T. C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin, Vektör Uzaylarında Lineer Bağımlılık-Lineer Bağımsızlık ve Baz-Boyut Kavramlarını Algılama Becerilerinin Araştırılması

Hazırlayan

KAMER ARSLAN

Danışman

Prof. Dr. Ahmet IŞIK

HAZİRAN-2021

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Prof. Dr. Ahmet IŞIK danışmanlığında, Kamer ARSLAN tarafından hazırlanan bu çalışma, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu kararı ile oluşturulan jüri tarafından 02/06/2021 tarihinde İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında Kamer ARSLAN tarafından hazırlanan *''İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı Öğrencilerinin, Vektör Uzaylarında Lineer Bağımlılık-Lineer Bağımsızlık ve Baz-Boyut Kavramlarını Algılama Becerilerinin Araştırılması''* adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet IŞIK
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve **tezin Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet IŞIK
Danışman

Jüri Üyeleri		Unvanı, Adı Soyadı	İmza
Başkan	:	Prof. Dr. Ahmet IŞIK	
Üye	:	Doç. Dr. Serdal BALTACI	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Nurullah ŞİMŞEK	

Prof. Dr. Recep ÇALIN
ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kamer ARSLAN

18.06.2021

ÖZET

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI ÖĞRENCİLERİNİN, VEKTÖR UZAYLARINDA LİNEER BAĞIMLILIK-LİNEER BAĞIMSIZLIK VE BAZ-BOYUT KAVRAMLARINI ALGILAMA BECERİLERİNİN ARAŞTIRILMASI

ARSLAN, Kamer

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İlköğretim Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Ahmet IŞIK

Haziran, 2021, 99 sayfa

Lineer cebir dersi matematik öğretmenliği programında okuyan öğrenciler açısından oldukça önemli ve temel bir derstir. Bu nedenle lineer cebir dersinin içeriğindeki kavramların öğrenciler tarafından anlaşılması ve bu derse ait bilgilerinin derinleştirilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu noktada yürütülen bu çalışmanın amacı, vektör uzaylarına ait lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarının öğrenciler tarafından nasıl algılandığını ortaya koymaktır. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Araştırmanın örneklemi ise amaca yönelik örnekleme tekniği kullanılarak oluşturulmuştur. Araştırma Kırıkkale Üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan 36 ikinci sınıf öğrencisi ile 2019-2020 bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Veri toplama aracı olarak ise Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut bilgi testi (LBBT) ve yarı yapılandırılmış mülakat formu kullanılmıştır. Veriler betimsel analiz ve içerik analizine tabi tutulmuştur. Çalışmadan elde edilen bulgulara göre öğrencilerin büyük çoğunluğunun lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarını doğru bir şekilde tanımladığı ancak bu iki kavram arasındaki ilişkiyi doğru açıklayamadığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin baz ve boyut kavramlarını da kısıtlı algıladığı ilgili kavramlara yönelik açıklamalar yaparken zorlandıkları görülmüştür. Genel anlamda öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarını algılama noktasında güçlük yaşadığı saptanmıştır.

Anahtar Kelimeler: vektör uzayları, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz, boyut

ABSTRACT

A RESEARCH OF PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHING PROGRAM STUDENTS' PERCEPTION OF LINEAR DEPENDENCE-LINEAR INDEPENDENCE AND BASE-DIMENSION CONCEPTS IN VECTOR SPACES

ARSLAN, Kamer
Kırıkkale University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Elementary Education Department, Master's Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Ahmet IŞIK
June, 2021, 99 page

Linear algebra is a very important and basic course for students studying in a mathematics education program. For this reason, it is of great importance for the linear algebra course to be understood by students and to extensive their knowledge of this course. Accordingly, aim of this study is to reveal how students perceive the concepts of linear dependence, linear independence, base and dimension of vector spaces. The sample of the study, on the other hand, was created using the purposive sampling technique. The research was carried out with 36 sophomores attending Kırıkkale University primary school mathematics teaching program in the spring term of 2019-2020. Linear algebra test and semi-structured interview form were used as data collection tools. The data were subjected to descriptive and content analysis. According to the findings obtained from the study, it was determined that the majority of the students correctly defined the concepts of linear dependence-independence, but could not explain the relationship between these two concepts correctly. Additionally, it was observed that the students perceived the concepts of base and dimension as limited and had difficulty in making explanations about the related concepts. In general, it was determined that students have difficulty in perceiving the concepts of linear dependence-independence, base and dimension.

Keywords: vektor spaces, linear dependence, linear independence, base, dimension

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca derin bilgisinden faydalandığım, tezimin hazırlanma sürecinde yardımını esirgemeyen, tüm sorularıma ve sorunlarıma sabırla çözüm üreten, karşılaştığım bütün olumsuzluklara karşı beni cesaretlendirip motive eden, fikirleriyle bana her daim ışık olan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum kıymetli danışmanım Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Bugünlere gelmemde emeği geçen bütün öğretmelerime ve matematiği sevmemde büyük katkısı ve emeği olan değerli hocam Atakan AKTAŞ'a; Güler yüzünü, nezaketini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevgili hocam Prof. Dr., Aslıhan SEZGİN'e ; Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgisinden faydalandığım, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Prof. Dr. Tuba GÖKÇEK'e; Ayrıca Amasya Üniversitesinden ve Kırıkkale Üniversitesinden bütün hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Beni her zaman destekleyen, asla pes etmemem gerektiğini hep hatırlatan, manevi desteklerini hep hissettiğim çok kıymetli arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde en büyük emeği veren, maddi-manevi desteklerini ve sevgilerini hiçbir zaman esirgemeyen, evlatları olmaktan gurur duyduğum, canım annem Saliha ARSLAN'a ve canım babam Yakup ARSLAN'a; yorulduğumda, cesaretim kırıldığında hep yanımda olan, beni yüreklendiren, sevgilerini ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, çok sevdiğim kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

f	: Frekans
LBBT	: Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut bilgi testi
%	: Yüzde

1. GİRİŞ

1. 1. Problem Durumu

Matematiğin ne olduğuyla ilgili çeşitli tanımlamalar yapılsa da kapsayıcı bir tanım yapılamamıştır. Var olan bu tanımlar sadece matematiğin karakteristiğini belirleyen unsurları sıralamaktan öteye gidememiştir. Matematiğin muazzam ve geniş bir yelpazesinin olması tanımlanmasının oldukça güç olduğunu göstermektedir. Bunun yanı sıra matematik, içinde sadece işlemleri barındıran bir disiplin değil, bundan çok daha fazlasıdır (Umay, 2002). Karaçay'a (1985) göre matematik tüm çağlar boyunca uygarlıkların birbirine kazandırdığı, insanlığın tüm ihtiyaçlarını karşılamaya olanak sağlayan; bilim, teknoloji ve insanlık için yeri doldurulamaz bir değerdir. Ayrıca matematik günlük hayatta yaptığımız hemen her faaliyette yer alan, ileri seviyede kullanımıyla teknolojiye yön veren, hayatın akışını kolaylaştıran hesaplamaları barındıran evrensel bir dil olmasının yanı sıra matematik temsillerinin arasındaki ilişkileri de inceleyen bir disiplindir (Boz, 2008; Işık, Bekdemir ve Çiltaş, 2010). Matematik sadece klasik doğa bilimleri olan kimya, biyoloji ve fizik için değil mühendislik, tıp, ekonomi ve hayatın birçok alanı için vazgeçilmez bir disiplindir (Liesen ve Mehrmann, 2015). Matematik ortaya çıkmış olduğu zamanlardan bugüne kadar çeşitli uygarlıkların ve matematikçilerin katkılarıyla gelişmiş ve çeşitli kollara ayrılmıştır (Karaçay, 1985). Bu matematik dallarından birisi de cebirdir. Matematiğin gelişmesiyle de kendi içinde çeşitli dallara ayrılan cebir "aritmetiğin genelleştirilmiş hali" olarak tanımlanır ve cebirin bir başka boyutu olan, matematiğin en temel teorisi olmasıyla önemini sürdüren lineer cebir ise matematiğin farklı kullanım alanları ve bu alanlara ait uygulamalar için oldukça temel ve kullanışlı bir derstir. (Schubring, 2007). Bunun yanı sıra lineer cebir geometri, soyut cebir, analiz, sayılar teorisi ve fizik gibi çeşitli alanların çatısını oluşturur (Kleiner, 2007). Lineer cebir dersinde yer alan kavramların öğretimi ile ilgili ilk bilimsel çalışma Harel tarafından yapılmıştır (Aydın, 2009b). Bu tarihe kadar lineer cebir, hem bu dersi veren öğretim üyeleri hem de öğrenciler tarafından zorlu bir deneyim olarak görülmüştür (Dorier, 1995). Bu alanda yapılan çalışmaların azlığının var olan bu tutumdan kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırmacılar daha önce yalnızca analize ait kavramlar üzerine çalışmalar yaparken, Harel'in (1985) yürütmüş olduğu bu çalışmadan itibaren lineer cebir eğitimi ile ilgili çalışmalar artmaya başlamıştır (Aydın, 2009b; Hillel, 2000). Aydın (2009b) lineer cebir dersine yönelik yapılan araştırmaların aşağıdaki gibi üç başlık altında toplandığını belirtmiştir. Bunlar;

i-) Öğrenme güçlükleri ve sebeplerinin ele alındığı çalışmalar ve müfredat tasarımına yönelik çalışmalar,

ii-) Dersin öğretiminde geometri kullanımı ve lineer cebirin formal doğası üzerine yürütülmüş çalışmalar,

iii-) Bilgisayar programları ile lineer cebir öğretimini ele alan araştırmalardır.

Lineer cebir epistemolojisi gereği soyut bir ders olmasından dolayı öğrenciler lineer cebirle meşgul oldukları zaman kendilerini bilmedikleri bir durumun içinde hissedebilirler (Aydın, 2009). Yapılan çalışmalara bakıldığında, öğrencilerin lineer cebiri soyut ve oldukça zor buldukları ve dersin kavramlarına ait öğrenme güçlükleri yaşadıkları ve bu derse ait kavramların öğretiminin uzun bir süreç gerektirdiği görülmüştür (Aydın, 2009; Doğan, 2018; Gueudet-Chartier, 2004; Hillel ve Sierpinska, 1993; Klasa, 2009; Çelik, 2015). Araştırmacılar yaşanan bu zorlukların sebebinin formalizmden kaynaklandığını düşünerek bu yönde çalışmalar sürdürmüş ve hatta lineer cebirde kullanılan formal dilin de bu zorluklara sebep olup olmadığını araştırmışlardır. Bu araştırmalar sonucunda karşılaşılan öğrenme zorluklarının sebebinin yalnızca vektör uzayları teorisine ait mantık ve formalizm ile ilgili olmadığını bu duruma ek olarak öğrencilerin vektör uzayları teorisini geometrik olarak yorumlamakta sıkıntı yaşamalarından da kaynaklandığı görülmüştür (Dorier, 2016). Daha sonraki süreçlerde ise öğrenme zorluklarını en aza indirmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Açıkyıldız, 2019; Çevik ve Gülcü, 2017). Bu çalışmaların yanı sıra öğrencilerin vektör uzaylarına ait anlamalarını sınıflandırmak için çeşitli çalışmalar da yapılmıştır (Britton ve Handerson, 2009; Kardeş Birinci, 2016; Stewart ve Thomas, 2007). Yapılan çalışmalara sonraki bölümlerde yer verilmiştir. Bu çalışmalara ek olarak lineer cebir dersinin geometri ile ilişkisini ve bu dersin öğretiminde teknolojinin etkisini inceleyen çeşitli çalışmalar da yürütülmüştür (Çevik, 2015; Kan, 2010; Turğut, 2010). Lineer cebir dersine ait literatüre kazandırılan çalışmalar özellikle yabancı literatürde son yıllarda artmıştır. Ancak bu artış matematik eğitimi ve öğretimi ile ilgili yapılan diğer çalışmalara nazaran yeterli değildir (Kar, 2010). Yapılan araştırmalardan elde edilen bulgulara göre öğrencilerin özellikle lineer cebir dersinde vektör uzaylarına ait konularda zorlandıkları, lineer denklem sistemlerinde ise bu kadar büyük bir problem yaşamadıkları görülmüştür (Kardeş, 2010; Kardeş Birinci, 2016). Ayrıca öğrencilerin vektör uzaylarına ait kavramları, anlamadan uzak bir şekilde işlemsel prosedürlere odaklanarak ele aldıkları saptanmıştır (Kardeş Birinci, 2016). Açıkyıldız (2019), Işık ve İşleyen (2005), Stewart ve Thomas (2007), Trigueros (2018) yaptıkları çalışmalarda öğrencilerin lineer birleşim, lineer bağımlılık-bağımsızlık, alt vektör uzayı kavramlarında oldukça zorluk yaşadıklarını tespit etmişlerdir. Bu sebeple var olan literatürden hareketle yükseköğretim matematiğinde önemli bir yere sahip olan lineer cebir dersine ait öğrenci algılarının araştırılmasının alan yazına önemli katkı sağlayacağı düşünülmüştür. Nitekim öğrencilerin vektör uzaylarında yer alan kavramlara ait algılarının; araştırmacılara, alan uzmanlarına ve yükseköğretim öğrencilerine sunulması, dersin işlenişinde ve anlaşılmasında muhtemel engellerin ne olduğunun bilinmesi ve gerekli önlemlerin alınması bakımından oldukça önemlidir. Bu bağlamda bu araştırmanın problem durumunu; lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı ve nasıl ifade edildiği oluşturmaktadır.

1.2. Araştırmanın Amacı ve Önemi

Öğrencisini anlatacağı kavram hakkında sorgulamaya, düşünmeye ve tartışmaya yönlendirmek isteyen bir öğretmen, o kavrama ait yeterli ve derin bir bilgi birikimine sahip olmalıdır. Şayet bir öğretmen ele aldığı konuya dair derin bilgi birikimine sahip değilse öğrencilerine de ilgili kavramı tam olarak kavratamaz (Fernandez, 2005; Ball, Thames ve Phelps, 2008). Bu nedenle öğretmenlerin müfredat ve pedagojik alan bilgilerinin yanı sıra yeterli ve derin bir alan bilgisine de sahip olmaları gereklidir (Shulman, 1986). Bu bilgi ve beceri için; analiz, lineer cebir, soyut cebir, analitik geometri gibi alan dersleri üniversitelerin matematik öğretmenliği programlarında öğrenim gören öğretmen adayları için oldukça önemlidir. Örneğin; yeterince lineer cebir bilgisine sahip olmayan bir öğretmen, ortaokul matematik derslerinde, birinci dereceden denklemlerin öğretiminde konuya ait mantığa yeteri kadar hakim olamadığı için öğrencilere kavramı tam anlamıyla öğretemeyebilir ya da konuya ilişkin tutarlı açıklamalar sunamayabilir. Bu sebeple matematik öğretmenlerinin lineer cebir dersine ait kavramları özümsemiş olmaları, öğrencilerin tam öğrenmelerine zemin hazırlamaları bakımından önemlidir. Bu doğrultuda yürütülen bu çalışmanın temel amacı ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören öğrencilerin vektör uzaylarına ait temel kavramlar olan lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz, boyut kavramlarını algılama becerilerini ortaya çıkarmaktır.

