göre

$$\frac{|L(\rho;x)|}{\rho(x)} \leq M$$

elde edilir. Bu ise

$$|L(\rho;x)| \leq M.\rho(x) \tag{2.12}$$

anlamına gelir.

$f \in C_\rho(R)$ olduğu için (2.8)den dolayı $|f(x)| \leq M_f.\rho(x)$ olacak şekilde $M_f > 0$ vardır. Lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliği ve L nin lineerliği kullanılarak

$$\begin{aligned}|L(f;x)| &\leq L(|f|;x) = L\left(\frac{|f|}{\rho}\rho;x\right) = \frac{|f|}{\rho}L(\rho;x)\\ &\leq M_f L(\rho;x)\\ &\leq M_f M.\rho(x)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.12) özelliği kullanılarak $M_f M = M_2$ seçilirse

$$|L(\rho;x)| \leq M_2.\rho(x)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da $L(f;x) \in B_\rho(R)$ olduğunu ispatlar.

Lemma 2.4.2: $L : C_\rho(R) \to B_\rho(R)$ lineer pozitif operatörü tanımlansın. Bu durumda

$$\|L\|_{C\rho \to B\rho} = \|L(\rho;x)\|_\rho \tag{2.13}$$

dir.

İspat:

Operatör normu tanımından

$$\begin{aligned}\|L\|_{C\rho \to B\rho} &= \sup_{\|f\|_\rho \neq 0} \frac{\|L(f;x)\|_\rho}{\|f\|_\rho}\\ &= \sup_{\|f\|_\rho = 1} \|L(\rho;x)\|_\rho\end{aligned}$$

$$\|L\|_{C\rho \to B\rho} = \sup_{\|f\|_\rho = 1}\left\{\sup_{x \in R} \frac{\|L(f;x)\|_\rho}{\rho(x)}\right\}$$

olur. Lineer pozitif operatörlerin monotonluk özelliğinden

$$\|L\|_{C\rho\to B\rho} \le \sup_{\|f\|_\rho=1}\left\{\sup_{x\in R}\frac{L(|f|;x)}{\rho(x)}\right\}$$

$$= \sup_{\|f\|_\rho=1}\left\{\sup_{x\in R}\frac{L\left(\frac{|f|}{\rho}.\rho;x\right)}{\rho(x)}\right\}$$

$$\le \sup_{\|f\|_\rho=1}\left\{\sup_{x\in R}\frac{L\left(\rho(t)\sup\limits_{x\in R}\frac{|f(t)|}{\rho(t)};x\right)}{\rho(x)}\right\}$$

$$= \sup_{\|f\|_\rho=1}\left\{\sup_{x\in R}\frac{L(\rho(t);x)}{\rho(x)}\right\}\|f\|_\rho$$

$$=\|L(\rho;x)\|_\rho \tag{2.14}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan $\|\rho\|_\rho = 1$ olduğundan

$$\|L\|_{C\rho\to B\rho} = \sup_{\|f\|_\rho=1}\|L(f;x)\|_\rho \ge \|L(\rho;x)\|_\rho \tag{2.15}$$

eşitsizliği bulunur. (2.14) ve (2.15)den (2.12) elde edilir.

Teorem 2.4.2: $\varphi(x)$ reel eksende sürekli monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\rho(x)=1+[\varphi(x)]^2$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $C_\rho(R)$ uzayından $B_\rho(R)$ uzayına öyle bir $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanabilir ki, bu operatörler dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n(\varphi^\upsilon;x)-\varphi^\upsilon(x)\|_\rho = 0 \quad \upsilon = 0,1,2$$

şeklindeki üç şart sağlanmasına rağmen öyle bir $f^* \in C_\rho(R)$ fonksiyonu bulunabilir ki;

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n(f^*;x)- f^*(x)\|_\rho \ge 1$$

olur. Bu Teorem Korovkin Teoremin'nin sonsuz bölgelerde geçerli olmadığını gösterir.

Örnek 2.4.1. $f \in C[0,\infty)$ olmak üzere

$$A_n(f;x)=\begin{cases} f(x)+\dfrac{1}{2n}\left[f(x+1)-2f(x)+f(x-1)\right] & 0\le x\le n, \\ f(x) & x\notin[0,n] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$\varphi(x)=x$ ve $\rho(x)=1+x^2$ olsun. A_n lineer pozitif operatördür.

$$A_n(\rho;x)=\begin{cases} \rho(x)+\dfrac{1}{2n}\left[\rho(x+1)-2\rho(x)+\rho(x-1)\right] & 0\le x\le n, \\ \rho(x) & x\notin[0,n] \end{cases}$$

$A_n(\rho;x)\le 2\rho(x)$ olduğundan (2.12) ya göre A_n, C_ρ sınıfından B_ρ ya bir dönüşüm tanımlar.

Şimdi Korovkin şartlarının sağladığını gösterelim. A_n nin tanımı gereğince $A_n(1;x)=1$ ve $A_n(t;x)=x$ olduğu açıktır.

$$A_n(t^2;x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{2n}\left[(x+1)^2-2x^2+(x-1)^2\right] & 0\le x\le n, \\ x^2 & x\notin[0,n] \end{cases}$$

olduğundan $n\to\infty$ için $A_n(t^2;x)\rightrightarrows x^2$ dir. Buradan Korovkin Teoreminin şartları sağlandığı gösterilmiş oldu.

Şimdi ise C_ρ dan $f^*(x)=x^2\cos\pi x$ fonksiyonu göz önüne alındığında,

$$A_n(f^*;x)=\begin{cases} f^*(x)+\dfrac{1}{2n}\left[f^*(x+1)-2f^*(x)+f^*(x-1)\right] & 0\le x\le n, \\ f^*(x) & x\notin[0,n] \end{cases}$$

$$\left|A_n(f^*;x)-f^*(x)\right|=\begin{cases} \dfrac{1}{2n}\left|\cos\pi x\right|\left(4x^2+2\right) & 0\le x\le n, \\ 0 & x\notin[0,n] \end{cases}$$

olur. Buradan

$$\left\| A_n\left(f^*;x\right)-f^*(x)\right\|_\rho = \sup_{x\in R} \frac{\left|A_n\left(f^*;x\right)-f^*(x)\right|}{\rho(x)}$$

$$= \frac{1}{2n}\sup_{x\in[0,n]}\left|\cos \pi x\right|\left(4x^2+2\right)$$

$$= \frac{2n^2+1}{n}$$

elde edilir ve buradan $\left\| A_n\left(f^*;x\right)-f^*(x)\right\|_\rho \geq 1$ dir. Bu ise Ağırlıklı uzaylarda Korovkin teoreminin şartları sağlanmasına rağmen yakınsamanın sağlanmadığını göstermektedir.

2.5 Baskakov Teoremi

1962 yılında Baskakov, Korovkin teoremindeki f nin tüm reel eksende sınırlı olması koşulu yerine $1+x^2$ fonksiyonuyla sınırlı olması halinde de yine düzgün yakınsamasının olduğunu ispatlamıştır. Baskakov'un bu teoremi ve ispatı aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.5.1 (Baskakov): $f \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende $|f(x)| \leq M_f(1+x^2)$ olsun. $L_n(f;x)$ lineer pozitif operatörler dizisi olmak üzere $x\in[a,b]$ için

$i)\ L_n(1;x) \rightrightarrows 1,$

$ii)\ L_n(t;x) \rightrightarrows x,$

$$iii)\ L_n\left(t^2;x\right) \rightrightarrows x^2 \tag{2.16}$$

koşullarının sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x) \tag{2.17}$$

olmasıdır.

İspat:

$1, x, x^2 \in [a,b]$ ve

$$|f(x)| \leq M_f (1+x^2) \tag{2.18}$$

koşulunu sağladıklarından dolayı $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ olması durumunda (2.16) koşulları sağlanır.

(2.16)deki koşulların sağlanması halinde $L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

$f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonu sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta$ vardır öyle ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.19}$$

sağlanır. Eğer $|t-x| \geq \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ eşitsizliği geçerlidir.

(2.18)den ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t) - f(x)| \leq M_f (1+t^2+1+x^2)$$

$$= M_f (2+(t-x+x)^2+x^2)$$

$$= M_f (2+(t-x)^2+2x(t-x)+x^2+x^2)$$

$$\leq M_f (2+(t-x)^2+2x|t-x|+2x^2)$$

$$= M_f (t-x)^2 \left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + 2\frac{x}{\delta} + \frac{2x^2}{\delta^2} \right) \tag{2.20}$$

olarak elde edilir. Burada $K(x) = \left(\frac{2}{\delta^2} + 1 + 2\frac{x}{\delta} + \frac{2x^2}{\delta^2} \right)$dir. $\forall x \in [a,b]$ için yukarıdaki $K(x)$in sınırlı olduğu açıktır. $\forall \varepsilon > 0$ için (2.19) ve (2.20)den

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + M_f (t-x)^2 K(x) \tag{2.21}$$

yazılabilir. L_n operatörü (2.21) eşitsizliğine uygulanır, basit düzenlemeler yapılırsa

$$\|L_n(f;x)-f(x)\| \leq \|L_n(|f(t)-f(x)|;x\|$$

$$\leq L_n(\varepsilon;x)+M_f K(x) L_n((t-x)^2;x)$$

$$= L_n(\varepsilon;x)+M_f K(x)\left[L_n(t^2;x)-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)-2x^2+2x^2\right]$$

$$= L_n(\varepsilon;x)+M_f K(x)\left\{\left[L_n(t^2;x)-x^2\right]-2x\left[L_n(t;x)-x\right]+x^2\left[L_n(1;x)-1\right]\right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ise

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{c[a,b]} \leq \varepsilon\left[L_n(1;x)-1\right]$$
$$+\varepsilon M_f K(x)\left\{\left[L_n(t^2;x)-x^2\right]-2x\left[L_n(t;x)-x\right]+x^2\left[L_n(1;x)-1\right]\right\}$$

şeklinde yazılabilir. (2.21)den dolayı yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı $n\to\infty$ için ε a eşit olur. ε da istenilen kadar küçük bir sayı olduğundan, Teoremin ispatı elde edilmiş olur.

Lemma 2.5.1: Eğer $A_n : C_\rho \to B_\rho$ lineer pozitif operatörler dizisi için $n\to\infty$ olduğunda

$$\left\|A_n\left(\varphi^\upsilon;x\right)-\varphi^\upsilon(x)\right\|_\rho \to 0 \quad \upsilon=0,1,2$$

şeklinde üç şart geçerli ise, her bir $f\in C_\rho$ fonksiyonu için herhangi bir $[a,b]$ sonlu aralığında

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|A_n(f,x)-f(x)\right|=0 \qquad (2.22)$$

olur.

Teorem 2.5.2 : $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n\left(\varphi^\upsilon;x\right)-\varphi^\upsilon(x)\right\|_\rho = 0 \qquad \upsilon=0,1,2$$

şeklindeki üç şartı sağlıyorsa, her $f\in C_\rho^k$ için $n\to\infty$ iken,

$$\|A_n f - f\|_\rho \to 0$$

olur.

2.6 Süreklilik Modülü

Tanım 2.6.1.(Süreklilik modülü) Kabul edelim ki f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Keyfi $\delta > 0$ için

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{|x-t| \le \delta \\ t,x \in [a,b]}} |f(t) - f(x)|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f nin *süreklilik modülü* denir.

Bazen bu gösterim yerine $\omega(\delta)$ veya $\omega_f(\delta)$ gösterimi de kullanılabilir. $\omega(f;\delta)$; değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini belirler. ω, δ nın bir fonksiyonu durumundadır ve $\delta > 0$ için $w(f;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

Lemma 2.6.1: $w(f;\delta)$ fonksiyonu monoton artandır.