Lineer cebir dersini alan her öğrenci, öğrenim hayatının her basamağında lineer cebirin uygulama alanları ile iç içedir. Bu nedenle lineer cebir dersi her öğrenci için oldukça önemlidir. Dolayısıyla cebir ve cebirsel işlemler, hayatın işleyişinde yer alan, üretkenliğin devamını sağlayan ve yaşamımızı her anlamda kolaylaştıran ve kendine özgü yapısı olan bir dil olarak tanımlanmaktadır. Bu nedenle cebiri öğrenmek ve bilmek, hem cebirsel düşünmeye her zaman ve her alanda ihtiyaç duyulacağı için hem de günlük yaşantımız için bir gerekliliktir. Dolayısıyla cebir olmadan bilim ve bilime ait düşünceleri anlamak zorlaşır. (Dede ve Argün, 2003; Usiskin, 1995). Nitekim Lacampagne (1995) cebiri açıklarken *"Cebir matematiğin dilidir. Temel cebirsel kavramların tam öğrenilmesi durumunda, ileri matematiksel konular için kapılar açılır, öğrenilememesi durumunda ise üniversite ve teknolojiye dayalı kariyer kapıları kapanabilir"* ifadesini kullanmıştır. Lee (1996), Şimşek (2017) ve Oflaz (2018)'a göre öğrenciler cebir ile ilgili ciddi öğrenme zorlukları yaşamaktadır. Ayrıca bir çok kitap yazarı ve öğretmen yaşanan bu güçlüklerin farkında bile değildir (Herscovics ve Linchevski, 1994). Bu nedenle cebir öğretimi ilköğretim ve ortaöğretim kademesinde büyük bir önem taşımaktadır. Cebir, ileri cebir ve okul cebiri olmak üzere iki unsurdan oluşmaktadır. Okul cebiri, ilköğretim ve ortaöğretimde var olan cebiri ifade ederken ileri cebir, cebirin yapısını, matematiksel olarak ne ifade ettiğini ve ortaokul cebirinin hangi mantıkla oluşturulduğunu ayrıntılı bir şekilde inceleyen teorik bir alandır (Ferrini-Mundy, Floden, McCrory, Burrill ve Sandow, 2005). İleri cebirin içeriğini soyut cebir, elemanter sayılar kuramı ve lineer cebir oluşturur (Dede ve Argün, 2003). Ortaokul ve lise kademesinde temeli atılan cebir, üniversite cebirindeki kavramları öğrenmeye zemin hazırlamaktadır (Dede ve Argün, 2003). Üniversite cebirini derin ve anlamlı bir şekilde öğrenen geleceğin öğretmenleri elbette ki derin alan bilgisine sahip olmalarından dolayı öğrencilerine anlamlı bir öğrenme ortamı sunabilecekir. Bu sebeple ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan öğrencilerin vektör uzaylarına ait kavramlarla ilgili algılarının araştırılması ve elde edilen verilerin okuyucuya sunulması öğretimin her kademesi için önemlidir. Yapılan bu araştırmanın literatüre ayrıntılı bilgi kazandırması ve daha sonra yapılacak araştırmalara ışık tutması bakımından önemli olduğu düşünülmektedir.

1.3. Araştırmanın Problemi

Bu araştırmanın problem cümlesi "İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı öğrencileri, vektör uzaylarında lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarını nasıl algılamaktadır?" şeklindedir.

Araştırmanın alt problemleri ise şu şekildedir;

1. Ders işlenişi öncesinde öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut testine verdiği yanıtlar ve lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz-boyut kavramları ile ilgili algıları nasıldır?
2. Ders işlenişi sonrasında öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut testine verdiği yanıtlar ve lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz-boyut kavramları ile ilgili algıları nasıldır?
3. Öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarını algılama ve ifade etme becerileri nasıldır?

1.4. Araştırmanın Sayıltıları

Araştırmaya katılan öğrencilerin derse olan ilgilerinin kabul edilebilir düzeyde olduğu ve her birinin, veri toplama aracı olarak kullanılan lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut bilgi testi ve yarı yapılandırılmış mülakat sorularına içtenlikle yanıt verdiği varsayılmıştır.

Araştırmanın geçerlilik ve güvenirliği için alınan uzman desteğinin yeterli olduğu varsayılmıştır.

Öğretim süreci boyunca uygulanan ders planının çalışmanın amacına hizmet eder doğrultuda olduğu varsayılmıştır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırma, 2019-2020 öğretim yılı bahar döneminde, Kırıkkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.

Araştırma kapsamındaki veriler, Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut bilgi testi (LBBT) ve yarı yapılandırılmış mülakat formu ile elde edilmiştir.

1.6. Tanımlar

Bu araştırmada lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı araştırılmıştır. Araştırma kapsamında ele alınan kavramlar bu bölümde açıklanmıştır.

Lineer Bağımsızlık-Bağımlılık

K bir cisim olmak üzere, V, K üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı ve

$S = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ kümesi V'nin bir alt kümesi olsun. $c_i \in K, u_i \in S$ için

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \ldots + c_n u_n = 0, \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Lineer denklem sistemi göz önüne alındığında bu denklem sisteminin çözümünde bütün c_i katsayıları 0'a eşit oluyorsa u_i vektörlerine lineer bağımsız vektörler, S kümesine ise lineer bağımsız küme denir. Eğer,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i = 0$$

Lineer denklem sisteminin çözümünde en az bir 0'dan farklı c_i katsayısı var ise u_1, u_2, u_3, …, u_n vektörlerine lineer bağımlı vektörler, S kümesine de lineer bağımlı küme denir (Hacısalihoğlu, 2000; Işık, 2000; Çallıalp, 2015; Lipschutz ve Lipson, 2016; Sabuncuoğlu, 2016).

Baz-Boyut

V bir vektör uzayı ve $S = \{u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n\}$ kümesi V'nin bir alt kümesi olmak üzere, S kümesi lineer bağımsız ve V vektör uzayını geriyorsa S kümesine baz (taban) denir. Ayrıca V vektör uzayının, herhangi bir tabanındaki vektör sayısına V vektör uzayının boyutu denir. Boyut $BoyV\ veya\ dimV$ ile gösterilir (Çallıalp, 2015; Lipschutz ve Lipson, 2016; Işık, 2019).

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Lineer Cebir Öğretimi ile İlgili Çalışmalar

Yapılan araştırmalar; öğrencilerin lineer cebir kavramlarını öğrenirken çeşitli zorluklar yaşadıkları ve buna bağlı olarak da öğrencilerde çeşitli öğrenme güçlüklerinin ortaya çıktığını göstermiştir (Turğut, 2010). Bu sonuçtan hareketle matematik araştırmacıları lineer cebir dersine ait kavramların öğretilmesine yönelik engellere çözüm bulabilmek için çeşitli araştırmalar yapmışlardır. Bu araştırmacılardan Carlson, Johnson, Lay, ve Porter (1993), lineer cebir öğretimine yönelik müfredat geliştirme çalışmaları yapmışlardır.

Carlson vd. (1993), yapmış oldukları çalışmada 1990 yılında kendilerinin geliştirmiş oldukları müfredat programını referans alarak, farklı disiplinlerden ve farklı okullardan öğrencilerin de yer aldığı bir panel çalışması düzenlemişledir. Araştırmacılar yaptıkları çalışmayla ulusal anlamda lineer cebir dersine ilgi çekmeyi ve lineer cebir dersi için uygun bir müfredat geliştirmeyi amaçlamışlardır. Carlson ve arkadaşları yaptıkları çalışmayla lineer cebir dersine yönelik aşağıdaki gibi bir takım önerilerde bulunmuşlardır. Bu çalışmaya göre;

- Lineer cebir dersi matematik, mühendislik, ekonomi, istatistik vb. gibi birçok alan için gerekli ve önemlidir. Bu yüzden işlenişi ve müfredatı farklı disiplinlere de hitap edecek şekilde düzenlenmelidir.
- Matematik bölümleri ilk kez alınacak olan matris odaklı lineer cebir derslerine gereken önemi vermelidir. Bu sebeple derse ait kavramların öğretilmesinin yanı sıra öğrencilerin problem çözme becerilerinin de geliştirilmesi gerekir.
- Lineer cebir dersine ait kavramların öğretimine dair birçok araştırma yapılmış ve öğretme stratejisi geliştirilmiştir. Bu sebeple fakülteler öğrencilerin ihtiyaçlarını göz önüne alarak gerekli çalışmaları yapmalıdır.
- Fakülteler teknolojiden faydalanmalı ve dersin öğretiminde teknoloji kullanımını teşvik etmelidir.

- Lineer cebir-II serisinde vektör uzayları, uygulamalı lineer cebir ve sayısal lineer cebir olmak üzere üç ana başlık vardır ve her matematik müfredatı içerisinde lineer cebir derslerinden en az birisinin bulunması gerekir.

Araştırmacılar lineer cebir öğretiminde karşılaşılan zorlukların formal temelli olduğunu belirtmiştir (Turğut, 2010). Bu nedenle tıpkı Carlson vd. (1993) gibi başka araştırmacılar da lineer cebir dersine yönelik çalışmalar yapma girişiminde bulunmuşlardır (Dorier, 1998). Bu çalışmaların odak noktası ise formalizm olmuştur. Teorem, ispat gibi aksiyomatik temellere dayanan ve 20. Yüzyılda ortaya çıkmış felsefi bir akım olan formalizme göre matematik, yalnızca kanıtlarla uğraşır ve matematiği formal bir zemine oturtamayan ve ispat yapamayan kişiler başarısız olarak değerlendirilir (Aydın, 2009a-b). Matematikçilerin benimsemiş olduğu bu felsefe, lineer cebir kitaplarına da yansımış ve beraberinde öğrenme engellerinin de ortaya çıkmasına zemin hazırlamıştır (Turğut, 2010). Daha önce de belirtildiği gibi bu durumun sonucunda araştırmacılar var olan sorunlara çözümler getirmek amacıyla *formalizm engelini* konu alan araştırmalar yürütmüşlerdir (Dorier, 1998; Dorier, Robert, Robinet, Rogalski, 2000a-b-c). Fransız matematikçiler öğrencilerin matematik alt yapılarının eksik olduğu düşüncesinden dolayı formalizm engelinin yaşandığını varsayarak, vektör uzaylarını anlatmadan önce temel bilgilerin verilmesinin bu engeli ortadan kaldıracağını düşünmüşlerdir. Bu sebeple vektör uzaylarını anlatmadan önce derslere kartezyen geometri, kümeler teorisi ve mantık konularıyla giriş yapmışlardır fakat bu durumda da *formalizm engelinin* ortadan kalkmadığı görülmüştür (Dorier, 1998). Bu durumun ardından araştırmacılar formalizmin ortaya çıkardığı öğrenme engellerini ortadan kaldırabilmek amacıyla *meta-kaldıraç* olarak adlandırılan çeşitli çalışmalar yürütmüşlerdir (Aydın, 2009b). Daha sonra ise Dorier ve arkadaşları (2000c), lineer cebirin doğasının analizine yönelik çalışmalar yürütmüş ve bunun sonucunda ise ortaokul ve üniversite için bir öğretim tasarımı geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri bu öğretim tasarımını;

1. *Uzun dönem tasarımı*
2. *Meta-kaldıraç*
3. *Yapıların ve bakış açılarının değiştirilmesi*

Başlıkları altında sunmuşlardır.

Bu öğretim programına göre *uzun dönem stratejisi*; öğretim sürecinin kesintiye uğramadan bir bütün olarak devam etmesi anlamına gelir. Bir öğrencinin anlatılan konuyu matematiksel açıdan algılayabilmesine zemin hazırlamak ve ileriye dönük hedeflerin kazandırılabilmesi için uzun bir sürece ihtiyaç vardır. Bu noktada bu basamak öğretim için oldukça önemlidir. Ek olarak zamana yayılarak süreç içinde tekrarlanması gereken kavramların öğretimi için de *uzun dönem stratejisi* gereklidir (Dorier, 2000c). Bir diğer öğretim başlığı olan *meta-kaldıraç* ise öğretmenlerin, öğrencilere ait öğrenme tiplerini analiz ederek onlara uygun yöntemlerle öğretimi gerçekleştirmesini tanımlar. Diğer bir ifadeyle meta kaldıraç öğretmenin lineer cebir kavramlarına ait öğretim sürecine hakim olarak, bu süreçte öğrencilerin eksikliklerini fark ederek kavramların öğretimini sağlamak amacıyla attığı adımların bütününü kapsar. *Meta* kelimesinin matematikte ifade ettiği anlam dönüşsel tepki olarak tanımlanırken, *Kaldıraç* ise bu tepkiye karşılık verilerek öğretimin gerçekleşmesi için gerekli eylemlerde bulunmayı ifade eder (Aydın, 2009b). Başka bir deyişle kaldıraç, derse ait kavram öğretirken öğretmenin bu kavramın diğer kavramlarla olan ilişkilerini de öğretecek bir ders anlatım şekli benimsemesini ifade eder (Dorier, 2000c; Aydın, 2009b). Öğretim programını oluşturan bir diğer başlık olan *yapıların ve bakış açılarının değiştirilme* ise dersin işlenme sürecinde kavramların öğretimi yapılırken yapılar arası geçişin aktif olarak gerçekleştirilmesini ifade eder (Dorier, 2000c). Örneğin lineer bağımlılık kavramının, bir matrisin determinantının sıfıra eşit olmasıyla ilişkilendirilmesi veya lineer bağımlılık kavramının geometrik olarak yorumlanması bu yapılar arası geçişi ifade edebilir.

Lineer cebirin öğretimine ait müfredat geliştirme çalışmalarının dışında, lineer cebir dersinin öğretimini ve öğrenci düşünme biçimlerini konu alan çalışmalar da yapılmıştır (Harel, 2000; Hillel, 2000). Bu yönde alanyazına katkı sağlayan çalışmalardan birisi de Harel'e aittir. Harel bu duruma pedagojik olarak yaklaşmış ve lineer cebir dersine ait öğretimi üç unsurda ele almış ve bu unsurlar doğrultusunda çözüm önerilerinde bulunmuştur (Aydın, 2007).

Harel, Piaget'nin yapmış olduğu kavram gelişimi çalışmalarını baz alarak lineer cebir dersi için prensipler geliştirmiştir (Harel, 2000). Harel'e göre lineer cebirin öğretiminde üç temel prensip kullanılmalıdır. Bu prensipler; *somutlaştırma, gereklilik* ve *genelleme* prensipleridir.

Somutlaştırma prensibi: Bu ilkeye göre öğrencilerin soyut bir kavramı öğrenebilmesi için ilgili kavramın temelini oluşturabilecek daha somut kavramların kullanılması ve kullanılan kavramların hem matematiğin doğasına hem de öğrencilerin öğrenme doğalarına uygun yapıda olması gerekir (Harel, 2000). Somutlaştırma prensibi kavramların gerçek anlamda öğretilebilmesi için oldukça önemlidir. Eğer öğretilmek istenen kavramın öğretiminde bu ilke göz ardı edilirse, gerçek anlamda öğrenme arka plana atılarak, kavramların ezberlenmesine zemin hazırlanır (Kar, 2010). Harel'e (2000) göre öğretimin başlangıcında bir kavrama ait geometrik bir temsilin kullanması, kavramın öğretilmesi açısından faydalıdır. Ancak lineer cebire ait tüm kavramların her aşamasında geometriden faydalanmanın, kavramlara ait cebirsel genellemeleri elde etmeye olanak sağladığı düşüncesi doğru değildir (Harel, 2000).

Gereklilik prensibi: Bu prensip, öğrencilerin öğretilecek kavramı öğrenim hayatları boyunca ihtiyaç duyacakları entelektüel bilgi olarak görebilmeleridir. (Dorier, 2002). Gereklilik prensibi, Piaget'nin varsayım prensibine dayanmaktadır (Soylu, 2005). Buna göre bilginin anlamı bir probleme sunulan çözümdür. Ayrıca bu prensip öğrencinin, öğrenme sürecinde aktif olarak yer almasını, öğretmenin çözüm stratejilerini aynen uygulamak yerine düşünerek, öğrenmeye çalışarak ve gerektiğinde kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya koyarak öğretim sürecinin tamamlanmasını içerir (Soylu, 2005). Dorier'e (2002) göre R^n vektör uzayına ait özellikler, öğrencilerin etkin katılımlarına olanak sağlanmayacak şekilde sunum yoluyla verildiğinde bu ilkenin ihlali gerçekleşmiş olur.

Genelleme prensibi: Bu ilke öğretim sürecinden ziyade öğretim ekipmanlarını ilgilendiren bir prensiptir. Soyut bir kavramın öğretimi için baz alınan somut kavram öğrenme etkinliği, öğrencilerin öğrenmelerini zorlaştırmayacak ve genelleme yapmalarına engel olmayacak bir uygunlukta olmalıdır (Dorier, 2002). Örneğin lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramı için genellemeye gidilirken, analitik düzlem ve sayı doğrusu üzerinde özel örnekler verip dersi sonlandırmaktansa, boyut kavramını kullanarak genellemeye gitmeye özen gösterilmelidir (Turğut, 2010).

Lineer cebir öğretimiyle ilgili bir diğer çalışma ise Hillel'e aittir. Hilell (2000), öğrencilerin lineer cebir dersine ait çeşitli zorluklar yaşamasının bir sebebinin de ders kaynaklarında kullanılan diller olduğunu ileri sürmüştür. Bu doğrultuda araştırmacı lineer cebirde kullanılan dilleri *Soyut dil, Cebirsel dil ve Geometrik dil* olarak üç kategoriye ayırmış ve okuyucuya sunmuştur. Bu kategorilere göre;

Soyut dil; formal teoriye ait vektör uzayları, alt uzay, germe, boyut, çekirdek ve operatör kavramlarının kullanımını temsil eder. *Cebirsel dil;* R^n uzayına ait lineer denklem sistemlerinin çözümleri, matrisler, rank, satır uzayı kavramlarını ve bu kavramları tanımlamak için kullanılan dili temsil eder. *Geometrik dil* ise iki ve üç boyutlu uzaylara ait nokta, doğru, düzlem, geometrik dönüşüm ve yönlü doğru parçalarına ait dili temsil eder (Hillel, 2000).

Hillel'e (2000) göre bu kategorilerin her birinde vektörler, dönüşümler ve bunlara ait işlemler belirli bir terminolojiye ve gösterime sahiptir. Ayrıca bu diller arasında sürekli birinden diğerine geçiş mevcuttur. Kategorize edilmiş olan diller zaman zaman birbirlerinin yerine kullanılabilir fakat asla birbirleri ile özdeş yapıda değillerdir. Dersin işlenme esnasında ve ders materyallerinde ilgili kavramlar, kavramlara ait ilişkiler ve işlemler yapılırken bu üç dil sıklıkla kullanılır.

2.2. Vektör Uzayları ile İlgili Çalışmalar

Harel (1987) yürütmüş olduğu çalışmada, 32 lineer cebir kitabını incelemiş ve incelediği kitapları öğretim yaklaşımlarına göre; içeriğin sıralanması, vektör uzay modellerinin düzeylerinin genelliği, tanıtıcı materyal, düzenleme ve sembolizasyon olmak üzere 5 kategoride değerlendirmiştir. Harel'in yaptığı çalışmaya göre, İncelenen kitapların yalnızca ikisinin üniversite düzeyinde olduğu ve kitaplarda konuların öğretiminde hem soyuttan somuta hem de somuttan soyuta doğru bir öğretim yönteminin kullanıldığı tespit edilmiştir. Ayrıca araştırmadan elde edilen sonuçlara göre araştırma kapsamında incelenen kitapların içeriğindeki kavramların ve yaklaşımların yeterince açık bir şekilde ifade edilmediği tespit edilmiştir.

Carlson (1993), yapmış olduğu çalışmayla, 1990 yılında üyesi olduğu LACSG araştırma grubunun lineer cebir eğitimi ve öğretimi üzerine geliştirmiş oldukları öğretim programını referans alarak lineer cebir öğretimi ile ilgili tavsiyelerde bulunmuştur. Carlson'a göre öğrenciler matrisler ve matrislerle ilgili işlemlerde zorlanmazken, alt vektör uzayı, germe, lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık konularına geldiklerinde zorlanmaktadırlar. Carlson bu durumun üstesinden gelinmesi için LACSG araştırma grubunun ortaya koymuş olduğu müfredat programının kullanılması gerektiğini, öğretmenlerin öğrencilerini çalışmaya ve araştırmaya teşvik etmelerini ve ayrıca anlatılan konunun problemlerle desteklenmesi gerektiğini belirtmiştir.

Dorier (1998), yapmış olduğu çalışmada formalizmin vektör uzaylarının öğretimindeki etkisine odaklanmıştır. Yapılan çalışmada yazar lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz, boyut ve rank kavramlarını tarihsel gelişimleriyle ele almış ve öğrencilerin vektör uzayları konusunda zorlanmalarının altında yatan sebepleri ortaya koymaya çalışmıştır. Ayrıca vektör uzayları konusunun öğretiminde yeni bir yaklaşım geliştirmeye çalışmıştır. Daha sonra ise araştırma kapsamında öğrencilerin belirli konularda yaptıkları hataları değerlendirmiştir.

Haddad (1999), yürütmüş olduğu çalışmada lineer cebir öğrenimi ve öğretiminde yaşanan güçlükler üzerine yoğunlaşmıştır. Araştırma esas olarak iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada lise lineer cebirinin öğrenimi ve öğretiminde karşılaşılan güçlükler ele alınmış ve ikinci aşamada cabri geometri yazılımı kullanılarak vektörler ve lineer dönüşümler konuları anlatılmış ardından öğrencilerin sahip olduğu güçlükler belirlenmeye çalışılmıştır. Haddad, analiz sürecinde öğrencilerin sahip oldukları güçlükleri; Lineer cebirin doğası, Lineer cebir öğretiminde seçilen öğretim yöntemi ve öğrencilerin matematik bilgileri ve düşünme şekilleri bağlamında analiz etmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin lineer cebir kavramlarını algılamakta ve matematik dilini kullanmakta zorlandıkları, lise lineer cebirinde ise müfredat değişikliğine gidilmesi gerektiği vurgulanmıştır.

Sierpinska, Nnadazie ve Oktaç (2002), yapmış oldukları çalışmada lineer cebirin öğretiminde teorik düşünmenin önemli olduğunu savunmuşlar ve bu düşünme biçimi ile lineer cebir dersine ait yüksek başarı arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Araştırmacılar teorik düşünmeyi yansıtıcı, sistemli ve analitik olmak üzere üç kategoriye ayırmışlardır. Araştırmaya 14 öğrenci katılmış yüksek başarı gösteren 6 öğrenci ile görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Yapılan görüşmelerde öğrencilere 7 soru yöneltilmiştir. Bu sorulardan bir tanesi lineer bağımsızlığın tanımlanması ile ilgili, bir tanesi ise lineer bağımlılıkla ilgilidir. Lineer bağımlılık-bağımsızlıkla ilgili olan sorulardan elde edilen verilere göre, öğrencilerin lineer bağımsızlığa ait matematiksel tanımı açıklarken, tanımda yer alan skaleri anlamlandıramadığı ve bu konuda zorluklar yaşadıkları tespit edilmiştir. Lineer bağımlılıkla ilgili soru da ise öğrencilerden R vektör uzayında yer alan bir V kümesi ve bu kümeye ait olan u, v ve w vektörlerinin lineer bağımlı ya da lineer bağımsız olup olmadıkları belirtilmeden u-v, u-w, v+w vektörlerinin lineer bağımlı olduklarını göstermeleri istenmiştir. Teorik düşünme yapısına sahip olan öğrencilerin soruyu teorik varsayımlarda bulunarak açıklayabildiği görülürken pratik düşünme yapısına sahip olan öğrencilerin lineer bağımlılığın tanımına odaklanarak soruyu çözmeye çalıştıkları görülmüştür. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre teorik düşünme ve anlamanın yüksek başarı için gerekli olmadığı, pratik düşünme yapısına sahip olan öğrencilerin de yüksek başarı performansı sergileyebileceği tespit edilmiştir.

Konyalıoğlu, İpek ve Işık (2003), yapmış oldukları çalışmada lineer cebir dersinin öğretiminin oldukça formal ortama bağlı kalınarak anlatıldığını belirtmiş ve bu dersin öğretiminde geometrik bakış açısının etkisini araştırmışlardır. Araştırma deneysel olarak yürütülmüş ve veri toplamada kullanılacak olan soruların, vektör uzaylarına ait olan tanımları kullanarak doğrudan çözüme ulaşabilecekleri oldukça kolay sorular olmasına dikkat edilmiştir. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin, geometrik bakış açısıyla işlenen lineer cebir dersinde daha yüksek başarı gösterdikleri, vektör uzayına ait kavramları cebirsel ve geometrik olarak tanımlamada daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca araştırmacılar öğrencilerin vektör uzayları kavramlarını anlamada ve ilişkilendirmekte oldukça zorlandıklarını ancak derslerin geometrik bakış açısıyla işlendiği takdirde bu zorluğun büyük ölçüde ortadan kalktığını vurgulamışlardır.

Işık ve İşleyen (2005) çalışmalarında, alt vektör uzayı kavramının kavramsal olarak ne düzeyde öğrenildiğini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Ulaşılan sonuçlara göre öğrencilerin büyük çoğunluğunun alt vektör uzayına ait tanımlamayı yapabildiği ancak tanımla ilgili problemi çözemediği ve dolayısıyla öğrencilerin alt vektör uzayı kavramını özümseme noktasında problem yaşadıkları tespit edilmiştir. Bu durumun ise öğrencilerin kavramların anlamını arka plana atarak, işlemsel çözümlere odaklanmalarından kaynaklandığı saptanmıştır.

Aydın (2006)'da yaptığı çalışmada işbirlikli öğrenme yönteminin; Lineer Cebir-I dersinde yer alan bazı konular üzerine etkisini araştırmıştır. Araştırmanın sonucunda ise işbirlikli öğrenme yönteminin öğretim açısından geleneksel öğretime kıyasla başarıyı daha çok arttırdığı tespit edilmiştir.

Bogomly (2006), yapmış olduğu çalışmada lineer cebir dersine ait vektör, vektör uzayı, baz, lineer bağımlılık-bağımsızlık ve lineer dönüşüm kavramlarının anlaşılmasında öğrencilere ait anahtar kavramların ne olduğunu, öğrencilerin bu kavramlarla ilgili ne gibi zorluklar yaşadıklarını araştırmıştır. Ayrıca araştırmacı öğrencilerin bu kavramları öğrenmelerinin önündeki engellerin neler olduğunu da ortaya koymaya çalışmıştır. Araştırmacı veri toplama aracı olarak öğrencilerin ilgili kavramlara ait oluşturdukları örnekler ve bu örneklere ait yazılı cevapları kullanmıştır. Ayrıca klinik mülakatlar da veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Araştırmacı öğrencilerden kavramlarla ilgili örnekler oluşturmalarını ve bu örnekleri cevaplamalarını istemiş ve öğrencilerin vermiş oldukları örnekler üzerinden bu kavramları nasıl algıladıklarını analiz etmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre, öğrencilerin matematiksel tanımları sorulara nasıl uygulayabileceklerinin farkında olmadıklarını tespit etmiştir. Ayrıca öğrencilerin araştırma kapsamında ele alınan lineer bağımsızlık kavramını da tam olarak algılayamadıkları ve bu kavramı işlemsel bir süreç olarak değerlendirdikleri saptanmıştır.

Stewart ve Thomas (2007), yapmış oldukları çalışmada lineer kombinasyon ve lineer bağımsızlık kavramlarını somutlaştırma, sembolik ve formal bağlamda ele almışlar ve araştırmanın çerçevesini APOS teorisi üzerine kurmuşlardır. Çalışma 2. Sınıfta okumakta olan üniversite öğrencileri ile yürütülmüştür. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin lineer cebirle ilgili kavramları anlama ve tanımlama noktasında sıkıntı yaşadıkları, algılanmasında problem yaşanan kavramların ise görselleştirilerek somutlaştırılmasıyla daha rahat algılanabileceği tespit edilmiştir.

Erçeman (2008), çalışmasında lise öğrencilerinin lineer cebir dersine yönelik bilgilerini kavramsal ve işlemsel açıdan incelemiştir. Farklı okullardan 250 lise öğrencisi ile yürütülen araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin lineer cebir bilgilerinin genel anlamda işlemsel düzeyde daha güçlü olduğu ve kavramsal bilgilerinin ise eksik olduğu saptanmıştır.

Kazci (2008), yürütmüş olduğu çalışmada vektör uzaylarına ait bazı konularla ilgili kavram yanılgılarını incelemiştir. Araştırmada farklı bölümlerde öğrenim görmekte öğrenciler yer almıştır ve araştırma sürecinde vektör uzaylarına ait bazı tanımlar ve temel konular üzerinde durulmuştur. Elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin, araştırmada ele alınan konuların çoğunda kavram yanılgısına sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca kavram yanılgılarının görülme yüzdesinin ise bölümden bölüme farklılık gösterdiği ve en az kavram yanılgısının ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde görüldüğü saptamıştır.

Britton ve Henderson (2009), yürütmüş oldukları çalışmada öğrencilerin lineer cebir dersine ait bazı kavramları öğrenmede neden zorluk yaşadıklarını incelemişler özellikle vektör uzaylarında öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları ve hataları açıklamaya çalışmışlardır. Bu bağlamda araştırmacılar, öğrencilere bir vektör uzayının alt uzayına ait bir kümesinin alt uzay olup olmadığını ispatlamalarını gerektirecek sorular yöneltmişlerdir. Öğrencilere yöneltilen bu sorular iki yıllık bir süreçte uygulanmıştır. Sorular ilk kez sınav olarak uygulanmış bir yıl sonra ise araştırma ödevi olarak verilmiştir. Her iki uygulama sonucunda da öğrencilerin alt vektör uzaylarında vektörlerin, toplama ve skalerle çarpma işlemine göre kapalılığının incelenmesi durumunda benzer zorluklar yaşadığı ve ispatlarda zorlandığı tespit edilmiştir. Ayrıca verilen vektörün vektörel fonksiyon olması durumunda öğrencilerin ispatı yapmakta daha da zorlandığı saptanmıştır.

Ertekin, Solak ve Yazıcı (2010) yapmış oldukları çalışmada iki ve üç boyutlu vektör uzaylarında, lineer bağımsızlık/bağımlılık kavramlarının cebirsel ve geometrik olarak yorumlanmasında formalizmin etkisini araştırmışlardır. Araştırma ilköğretim matematik eğitimi ve ortaokul matematik eğitimi öğrencileriyle yürütülmüştür. Araştırmada bu programlarda yer alan ve formal eğitimle anlatılan lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarının cebirsel ve geometrik olarak yorumlanmasında herhangi bir fark olup olmadığını araştırmak amaçlanmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre formal eğitim alan öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını cebirsel ve geometrik olarak yorumlamakta zorlandıkları tespit edilmiştir.

Kar (2010) yaptığı araştırmada lineer birleşim, baz-boyut, bir kümenin gerdiği uzay, lineer bağımlılık-bağımsızlık, alt vektör uzayı kavramlarının üzerine yoğunlaşmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre probleme dayalı öğretim yönteminin, lineer cebirdeki soyut kavramları somut kavramlara dönüştürmeye ve etkili öğretime olanak sağlamasından dolayı deney grubundaki öğrencilerin, araştırma kapsamındaki kavramlara yönelik olumlu anlamda görüş geliştirdikleri tespit edilmiştir. Ayrıca probleme dayalı öğretim yönteminin, öğrencilerin akademik başarısına olumlu katkı sağladığı ve öğrencilerin problemlerin çözümüne daha yaratıcı bir şekilde yaklaşmalarına olanak tanıdığı tespit edilmiştir.