İspat:

$0 < \delta_1 < \delta_2$ olsun. Bu durumda $|x-y| \le \delta_2$ koşulunu sağlayan (x,y) sayı çiftlerinin kümesi $|x-y| \le \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı göz önüne alınarak süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f;\delta_1) \le \omega(f;\delta_2)$$

yazılabilir.

Lemma 2.6.2: Kabul edelim ki f, $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(f;\delta) = 0$$

dır.

İspat:

f fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımı nedeniyle $\forall\varepsilon > 0$ için bir $\eta > 0$ vardır öyle ki

$|t - x| < \eta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta < \eta$ alındığında $\omega(f;\delta) < \varepsilon$ dır. Yani

$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta) = 0$

olur.

Lemma 2.6.3: $m \in N$ için

$\omega(f;m\delta) \le m\omega(f;\delta)$

dir.

İspat:

$$\omega(f;\delta) = \sup_{\substack{|x-t|\le m\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(t) - f(x)|$$

ifadesinde $t = x + mh$ seçilirse

$$\omega(f;m\delta) \le \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(x+mh) - f(x)|$$

$$= \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,x\in[a,b]}} |f(x+mh) - f(x+(m-1)h) + f(x+(m-2)h) + ... + f(x+h) - f(x)|$$

$$= \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,x\in[a,b]}} \left|\sum_{k=1}^{m}[f(x+kh) - f(x+(k-1)h)]\right|$$

elde edilir. Burada

$$\omega(f;m\delta) \le \sum_{k=1}^{m} \sup_{\substack{|h|\le\delta \\ t,x\in[a,b]}} |[f(x+kh) - f(x+(k-1)h)]$$

olur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü olması ile toplananların sayısı m tane olduğundan

$\omega(f;m\delta) \leq m\omega(f;\delta)$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.6.4: $\lambda > 0$ reel sayısı için

$\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\delta\ )$

dir.

İspat:

m, λ nın tam kısmı olsun. O taktirde $m \leq \lambda < m+1$ olur. ω süreklilik modülünün monotonluk özelliği ve Lemma$(2.6.3)$den

$\omega(f;\lambda\delta) \leq \omega(f;(m+1)\delta)$

$\omega(f;(m+1)\delta) \leq (m+1)\omega(f;\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\delta)$

olur. Dolayısı ile

$\omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\omega(f;\delta\ )$

olarak elde edilir.

Lemma 2.6.5: δ_n sıfıra yakınsayan bir dizi olmak üzere

$\omega(f;\delta_n) \geq k_f \delta_n$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $f(x)$ e bağlı bir k_f sabiti vardır.

İspat:

Süreklilik modülünde δ için bir alınarak

$$\omega(f;1)=\omega(f;\frac{1}{\delta_n}\delta_n)$$

olarak yazılabilir. Lemma$(2.6.4)$den

$$\omega(f;\frac{1}{\delta_n}\delta_n)\le\left(\frac{1}{\delta_n}+1\right)\omega(f;\delta_n)$$

$$\le\left(\frac{1+\delta_n}{\delta_n}\right)\omega(f;\delta_n)$$

olur. $\delta_n$nin yakınsak bir dizi olmasından dolayı $\delta_n+1\le k$ şeklinde bir k sabiti vardır. O taktirde

$$\omega(f;1)\le\frac{k}{\delta_n}\omega(f;\delta_n)$$

olur. $k_f=\dfrac{\omega(f;1)}{k}$ seçildiğinde

$$\omega(f;\delta_n)\ge k_f\delta_n$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir.

Lemma 2.6.6: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir fonksiyon ise her $x,t\in[a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)|\le\omega(f;|t-x|)$$

dır.

İspat:

Süreklilik modülünün tanımı ve Lemma$(2.6.4)$den

$$|f(t)-f(x)|\le\omega(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta)$$

$$\leq \left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$$

sonucu elde edilir.

Lemma 2.6.7: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının tüm noktalarında türevi sınırlı ise

$w(f;\delta) \leq c\delta$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat:

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının tüm noktalarında türevi sınırlı ise $|f'(x)| \leq M$ olur. Ortalama Değer Teoreminden

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(\xi)$$

olacak şekilde bir ξ noktası vardır. $f'(\xi) = c$ olarak alınırsa

$w(f;\delta) \leq c|t-x| < c\delta$

elde edilir.

Tanım 2.6.2.(Ağırlıklı Süreklilik Modülü) $\rho(x) = 1 + x^2$ olmak üzere, her $f \in C_\rho^k[0,\infty)$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{x\geq 0, |h|\leq\delta} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{1+(x+h)^2}$$

ifadesine f fonksiyonunun $C_\rho^k[0,\infty)$ uzayında *Ağırlıklı süreklilik modülü* denir. $\Omega(f;\delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünün, Tanım(2.6.1)de verilen süreklilik modülüne benzer özelliklerini aşağıdaki Lemma'da verildi.

Lemma 2.6.8.[10,12]: $f \in C_{\rho}^{k}[0,\infty)$ olmak üzere $\Omega(f;\delta)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $\Omega(f;\delta) \geq 0,$

ii)Her $f \in C_{\rho}^{k}[0,\infty)$ için $\lim_{\delta\to 0^{+}} \Omega(f;\delta) = 0$ dır,

iii) Her $m \in N$ için $\Omega(f;m\delta) \leq m\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği sağlanır,

iv) Her $\lambda \in R^{+}$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\Omega(f;\delta)$ eşitsizliği sağlanır,

v) $|f(t) - f(x)| \leq \left(1+(2x+t)^{2}\right)\left(\frac{|x-t|}{\delta}+1\right)\Omega(f;\delta)$ dir.

İspatlar:

i) $|f(x+h) - f(x)| \geq 0,\ 1+(x+h)^{2} > 0$ olduğundan süreklilik modülünün tanımı gereğince $\Omega(f;\delta) \geq 0$ dır.

ii) $\varepsilon > 0$ olsun. $f \in C_{\rho}^{k}[0,\infty)$ olduğunda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\rho(x)} = k_{f} < \infty$$

olacaktır. Buna göre öyle bir $x_0 > 0$ sayısı vardır ki, her $x_1 \geq x_0 + \delta$ olsun. Bu durumda

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{0\leq x\leq x_1,|h|\leq\delta}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{1+(x+h)^{2}} + \sup_{x\geq x_1,|h|\leq\delta}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{1+(x+h)^{2}}$$

$$\leq \omega_{[0,x_1]}(f;\delta) + \sup_{x\geq x_1,|h|\leq\delta}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{1+(x+h)^{2}}$$

olur. $x \geq x_1$ olmak üzere

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{1+(x+h)^{2}}\right| = \left|\frac{f(x+h)}{1+(x+h)^{2}} - K_f + K_f - \frac{f(x)}{1+(x+h)^{2}}\right|$$

$$\leq \left| \frac{f(x+h)}{1+(x+h)^2} - K_f \right| + \left| \frac{f(x)}{1+(x+h)^2} - K_f \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{(1+x^2) f(x+h)}{(1+x^2)(1+(x+h)^2)} - \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} K_f + \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} K_f - K_f \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} \left| \frac{f(x)}{(1+x^2)} - K_f \right| + |K_f| \left| 1 - \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} |K_f| \left| 1 - \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} \right|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} |K_f| \left| 1 - \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} \right| \tag{2.23}$$

eşitsizliği elde edilir. (2.6.1) eşitsizliğinde,

$$\left| 1 - \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} \right| = \left| \frac{(x+h)^2 - x^2}{(1+(x+h)^2)} \right| = \left| \frac{h(2x+h)}{(1+(x+h)^2)} \right|$$

eşitliğinden yararlanarak, $|h| \leq \delta$ olduğundan

$\left| 1 - \frac{1+x^2}{(1+(x+h)^2)} \right| \leq \delta(2+\delta)$ elde edilir. Bu eşitsizlik (2.23)e uygulandığında

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{1+(x+h)^2} \right| \leq \varepsilon + |K_f| \delta(2+\delta)$$

olur. Buna göre

$$\Omega(f;\delta) \leq \omega_{[0,x_1]}(f;\delta) + \varepsilon + |K_f| . \delta(2+\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $\lim_{\delta \to 0^+} \Omega(f;\delta) = \varepsilon$ elde edilir ki $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur.

iii) $m \in N$ olmak üzere

$$|f(x+mh) - f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{m} f(x+kh) - f(x+(k-1)h) \right|$$

dir. Burada $\Omega(f;\delta)$ nın tanımından

$$|f(x+mh)-f(x)| \le m\left(1+(x+h)^2\right)\Omega(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\sup_{x\ge 0,|h|\le\delta} \frac{|f(x+mh)-f(x)|}{1+(x+h)^2} \le m.\Omega(f;\delta)$$

bulunur.

iv) $[\![\lambda]\!] \le \lambda \le [\![\lambda]\!]+1$ eşitsizliğine $\Omega(f;\delta)$ nın *i*) ve *ii*) özellikleri uygulanarak

$\lambda \in R^+$ olmak üzere

$\Omega(f;\lambda\delta) \le (\lambda+1)\Omega(f;\delta)$ sonucuna ulaşılır.

v) $\Omega(f;\delta)$ tanımından ve *iv*) özelliğinden

$$|f(t)-f(x)| \le \left(1+(x+|t-x|)^2\right)\left(\frac{|x-t|}{\delta}+1\right)\Omega(f;\delta) \qquad (2.24)$$

elde edilir.

$t \ge x$ iken

$\left(1+(x+|t-x|)^2\right) = 1+t^2$, $x \in [0,\infty)$ olduğundan

$\left(1+(x+|t-x|)^2\right) \le 1+(2x+t)^2$ eşitsizliği elde edilir.

$t \le x$ iken

$\left(1+(x+|t-x|)^2\right) = 1+(2x-t)^2$, $x \in [0,\infty)$ olduğu için

$\left(1+(x+|t-x|)^2\right) \le 1+(2x+t)^2$ olur. Buna göre (2.24) eşitsizliğinde bunu yazarsak

$$|f(t)-f(x)| \le \left(1+(2x+t)^2\right)\left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\Omega(f;\delta)$$

istenen eşitsizlik elde edilir.

2.7 Doğurucu Fonksiyonlar

Doğurucu fonksiyonlar, özel fonksiyonların tanımlanmasında ve bu fonksiyonlarla ilgili birçok bağıntının bulunmasında önemli bir yer tutar.

Tanım 2.7.1. İki değişkenli bir $F(x,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden,

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n \tag{2.25}$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa, $F(x,t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar cümlesinin *Doğurucu fonksiyonu* denir. (2.25) bağıntısında c_n ler x ve t den bağımsız, n nin bir fonksiyonu olup değişik değişik parametreler içerebilirler.

Tanım 2.7.2.(Bilineer Doğurucu Fonksiyon) Üç değişkenli bir $G(x,y,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri göre,

$$G(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n f_n(x) f_n(y) t^n \tag{2.26}$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa, $G(x,y,t)$ fonksiyonuna *Bilineer Doğurucu fonksiyonu* denir. (2.26) bağıntısında g_n ler x ve y değişkenlerinden bağımsızdır.

Tanım 2.7.3.(Bilateral Doğurucu Fonksiyon) Üç değişkenli bir $H(x,y,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden,

$$H(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n f_n(x) g_n(y) t^n \tag{2.27}$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa, $H(x,y,t)$ fonksiyonuna *Bilateral(ikili) Doğurucu fonksiyonu* denir. (2.27) bağıntısında h_n ler x ve y değişkenlerinden bağımsız olup $f_n(x)$ ve $g_n(y)$ ler farklı fonksiyonlardır.

Lemma 2.7.1:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n-k)$ (2.28)

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} B(k,n+k)$ (2.29)

dir.