Turğut (2010) yaptığı çalışmada teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin etkisini ve öğrencilere ait farklı değişkenler arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre teknoloji destekli lineer cebir öğretiminin, öğrencilerin uzamsal yeteneklerine ve lineer cebir başarısına olan etkisinin geleneksel yönteme göre daha fazla olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca çalışmada kullanılan yöntemin öğrencilerin geometrik düşünme düzeylerine herhangi bir etkisinin olmadığı saptanmıştır.

Akyıldız (2013) yaptığı çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin lineer cebir dersine yönelik tutumlarını, alan dilini kullanma becerilerini ayrıca derse ilişkin tutumları ve başarıları arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Araştırmanın sonucuna göre genel olarak öğrencilerin lineer cebir dersine yönelik olumsuz tutuma sahip oldukları ve lineer cebire ait kavramları öğrenmede düşük başarı performansı sergiledikleri tespit edilmiştir.

Kaplan, Gedik, Konyalıoğlu ve Işık (2013) yaptıkları çalışmada üniversite düzeyinde lineer cebir kitaplarını öğretici unsurlar açısından incelemişlerdir. Araştırma kapsamında 1977-2010 yılları arasında yayınlanmış 20 kitap incelenmiş ve kitapların analizinde betimsel içerik analizi kullanılmıştır. Kitaplar belirli temalara ve alt kategorilere ayrılmıştır. Temaların belirlenmesinde Harel (1987)'in çalışmasındaki tema ölçütlerinden ve mevcut litaratürden faydalanılmıştır. Çalışma kapsamında incelenen kitapların çoğunda içeriğe, amaca ve eğitim için önemine yer verilirken az sayıda kitapta lineer cebirin öğretimi, önemi, kullanım alanı ve ilgili kavramların birbiriyle ilişkisine yer verildiği tespit edilmiştir. Ayrıca Harel'in çalışma ölçütleri bağlamında incelenen kitaplarda en çok kullanılan ölçütün "somuttan-soyuta" olduğu tespit edilmiştir.

Delice, Aydın ve Birinci (2014), yaptıkları çalışmalarda matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersine yönelik başarıları ve derse ait kavramlara ilişkin öz yeterlilik algılarını belirlemek amacıyla bir çalışma yapmışlardır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin lineer denklem sistemleri konusunda ortalama düzeyde oldukları ve lineer denklem sistemleri hakkında yüksek öz yeterlilik algısı sergiledikleri tespit edilmiştir.

Kan (2014), yaptığı çalışmada GeoGebra destekli lineer cebir öğretiminin lineer cebir dersi üzerine etkisini araştırmıştır. Araştırmanın sonunda deney grubunda yer alan öğrencilerin GeoGebra destekli öğretimle birlikte vektör uzaylarına ait kavramları görsel ve uygulamalı olarak öğrenmelerinden dolayı akademik olarak daha başarılı oldukları gözlemlenmiştir. Bunun yanı sıra GeoGebra uygulamaları sayesinde öğrencilerin lineer cebirdeki temel kavramları ilişkilendirme ve bu kavramların geometrik ve cebirsel anlamları arasında ilişki kurma becerilerinde de anlamlı bir farklılık olduğu görülmüştür.

İzgiol (2010) yaptığı çalışmada matematik teknolojileri ve çoklu temsiller yoluyla gerçekleştirilen öğretimin, öğrencilerin başarılarına ve lineer cebir dersine karşı tutumlarına etkisini ölçmeyi amaçlamıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre teknoloji destekli öğretim yönteminin öğrencilerin öğrenmelerini olumlu yönde etkilediğini ancak matematiğe karşı tutumlarına olumlu veya olumsuz herhangi bir etkisinin olmadığı tespit edilmiştir.

Çevik (2015), yaptığı çalışmada lineer cebir dersinin bilgisayar destekli materyallerle işlenmesinin öğrencilerin derse karşı ilgi ve alakalarını nasıl etkilediğini ve bu materyallerin öğrencilerin uzamsal görselleştirme ve memnuniyetlerine ne düzeyde etkisi olduğunu ortaya koymaya çalışmıştır. Araştırmanın sonuçlarına göre bilgisayar destekli materyallerin öğrenme ortamını ve öğrencilerin görselleştirmelerini ve derse karşı tutumlarını olumlu etkilediği ayrıca öğrencilerin derse olan ilgilerini arttırdığı tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra öğrencilerin çoğu bilgisayar destekli materyallerin, lineer cebir dersine ait kavramları somutlaştırmasına olanak tanımasından dolayı bu materyallerin uzamsal yeteneği olumlu yönde etkileyeceğini belirtmiştir.

Kardeş Birinci (2016), yaptığı çalışmada öğrencilerin lineer cebire ait temel kavramları ne düzeyde anladıklarını, uzamsal yetenekleri ve matematik düşünme yapısı olarak ne düzeyde olduklarını ortaya koymayı amaçlamıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğretmen adaylarının kavramsal olarak lineer cebir dersine yönelik sergiledikleri performansların bireysel farklılıklarına, uzamsal yeteneklerine ve düşünme yapılarına göre değişiklik gösterdiği tespit edilmiştir. Öğrencilerin düşünme düzeyleri geometrik, harmonik ve analitik olmak üzere üç kategoride ele alınmıştır. Öğrencilerin performansları, düşünme düzeyleri ve uzamsal yetenekleri bağlamında ayrı ayrı incelenmiştir. Analitik düşünme düzeyinde ve orta seviyede uzamsal yeteneğe sahip olan öğrenciler vektör uzayları konusunda, geometrik düşünme düzeyinde ve yüksek seviyede uzamsal yeteneğe sahip olan öğrenciler lineer bağımsızlık konusunda, harmonik düşünme düzeyinde ve düşük seviyede uzamsal yeteneğe sahip olan öğrenciler ise alt vektör uzayı kavramında yüksek performans sergilemiştir.

Koparan ve Bağdat (2017), yaptıkları çalışmada matematik öğretmen adaylarının lineer cebir dersinde matris ile ilgili problemleri çözerken ne gibi hatalar yaptıklarını tespit etmeye çalışmışlardır. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğretmen adaylarının sıklıkla matrislerle ilgili basit işlemlerde hata yaptıkları ve bazı temel kavramlarla ilgili eksik bilgilere sahip oldukları, işlemsel bilgiler vasıtasıyla çözüme ulaşmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Ayrıca bazı öğrencilerin ise ilgili soruyu üniversite eğitiminde verilmiş olan bilgileri kullanıp sistematik bir şekilde çözmek yerine lise yıllarına ait bilgileri kullanıp bilinmeyeni bulma yoluna giderek hata yaptığı tespit edilmiştir.

Açıkyıldız (2019), yapmış olduğu çalışmada vektör uzayları konularının daha etkili işlenebilmesi için bir öğretim ortamı tasarlamış ve bu tasarladığı öğretim ortamının etkililiği ile ilgili öğrenci görüşlerini değerlendirmiştir. Araştırmada yöntem olarak tasarım tabanlı araştırma yöntemi kullanılmıştır. Araştırma süreci boyunca dersler sınıf ve bilgisayar laboratuvarı ortamında işlenmiş ve çalışmaya toplamda 106 öğrenci katılmıştır. Süreç boyunca öğrencilerin düşünme stilleri belirlenmiş ve uygun ödevler verilerek öğrenciler takip edilmiştir. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre tasarlanan ortamın öğrenme ortamı ve öğrenciler üzerinde olumlu etkilerinin olduğu saptanmıştır. Ayrıca tasarlanan ortam, yapı itibariyle soyut olan lineer cebir kavramlarının somutlaştırılması noktasında öğrenciler tarafından olumlu görüşlerle değerlendirilmiştir. Bunun yanı sıra yapılan incelemeler sonucunda öğrencilerin büyük çoğunluğunun *yapısal-analitik* düşünme stiline sahip olduğu tasarlanan ortamda ise en çok vektör uzayları ve alt uzaylar konusunda başarılı olduğu tespit edilmiştir. Tüm bunlara ek olarak öğrencilerin lineer cebire ait kavramlarda çeşitli zorluklara sahip olduğu bu zorlukların formalizmden kaynaklandığı görülmüştür.

Hem lineer cebir öğretimi hem de vektör uzayları ile ilgili yapılan yukarıda bahsettiğimiz çalışmalara bakıldığında araştırmacıların genel anlamda müfredat ve öğretim tasarımına yönelik çalışmalar yaptığı, öğrencilerin lineer cebir kavramlarına yönelik anlamalarını ve öğrenme güçlüklerini ele aldıkları ayrıca farklı öğretim tekniklerinin dersin öğretimine etkisini araştırdıkları görülmüştür. Yapılan bu araştırmada ise daha ayrıntılı verilere ulaşmak adına; öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarına yönelik algıları ve öğrencilerin bu kavramları nasıl ifade ettikleri araştırılmıştır.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, çalışma grubu, veri toplama araçları, çalışma süreci, veri analizi ve çalışmaya ait geçerlik ve güvenirlik bilgileri ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırma, lineer cebir dersine ait lineer bağımsızlık-bağımlılık ve baz-boyut kavramlarının öğrenciler tarafından nasıl ve ne şekilde algılandığını araştırmak amacıyla yürütülmüştür. Bu nedenle, araştırmada ayrıntılı bilgiye ulaşma fırsatı sağladığı için nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışması, bir veya birden fazla durumun sistematik ve ayrıntılı bir şekilde incelenmesine olanak sağlayan, olayların mevcut durumuna ait ayrıntıları ortaya koyan ve bu ayrıntılara ilişkin açıklamalar ve değerlendirmeler yapılmasına fırsat sağlayan bir araştırma modelidir (Davey,1991; Büyüköztürk, 2018). Başka bir ifadeyle durum çalışması, bireylerin, olayların veya süreçlerin kapsamlı bir şekilde ele alındığı ve çeşitli etkenlerin ele alınan durumu nasıl bir şekilde etkilediğini ortaya çıkarmaya olanak sağlayan bir modeldir (Yıldırım & Şimşek, 2018).

3.2. Çalışma Grubu

Nitel çalışmalarda, üzerinde çalışılan konunun sonuçlarını genelleme kaygısı yoktur. Asıl amaç üzerinde çalışılan örneklemden derinlemesine, zengin ve nitelikli bilgiler elde edebilmektir (Yıldırım & Şimşek, 2018; Büyüköztürk, 2018). Bu nedenle yürütülen araştırmanın örneklem seçiminde amaca uygunluk dikkate alınarak çalışmanın örneklemi, olasılıksız örneklem türlerinden biri olan amaca yönelik örneklem yaklaşımıyla oluşturulmuştur. Amaca yönelik örneklem seçiminde çalışmaya zengin ve nitelikli veriler sağlayacak olan katılımcıların seçilmesi araştırma açısından son derecede önemlidir (Yıldırım & Şimşek, 2018). Bu doğrultuda araştırmanın örneklemi amaca yönelik örnekleme yöntemine uygun olarak belirlenmiştir. Araştırmanın örneklemini, 2019-2020 öğretim yılında bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim görmekte olan ve lineer cebir dersini alan 36 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmada yer alan öğrenciler Ö1, Ö2, Ö3, … şeklinde kodlanmıştır. Lineer cebir dersi için çalışma kapsamında ele alınan baz-boyut lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık kavramları öğrencilere, dersten sorumlu olan öğretim üyesi tarafından sunuş ve görselleştirme öğretim metodu yoluyla anlatılmış ve konuların anlatımlarının akabinde ispatlara ve bolca soru çözümüne yer verilmiştir. Derste öğretim materyali olarak ortak kitap kullanılmıştır. Çalışmayı yürüten araştırmacı ise araştırma süreci boyunca dersleri düzenli bir şekilde takip etmiştir.

3.3. Veri Toplama Aracı

Araştırmanın problemlerini yanıtlamak amacıyla iki farklı veri toplama aracı kullanılmıştır. Bu veri toplama araçlarından birincisi lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut kavramları bilgi testi ikincisi ise öğrencilerin cevapladıkları sorular hakkında ayrıntılı verilere ulaşmaya olanak sağlayan yarı yapılandırılmış mülakat formudur. Bahsi geçen veri toplama araçları ile ilgili bilgiler aşağıda detaylı bir şekilde sunulmuştur.

3.3.1. Lineer Bağımlılık-Bağımsızlık ve Baz-Boyut Bilgi Testi

Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut bilgi testi (LBBT), öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz boyut kavramları ile ilgili bilgilerini ölçmek ve bu kavramları nasıl algıladıklarını anlamak amacıyla araştırmacı tarafından oluşturulmuş 8 açık uçlu soru tarzı içeren bir testtir. Test maddeleri hazırlanırken literatür ve ilgili ders kaynakları ayrıntılı bir şekilde araştırılmış ve bir soru havuzu oluşturulmuştur. Daha sonra ilköğretim matematik öğretmenliği programında yer alan lineer cebir dersinin kazanımları dikkate alınarak teste son şekli verilmiştir. Lineer cebir dersine ait çıktılar göz önüne alındığında, öğrenciler bu dersi başarılı bir şekilde tamamladıklarında;

- Lineer cebir dersi ile ilgili temel kavramlara hakim olabilecek,
- Vektör uzayına ait yapıları ve bu yapıların özelliklerini kavrayabilecek,
- *Lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz-boyut* kavramlarını açıklayabilecek ve bu kavramlarla ilgili problemleri çözebilecek,
- Vektörleri R^2, R^3 veya R^n uzayında anlamlı bir şekilde konumlandırabilecek ve bu vektörlerin geometrik yorumunu açıklayabilecektir.

Derse ait öğrenme çıktıları doğrultusunda bu araştırmada kullanılmak üzere, üç uzmanın görüşleri doğrultusunda öğrencilerin vektör uzaylarına ait kavramları ne kadar ve ne derecede algıladığını anlamaya yönelik bir ölçme aracı geliştirilmiştir. Geliştirilen ölçme aracı başlangıçta 10 sorudan oluşan açık uçlu bir test olarak hazırlanmıştır. Daha sonra öğrencilere pilot uygulama olarak uygulanmıştır. Yapılan pilot uygulama sonrasında iki uzmanın fikir birliğine varması sonucu iki soru ölçme aracından çıkarılarak ve gerekli bazı düzenlemeler yapılarak ölçme aracına en son şekli verilmiştir. Ölçme aracında yer alan sorularda kodlamalar kullanılmıştır. Pilot uygulamada ve asıl uygulamada yer alan sorular S1, S2, S3, … şeklinde kodlanmıştır. Öğrencilerin LBBT' de yer alan sorulara vermiş oldukları cevaplar Doğru, Kısmen doğru, Yanlış ve Boş olarak dört kategoriye ayrılarak puanlanmıştır. Ölçme aracında yer alan soruların özellikleri ise aşağıda sunulmuştur.

Tablo 3.1. Ölçme aracına ait özellikler

VEKTÖR UZAYINA AİT BAZI KAVRAMLAR				
	Lineer bağımsızlık	**Lineer Bağımlılık**	**Baz**	**Boyut**
Pilot uygulama	S1, S2, S3, S5	S1, S4	S6,S7	S6, S8, S9, S10
Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut ölçeği (Asıl Uygulama)	S1, S2, S3, S7	S1	S4, S6, S8	S5, S6, S8

LBBT, öğrencilerin lineer bağımsızlık, lineer bağımlılık, baz ve boyut kavramlarına ait tanımları, özellikleri, bu kavramlarla ilgili işlemleri ve vektör uzayına ait kavramları nasıl algıladıklarını ölçmeyi amaçlayan bir testtir. Tablo 3.1 de görüldüğü gibi pilot uygulamada kullanılan teste ait ve LBBT' ye ait özellikler sunulmuştur. Buna göre pilot uygulamada yer alan S1, S2, S3, S5, soruları lineer bağımsızlık kavramı ile ilgilidir. Bu soruların bir kısmında, lineer bağımsızlık kavramının tanım olarak ne ifade ettiği ve farklı vektör uzaylarında nasıl algılandığı, bir kısmında ise bu kavrama yönelik işlemsel bilgiler ölçülmüştür. Aynı zamanda pilot uygulamada yer alan S1 ve S4 soruları lineer bağımlılık kavramı ile ilgilidir. Bu sorularda da tıpkı lineer bağımsızlık kavramı gibi lineer bağımlılık kavramı aynı bağlamda ölçülmeye çalışılmıştır. Yine pilot uygulamada yer alan S6, S8, S9, S10 soruları boyut kavramı ile ilgilidir. S6'da aynı zamanda baz kavramına ait bilgi ölçülmüştür. Asıl uygulamada yer alan S1, S2, S3 ve S7 soruları lineer bağımsızlık kavramı ile ilgili sorulardır. Yine bu sorularda da pilot uygulamada yer alan lineer bağımsızlık kavramı ile ilgili sorularda olduğu gibi soruların bir kısmında, lineer bağımsızlık kavramının tanım olarak ne ifade ettiği ve farklı vektör uzaylarında nasıl algılandığı, bir kısmında ise bu kavrama yönelik işlemsel bilgiler ölçülmüştür. S1 sorusu aynı zamanda lineer bağımlılık kavramına yönelik bilgiyi ölçmek amacıyla sorulmuştur. Yine asıl uygulamada yer alan S4, S6 ve S8 soruları baz kavramı ile ilgilidir. Bu soruların bir kısmında baz kavramının tanımsal olarak nasıl algılandığı, bir kısmında ise bu kavramın işlem gerektiren sorularda nasıl algılandığı ölçülmek istenmiştir. S5, S6, S8 soruları boyut kavramı ile ilgilidir. S6'da aynı zamanda baz kavramına ait bilgi ölçülmüştür. Yine bu soruların bir kısmında boyut kavramının işlemsel olarak nasıl algılandığı, bir kısmında ise boyut kavramının tanımlanma noktasında nasıl algılandığı ölçülmüştür.

3.3.2. Yarı Yapılandırılmış Mülakat Formu

Durum çalışmalarında derinlemesine bilgiye ulaşmak amacıyla çeşitli veri toplama araçlarının yanı sıra mülakat formları kullanılır. Mülakatlar, iki veya daha fazla kişi arasında gerçekleştirilen sıradan diyaloglardan farklı olarak derinlemesine bilgiye ulaşma amacıyla kişiler arasında gerçekleşen, amaçlı sorulara verilen cevapları içeren etkili bir veri toplama aracıdır (Büyüköztürk, 2018; Yıldırım ve şimşek, 2018). Mülakat çeşitlerinden yarı yapılandırılmış mülakatlar, hem seçenekli cevaplamaya olanak sağlaması bakımından hem de çalışmanın esnek bir şekilde yürütülebilmesine fırsat sağlamasından dolayı derinlemesine bilgiye ulaşmada kolaylık sağlamaktadır (Büyüköztürk, 2108).

Yürütülen bu araştırmada, öğrencilerin vektör uzaylarına ait kavramları nasıl algıladıklarını ortaya çıkarmak için veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış mülakat formları kullanılmıştır. Yarı yapılandırılmış mülakat 9 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Her öğrencinin yanıtlaması gereken ortak soruların hazırlanmasına ek olarak öğrencilerin LBBT' ye vermiş olduğu cevaplar dikkate alınarak her bir öğrenci için belirli mülakat soruları da hazırlanmıştır. Hazırlanan ortak sorular lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarının açıklanmasına ilişkin soruları oluştururken her öğrenci için ayrı ayrı sorulan sorular ise öğrencilerin yapmış olduğu doğru veya yanlış cevaplamalara ilişkin soruları oluşturmaktadır. Hazırlanan bu soruların yüz yüze mülakatlarla sorulması planlanmış ancak korona virüs salgını sebebiyle mülakatlar yüz yüze gerçekleştirilememiştir. Nitel araştırmalarda veri toplama amacıyla internet kaynaklı verilerden de faydalanılabilir ve e-posta aracılığı ile de öğrencilere yarı yapılandırılmış mülakat formları ulaştırılabilir. E-posta ile veri toplama yönteminin anketten farkı öğrencilerin ulaşılabilir olması ve gerekli durumlarda konu ile ilgili ayrıntılı görüşmelere olanak sağlamasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu nedenle e-posta ile yarı yapılandırılmış mülakat verilerinin toplanması, durum çalışması için uygun bir yöntem olarak değerlendirilebilir. Ek olarak bu çalışmada, araştırmacı ve öğrenciler arasındaki iletişimi ve etkileşimi arttırmak ve daha ayrıntılı verilere ulaşabilmek adına e-posta ile veri toplama yönteminin yanı sıra öğrencilerle telefon görüşmeleri yapılmış ve bu görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Telefon üzerinden gerçekleştirilen görüşmeler sırasında üç öğrencinin sağlık sorunları yaşaması sebebiyle bu öğrencilerle yarı yapılandırılmış mülakat görüşmesi gerçekleştirilememiştir.

3.4. Çalışma Süreci

Çalışmada vektör uzaylarına ait lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı araştırılmıştır. Bu amaç doğrultusunda üç uzmanın fikir birliği ile hazırlanan açık uçlu sorudan oluşan test, iki aşamada öğrencilere uygulanmıştır. Lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut kavramları bilgi testi (LBBT) ilk aşamada, öğrencilerin çalışmada yer alan kavramlarla ilgili herhangi bir bilgiye sahip olup olmadıklarını ve liseden getirmiş oldukları bilgilerin neler olduğunu anlamak ve testte gerekli düzenlemeler yapmak adına, 40 öğrenciye 60 dakikalık bir sürede uygulanmış ve bu uygulama sonucunda sorular tekrar gözden geçirilerek gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Testin ikinci uygulama aşaması, 6 haftalık bir süreyi kapsayan ders işleme ve değerlendirme sürecinden ibarettir. Dersin işlenme sürecinde öğrencilere ilgili kavramların tanımları ve özellikleri verilmiş ardından bu kavramlarla ilgili teoremler ve teoremlere ait ispatlar sunulduktan sonra konuyu anlamalarına olanak sağlayacak örneklere yer verilmiştir.

Lineer cebir dersine ait kavramların öğretim süreci Tablo 3.2 de sunulmuştur.

Tablo 3.2. Lineer cebir öğretim sürecinde kullanılan ders planı

Hafta	Ders planı
1. Hafta	Lineer cebir ile ilgili temel kavramlar ve tanımların öğretimi
2. Hafta	Vektör ve vektör uzayı kavramı, vektör uzayına ait kavramlar ve özellikleri
3. Hafta	Lineer birleşim ve alt vektör uzayına ait tanım, teorem ve ispatlar, konu ile ilgili örnekler
4. Hafta	Lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları ve bu kavramlarla ilgili teoremler, ispatlar ve örnekler
5. Hafta	Baz ve boyut kavramlarına ait tanımlar, bu kavramlara ait teoremler, ispatlar ve örnekler
6. Hafta	Lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık, baz ve boyut kavramları ile ilgili soru çözümleri

Görüldüğü gibi Tablo 3.2'de araştırma kapsamındaki ilgili kavramların öğretimi 6 hafta sürmüştür. Ders öğretim süreci tamamlandıktan sonra LBBT' nin ikinci aşamasına geçilmiştir. LBBT' nin uygulanmasının ikinci aşamasında korona virüs salgını nedeniyle sorular, öğrencilere araştırma ödevi olarak verilmiştir. Öğrencilerin soruları ciddiye alarak cevaplamaları ve araştırmadan elde edilen verilerin daha güveniler olması açısından, bu sorulara ait öğrenci cevapları, puanlanmış ve öğrencilerin vize-final notlarını belirlemiştir. LBBT' nin uygulanmasından sonra öğrencilerin sorulara vermiş oldukları cevaplar, incelenerek analiz edilmiş ve daha sonra 36 öğrenci içinden 9 öğrenci seçilerek bu öğrencilerle yarı yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir.

3.5. Verilerin Analizi

Verilerin analizi, betimsel analiz ve içerik analizi tekniği kullanılarak iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Veri analizinin birinci aşamasında, LBBT ile toplanan verileri analiz etmek için betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Betimsel analizi gerçekleştirmek için öğrencilerin sorulara vermiş oldukları cevaplar incelenmiş ve verilen cevaplar kodlanarak belirli temalara ayrılmıştır. İçerik analizi nitel çalışmalarda oldukça tercih edilen insan davranışlarının dolaylı yollarla incelendiği veya metinlerin kodlara, kategorilere ve temalara ayrılmasıyla, metnin özetlendiği ve temsil edildiği sistematik ve kullanışlı bir yöntemdir (Büyüköztürk, 2018, s. 259). Betimsel analiz vasıtasıyla özetlenen veriler, içerik analizi ile birlikte belirli temalar altında yorumlanır ve daha da derinleştirilir. Bu sayede zengin verilerin ortaya çıkmasına olanak sağlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 242). Bu nedenle, öğrencilerle gerçekleştirilmiş olan yarı yapılandırılmış mülakat formlarından elde edilen veriler, içerik analizine tabi tutulmuş ve verilerin analizi, yeni verilerle desteklenerek yorumlanmıştır.

3.6. Geçerlik ve Güvenirlik

Geçerlik ve güvenirlik bilimsel araştırmaların en önemli ölçütleri arasında yer alır. Bu iki akademik ölçütten birisi olan geçerlik, araştırmacının ele aldığı konuyu nesnel bir şekilde değerlendirmesidir. Tarafsızlık ve öznellikten arınıklık bir araştırmanın geçerliğini arttıran temel faktörlerdendir. Bunun yanı sıra geçerliği arttıran birçok unsur vardır. Olguyu tarafsız bir şekilde ele alan araştırmacının, araştırma süreci boyunca uzman desteği alması, çeşitli veri toplama araçlarını kullanması ve katılımcılara ait doğrudan alıntıları kullanması araştırmanın geçerliğini arttıran diğer unsurlar arasında yer almaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 269). Bu nedenle yapılan bu araştırmanın geçerliğinin yüksek olmasını sağlamak için çalışmanın bütün basamakları boyunca uzman desteği alınmıştır. Veri toplama aracının oluşturulması, uygulanması ve değerlendirilmesi aşamasında çoğunlukla iki uzmanın fikir birliğinin sağlanmasına önem verilmiştir. Bunun yanı sıra korona virüs salgını sebebiyle öğrencilerle yüz yüze görüşme imkanının olmamasından dolayı yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlar mail üzerinden gerçekleştirilmiştir. Ancak geçerliği arttırmak ve derinlemesine verilere ulaşabilmek için mülakat süreci daha esnek yürütülmüş ve öğrencilerle telefon görüşmeleriyle de mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Ek olarak çalışmaya ait veriler, öğrencilerin cevaplarını içeren doğrudan alıntılardan oluşmaktadır.

Araştırmanın güvenirliğini sağlamak amacıyla da veri toplama ölçeğinin oluşturulma süreci üç uzman desteği ile verilerin değerlendirilmesi süreci ise iki uzman desteği ile yürütülmüştür. Veri analizinin güvenirliğini sağlamak için ölçekten elde edilen veriler, iki uzman tarafından ayrı ayrı değerlendirilmiş görüş ayrılığının olduğu noktalarda uzlaşma sağlanmıştır. Bu süreçte güvenirlik yüzdesini belirlemek için Miles ve Huberman'ın uyum yüzdesinden faydalanılmıştır. Uyum yüzdesinin formülü aşağıdaki gibidir.

Uyum Yüzdesi = [Görüş Birliği/ (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)] x 100 (Miles ve Huberman, 1994).

Bu formüle göre uyum yüzdesinin % 96 olduğu görülmüştür.

4. BULGULAR

Bu bölümde ilköğretim matematik öğretmenliği 2. Sınıf öğrencilerine, pilot uygulama olarak uygulanan açık uçlu sorulardan elde edilen veriler ve asıl çalışma olarak uygulanan açık uçlu sorulardan elde edilen verilere ait bulguların analizleri detaylı bir şekilde incelenerek sunulmuştur.

4.1. Pilot uygulamadan elde edilen verilere ait analizler

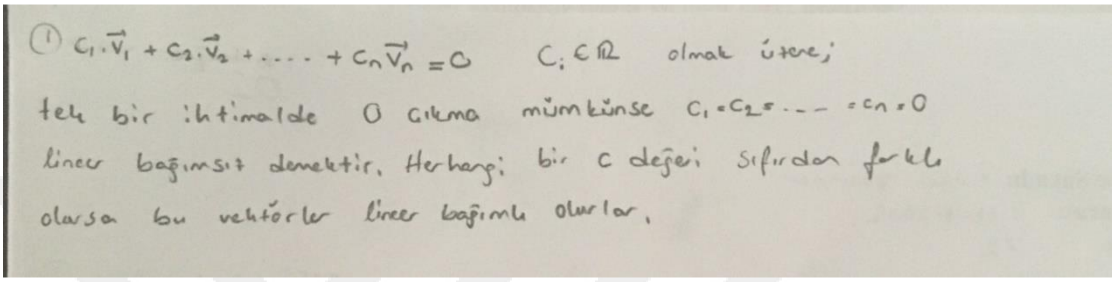
Pilot uygulamada yer alan sorular öğrencilerin lineer bağımlılık –bağımsızlık ve baz-boyut kavramları ile ilgili ön bilgilerinin olup olmadığını ölçmek için sorulmuştur. Öğrencilerin bu sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen veriler kategorilere ayrılamamıştır. Bu nedenle bu verilerin analizi soru-soru yapılmıştır. Yapılan analiz sonuçlarına dikkat edilirse öğrencilerin Lineer Cebir-I dersini aldıkları halde, yani lineer cebirle ilgili temel kavramları almış olmalarına rağmen, çoğunluğunun lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarıyla ilgili bilgi sahibi olmadıkları görülebilir. Yapılan analizler frekans tabloları ve öğrenci cevaplarıyla beraber aşağıda sunulmuştur.

4.1.1. Öğrencilerin pilot uygulamada birinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.1. Öğrencilerin pilot uygulamada S1'e verdiği yanıtlar

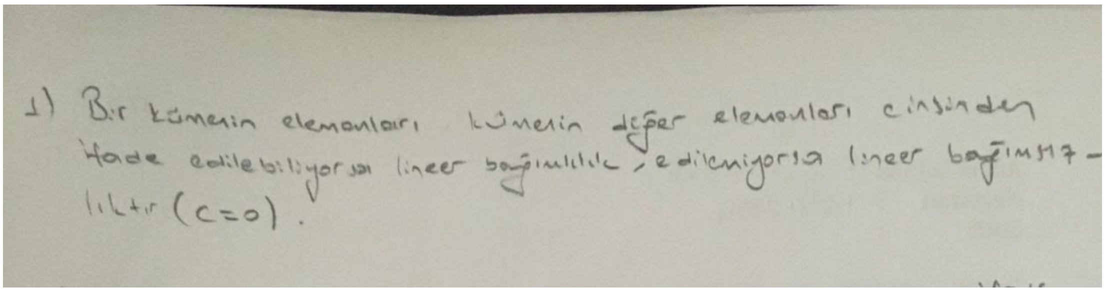
Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
Lineer bağımlılık ve Lineer bağımsızlık kavramlarını kendi cümlelerinizle açıklayınız. Ayrıca bu iki kavram arasında bir ilişki kurulabilir mi? Kurulursa nasıl bağıntı kurulur? İzah ediniz.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	5	%13,89
	Yanlış	4	%11,11
	Boş	27	%75

Tablo 4.1’de görüldüğü üzere, 1. soruyu 27 öğrenci cevapsız bırakmış 9 öğrenci ise soruyu yanıtlamıştır. Verilen yanıtlar incelendiğinde soruyu hiçbir öğrencinin doğru yanıtlayamadığı görülmüştür. Diğer yanıtlar incelendiğinde ise kısmen doğru yanıt veren öğrenci sayısının 5, yanlış yanıt veren öğrenci sayısının 4, soruyu boş bırakan öğrenci sayısının 27 olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin sorulara vermiş olduğu yanıtları ise aşağıda sunulmuştur.