İspat:

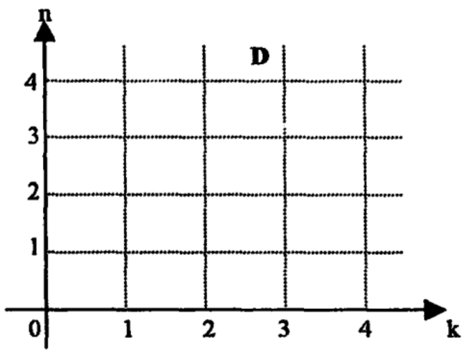
a) Düzlemde (k,n) doğal sayı çiftlerinin oluşturduğu bir nokta cümlesi

$D = \{(k,n): 0 \le k < \infty, \quad 0 \le n < \infty, \quad k \in N\}$

şeklinde tanımlansın. Burada yeni indisler $k = j, n = m - j$ olarak alınırsa D cümlesi

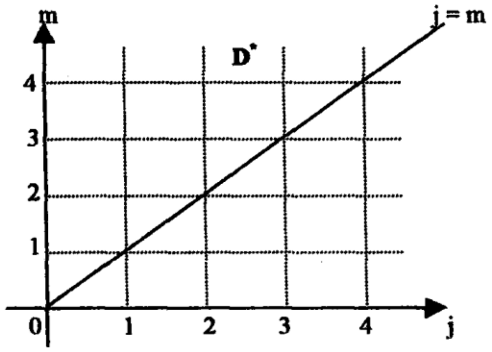
$D^* = \{(j,m): 0 \le j < m, \quad 0 \le m < \infty, \quad m \in N\}$

cümlesine dönüşür. Bu dönüşüm geometrik olarak şu şekilde gösterilebilir:



Şekil 2.1 Cauchy Çarpım Formülü Şekli

$D = \{(k,n): 0 \le k < \infty, \quad 0 \le n < \infty, \quad k \in N\},$



Şekil 2.2 Cauchy Çarpım Formülü Dönüşüm Sonrası Şekli

$D^* = \{(j,m): 0 \le j < m, \quad 0 \le m < \infty, \quad m \in N\}.$

Buna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} A(j,m-j)$$

yazılabilir. m, j indisleri yerine n, k indisleri konulursa (2.28) elde edilir.

b) Önceki eşitlikte, $A(k,n-k) = B(k,n)$ alınması yeterlidir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Operatörün Oluşturulması

Szász-Mirakyan operatörlerinin ağırlıklı uzaylardaki çalışmalarından biri de M. Becker tarafından 1978de yapılmıştır[11]. Becker $x \in R_0 := [0,\infty)$, $p \in \mathrm{N}_0$ olmak üzere

$$\omega_0(x) := 1, \quad \omega_p(x) := \left(1+x^p\right)^{-1}, \quad p \geq 1 \tag{3.1}$$

$C_p := \{f : f, R_0 \text{da sürekli}\}$ olarak gösterdi ve $\omega_p f$ ler R_0 da sınırlı ve düzgün sürekli olmak üzere bu küme üzerinde

$$S_n(f;x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.2}$$

operatörünün yaklaşım özelliklerini inceledi. Bu küme üzerinde normu:

$$\|f\|_p \equiv \|f(.)\|_p := \sup_{x \in R_0} \omega_p(x)|f(x)| \tag{3.3}$$

olarak tanımladı. Becker yaptığı çalışmada $x_2 > x_1 \geq 0$ olmak üzere, $[x_1, x_2]$ aralığında $f \in C_p$, $p \in \mathrm{N}_0$ ve $x \in R_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x) = f(x)$$

ifadesinin düzgün yakınsak olduğunu gösterdi[11]. Bu operatörün modifiye şekilleri [9,10,15,25] çalışmalarda görülebilir.

Daha sonra 2003 de Z.Walczak, (3.2) ile tanımlanan operatörü modifiye ederek çeşitli çalışmalar yaptı. Bu çalışmalardan birisi olan [13]de, C_p olarak yukarıda tanımlanan uzayı alıp, $C_p^1 := \{f \in C_p : f' \in C_p\}$ ile gösterdi. $f \in C_p$ için $\omega_1(f;.)$ alışılmış süreklilik modülü şeklinde, $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, $\forall h, x \in R_0$ için

$$\omega_1(f;C_p;t) := \sup_{0\leq h\leq t} \|\Delta_h f(.)\|_p, \quad t \in R_0 \tag{3.4}$$

olarak tanımladı. Her $f \in C_p$, $t \in R_0$ için

$$\lim_{t\to o^+} \omega_1(f;C_p;t) = 0$$

olduğunu ve $f \in C_p^1$ ve için

$\omega_1(f;C_p;t) \le M_1 t$

olacak şekilde $M_1 > 0$ varlığını göz önüne alarak; $r \in N$, $p \in N_0$ ve $f \in C_p$ olmak üzere

$$A_n^*(f;r;x) := \frac{1}{g\left((nx+1)^2;r\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx+1)^{2k}}{(k+r)!} f\left(\frac{k+r}{n(nx+1)}\right), \; x \in R_0, n \in N \tag{3.5}$$

operatörünü tanımladı. Burada

$$g(t;r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+r)!}, \; t \in R_0 \tag{3.6}$$

olup

$$g(0;r) = \frac{1}{r!}, \; g(t;r) = \frac{1}{t^r}\left(e^t - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{t^j}{j!}\right), \; t > 0 \tag{3.7}$$

dır. Bu operatörün önce momentlerini elde etti. Daha sonra $\alpha_{s,s} = \alpha_{s,1} = 1$, $\beta_{s,s}(r) = r^{s-1}$ler $s-1$. dereceden polinomlar, $\alpha_{s,j}$ ler s, j lere bağlı ve $\beta_{s,1}$, $\alpha_{s,j}$ ler ise sabitler olmak üzere A_n^* operatörü için

$$A_n^*(t^s;r;x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^s \left\{ \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{n(nx+1)^{2(j-1)}} \left(\alpha_{s,j} + \frac{\beta_{s,j}(r)}{(nx+1)^2 (r-1)!\, g\left((nx+1)^2;r\right)} \right) \right\}$$

eşitliğinin sağlandığını ispatlamıştır. Sonra $p \in N_0, n, r \in N$ olmak üzere

$\left\| A_n^*\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;.\right)\right\|_p \le M_2$ ve $\forall f \in C_p$ için $\left\| A_n^*(f;r;.)\right\|_p \le M_3 \, \|f\|_p$ eşitsizliklerinin sağlandığını gösterdi. Burada $M_2 \equiv M_2(p,r)$ ve $M_3 \equiv M_3(p,r)$dir. Bu eşitsizlikler kullanılarak her $p \in N_0$ ve $n \in N$ için A_n^*lerin $C_p$den C_p ye pozitif lineer operatör olduğunu gösterilmiştir[23]. Ayrıca, A_n^*operatörü için $p \in N_0, r \in N$ olmak üzere $\left\| A_n^*\left(\frac{(t-\cdot)^2}{\omega_p(t)};r;\cdot\right)\right\|_p \le \frac{M_4}{n^2}$ olduğunu gösterdi. Burada $M_4 \equiv M_4(p,r)$dir. Daha sonra, A_n^*için $r \in N$ ve $p \in N_0$ olmak üzere, $\forall f \in C_p^1$ için $M_5 \equiv M_5(p;r)$ vardır öyle ki;

$\left\| A_n^*(f;r;.) - f(.) \right\|_p \leq \frac{M_5}{n} \| f' \|_p$ ve $\forall f \in C_p^1$ olmak üzere

$\left\| A_n^*(f;r;\cdot) - f(\cdot) \right\|_p \leq M_8 \omega_1\left(f;C_p;\frac{1}{n}\right)$ olduğunu gösteren yakınsaklık teoremlerini verdi. Burada $M_8 \equiv M_8(p;r)$dir. Bu teoremlerden $\forall r \in N$ ve $f \in C_p^1$ ve $p \in N_0$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| A_n^*(f;r;\cdot) - f(\cdot) \right\|_p = 0$ ve $\left\| A_n^*(f;r;\cdot) - f(\cdot) \right\|_p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ olduğu sonuçlarını verdi. Son olarak da $f \in C_p^1$ ve $r \in N$ olmak üzere $\forall x > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{A_n^*(f;r;x) - f(x)\right\} = f'(x)$ olduğunu gösterdi.

Bu tezde [13]de verilen operatörü kullanarak C_p uzayında Kantorovich tipli değişik bir operatörün yakınsaklık özellikleri ile incelecektir.

3.2. A_n Operatörün Özellikleri

C_p (3.1) de tanımlan uzay ve $f \in C_p$, $p \in \mathrm{N}_0$ ve $x \in R_0$ olsun. (a_n) monoton artan pozitif bir dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ olmak üzere

$$A_n(f;r;x) = \frac{a_n}{g\left((a_n x+1)^2;r\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!} \int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}} f\left(\frac{t}{(a_n x+1)}\right) dt \tag{3.8}$$

operatörünü tanımlayalım. Diğer taraftan $g(t;r) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{(k+r)!}$, $t \in R_0$; $g(0;r) = \frac{1}{r!}$,

$g(t;r) = \frac{1}{t^r}\left(e^t - \sum\limits_{j=0}^{r-1} \frac{t^j}{j!}\right)$, $t > 0$ olmak üzere (3.3), (3.4)deki özellikler sağlansın.

Ayrıca

$$\frac{1}{g(t;r)} \leq r! \tag{3.9}$$

dır. $g(t;r)$ nin açılımından

$$g(t;r) = \left(\frac{1}{r!} + \frac{t}{(1+r)!} + \frac{t^2}{(2+r)!} + \frac{t^3}{(3+r)!} + \ldots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{r!}+\frac{t}{(1+r)r!}+\frac{t^2}{(1+r)(2+r)r!}+\frac{t^3}{(1+r)(2+r)(3+r)r!}+\dots\right)$$

$$=\frac{1}{r!}\left(1+\frac{t}{(1+r)}+\frac{t^2}{(1+r)(2+r)}+\frac{t^3}{(1+r)(2+r)(3+r)}+\dots\right)$$

şeklinde (3.9) eşitsizliği kolaylıkla görülür. A_n operatörünün lineer ve pozitif olduğu ise açıktır. Bu operatörün $\forall p \in N_0$ ve $n \in N$ olmak üzere C_p den C_p ye pozitif lineer bir operatör olduğu [13,17] nolu çalışmalardaki gibi gösterilebilir. A_n operatörünün bu özelliğinin gösterilmesi için gerekli olan momentler ve ispatları aşağıdaki gibidir.

i) $A_n(1;r;x)=1$ (3.10)

dir.

İspat:

Kolaylık olması bakımından $g\left((a_n x+1)^2;r\right)=g_{n,r}(x)$ gösterimini kullanalım.

$$A_n(1;r;x)=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}\int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}1\,dt$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}\,t\,\Big|_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}\left(\frac{k+r+1}{a_n}-\frac{k+r}{a_n}\right)$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}\frac{1}{a_n}$$

$$=\frac{1}{g_{n,r}(x)}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}}_{g_{n,r}(x)}$$

$$=1$$

elde edilir.

$$ii)\ A_n(t;r;x)=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)\left(1+\frac{1}{2(a_nx+1)^2}+\frac{1}{(a_nx+1)^2\left((a_nx+1)^2;r\right)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)$$

(3.11)

dir.

İspat:

$$A_n(t;r;x)=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}\frac{t}{(a_nx+1)}dt$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\frac{t^2}{2(a_nx+1)}\Bigg|_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\left(\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{k+r+1}{a_n}\right)^2-\left(\frac{k+r}{a_n}\right)^2}{(a_nx+1)}\right)$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)!}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k+r+1}{a_n}\right)^2-\left(\frac{k+r}{a_n}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)!}\left((k+r)+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)!}+\frac{1}{a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)!}(k+r)$$

$$=\frac{1}{2a_ng_{n,r}(x)}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}}_{g_{n,r}(x)}(a_nx+1)^{-1}+\frac{1}{a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)(k+r-1)!}(k+r)$$

$$=\frac{1}{2a_n(a_nx+1)}+\frac{1}{a_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r-1)!}$$

$$=\frac{1}{2a_n\left(a_nx+1\right)}+\frac{1}{a_n\left(a_nx+1\right)\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{1}{a_ng_{n,r}\left(x\right)}\sum_{\substack{k=1\\k\to k+1}}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k+1}}{\left(k+r\right)!}$$

$$=\frac{1}{2a_n\left(a_nx+1\right)}+\frac{1}{a_n\left(a_nx+1\right)\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{\left(a_nx+1\right)}{a_n}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse, (3.11)deki sonuç elde edilir.

iii)

$$A_n\left(t^2;r;x\right)=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^2\left[1+\frac{2}{\left(a_nx+1\right)^2}+\frac{1}{3\left(a_nx+1\right)^4}+\frac{1}{\left(a_nx+1\right)^2\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}\right.$$
$$\left.\times\left(1+\frac{r+1}{\left(a_nx+1\right)^2}\right)\right] \tag{3.12}$$

dir.

İspat:

$$A_n\left(t^2;r;x\right)=\frac{a_n}{g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k}}{\left(k+r\right)!}\int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}\frac{t^2}{\left(a_nx+1\right)^2}dt$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k}}{\left(k+r\right)!}\frac{t^3}{3\left(a_nx+1\right)^2}\Bigg|_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-2}}{\left(k+r\right)!}\left(\frac{1}{3}\left(\left(\frac{k+r+1}{a_n}\right)^3-\left(\frac{k+r}{a_n}\right)^3\right)\right)$$

$$=\frac{1}{g_{n,r}\left(x\right)a_n^{\,2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-2}}{\left(k+r\right)!}\left(\left(k+r\right)^2+\left(k+r\right)+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3a_n^{\,2}\left(a_nx+1\right)^2}+\frac{1}{a_n^{\,2}g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-2}}{\left(k+r-1\right)!}\left(k+r\right)+\frac{1}{a_n^{\,2}g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-2}}{\left(k+r-1\right)!}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-2}}{(k+r)!}+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-2}}{(k+r)!}(k+r)^2$$

$$=\frac{1}{3a_n{}^2(a_n x+1)^2}+\frac{r}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^2 g}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-2}}{(k+r-1)!}(k+r)$$

$$+\frac{1}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-2}}{(k+r-1)!}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-2}}{(k+r)!}(k+r)$$

$$=\frac{1}{3a_n{}^2(a_n x+1)^2}+\frac{r}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{\substack{k=0\\k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}(k+r+1)$$

$$+\frac{1}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{\substack{k=0\\k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}$$

$$=\frac{1}{3a_n{}^2(a_n x+1)^2}+\frac{r}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^2}+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r)!}(k+r)$$

$$+\frac{1}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^2}$$

$$=\frac{1}{3a_n{}^2(a_n x+1)}+\frac{r}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2}{a_n{}^2}+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k}}{(k+r-1)!}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$=\frac{1}{3a_n{}^2(a_n x+1)^2}+\frac{r}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2}{a_n{}^2}+\frac{1}{a_n{}^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^2 g_{n,r}(x)}\sum_{\substack{k=0\\k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+2}}{(k+r)!}+\frac{1}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$=\frac{1}{3a_n{}^2(a_n x+1)^2}+\frac{r}{a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2}{a_n{}^2}+\frac{1}{a_n{}^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_n x+1)^2}{a_n{}^2}$$

$$+\frac{1}{a_n^{\,2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^2\left[1+\frac{2}{(a_nx+1)^2}+\frac{1}{3(a_nx+1)^4}+\frac{1}{(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\left(1+\frac{r+1}{(a_nx+1)^2}\right)\right]$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^2\left[1+\frac{1}{3(a_nx+1)^4}+\frac{r+1}{(a_nx+1)^4(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(a_nx+1)^2}\right]$$

elde edilir.

$$iv)\ A_n\left(t^3;r;x\right)=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^3\left[1+\frac{3}{(a_nx+1)^2}+\frac{5}{(a_nx+1)^4}+\frac{1}{4(a_nx+1)^6}\right)$$

$$+\frac{1}{(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\left(1+\frac{2r+7}{2(a_nx+1)^2}+\frac{2r^2+3r+2}{2(a_nx+1)^4}\right)\Bigg] \qquad (3.13)$$

dir.

İspat:

$$A_n\left(t^3;r;x\right)=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}\frac{t^3}{(a_nx+1)^3}\,dt$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\frac{t^4}{4(a_nx+1)^3}\Bigg|_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-3}}{(k+r)!}\frac{1}{4}\left(\left(\frac{k+r+1}{a_n}\right)^4-\left(\frac{k+r}{a_n}\right)^4\right)$$

$$=\frac{1}{g_{n,r}(x)a_n^{\,3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-3}}{(k+r)!}\left((k+r)^3+\frac{3}{2}(k+r)^2+(k+r)+\frac{1}{4}\right)$$

$$=I+II+III+\frac{1}{4a_n^{\,3}(a_nx+1)^3}$$

olup I, II ve III hesaplandığında;

$$I=\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-3}}{(k+r-1)!}(k+r)^2$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-3}}{(k+r-1)!}(k+r)^2$$

$$I=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^3 g}\sum_{\substack{k=0\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-1}}{(k+r)!}(k+r+1)^2$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-1}}{(k+r-1)!}(k+r)$$

$$+\frac{2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-1}}{(k+r-1)!}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)g_{n,r}(x)}+\frac{2}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{\substack{k=0\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r)!}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^3 g}\sum_{\substack{k=0\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r)!}(k+r+1)$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r)!}(k+r)$$

$$+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r)!}+\frac{2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2(a_n x+1)}{a_n{}^3}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r)!}+\frac{2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2(a_n x+1)}{a_n{}^3}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^3 g}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r)!}(k+r)$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r-1)!}+\frac{(a_n x+1)}{a_n{}^3}$$

$$+\frac{2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2(a_n x+1)}{a_n{}^3}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r+2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_n x+1)}{a_n{}^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+1}}{(k+r-1)!}+\frac{3(a_n x+1)}{a_n{}^3}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

$$I=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r+2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_n x+1)}{a_n{}^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{1}{a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{\substack{k=0\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k+3}}{(k+r)!}+\frac{3(a_n x+1)}{a_n{}^3}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

$$=\frac{r^2}{a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{r+2}{a_n{}^3(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_n x+1)}{a_n{}^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{(a_n x+1)^3}{a_n{}^3}+\frac{3(a_n x+1)}{a_n{}^3}+\frac{1}{a_n{}^3(a_n x+1)}$$

olarak elde edilir. Şimdi ise *II*. eşitliğini hesaplayalım.

$$II=\frac{3}{2a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-3}}{(k+r-1)!}(k+r)$$

$$=\frac{3r}{2a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{3}{2a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-3}}{(k+r-1)!}(k+r-1+1)$$

$$=\frac{3r}{2a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{3}{2a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-3}}{(k+r-2)!}$$

$$+\frac{3}{2a_n{}^3 g_{n,r}(x)}\sum_{\substack{k=0\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_n x+1)^{2k-1}}{(k+r)!}$$

$$=\frac{3r}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}$$

$$+\frac{3}{2a_n^{\,3}g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-3}}{\left(k+r-2\right)!}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)}$$

$$=\frac{3r}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}$$

$$+\frac{3}{2a_n^{\,3}g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{\substack{k=0\\ k\to k+2}}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-1}}{\left(k+r\right)!}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)}$$

$$II=\frac{3r}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)}$$

$$=\frac{3r}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{3}{2a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{3}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)}$$

olarak bulunur. *III*. eşitlik hesaplanırsa;

$$III=\frac{1}{a_n^{\,3}g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-3}}{\left(k+r-1\right)!}$$

$$=\frac{1}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{1}{a_n^{\,3}g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-3}}{\left(k+r-1\right)!}$$

$$=\frac{1}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{1}{a_n^{\,3}g_{n,r}\left(x\right)}\sum_{\substack{k=0\\ k\to k+1}}^{\infty}\frac{\left(a_nx+1\right)^{2k-1}}{\left(k+r\right)!}$$

$$=\frac{1}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{1}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)}$$

olur.

I.,*II*. ve *III*. eşitlikler birleştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$I+II+III+\frac{1}{4a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3}$$

$$=\frac{1}{4a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3}+\frac{r^2}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)^3\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{r+2}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}$$

$$+\frac{\left(a_nx+1\right)}{a_n^{\,3}\left(r-1\right)!\,g_{n,r}\left(x\right)}+\frac{\left(a_nx+1\right)^3}{a_n^{\,3}}+\frac{3\left(a_nx+1\right)}{a_n^{\,3}}+\frac{1}{a_n^{\,3}\left(a_nx+1\right)}$$

$$+\frac{3r}{2a_n^{\,3}(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{3}{2a_n^{\,3}(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{3}{a_n^{\,3}(a_nx+1)}+\frac{1}{a_n^{\,3}(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n^{\,3}(a_nx+1)}$$

$$=\frac{2r^2+3r+2}{2a_n^{\,3}(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{4a_n^{\,3}(a_nx+1)^3}+\frac{2r+7}{2a_n^{\,3}(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_nx+1)}{a_n^{\,3}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{(a_nx+1)^3}{a_n^{\,3}}+\frac{3(a_nx+1)}{a_n^{\,3}}+\frac{5}{a_n^{\,3}(a_nx+1)}$$

$$I+II+III+\frac{1}{4a_n^{\,3}(a_nx+1)^3}$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^3\left[1+\frac{3}{(a_nx+1)^2}+\frac{5}{(a_nx+1)^4}+\frac{1}{4(a_nx+1)^6}+\frac{1}{(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{2r^2+3r+2}{2(a_nx+1)^6(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right.$$

$$\left.+\frac{2r+7}{2(a_nx+1)^4(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right]$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^3\left[1+\frac{3}{(a_nx+1)^2}+\frac{5}{(a_nx+1)^4}+\frac{1}{4(a_nx+1)^6}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\left(1+\frac{2r+7}{2(a_nx+1)^2}+\frac{2r^2+3r+2}{2(a_nx+1)^4}\right)\right]$$

sonucu elde edilir.

3.3. A_n Operatörü İçin Bazı Lemmalar

Lemma 3.3.1: $x,t\in R_0$ olmak üzere $A_n(f;r;.)$ operatörü için,

$$i)\ A_n(t-x;r;x)=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2a_n(a_nx+1)}+\frac{1}{a_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)},\tag{3.14}$$

$$ii)\ A_n\left((t-x)^2;r;x\right)=\frac{2}{a_n^{\,2}}+\frac{2(r-1)!\,g_{n,r}(x)+6(r+1)+6(a_nx+1)^2}{6a_n^{\,2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{-6x(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)-6x(a_nx+1)!}{6a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{-6x(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{6a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)} \tag{3.15}$$

$$+\frac{6(a_nx+1)^4(r-1)!\,g_{n,r}(x)+6a_n{}^2x^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{6a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)},$$

$iii)$ $A_n\left((t-x)^3;r;x\right)=\frac{1}{a_n^3}$

$$+\frac{2(a_n^2+a_n+1)(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)+2r^2+3r+2+4(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{(2r+7)(a_nx+1)^2+6(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)+a_n{}^3(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{-2x(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)-6x(r+1)(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)-12a_n(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{-3xa_n(a_nx+1)^3-6xa_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)+6x^2a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{6x^2a_n{}^3(a_nx+1)^2+6x^2a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)} \tag{3.16}$$

dir.