① $c_1.\vec{v_1} + c_2.\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n} = 0$ $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere;
tek bir ihtimalde 0 çıkma mümkünse $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$
lineer bağımsıt denektir, Herhangi bir c değeri sıfırdan farklı
olursa bu vektörler lineer bağımlı olurlar,

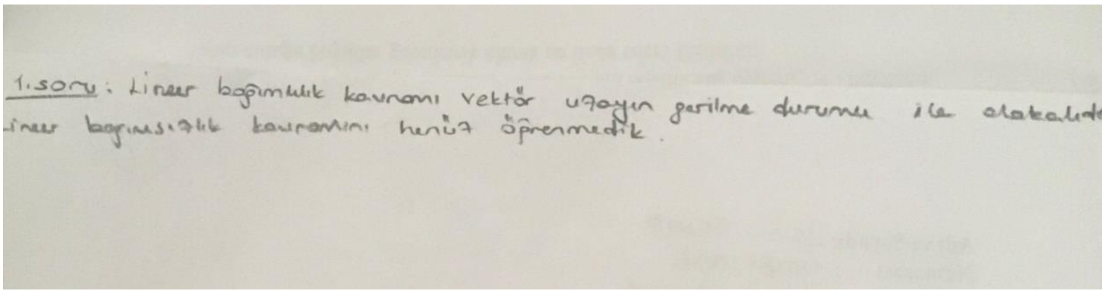
Şekil 4.1. Ö2’nin pilot uygulamada S1 için verdiği yanıt

Şekil 4.1’de görüldüğü gibi Ö2 lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarına ait tanımları doğru yanıtlamış ancak bu iki kavram arasındaki ilişkiyi açıklayamamıştır. Buna ek olarak Ö16 ve Ö36 kodlu öğrencilerin de S1’i benzer şekilde yanıtladığı tespit edilmiştir. Dolayısıyla bu yanıttan hareketle öğrencilerin bu iki kavram arasındaki ilişkiyi algılama ve ifade etme noktasında problem yaşadığı saptanmıştır.


1) Bir kümenin elemanları kümenin diğer elemanları cinsinden
ifade edilebiliyorsa lineer bağımlılık, edilemiyorsa lineer bağımsız-
lıktır (c=0).

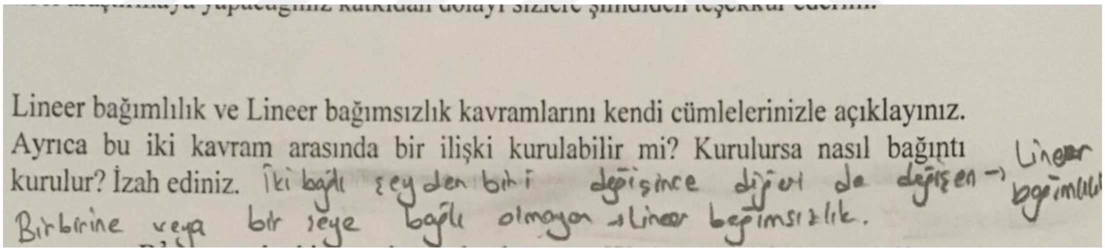
Şekil 4.2. Ö6’nın pilot uygulamada S1 için verdiği yanıt

Şekil 4. 2 incelendiğinde Ö6, lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramına yönelik tahminde bulunarak soruyu yanıtladığı ancak iki kavram arasındaki ilişkiyi açıklayamadığı görülmektedir.


1.soru: Lineer bağımlılık kavramı vektör uzayın gerilme durumu ile alakalıd
lineer bağımsızlık kavramını henüz öğrenmedik.

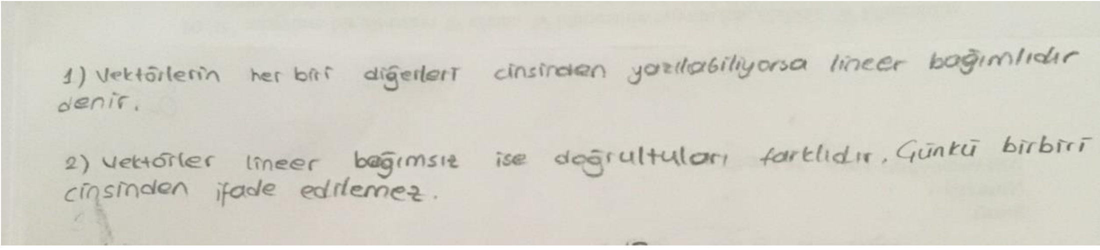
Şekil 4.3. Ö8'in pilot uygulamada S1 için verdiği yanıt

Şekil 4.3'te görüldüğü üzere Ö8, lineer bağımlılık kavramını açıklayamamakla birlikte bu kavramın vektör uzayının gerilmesiyle alakalı olduğuna yönelik tahminde bulunmuştur. Yine Ö8, lineer bağımsızlık kavramını ve kavramlar arasındaki ilişkiyi ise açıklayamamıştır.


Lineer bağımlılık ve Lineer bağımsızlık kavramlarını kendi cümlelerinizle açıklayınız. Ayrıca bu iki kavram arasında bir ilişki kurulabilir mi? Kurulursa nasıl bağıntı kurulur? İzah ediniz. İki bağlı şeyden biri değişince diğeri de değişen → Lineer bağımlılık
Birbirine veya bir şeye bağlı olmayan → lineer bağımsızlık.

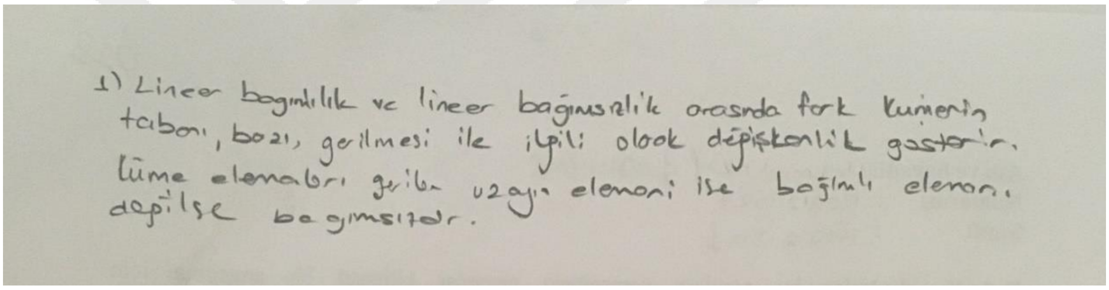
Şekil 4.4. Ö15'in pilot uygulamada S1 için verdiği yanıt

Şekil 4.4 incelendiğinde Ö15 kodlu öğrencinin lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramını tahminde bulunarak sezgisel olarak açıkladığı ve bu iki kavram arasındaki ilişkiyi ise açıklayamadığı görülmektedir.



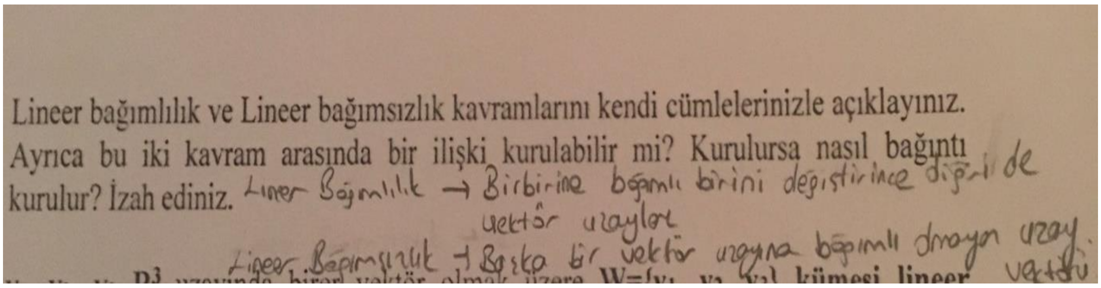
Şekil 4.5. Ö20'nin pilot uygulamada S1 için verdiği yanıt

Şekil 4.5 incelendiğinde Ö20 kodlu öğrencinin, lineer bağımlılık kavramı için her vektörün diğerleri cinsinden ifade edilmesi gerektiğine dair yanlış bir bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Ancak lineer bağımlılık tanımındaki bilgi eksikliğinin aksine öğrenci lineer bağımsızlık kavramını doğrultu ile ilişkilendirebilmiştir. Buna ek olarak öğrenci bu iki kavram arasındaki ilişkiyi açıklamamıştır.



Şekil 4.6. Ö23'ün pilot uygulamada S1 için verdiği yanıt

Şekil 4.6'da incelendiğinde Ö23 kodlu öğrencinin lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramları ile ilgili tahmine yönelik tanımlamada bulunduğu, bu iki kavram arasındaki ilişkiyi ise yanlış açıkladığı görülmüştür.



Şekil 4.7. Ö26'nın pilot uygulamada S1 için verdiği yanıt

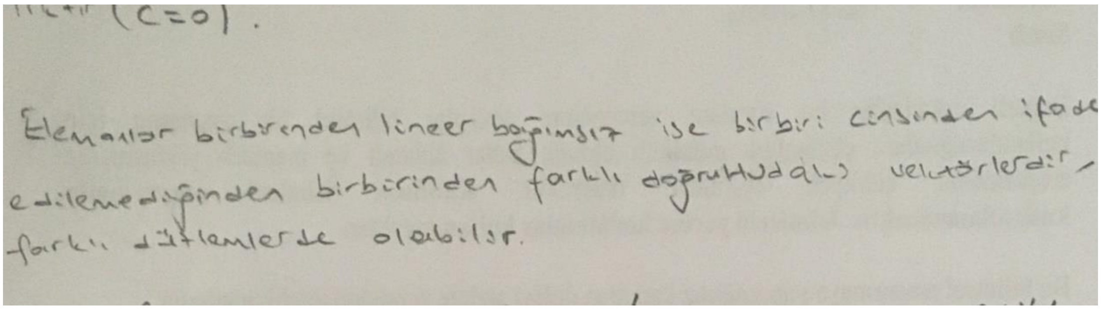
Şekil 4.7’de görüldüğü üzere Ö26, lineer bağımlılığın ya da bağımsızlığın vektörleri ilgilendiren bir durum olduğunu bilmemektedir. Ayrıca öğrenci bu iki kavram arasındaki ilişkiyi de açıklayamamıştır.

4.1.2. Öğrencilerin pilot uygulamada ikinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.2. Öğrencilerin pilot uygulamada S2’ye verdiği yanıtlar

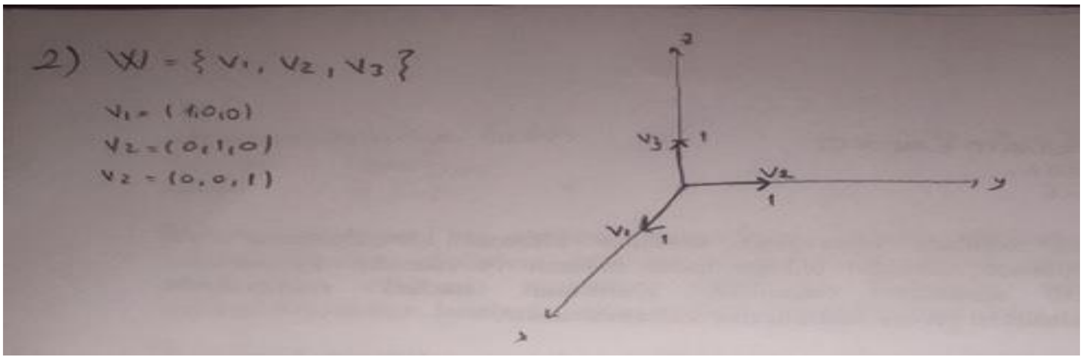
Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
v_1, v_2, v_3, R^3 uzayında birer vektör olmak üzere W={v_1, v_2, v_3} kümesi lineer bağımsız bir küme olsun. Buna göre v_1, v_2, v_3 vektörleri arasında geometrik bir ilişki var mıdır? Varsa gösteriniz.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	3	%8,33
	Yanlış	1	%2,78
	Boş	32	88,89

Tablo 4.2’ de incelendiğinde 2. Soruyu 32 öğrencinin boş bıraktığı 4 öğrencinin ise soruya yanıt verdiği görülmektedir. Öğrencilerin verdiği yanıtlar incelendiğinde ise 3 öğrencinin soruyu kısmen doğru yanıtladığı 1 öğrencinin ise yanlış yanıtladığı görülmektedir. Buna ek olarak öğrencilerden hiçbirinin soruya doğru yanıt veremediği görülmektedir. Ayrıca tabloda sunulan verilerin yanı sıra soruları cevaplayan öğrencilerin yanıtları incelenmiş ve kayda değer olan cevaplar sunulmuştur.



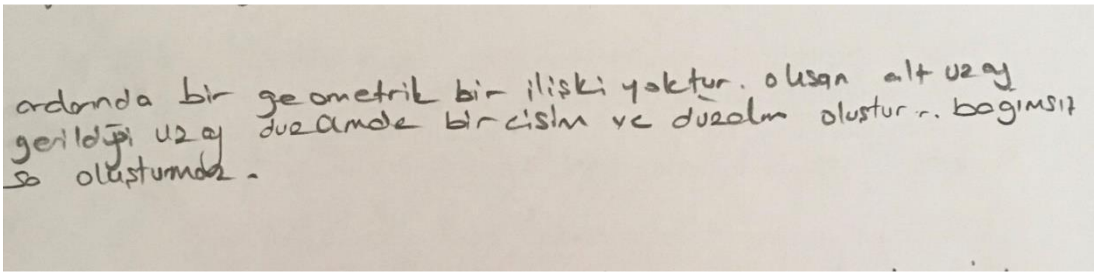
Şekil 4.8. Ö6’nın pilot uygulamada S2 için verdiği yanıt

Şekil 4.8 incelendiğinde Ö6’nın, sorudaki verileri kullanarak vektörleri R^3 uzayına taşıyıp çözümü yapmak yerine, lineer bağımsız vektörlerin özelliklerini ifade edip bu vektörlerin farklı düzlemlerde olabileceğine yönelik tahminde bulunarak soruyu yanıtladığı görülmektedir. Ancak Ö6'nın lineer bağımsız vektörlere ait vermiş olduğu bilgiler doğru olmasına rağmen bu vektörler arasındaki geometrik ilişkiyi açıklayamadığı görülmüştür.



Şekil 4.9. Ö12'nin pilot uygulamada S2 için verdiği yanıt

Şekil 4.9'da incelendiğinde Ö12'nin vektörler arasındaki geometrik ilişkiyle ilgili herhangi bir açıklama yapmadığı ve v_1, v_2, v_3 vektörlerini kullanarak lineer bağımsız vektörlerin tüm durumlarını incelemek yerine standart vektörleri seçerek sorunun çözümüne gitmeye çalıştığı görülmektedir.