İspat:

$$i)\ A_n(t-x;r;x)=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\left(\frac{t^2}{2(a_nx+1)}-xt\right)\Bigg|_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}$$

$$=\frac{1}{2a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)!}+\frac{1}{a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)!}(k+r)-x$$

$$=\frac{1}{2a_n(a_nx+1)}+\frac{1}{a_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_ng_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r-1)!}-x$$

$$=\frac{1}{2a_n(a_nx+1)}+\frac{1}{a_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n g_{n,r}(x)}\sum_{\substack{k=0\\k\to k+1}}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k+1}}{(k+r)!}-x$$

$$=\frac{1}{2a_n(a_nx+1)}+\frac{1}{a_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_nx+1)}{a_n}+\frac{a_nx+1-a_nx}{a_n}$$

$$=\frac{2}{a_n}+\frac{1}{2a_n(a_nx+1)}+\frac{1}{a_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

olarak elde edilir.

$$ii)\ A_n\left((t-x)^2;r;x\right)=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}\left(\frac{t^2}{(a_nx+1)^2}-2\frac{tx}{(a_nx+1)}+x^2\right)dt$$

$$=\frac{1}{3a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2}+\frac{r+1}{a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{a_n^{\ 2}}+\frac{1}{a_n^{\ 2}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{(a_nx+1)^2}{a_n^{\ 2}}-\frac{x}{a_n(a_nx+1)}-\frac{x}{a_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}-\frac{x(a_nx+1)}{a_n}+x^2$$

$$=\frac{2}{a_n^{\ 2}}+\frac{(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3(r+1)+3a_n^{\ 2}x^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3x^2a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{3a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$-\frac{3xa_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)-3xa_n(a_nx+1)-3xa_n(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3(a_nx+1)^2}{3a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

elde edilir.

$iii)$

$$A_n\left((t-x)^3;r;x\right)=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}\left(\frac{t^3}{(a_nx+1)^3}-3\frac{t^2x}{(a_nx+1)^2}+3\frac{tx^2}{(a_nx+1)}-x^3\right)dt$$

$$=\frac{2r^2+3r+2}{2a_n^{\ 3}(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{4a_n^{\ 3}(a_nx+1)^3}+\frac{2r+7}{2a_n^{\ 3}(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_nx+1)}{a_n^{\ 3}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{(a_nx+1)^3}{a_n^{\ 3}}$$

$$+\frac{3(a_nx+1)}{a_n^{\ 3}}+\frac{5}{a_n^{\ 3}(a_nx+1)}-\frac{x}{a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2}-\frac{3x(r+1)}{a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}-\frac{6}{a_n^{\ 2}}-\frac{3x}{a_n^{\ 2}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}-\frac{3x(a_nx+1)^2}{a_n^{\ 2}}$$

$$+\frac{3x^2}{a_n(a_nx+1)}+\frac{3x^2}{a_n(a_nx+1)(r-1)!g_{n,r}(x)}+\frac{3x^2}{a_n(a_nx+1)}-x^3$$

$$=\frac{1}{a_n^3}+\frac{2(a_n^2+a_n+1)(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)+2r^2+3r+2+4(a_nx+1)(r-1)!g_{n,r}(x)+(2r+7)(a_nx+1)^2}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{6(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)+a_n{}^3(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)-2x(a_nx+1)(r-1!)g_{n,r}(x)-6x(r+1)(a_nx+1)(r-1)!g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{-12a_n(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)-3xa_n(a_nx+1)^3-6xa_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{6x^2a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)+6x^2a_n{}^3(a_nx+1)^2+6x^2a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

şeklinde elde edilir.

Lemma 3.3.2: Burada $\beta_{s,s}(r)=r^{s-1}$, $s-1.$ dereceden polinomlar; $\alpha_{s,j}$ ler s, j lere bağlı; γ_j ler ise sadece j lere bağlı sabitlerdir. Ayrıca $\beta_{s,1}$, $\alpha_{s,j}$ de sabit olup $\alpha_{s,s}=\alpha_{s,1}=\gamma_1=1$ olmak üzere

$$A_n(t^s;r;x)=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^s\left\{\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{s,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{s,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

(3.17)

dir.

İspat:

İspat için Walczak'ın [13] nolu çalışmasındaki Lemma(2)deki yöntemi ve bu Lemma'nın sonuçları kullanılacaktır. $s=1,2,3$ için (3.17)nin sağlandığı daha önce verildi. $f(x)=x^j, 1\le j\le s$ için (3.17)nin $s=s$ ile birlikte sağladığını kabul edip $s=s+1$ için doğruluğunu gösterelim.

(3.8) ve (3.9)daki özellikleri de kullanılarak

$$A_n\left(t^{s+1};r;x\right)=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\int_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}\frac{t^{s+1}}{(a_nx+1)^{s+1}}\,dt$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\left.\frac{t^{s+2}}{(s+2)(a_nx+1)^{s+1}}\right|_{\frac{k+r}{a_n}}^{\frac{k+r+1}{a_n}}$$

$$=\frac{a_n}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r)!}\left(\frac{1}{s+2}\left(\left(\frac{k+r+1}{a_n}\right)^{s+2}-\left(\frac{k+r}{a_n}\right)^{s+2}\right)\right)$$

elde edilir.

Daha sonra, $\left(\frac{k+r+1}{a_n}\right)^{s+2}$ için Binom açılımı yapılarak işleme devam edildiğinde

$$A_n\left(t^{s+1};r;x\right)=\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r)!}$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{s+2}\binom{s+2}{i}(k+r)^{(s+2)-i}-(k+r)^{s+2}\right]$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r)!}\left[\sum_{i=0}^{s+2}\binom{s+2}{i}(k+r)^{(s+2)-i}-(k+r)^{s+2}\right]$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r)!}\left[\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}(k+r)^{(s+2)-i}+1\right]$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r)!}+\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r)!}\left[\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}(k+r)^{(s+2)-i}\right]$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}(a_nx+1)^{s+1}}+\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r-1)!}\left[\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}(k+r)^{(s+1)-i}\right]$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{\,s+1}(a_nx+1)^{s+1}}+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)a_n^{\,s+1}(a_nx+1)^{s+1}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{1}{(s+2)a_n^{s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s+1)}}{(k+r-1)!}\left[\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}(k+r)^{(s+1)-i}\right]$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)^{s+1}}+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)^{s+1}(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{1}{(s+2)a_n^{s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-(s-1)}}{(k+r)!}\left[\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}(k+r+1)^{(s+1)-i}\right]$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)^{s+1}}+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)^{s+1}(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}}{(s+2)a_n^{s+1}g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k-1}}{(k+r)!}\left[\sum_{l=0}^{(s+1)-i}\binom{(s+1)-i}{l}(k+r)^{l}\right]$$

elde edilir. Son eşitlikte $i=s+2$ alınıp, bu eşitlik $(a_nx+1)^l a_n^{\ l}$ ile çarpıp bölünürse

$$A_n(t^{s+1};r;x)=\frac{1}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)^{s+1}}+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)^{s+1}(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{\binom{s+2}{s+1}}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)}+\frac{1}{(s+2)a_n^{s+1}(a_nx+1)}\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}$$

$$\times\sum_{l=0}^{(s+1)-i}\binom{(s+1)-i}{l}(a_nx+1)^{l}a_n^{\ l}\underbrace{\frac{1}{g_{n,r}(x)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx+1)^{2k}}{(k+r)!}\frac{(k+r)^{l}}{a_n^{\ l}(a_nx+1)^{l}}}_{A_n^{*}(t^{l};r;x)}$$

elde edilir. Buradaki A_n^{*} operatörü Walczak'ın [13]de çalıştığı operatördür. Bu operatör yerine yazılır ve gerekli işlemler yapıldığında

$$A_n\left(t^{s+1};r;x\right)=\frac{1}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)^{s+1}}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)^{s+1}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{\binom{s+2}{s+1}}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)}$$

$$+\frac{1}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)}\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}\sum_{l=0}^{(s+1)-i}\binom{(s+1)-i}{l}(a_nx+1)^l a_n^{\ l}A_n^{*}\left(t^l;r;x\right)$$

$$=\frac{1}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)^{s+1}}+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)^{s+1}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{\binom{s+2}{s+1}}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)}$$

$$+\frac{1}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)}\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}\sum_{l=1}^{(s+1)-i}\binom{(s+1)-i}{l}(a_nx+1)^l a_n^{\ l}A_n^{*}\left(t^l;r;x\right)$$

elde edilir. Burada

$$(a_nx+1)^l a_n^{\ l}A_n^{*}\left(t^l;r;x\right)=(a_nx+1)^l a_n^{\ l}(a_nx+1)^l\frac{1}{a_n^{\ l}}$$

$$\times\left\{\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{l,j}+\frac{\beta_{l,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

$$=(a_nx+1)^{2l}\left\{\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{l,j}+\frac{\beta_{l,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

dır. Bu eşitlik ve en son ifade de kullanılarak gerekli hesaplamalar yapıldığında;

$$A_n\left(t^{s+1};r;x\right)=\frac{1}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)^{s+1}}+\frac{\sum_{i=1}^{s+11}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)^{s+1}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{\binom{s+2}{s+1}}{(s+2)a_n^{\ s+1}(a_nx+1)}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}}{(s+2)a_n^{\,s+1}(a_n x+1)}+\frac{(a_n x+1)^{2(s+1)}}{(s+2)(a_n(a_n x+1))^{s+1}}\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}$$

$$\times\sum_{j=1}^{(s+1)-i}\sum_{l=j}^{s}\binom{(s+1)-i}{l}\frac{1}{(a_n x+1)^{2(j-s-l-1)}}\left(\alpha_{l,j}+\frac{\beta_{l,j}(r)}{(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^{s+1}\left\{\frac{1}{(s+2)(a_n x+1)^{2(s+1)}}+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)(a_n x+1)^{2(s+1)}(r-1)!\,g_{n,r}(x)}+\frac{1}{(a_n x+1)^{s+2}}+\frac{\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}}{(s+2)(a_n x+1)^{s+2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(s+2)}\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}\sum_{j=1}^{(s+1)-i}\sum_{l=j}^{s}\binom{(s+1)-i}{l}\frac{1}{(a_n x+1)^{2(j-s-l-1)}}\left(\alpha_{l,j}+\frac{\beta_{l,j}(r)}{(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^{s+1}\left\{\frac{1}{(a_n x+1)^{2.s}}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{(s+1)-1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)+\frac{\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}}{(s+2)(a_n x+1)^{2s}}+\frac{1}{(s+2)(a_n x+1)^{2(s+1)}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(s+2)}\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=s-j+1}^{s}\binom{s}{l}\frac{1}{(a_n x+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{l,l+j-2}+\frac{\beta_{l,l+j-2}(r)}{(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^{s+1}\left\{\frac{1}{(a_n x+1)^{2s}}\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{s+1}\binom{s+2}{i}r^{(s+1)-i}}{(s+2)(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)+\frac{\sum_{i=1}^{s}\binom{s+2}{i}}{(s+2)(a_n x+1)^{2s}}+\frac{1}{(s+2)(a_n x+1)^{2(s+1)}}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=s-j+1}^{s}\binom{s+1}{l}\frac{1}{(a_n x+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{l,j}+\frac{\beta_{l,j}(r)}{(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

$$=\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^{s+1}\left\{\sum_{j=1}^{s+1}\frac{1}{(a_n x+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{s+1,j}+\frac{\gamma_j}{(a_n x+1)^2}+\frac{\beta_{s+1,j}(r)}{(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

elde edilir. Burada $s=s+1$ için (3.17)nin ispatında gerekli olan $\alpha_{s+1,s+1}=1,\ \alpha_{s+1,1}=\gamma_1=1,\ \beta_{s+1,j+1}(r)=r^j$ ler j. dereceden polinomlar ve $\beta_{s+1,1}$, $\alpha_{s+1,j+1}$ ve γ_{j+1} ler sabitlerdir.

Lemma 3.3.3: $p \in N_0, r \in N$ olmak üzere

$$\left\| A_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;.\right)\right\|_p \leq M_2, \quad n \in N \tag{3.18}$$

ve $\forall f \in C_p$ için

$$\left\| A_n(f;r;.)\right\|_p \leq M_3 \, \|f\|_p, \; n \in N \tag{3.19}$$

eşitsizlikleri sağlayacak şekilde $M_2 \equiv M_2(p,r), M_3 \equiv M_3(p,r)$ sabitleri vardır.

Not: (3.6),(3.7)-(3.9) ve (3.19) eşitsizliği $\forall p \in N_0, \, n \in N$ için A_n operatörlerinin $C_p$den $C_p$ye için pozitif lineer operatör olduğunu gösterir.

İspat:

İspatı yaparken $\omega_p(x) = \dfrac{1}{1+x^p}$ ağırlık fonksiyonunun (3.4)deki tanımı göz önüne alınarak $\omega_0(t) = 1, \omega_1(t) = \dfrac{1}{1+t}, \omega_p(t) = \dfrac{1}{1+t^p}, \, p > 1$ eşitliklerinden faydalanılacaktır.

$p = 0$ için

$$\omega_0(x)A_n\left(\frac{1}{w_0(t)};r;x\right) = \omega_0(x)A_n(1;r;x) = \omega_0(x).1$$

dir.

Eşitliğin önce her iki tarafın mutlak değeri, daha sonra $x \in R_0$ üzerinden supremumu alınırsa,

$$\sup\left|\omega_0(x)A_n\left(\frac{1}{\omega_0(t)};r;x\right)\right| \leq M_3(p;r)$$

olur.

$p \geq 1$ için

$$\omega_p(x)A_n\left(\tfrac{1}{w_p(t)};r;x\right) = \omega_p(x)A_n\left(1+t^p;r;x\right) \tag{3.20}$$

olur.

(3.1), $(3.10)-(3.13)$de elde edilenler göz önüne alınırsa

$$\omega_p(x)A_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;x\right)=\frac{1}{1+x^p}A_n\left(1+t^p;r;x\right)=\omega_p(x)\left\{A_n(1;r;x)+A_n\left(t^p;r;x\right)\right\}$$

$$=\omega_p(x)\left\{1+A_n\left(t^p;r;x\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{1+x^p}+\frac{\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p}{\left(1+x^p\right)}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{p,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p,j}}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)$$

olur. Sonra

$$\omega_p(x)A_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;x\right)\leq 1+p\left(\alpha_{p,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p,j}}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)$$

$$\leq M_2(p;r)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafın önce mutlak değeri sonra $x\in R_0$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\sup\omega_p(x)A_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;x\right)\leq\sup\left\{1+p\left(\alpha_{p,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p,j}}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

$$\left\|A_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;x\right)\right\|_p\leq M_3(p;r)$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir.

İspatın diğer kısmı için A_n operatörün tanımı, (3.2)-(3.3) ve ağırlık fonksiyonu kullanılarak

$$\left\|A_n(f;r;x)\right\|_p \le \left\|A_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;x\right)\right\|_p \|f\|_p$$

$$\left\|A_n(f;r;x)\right\|_p \le M_3(p;r)\|f\|_p$$

elde edilir. (3.15) uygulanırsa, (3.19) da istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 3.3.4: $p \in N_0, r \in N$ olmak üzere

$$\left\|A_n\left(\frac{(t-\cdot)^2}{\omega_p(t)};r;\cdot\right)\right\|_p \le \frac{M_4}{a_n^2} \tag{3.21}$$

dir. Burada $M_4 \equiv M_4(p,r)$dir.

İspat:

İspatı yaparken (3.4)de tanımlanan $\omega_p(x)$ ağırlık fonksiyonunun özelliklerinden faydalanılacaktır.

$p = 0$ için (3.15) kullanılarak

$$\omega_0(x)A_n\left(\frac{(t-x)^2}{\omega_0(t)};r;x\right) = \omega_0(x)A_n\left((t-x)^2;r;x\right)$$

$$= \omega_0(x)\left[\frac{2}{a_n^{\;2}}\right.$$

$$+\frac{(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3(r+1)+3a_n^{\;2}x^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3x^2a_n^{\;2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{3a_n^{\;2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$-\frac{3xa_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)-3xa_n(a_nx+1)-3xa_n(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3(a_nx+1)^2}{3a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

elde edilir. Son eşitliğin önce her iki tarafın mutlak değeri, daha sonra $x \in R_0$ üzerinden supremumu alınırsa,

$$\sup\left(\left|\omega_0(x)A_n\left((t-x)^2;r;x\right)\right|\right)$$

$$\leq \sup \omega_0(x)\left[\left|\frac{2}{a_n^{\ 2}}\right.\right.$$

$$+\frac{(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3(r+1)+3a_n^{\ 2}x^2(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3x^2a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{3a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$-\frac{3xa_n(a_nx+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)-3xa_n(a_nx+1)-3xa_n(a_nx+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)+3(a_nx+1)^2}{3a_n^{\ 2}(a_nx+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

ve böylece

$$\left\|A_n\left(\frac{(t-\cdot)^2}{\omega_p(t)};r;\cdot\right)\right\|_p \leq \frac{M_4}{a_n^2}$$

sonucu elde edilir.

$p=1$ için (3.15) kullanılarak

$$\omega_p(x)A_n\left(\frac{(t-x)^2}{w_1(t)};r;x\right)=\omega_1(x)A_n\left(\frac{(t-x)^{\ 2}}{1/1+t^p};r;x\right)=\omega_1(x)A_n\left((t-x)^2(1+t);r;x\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$\begin{aligned}(t-x)^2(1+t)&=(t-x)^2+t(t-x)^2\\&=t\left(t^2-2xt+x^2\right)\\&=t^3-2xt^2+tx^2\\&=t^3-2xt^2+tx^2-xt^2+2tx^2-2tx^2\end{aligned}$$

ifadesi ve operatörün lineerliği kullanılırsa

$$\omega_p(x)A_n\left((t-x)^2(1+t);r;x\right)=\omega_p(x)\left[A_n\left((t-x)^2;r;x\right)+A_n\left(t(t-x)^2;r;x\right)\right]$$

$$= \omega_p(x)\left[A_n\left(\left(t^2 - 2xt + x^2\right)r; x\right) + A_n\left(t^3 - 2xt^2 + tx^2; r; x\right)\right]$$
$$= \omega_p(x)\left[A_n\left(t^2; r; x\right) - 2xA_n(t; r; x) + x^2 A_n(1; r; x) + A_n\left(t^3; r; x\right) - 2xA_n\left(t^2; r; x\right) + x^2 A_n(t; r; x)\right]$$
$$= \omega_p(x)\left[A_n\left((t-x)^3; r; x\right) + (1+x)A_n\left((t-x)^2; r; x\right)\right]$$

elde edilir. Burada

$$(t-x)^3 = t^3 - 3xt^2 + 3tx^2 - x^3$$

$$(t-x)^3 + (1+x)(t-x)^2 = (t-x)^2(t-x+1+x) = (t-x)^2(t+1)$$

eşitliği ve (3.10) kullanıldığında

$$\omega_p(x)A_n\left((t-x)^2(t+1); r; x\right) = \omega_1(x)\left[A_n\left((t-x)^3; r; x\right) + (1+x)A_n\left((t-x)^2; r; x\right)\right]$$

$$= \omega_1(x)\left\{\left[\frac{1}{a_n^3} + \frac{2\left(a_n^2 + a_n + 1\right)(a_n x + 1)^3 (r-1)!\, g_{n,r}(x) + 2r^2 + 3r + 2}{2a_n{}^3 (a_n x + 1)^3 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}\right.\right.$$

$$+ \frac{4(a_n x + 1)(r-1)!\, g_{n,r}(x) + (2r+7)(a_n x + 1)^2 + 6(a_n x + 1)^3 (r-1)!}{2a_n{}^3 (a_n x + 1)^3 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}$$

$$+ \frac{+ a_n{}^3 (a_n x + 1)^2 (r-1)!\, g_{n,r} - 2x(a_n x + 1)(r-1)!\, g_{n,r}(x) - 6x(r+1)(a_n x + 1)(r-1)!\, g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3 (a_n x + 1)^3 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}$$

$$+ \frac{-12a_n (a_n x + 1)^3 (r-1) - 3xa_n (a_n x + 1)^3 - 6xa_n{}^3 (a_n x + 1)^3 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3 (a_n x + 1)^3 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}$$

$$+ \frac{6x^2 a_n{}^2 (a_n x + 1)^2 (r-1)!\, g_{n,r}(x) + 6x^2 a_n{}^3 (a_n x + 1)^2 + 6x^2 a_n{}^2 (a_n x + 1)^2 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3 (a_n x + 1)^3 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}$$

$$+ (1+x)\left[\frac{2}{a_n{}^2}\right.$$

$$+ \frac{2(r-1)!\, g_{n,r}(x) + 6(r+1) + 6(a_n x + 1)^2 - 6x(a_n x + 1)(r-1)!\, \mathrm{g}_{\mathrm{n,r}}(\mathrm{x}) - 6x(a_n x + 1)(r-1)!}{6a_n{}^2 (a_n x + 1)^2 (r-1)!\, g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{-6x(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)+6a_n{}^2x^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)+6(a_n x+1)^4(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{6a_n{}^2(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\Bigg]\Bigg]\Bigg\}$$

elde edilir. Daha sonra her iki tarafın önce mutlak değeri, sonra $x \in R_0$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\left\| A_n\left(\frac{(t-\cdot)^2}{\omega_p(t)};r;\cdot\right)\right\|_p \leq \frac{M_4}{a_n^2}$$

sonucu elde edilir.

$p \geq 2$ için

$$\omega_p(x)A_n\left(\frac{(t-x)^2}{w_p(t)};r;x\right)=\omega_p(x)A_n\left(\frac{(t-x)^{\;2}}{1/1+t^p};r;x\right)$$

$$=\omega_p(x)A_n\left(t^p(t-x)^2;r;x\right)+\omega_p(x)A_n(1;r;x)$$

olur. Bu son eşitlikte

$$t^p(t-x)^2=t^p\left(t^2-2xt+x^2\right)=t^{p+2}-2xt^{p+1}+x^2t^p$$

eşitliği, operatörün lineerliği ve genellemesi kullanılırsa

$$\omega_p(x)A_n\left(\frac{(t-x)^2}{w_p(t)};r;x\right)$$

$$=\omega_p(x)\Bigg\{\Bigg[\Bigg[\frac{1}{a_n^3}+\frac{2\left(a_n^2+a_n+1\right)(a_n x+1)^3(r-1)!\,\mathrm{g}_{\mathrm{n,r}}(\mathrm{x})+2r^2+3r+2}{2a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{4(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)+(2r+7)(a_n x+1)^2+6(a_n x+1)^3(r-1)!+a_n{}^3(a_n x+1)^2(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{-2x(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)-6x(r+1)(a_n x+1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{-12a_n(a_n x+1)^3(r-1)-3xa_n(a_n x+1)^3-6xa_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_n x+1)^3(r-1)!\,g_{n,r}(x)}$$

$$+\frac{6x^2a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)+6x^2a_n{}^3(a_nx+1)^2+6x^2a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}{2a_n{}^3(a_nx+1)^3(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$+(1+x)\left[\frac{2}{a_n{}^2}+\right.$$

$$+\frac{(r-1)!g_{n,r}(x)+3(r+1)+3a_n{}^2x^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)+3x^2a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}{3a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$-\frac{3xa_n(a_nx+1)(r-1)!g_{n,r}(x)-3xa_n(a_nx+1)-3xa_n(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)+3(a_nx+1)^2}{3a_n{}^2(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}$$

$$=\omega_p(x)\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p\left\{\frac{(a_nx+1)^2}{a_n^2}\left[\sum_{j=1}^{p+2}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{p+2,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p+2,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right]\right.$$

$$-2x\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p\left[\frac{(a_nx+1)}{a_n}\sum_{j=1}^{p+1}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{p+1,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p+1,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right]$$

$$\left.+x^2\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p\left[\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{p,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right]\right\}$$

$$=\omega_p(x)\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p\left\{\frac{(a_nx+1)^2}{a_n^2}\left[1+\frac{1}{(a_nx+1)^2}+\frac{1}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right]\right.$$

$$+\left[\sum_{j=2}^{p+2}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{p+2,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p+2,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right]$$

$$-2x\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p\left[\frac{(a_nx+1)}{a_n}\left(1+\frac{1}{(a_nx+1)^2}+\frac{1}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right]$$

$$+\sum_{j=2}^{p+1}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{p+1,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p+1,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)$$

$$+x^2\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p\left[\left(1+\frac{1}{(a_nx+1)^2}+\frac{1}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right]$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{p}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-1)}}\left(\alpha_{p,j}+\frac{\gamma_j}{(a_nx+1)^2}+\frac{\beta_{p,j}(r)}{(a_nx+1)^2(r-1)!g_{n,r}(x)}\right)\right\}$$

elde edilir. Son eşitlikte, $\frac{1}{(a_nx+1)^2}\le 1$, $\alpha_{p+2,1}=1, \alpha_{p+1,1}=1, \alpha_{p,1}=1$, $\frac{r!}{(r-1)!}=r$,