Şekil 4.10. Ö23'ün pilot uygulamada S2 için verdiği yanıt

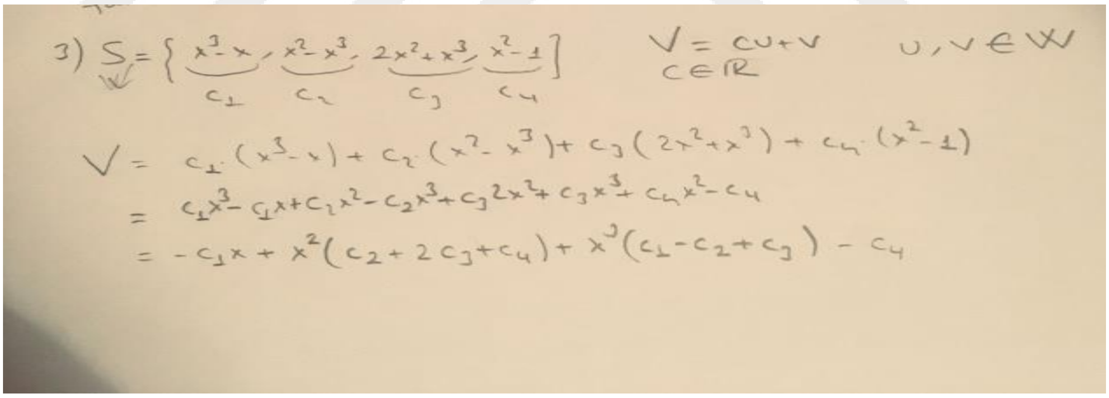
Şekil 4.10'da görüldüğü üzere Ö23 lineer bağımsız W kümesinin elemanları arasında geometrik bir ilişkinin olmadığını belirterek tahmine yönelik bir yanıt vermiş ve soruyu doğru yanıtlayamamıştır. Benzer şekilde Ö37'nin de vektörlerin lineer bağımsız olmalarından dolayı v_1, v_2, v_3 vektörleri arasında geometrik bir ilişkinin olmayacağına yönelik bir cevap verdiği görülmüştür.

4.1.3 Öğrencilerin pilot uygulamada üçüncü soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.3. Öğrencilerin pilot uygulamada S3'e verdiği yanıtlar

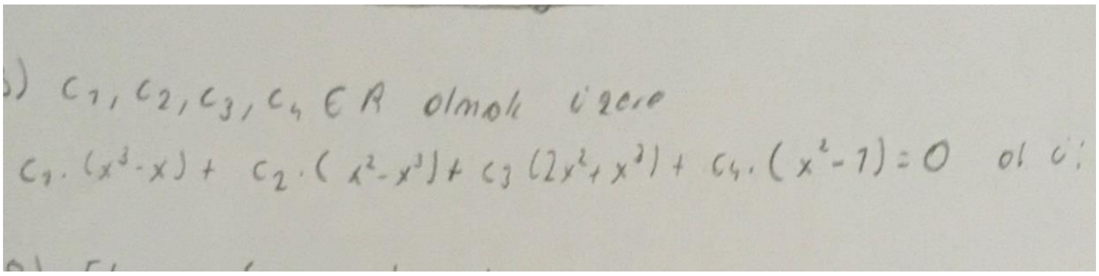
Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
S = {x^3-x, x^2-x^3, 2x^2+x^3, x^2-1} kümesi bir V vektör uzayının alt kümesi olmak üzere, S Polinom kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	1	%2,78
	Yanlış	1	%2,78
	Boş	34	%94,44

Tablo 4. 3 incelendiğinde 3. soruyu 34 öğrencinin boş bıraktığı, iki öğrencinin ise soruyu yanıtladığı görülmektedir. Öğrencilerin verdiği yanıtlar incelendiğinde ise 1 öğrencinin soruyu kısmen doğru yanıtladığı 1 öğrencinin ise yanlış yanıtladığı tespit edilmiştir. Ayrıca tabloda sunulan verilerin yanı sıra soruyu yanıtlayan öğrencilerin cevapları aşağıdaki şekillerdeki gibidir.



Şekil 4. 11. Ö6'nın pilot uygulamada S3 için verdiği yanıt

Şekil 4. 11'de görüldüğü üzere Ö6, lineer bağımsızlığın şartlarını kullanarak çözüme ulaşmak yerine bir kümenin elemanlarının skalerle çarpımlarının toplamını bir vektöre eşitlemeye çalışmıştır. Dolayısıyla S kümesinin lineer bağımsız bir küme olup olmadığını bulamamıştır.



Şekil 4.12. Ö36'nın pilot uygulamada S3 için verdiği yanıt

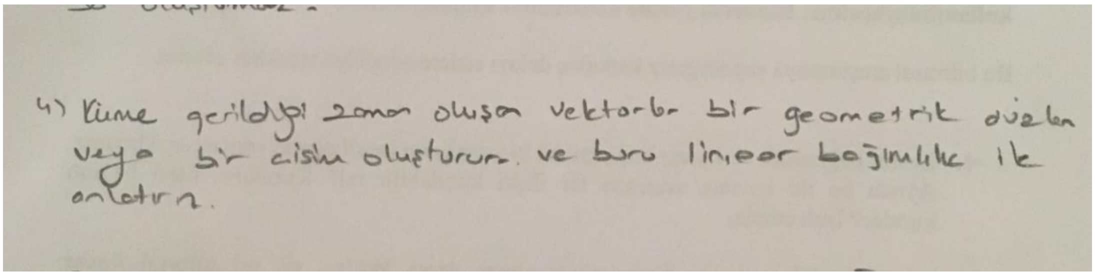
Şekil 4.12 incelendiğinde, Ö36'nın lineer bağımsızlık için gerekli olan işlemleri yapmış olduğu basit işlemlerle çözümü sürdürmesi gerekirken, çözümün devamını getirmediği ve çözüme ulaşamadığı görülmektedir.

4.1.4. Öğrencilerin pilot uygulamada dördüncü soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.4. Öğrencilerin pilot uygulamada S4'e verdiği yanıtlar

Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
R^3 uzayında $W=\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi lineer bağımlı bir küme olsun. Buna göre v_1, v_2, v_3 vektörleri arasında geometrik bir ilişki var mıdır? Varsa gösteriniz.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	0	%0
	Yanlış	1	%2,78
	Boş	35	%97,22

Tablo 4.4 incelendiğinde 4. Soruyu öğrencilerin büyük çoğunluğunun boş bıraktığı görülmektedir. Öğrenciler arasında yalnızca bir öğrenci bu soruyu yanıtlamış ve verdiği cevabın ise yanlış olduğu tespit edilmiştir. Öğrencinin vermiş olduğu yanıtı ise aşağıdaki gibidir.


4) Küme gerildiği zaman oluşan vektörler bir geometrik düzlem veya bir cisim oluşturur. ve bunu lineer bağımlılık ile anlatırız.

Şekil 4.13. Ö23'ün pilot uygulamada S4 için verdiği yanıt

Şekil 4.13'te görüldüğü gibi Ö23, W kümesinin elemanlarının R^3'teki durumlarını incelemek yerine lineer bağımsızlıkla ilgili tahmine dayalı bir yorum yapmış ve soruyu doğru olarak yanıtlayamamıştır.

4.1.5. Öğrencilerin pilot uygulamada beşinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4. 5. Öğrencilerin pilot uygulamada S5'e verdiği yanıtlar

Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
v_1, v_2, $v_3 \in V$ vektör uzayında birer vektör olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ lineer bağımsız bir kümedir. Buna göre $\{v_1+v_2, v_1, v_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız. Cevabı nasıl bulduğunuzu izah ediniz.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	1	%2,78
	Yanlış	0	%0
	Boş	35	%97,22

Tablo 4.5 incelendiğinde öğrencilerin büyük bir kısmının 5. Soruya yanıt vermediği görülmektedir. Yalnız bir öğrenci soruyu kısmen doğru olarak yanıtlamıştır. Bu öğrencinin cevabı doğrudan alıntı olarak aşağıda sunulmuştur.

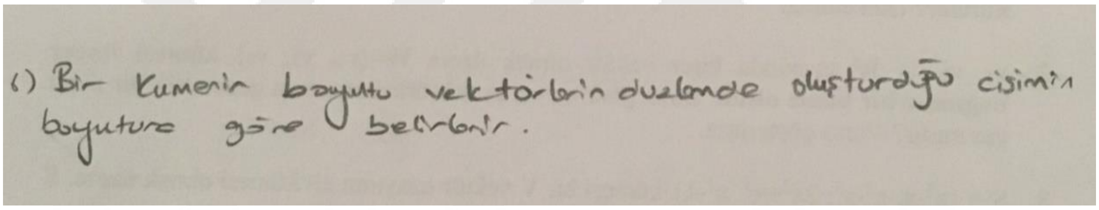
- **Ö5**, bu soruyu herhangi bir işlem yapmadan tahmine dayalı bir cevap vererek "*Bence lineer bağımsızdır*" şeklinde yanıtlamıştır. Öğrenci soruyu işlemsel düzeyde cevaplayamamıştır.

4.1.6. Öğrencilerin pilot uygulamada altıncı soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.6. Öğrencilerin pilot uygulamada S6'ya verdiği yanıtlar

Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
Bir kümenin bazını (tabanını) ve boyutunu tanımlasaydınız kendi cümlelerinizle nasıl tanımlardınız. Bu tanımınızı dikkate alarak bir kümenin kaç tane tabanı olabilir, açıklayınız.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	0	%0
	Yanlış	2	%5,56
	Boş	34	%94,44

Tablo 4.6'da görüldüğü üzere öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun 6. Soruyu boş bıraktığı görülmektedir. Öğrencilerden hiçbiri soruyu doğru veya kısmen doğru olarak yanıtlayamamıştır. Soruyu yanıtlayan 2 öğrencinin vermiş oldukları cevapların ise yanlış olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca verilen cevaplar incelenerek aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.14. Ö23'ün pilot uygulamada S6'ya verdiği yanıt

Şekil 4.14'te görüldüğü gibi Ö23 boyut kavramını bir vektör uzaya ait baz kümesindeki eleman sayısı olarak değil de tahmine dayalı olarak, vektörlerin düzlemde oluşturduğu cismin boyutu şeklinde ifade etmiştir. Dolayısıyla boyut kavramı hakkında eksik bilgiye sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca Ö23 taban kavramını ve bir kümenin kaç tane tabanı olabileceğini de açıklayamamıştır.

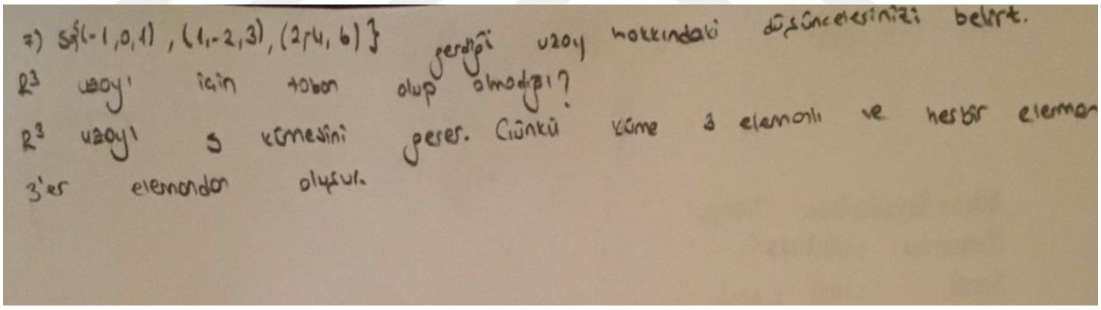
Yine 6. soruda Ö26 ise boyut kavramını "*Boyut: Uzayda kapladığı alan*" şeklinde tanımlamıştır. Bu noktada Ö26'nın boyut kavramına ait yanlış bir bilgiye sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca Ö26, tıpkı Ö23 gibi taban kavramı ve bir kümenin kaç tane tabanı olabileceğini de açıklayamamıştır.

4.1.7. Öğrencilerin pilot uygulamada yedinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.7. Öğrencilerin pilot uygulamada S7'ye verdiği yanıtlar

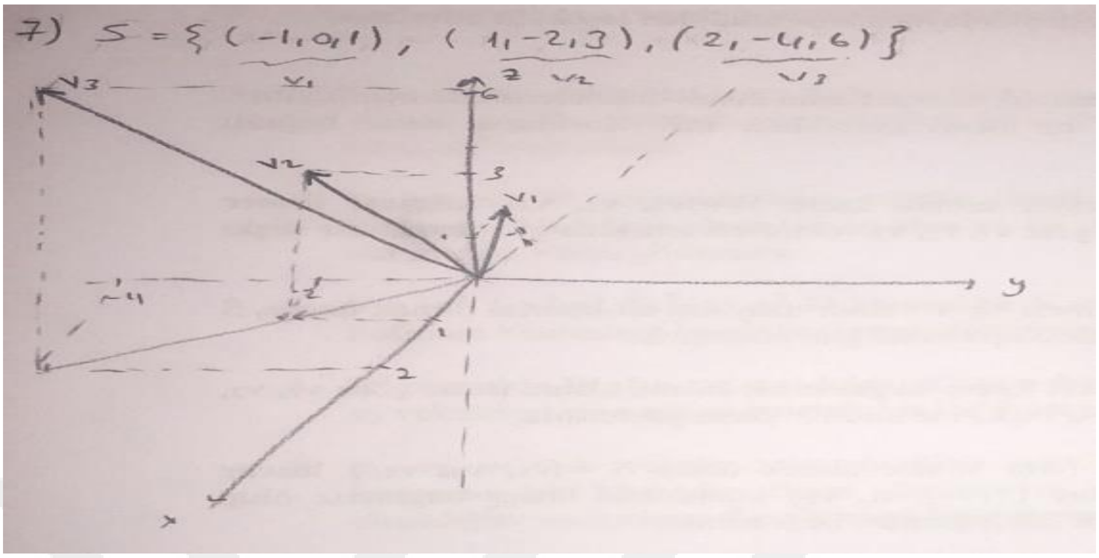
Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
S = {(-1, 0, 1), (1, -2,3), (2, -4, 6)} kümenin gerdiği uzay hakkındaki düşüncelerinizi belirterek S kümesinin R^3 standart vektör uzayı için bir taban olup olmadığını araştırınız.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	0	%0
	Yanlış	3	%8,33
	Boş	33	%91,67

Tablo 4.7 incelendiğinde öğrencilerin büyük çoğunluğunun 7. soruyu boş bıraktığı görülmektedir. Ayrıca soruyu yanıtlayan öğrencilerden hiçbirinin doğru veya kısmen doğru yanıt veremediği görülmüştür. Bunun yanı sıra soruyu yanıtlayan 3 öğrencinin ise yanlış yanıt verdiği tespit edilmiştir. İlgili soruyu yanıtlayan öğrencilerin cevapları aşağıdaki gibidir.