$\frac{1}{g}\le r!$ olmak üzere, Lemma $(3.3.2)$de kullanılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\omega_p(x)A_n\left(t^p(t-x)^2;r;x\right)\le\omega_p(x)\frac{1}{a_n^2}\frac{\left(x+\frac{1}{a_n}\right)^p}{1+x^p}$$

$$\times\left\{2+r+\left[\sum_{j=2}^{p+2}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-2)}}\left(\alpha_{p+2,j}+\gamma_j+r\beta_{p+2,j}(r)\right)\right]\right.$$

$$-2x\sum_{j=2}^{p+1}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-2)}}\left(\alpha_{p+1,j}+\gamma_j+r\beta_{p+1,j}(r)\right)$$

$$\left.+x^2\sum_{j=2}^{p}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-2)}}\alpha_{p,j}+\gamma_j+r\beta_{p,j}(r)\right\}$$

olur. Yukarıdaki son eşitsizlikte her iki tarafın önce mutlak değeri, sonra $x\in R_0$ da supremumu alınırsa,

$$\sup\omega_p(x)\left|A_n\left(t^p(t-x)^2;r;x\right)\right|\le\omega_p(x)\frac{1}{a_n^2}\sup\left|1\times[2+r]M_4(p,r)\right|\sum_{j=2}^{p+2}\frac{1}{(a_nx+1)^{2(j-2)}}M(p,r)$$

$$\le M_1(p,r)\,\frac{1}{a_n^2}$$

istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.1: $r \in N$ ve $p \in N_0$ olsun. $\forall f \in C_p^1$ için

$$\left\| A_n(f;r;.) - f(.) \right\|_p \leq \frac{M_5}{a_n} \left\| f' \right\|_p \tag{3.22}$$

olacak şekilde $M_5 \equiv M_5(p;r)$ sabiti vardır.

İspat:

$x \in R_0$ olsun. Böylece $f \in C_p^1$ ve $t \in R_0$ için

$$f(t) - f(x) = \int_x^t f'(u)du \tag{3.23}$$

dir. (3.23) ün her iki tarafına A_n operatörü uygulanırsa;

$$A_n(f(t) - f(x)) = A_n\left(\int_x^t f'(u)du; r; x \right) \tag{3.24}$$

yazılabilir. Bu ifadedeki integral

$$\left| \int_x^t f'(u)du \right| \leq \left| \int_x^t \left[(1+u^p)\frac{f'(u)}{1+u^p} + (1+u^p)\frac{f'(u)}{1+u^p} \right] du \right|$$

$$\leq \int_x^t \left[(1+u^p)\sup_{u\in R_0}\frac{|f'(u)|}{1+u^p} + (1+u^p)\sup_{u\in R_0}\frac{|f'(u)|}{1+u^p} \right] du$$

$$\leq \left\| f' \right\|_p \left[\frac{1}{\omega_p(x)} + \frac{1}{\omega_p(t)} \right] |t-x| \qquad x,t \in R_0 \tag{3.25}$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece,

$$\omega_p(x)|A_n(f(t) - f(x))| = \omega_p(x)\left| A_n\left(\int_x^t f'(u)du \right) \right|$$

$$\leq \left\| f' \right\|_p \left\{ A_n(|t-x|;r;x) + \omega_p(x)A_n\left(\frac{|t-x|}{\omega_p(t)};r;x \right) \right\}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikteki ifadelere Hölder eşitsizliği uygulanır ve Lemma (3.14)- (3.16) kullanılırsa

$$A_n(|t-x|;r;x) \le \left\{A_n\left((t-x)^2;r;x\right)\right\}^{1/2}\left\{A_n(1;r;x)\right\}^{1/2} \le \frac{M_6}{a_n} \tag{3.26}$$

ve

$$\omega_p(x)A_n\left(\frac{|t-x|}{\omega_p(t)};r;x\right) \le \omega(x)\left\{A_n\left(\frac{(t-x)^2}{\omega_p(t)};r;x\right)\right\}^{1/2}\left\{A_n\left(\frac{1}{\omega_p(t)};r;x\right)\right\}^{1/2} \le \frac{M_7}{a_n} \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.26)- (3.27) sonuçları birleştirilirse

$$\left\|A_n(f;r;\cdot)-f(\cdot)\right\|_p \le \frac{M_5}{a_n}\left\|f'\right\|_p$$

istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.3.2: $r \in N$ ve $p \in N_0$ olsun. Bu taktirde $\forall f \in C_p^1$ için

$$\left\|A_n(f;r;\cdot)-f(\cdot)\right\|_p \le M_8\omega_1\left(f;C_p;\tfrac{1}{a_n}\right) \tag{3.28}$$

dir. Burada $M_8 \equiv M_8(p;r)$ dir.

İspat:

$f \in C_p^1$ için

$$f_h(x) := \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)dt\,,\ x \in R_0, h > 0 \tag{3.29}$$

şeklindeki Steklov fonksiyonunu göz önüne alalım. Diğer taraftan

$$f(x) := \frac{1}{h}\int_0^h f(x)dt$$

yazılabilir. (3.29)dan

$$f_h(x) - f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)dt - \frac{1}{h}\int_0^h f(x)dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h [f(x+t) - f(x)]dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h \Delta_t f(x)dt \tag{3.30}$$

olup burada $f_h'(x)=\frac{1}{h}\Delta_t f(x)$dır. (3.30)un her iki tarafının burada önce mutlak değeri, sonra da $x\in R_0$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\sup\left|f_h(x)-f(x)\right|\le \sup\frac{1}{h}\int_0^h \left|\Delta_h f(x)\right|dt=\sup\frac{1}{h}h\left|\Delta_h f(x)\right|$$

$$\left\|f_h-f\right\|_p\le \omega_1(f;C_p;t),$$

$$\left\|f_h'\right\|_p\le h^{-1}\omega_1(f;C_p;h) \tag{3.31}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $f\in C_p$ ve $h>0$ için $f_h'\in C_p^1$ olduğu söylenebilir. Böylece

$$w_p(x)(A_n(f;r;x)-f(x))\le w_p(x)\{A_n(f-f_h;x)-f(x)+A_n((f_h;x)-f_h(x)+f_h(x))-f(x)\}$$

$$\le w_p(x)\left\{\underbrace{\left|A_n(f-f_h;x)\right|}_{L_1(x)}+\underbrace{\left|A_n(f_h;x)-f_h(x)\right|}_{L_2(x)}+\underbrace{\left|f_h(x)-f(x)\right|}_{L_3(x)}\right\}$$

yazılabilir. Yukarıdaki parantez içindeki ifadeler ayrı ayrı hesaplandığında; $L_1(x)$ için söz konusu ifadenin her iki tarafının $x\in R_0$ üzerinden supremumu alınıp Lemma$(3.3.3)$ kullanılırsa

$$\sup\omega_p(x)\left|A_n(f-f_h;x)\right|=\left\|A_n(f-f_h;x)\right\|_p\le M_2\left\|(f-f_h;x)\right\|_p$$

olur.

ω_1, (3.4) de tanımlanan süreklilik modülü olmak üzere, (3.31)den

$$\left\|A_n(f-f_h;x)\right\|_p\le M_2\left\|(f-f_h;x)\right\|_p\le M_2\omega_1(f;C_p;h) \tag{3.32}$$

elde edilir.

Aynı şekilde $L_2(x)$ ifadesinin her iki tarafının $x\in R_0$ üzerinden supremumu alınıp Teorem$(3.3.1)$ kullanılırsa

$$\sup\omega_p(x)\left|A_n(f_h;x)-f_h(x)\right|=\left\|A_n(f_h;x)-f_h(x)\right\|_p\le\frac{M_5}{a_n}\left\|f_h'\right\|_p\le\frac{M_5}{a_nh}\omega_1(f;C_p;h)$$

(3.33)

elde edilir.

Son olarak benzer işlemler, $L_3(x)$ için yapılırsa;

$$\omega_p(x)L_3(x)=\omega_p(x)\left|f_h(x)-f(x)\right|$$

ve yukarıdaki son eşitliğin her iki tarafının $x\in R_0$ üzerinden supremumu alınırsa,

$$\left\|L_3\right\|_p \le \sup w_p(x)\left|f_h(x)-f(x)\right| \le \omega_1\left(f;C_p;h\right) \tag{3.34}$$

bulunur. $L_1(x)$, $L_2(x)$ ve $L_3(x)$ için sonuçlar birleştirilir, sabit $n\in N$ için $h=\dfrac{1}{a_n}$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\begin{aligned}\sup\omega_p(x)\left|\left(A_n(f;r;x)-f(x)\right)\right| = \left\|A_n(f;x)-f(x)\right\|_p &\le \left(1+M_2+\frac{M_5}{a_n h}\right)\omega_1\left(f;C_p;h\right)\\ &\le M_6\omega_1\left(f;C_p;h\right)\\ &\le M_8\omega_1\left(f;C_p;\frac{1}{a_n}\right)\end{aligned}$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir.

Teorem$(3.3.1)$ ve $(3.3.2)$den aşağıdaki Sonuçlar verilebilir:

Sonuç 3.3.1. $\forall r\in N$ ve $f\in C_p$ ve $p\in N_0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|A_n(f;r;\cdot)-f(\cdot)\right\|_p=0 \tag{3.35}$$

dir.

Sonuç 3.3.2. Eğer $f\in C_p^1$, $p\in N_0$ ve $r\in N$ ise

$$\left\|A_n(f;r;\cdot)-f(\cdot)\right\|_p=o\left(1/a_n\right) \tag{3.36}$$

dir.

Not: Teorem (3.3.1),(3.3.2) ve Sonuç (3.3.1) ve (3.3.2) de $n\in N$, $p\in N_0$ olmak üzere A_n operatörünün $f\in C_p$ ve $f\in C_p^1$ için yaklaşım hızını $\dfrac{1}{a_n}$ olarak bulduk.

Bizim çalıştığımız bu operatörün yaklaşım hızı Klasik Szász-Kantorovich operatörünün $\frac{1}{n}$ olan yaklaşım hızından daha hızlıdır(daha iyidir).

Teorem 3.3.3: $f \in C_p^1$ ve $r \in N$ olsun. $\forall x > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} a_n \{A_n(f;r;x) - f(x)\} = f'(x) \tag{3.37}$$

dir.

İspat:

$x > 0$ için sabit bir sayı olsun. Böylece Taylor formülünden $t \in R_0, C_p$ ya ait olan $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon(t;x)$ ve $\varepsilon(x) = 0$ şeklinde fonksiyonlar olmak üzere

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \varepsilon(t;x)(t-x) \tag{3.38}$$

eşitliği vardır. (3.39)un her iki tarafa önce A_n operatörünü uygulayıp sonra A_n in lineerliği ve $(3.11)-(3.13)$kullanılırsa;

$$A_n(f(t);r;x) = A_n(f(x);r;x) + A_n(f'(x)(t-x);r;x) + A_n(\varepsilon(t;x)(t-x);r;x)$$

$$A_n(f(t);r;x) = f(x)A_n(1;r;x) + f'(x)A_n((t-x);r;x) + A_n(\varepsilon(t;x)(t-x);r;x) \tag{3.39}$$

elde edilir. (3.39) eşitliğinde en sağdaki terime Hölder eşitsizliği uygulanırsa;

$$|A_n(\varepsilon(t;x)(t-x);r;x)| \le \{A_n(\varepsilon^2(t;x);r;x)\}^{1/2}\{A_n((t-x)^2;r;x)\}^{1/2} \tag{3.40}$$

bulunur. Bu eşitsizlikteki sağdaki ilk terime $\varepsilon^2(x)$ eklenip çıkarılıp, $A_n$nin lineerliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} A_n(\varepsilon^2(t;x);r;x) &= A_n((\varepsilon^2(t);r;x) - \varepsilon^2(x) + \varepsilon^2(x)) \\ &= A_n(\varepsilon^2(t);r;x) - A_n(\varepsilon^2(x);r;x) + A_n(\varepsilon^2(x);r;x) \\ &= A_n(\varepsilon^2(t);r;x) - \varepsilon^2(x)A_n(1;r;x) + \varepsilon^2(x)A_n(1;r;x) \end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın önce mutlak değeri alınıp, sonra üçgen eşitsizliği uygulanır ve $n \to \infty$ için limit alınır, daha sonra Sonuç$(3.3.1)$, (3.41)e uygulanırsa

$$\left|A_n\left(\varepsilon^2(t;x);r;x\right)\right| = \left|A_n\left(\varepsilon^2(t);r;x\right) - \varepsilon^2(x) + \varepsilon^2(x)A_n(1;r;x)\right|$$

$$\leq \left|A_n\left(\varepsilon^2(t);r;x\right) - \varepsilon^2(x)\right| + \left|\varepsilon^2(x)A_n(1;r;x)\right| \to 0 \qquad (3.42)$$

elde edilir. Burada $\lim_{n\to\infty} A_n\left(\varepsilon^2(t);r;x\right) = \varepsilon^2(x) = 0$ olduğu Sonuç$(3.3.1)$den bilinmektedir. Ayrıca (3.40)daki $\left\{A_n\left((t-x)^2;r;x\right)\right\}^{1/2}$ terimin $n \to \infty$ için limitinin sıfır olduğu $A_n\left((t-x)^2;r;x\right)$ in açılımından da bilinmektedir (Lemma$(3.3.4)$).

(3.37), A_n in lineerliği ve $(3.17)-(3.19)$ kullanılırsa

$$A_n(f(t);r;x) - f(x) = f(x)A_n(1;r;x) + f'(x)A_n((t-x);r;x) + A_n(\varepsilon(t;x)(t-x);r;x)$$

elde edilir. Bu son ifadenin her iki yanı a_n ile çarpılır, Lemma$(3.3.1)$, (3.36), (3.37), kullanılır ve $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$a_n\left(A_n(f(t);r;x) - f(x)\right) = a_n f'(x)\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2a_n(a_nx-1)} + \frac{1}{2a_n(a_nx-1)(r-1)!\,g_{n,r}(x)}\right)$$

Teorem $(3.3.3)$deki istenen sonuç elde edilir.

Not: Teorem (3.3.3)de $n \in N$, $p \in N_0$ olmak üzere A_n operatörünün $f \in C_p$ ve $f \in C_p^1$ için noktasal yaklaşım hızını $\frac{1}{a_n}$ olarak bulduk. Bizim çalıştığımız bu operatörün noktasal yaklaşım hızı Klasik Szász-Kantorovich operatörünün $\frac{1}{n}$ olan yaklaşım hızından daha hızlıdır(daha iyidir).

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Biz bu tezde doğrudan Szász-Mirakjan Kantorovich operatörü olmayan ancak temelde bu operatörü baz alan Modifiye bir şeklini oluşturarak bu operatörün ağırlıklı uzaylarda sağladığı bazı eşitsizlikleri ve yaklaşım özelliklerini inceledik.

Yaklaşım teorisinde yaygın olarak çalışılan Szász-Mirakjan Kantorovich operatörünün değişik formları çeşitli araştırmacılar tarafından halen çalışılmaktadır. Bu tezde tanımlanan A_n operatörünün değişik ve çok değişkenli formları oluşturulabilir ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenebilir. Bu tezde ağırlıklı uzayda yaklaşım özeliklerine bakılan A_n operatörü için yapılan işlemler başka çalışmalarda araştırmacılara bir kaynak olabileceğini düşünmekteyiz.

KAYNAKLAR

[1] Kantorovich, L.V., “Sur certain developements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein, “I,II, C.R. Acad. URSS, 563-568,595-600, 1930.

[2] Altın, A.,O.Doğru, F.Taşdelen, “The generalization of Meyer-Konig and Zeller operators by generating functions”, J.Math. anal. Appl. 312, 181-194, 2005.

[3] Erençin, A., Taşdelen, F.,” On Certain Kantorovich Type Operators”, Fascıculı Mathematici, Nr. 41, 2009.Gadjiev, A.D. and İspir, N., “ On a Sequence of Linear Positive Operators in Weighted Spaces”, Proc.Ins.Math. Mech., 11:45-46, 1999.

[4] Moreno, A.J.L, Delgado, F.J.M., “Asymtotic Expansion of Multivariate Kantorovich Type Operators”, Numerical Algorithms, 39, 237-252, 2005.

[5] Olgun, A., Özhavzalı, M., “Approximation Behaviour of Generalized Kantorovich-Type Operators by multiple Generating Functions”, Advanced Studies in Contemporary Mathematics. Vol 21, No 2, 2011.

[6] Özarslan, M.A., Duman, O., Srivastava, H.M., “ Statistical Apparoximation Resullts for Kantorovich-Type Operators Involving Some Special Polynomials”, Mathematical and Computer Modelling, 48(3), 388-401, 2008.

[7] Mirakjan, G.M., “Approximation of continuous functions with the aid of polynomials”(Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 31, 201-205, 1941.

[8] Százs, O., “Generalization of Bernstein’s polynomials to infinite interval”, J. Res. Nat. Bur. Stds. 45, 239-245, 1950.

[9] Totik, V., “Approximation by Szász-Mirakyan-Kantorovich operators in $L^p\left(p>1\right)$”,Analysis Math, 9,147-167, 1983.

[10] Aral, A. “A Generalization of Szász-Mirakyan Operators besed on q-integers”, Math.Comp. Modelleing, 47,1052-1062, 2008.

[11] Becker, M., “Global approximation theorems for Szász-Mirakyan and Baskakov in polynomial weighted spaces”, Indian Univer. Math. J., 27,127-14, 1978.

[12] İspir, N., “On Modified Baskakov Operators on Weighted Spaces”, Turkish Journal of Math., 25(3):355-365, 2001.

[13] Walczak, Z., “On Certain Positive Linear Operators in Polinomial Weighted Spaces”, Acta Math. Hungar, 101(3), pp.179-191, 2003.

[14] Gadjiev, A.D. and İspir, N., “ On a Sequence of Linear Positive Operators in Weighted Spaces”, Proc.Ins.Math. Mech., 11:45-46, 1999.

[15] Walczak, Z., “Approximation of Functions of Two Variables by Some Linear Positive Operators”, Acta Math. Univ. Comenianae, vol. LXXIV,1, pp.37-48, 2005.

[16] ZHOU, D-X, “Weighted Approximation By Szász-Mirakyan Operators”, Journal of Approximation Theory, 76, 393-402, 1994.

[17] Ayar, K., “Ağırlıklı Uzaylarda İki Değişkenli Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri”, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 2011.

[18] Balcı, M.,”Matematik Analiz 2”, Balcı Yayınları, 6.Basım, Ankara, 2009.

[19] Erkuş, E., “Klasik Ortogonal Polinomların Doğurucu Fonksiyonları”, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 1999.

[20] Gadjiev, A.D., “On Korovkin Type Theorems”, Math.Notes, 20,(5-6), 996-998, 1976.

[21] Gadjiev, A.D.,”The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogues to that of P.P.Korovkin” Dokl. Akad.Nauk.SSSR., 218, No.5, 1001-1004 (in Russian), Sov. Math. Dokl., 15(5):1433-1436, 1974.

[22] Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A., Lineer Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. 1-94, Ankara,1995.

[23] R.A. DeVore, G.G. Lorentz, “Constructive Approximation”, Springer-Verlag (Berlin), 1993.

[24] Olgun, A., “Some Properties of The Multivariate Százs Operators”, Comptes rendus de I'Academie Bulgare des Sciences,Volume 65, No 2, 139-146, 2012.

[25] Rempulka, L., Walczak, Z., “Modified Szász-Mirakyan Operators”, Mathematica Balkanica. New Series, vol. 18, Fasc. 1-2, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Müzeyyen ÖZHAVZALI

Doğum Tarihi : 06-07-1971

Yabancı Dil : İngilizce, Almanca

Eğitim Durumu :

Lisans :Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik ABD,1995.

Yüksek Lisans : Kırıkkale Üniversitesi, Matematik ABD, 2009.

Çalıştığı Kurum: Kırıkkale Üniversitesi, Keskin MYO 1995-2010, 2013+
Kırıkkale Üniversitesi, Fen&Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2010-2013

Yayınları (SCI) :

Gupta V., Aral A., Özhavzalı M., "Approximation by q- Szász -Mirakyan-Baskakov operators", Fasciculı Mathematici, Nr.48,35-44, 2012.

Yayınları (Diğer) :

Olgun A., Özhavzalı M., "Approximation Behavior of Generalized Kantorovich Type Operators by Multiple Generating Functions", Advanced Studies in Contemporary Mathematics, Vol 21, No 2, 225-237, 2010.

Özhavzalı M., Olgun A., "On a modified Szász-Mirakjan-Kantorovich operators in polynomial weighted spaces", Advances and Applications in Mathematical Sciences, Vol 13, Issue:5, page:205-238, ISSN 0974-6803, September 2014.

Özhavzalı M., Olgun A., "On Kantorovich-Type operators Polinomial Weighted Spaces", International Conference,"Mathematics Days in Sofia", July 7-10, Sofia, Bulgaria,2014.

Özhavzalı M., Olgun A., "On Kantorovich-Type operators Polinomial Weighted Spaces", Journal of Mathematics and System Science, Print ISSN: 2159-5291
Online ISSN: 2159-5305, Vol: 4 / 2014,Ağustos 26, 2014(tam metin basım kabul edildi).

Özhavzalı M., Eraslan S., Atasoy A., Ceylan H., “Meslek Yüksekokulları İçin Matematik I”, ISBN:978-605-89047-05, Detay Yayıncılık, Ankara, Ekim 2010.

Özhavzalı M, Eraslan S., Atasoy A., Öztürk U., “Meslek Yüksekokulları İçin Matematik II”, ISBN:978-605-89047-06, Detay Yayıncılık, Ankara, Ekim 2009.

Araştırma Alanları : Matematik, Bilgisayar, İstatistik, Ekonomi, İşletme.