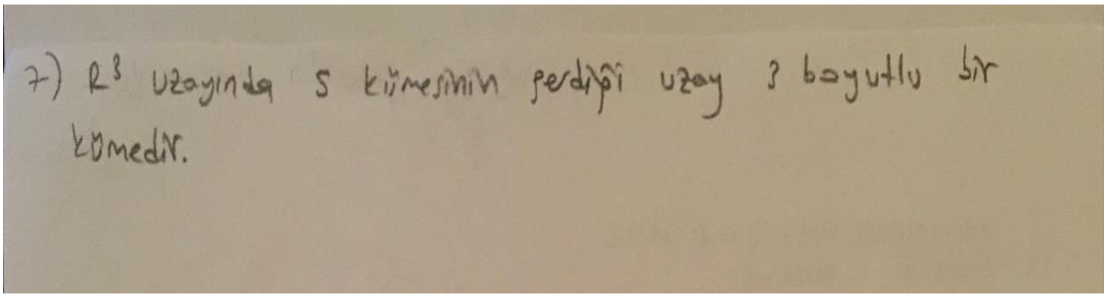
Şekil 4.15. Ö7'nin pilot uygulamada S7 için verdiği yanıt

Şekil 4.15 incelendiğinde Ö7'nin germe kavramıyla yeterli bilgiye sahip olmadığı ve incelenen kümedeki eleman sayısının, vektör uzayın boyutuyla aynı olmasının germe kavramı için yeterli bir şart olacağına dair yanlış bir bilgiye sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğrenci kümenin gerdiği uzay ve lineer bağımsızlık şartlarına uygun incelemeyi yapmadığı gibi kümedeki bir vektörün diğer vektörün herhangi bir katı olmasından dolayı kümenin R^3'ü germeyeceğini ve yine bu kümenin lineer bağımsız olamayacağını fark edememiştir. Dolayısıyla S kümesinin taban şartını sağlayamadığını bulamamıştır.



Şekil 4.16. Ö12'nin pilot uygulamada S7 için verdiği yanıt

Şekil 4.16'da görüldüğü gibi Ö12, S kümesine ait vektörleri R^3 uzayına taşımış ancak (1, -2, 3) ve (2, -4, 6) vektörlerinin aynı doğrultuda olması gerektiğinin farkına varamamıştır. Ayrıca S kümesinin gerdiği uzay hakkında bir bilgi sunamamakla beraber R^3 uzayı için bir taban olmadığı sonucuna da ulaşamamıştır.



Şekil 4. 17. Ö24'ün pilot uygulamada S7'ye verdiği yanıt

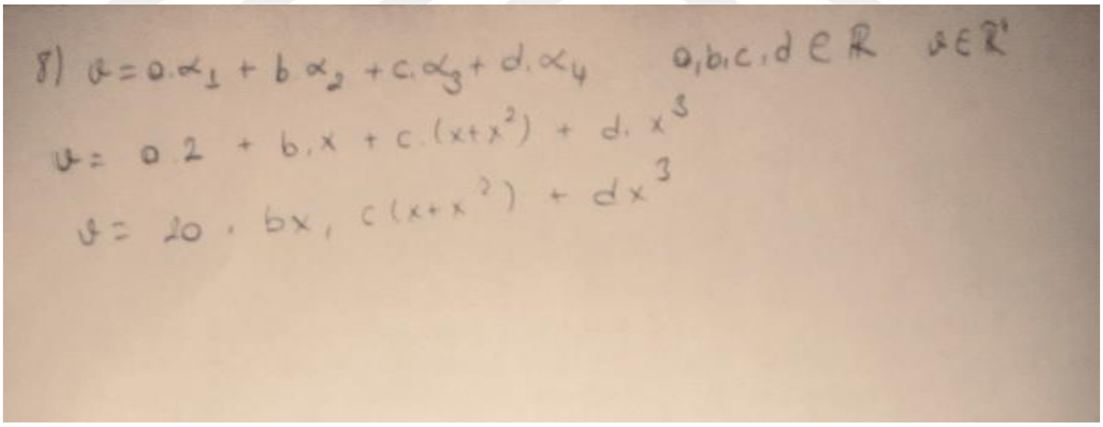
Şekil 4.17 incelendiğinde Ö24'ün S kümesinin gerdiği uzayla ilgili hiçbir bilgi veremediği bunun yanı sıra kümenin gerdiği uzayın boyutuyla ilgili yanlış bilgi verdiği görülmüştür. Öğrencinin boyut kavramıyla ilgili işlemsel ve kavramsal düzeyde bilgi sahibi olmadığı tespit edilmiştir.

4.1.8. Öğrencilerin pilot uygulamada sekizinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.8. Öğrencilerin pilot uygulamada S8'e verdiği yanıtlar

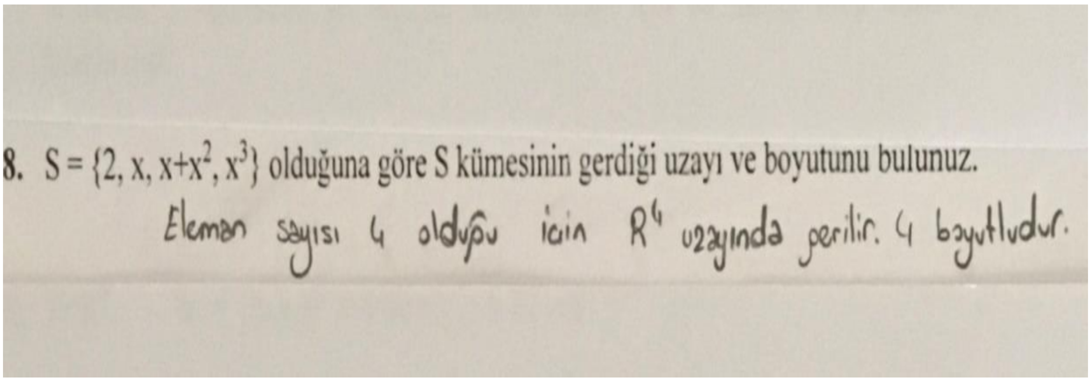
Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
S = {2, x, x+x^2, x^3} olduğuna göre S kümesinin gerdiği uzayı ve boyutunu bulunuz.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	2	%5,56
	Yanlış	4	%11,11
	Boş	30	%83,33

Tablo 4.8 incelendiğinde 8. Soruyu öğrencilerin büyük çoğunluğunun boş bıraktığı görülmektedir. Verilen diğer cevaplar incelendiğinde hiçbir öğrencinin soruya doğru yanıt veremediği, 2 öğrencinin kısmen doğru yanıt verdiği ve 4 öğrencinin ise soruyu yanlış yanıtladığı tespit edilmiştir. Soruyu cevaplayan öğrencilerin yanıtları incelenmiş ve sunulmuştur.



Şekil 4.18. Ö24'ün pilot uygulamada S7'ye verdiği yanıt

Şekil 4.18 incelendiğinde Ö14'ün bir kümenin gerilmesiyle ilgili şartı uyguladığı ancak sorunun çözümünü sürdüremediği görülmektedir. Ayrıca Ö14'ün S kümesinin gerdiği uzay ve boyutuyla ilgili herhangi bir bilgi vermediği de açıkça görülmektedir



8. $S = \{2, x, x+x^2, x^3\}$ olduğuna göre S kümesinin gerdiği uzayı ve boyutunu bulunuz.

Eleman sayısı 4 olduğu için R^4 uzayında gerilir. 4 boyutludur.

Şekil 4.19. Ö27'nin pilot uygulamada S8 için verdiği yanıt

Şekil 4.19'da görüldüğü gibi Ö27, S kümesinin gerdiği uzayla ilgili bir bilgi verememiştir. Öğrencinin kümenin boyutu ile ilgili verdiği bilgi doğrudur ancak R^4 uzayında gerilir ifadesi yanlış olmakla birlikte kümenin eleman sayısının boyutu vermesi gerektiği ifadesi de her zaman doğru değildir. Bu noktada öğrencin boyut kavramı ile ilgili hatalı bilgiye sahip olduğu görülmektedir. Benzer şekilde Ö2, Ö16, ve Ö26'nın da Ö27 gibi benzer yanıtlar verdiği tespit edilmiştir.

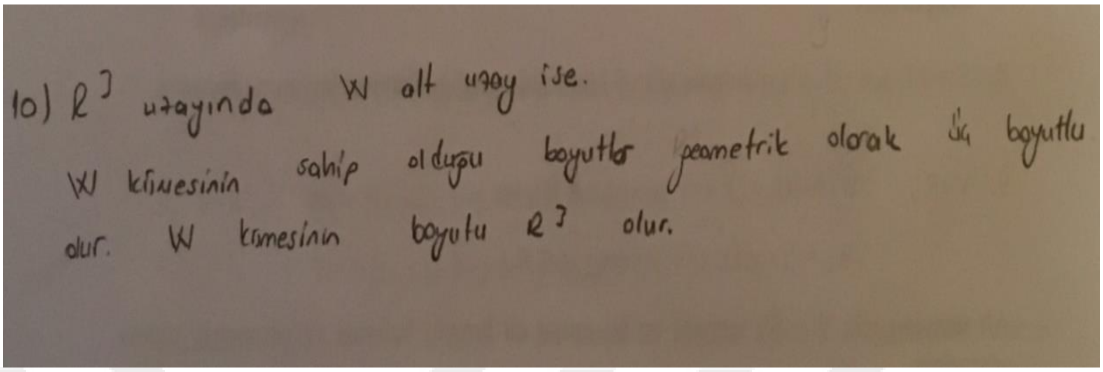
4.1.9. Öğrencilerin pilot uygulamada dokuzuncu soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.9. Öğrencilerin pilot uygulamada S9'a verdiği yanıtlar

Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
R^3 uzayının bir alt uzayı W olsun. W kümesinin boyutu kaç olabilir. W kümesinin sahip olabileceği boyutlar geometrik olarak ne ifade eder? Belirtiniz.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	14	%38,89
	Yanlış	0	%0
	Boş	22	%61,11

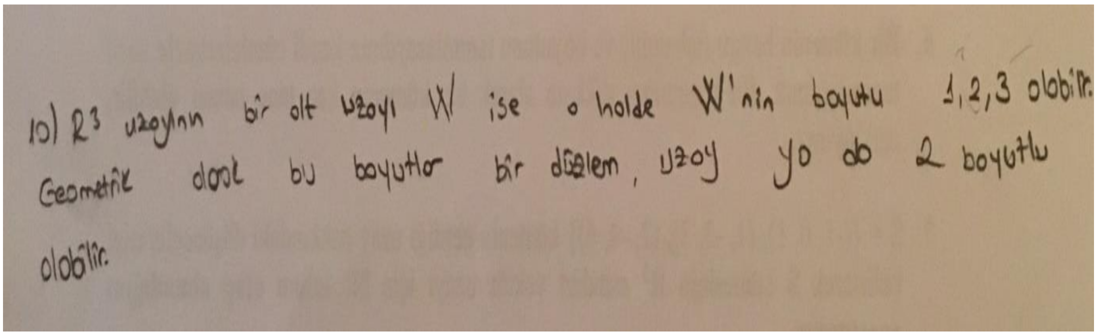
Tablo 4.9 incelendiğinde öğrencilerin soruların büyük bir kısmını boş bıraktığı görülmektedir. 9. Soruyu 22 öğrenci boş bırakmış, 14 öğrenci ise soruya yanıt

vermiştir. Soruyu yanıtlayan öğrencilerin verdiği cevaplar incelendiğinde 14 öğrencinin kısmen doğru yanıt verdiği ve hiçbir öğrencinin ise doğru veya yanlış yanıt veremediği görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlar incelenerek aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.20. Ö12'nin pilot uygulamada S9 için verdiği yanıt

Şekil 4.20 incelendiğinde Ö12'nin, boyut kavramını tam olarak algılayamadığı ve bu kavramla ilgili eksik bilgiye sahip olmasından dolayı W alt uzayının boyutunun sadece 3 olabileceğini söylediği görülmektedir. Ayrıca öğrencinin W kümesinin sahip olduğu boyutla ilgili herhangi bir yorum yapamadığı görülmektedir. Benzer şekilde Ö9, Ö10, Ö15, Ö17 ve Ö32'nin de W alt uzayının boyutunun 3 olduğuna dair fikirlerinin olduğu tespit edilmiştir. Yine aynı şekilde bu öğrencilerinde, W kümesinin sahip olduğu boyutla ilgili herhangi bir yorum yapamadığı saptanmıştır.



Şekil 4.21. Ö7'nin pilot uygulamada S9 için verdiği yanıt

Şekil 4.21 incelendiğinde Ö7'nin W'nin R^3'ün alt uzay olmasından dolayı boyutunun 1, 2, veya 3 olabileceğini tahmin edebildiği halde bu uzayın boyutunun 0 olacağına dair herhangi bir bilgisinin olmadığı görülmektedir. Ancak bu öğrencinin 2 boyutlu yapıların düzlem belirttiğini bilmediği ve ayrıca bir boyutlu yapıların doğru, 0 boyutlu yapının nokta belirttiği konusunda da bilgisinin olmadığı tespit edilmiştir. Yine Ö19 ve Ö24'ün de birbirine benzer bilgi eksikliklerine sahip olduğu saptanmıştır. Bunlardan farklı olarak Ö27, W kümesinin boyutunun 2 boyutlu olabileceği cevabını vermiş ve 2 boyutlu yapıların geometrik olarak ne ifade ettiğini ise belirtememiştir.

4.2. Öğretim sürecinden sonra yapılan uygulamadan (Asıl uygulamadan) elde edilen verilere ait analizler

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı 2. sınıf öğrencilerine pilot uygulama olarak uygulanan açık uçlu sorular üzerinde gerekli düzenlemeler yapılarak başlangıçta hazırlanan sorulardan ikisi testten çıkarılmış ve bir soru ise yeniden düzenlenerek, öğretim süreci tamamlandıktan sonra tekrar (asıl uygulama olarak) öğrencilere uygulanmıştır. Öğretim sürecinde öğrencilere kavramlar, kavramların yapısına göre öğrenci merkezli ya da öğrencilerin ön bilgilerini kullandırarak yapılandırmacı (görselleştirme öğretim yaklaşımı) öğretim yaklaşımı ile ders sunumları yapılarak öğretilmeye çalışılmıştır. Bu süreç sonunda gerçekleştirilen asıl uygulamadaki açık uçlu sorulara öğrencilerin verdikleri cevapların analizleri, lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut başlıkları altında değerlendirilmiş ve öğrencilerin cevaplarından elde edilen veriler bu başlıklar altında soru-soru analiz edilmiştir. Daha sonra ise her soru belirli temalara ayrılarak bu temalar altında yorumlanmıştır. Yapılan analizler incelendiğinde ise öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz-boyut kavramlarını algılama noktasında zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerin son teste ait cevaplarından elde edilen veriler temalar, frekans tabloları ve öğrenci cevapları ile beraber aşağıda ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

4.2.1. Lineer bağımlılık-bağımsızlık ile ilgili soruların analizleri

Bu bölümde öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlıkla ilgili sorulara vermiş oldukları yanıtlar analiz edilmiştir. Daha sonra analizi yapılan sorulara ait öğrenci cevapları, bu cevaplara ait temalar ve öğrencilerin cevap kağıtlarından kesitler sunularak elde edilen veriler sunulmuştur.

4.2.1.1. Öğrencilerin asıl uygulamadaki birinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.10 da öğrencilerin birinci soruya vermiş oldukları yanıtlara ait bilgiler sunulmuştur.

Tablo 4.10. Öğrencilerin asıl uygulamadaki S1'e verdiği yanıtlar

Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
Lineer bağımlılık ve Lineer bağımsızlık kavramlarını kendi cümlelerinizle açıklayınız. Ayrıca bu iki kavram arasında bir ilişki kurulabilir mi? Kurulursa nasıl bağıntı kurulur? İzah ediniz.	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	36	%100
	Yanlış	0	%0

Tablo 4.10 incelendiğinde öğrencilerin hepsinin birinci soruyu kısmen doğru yanıtladığı görülmektedir. Doğru ve yanlış yanıtlara ait veriler incelendiğinde ise hiçbir öğrencinin soruya doğru veya yanlış yanıt veremediği görülmüştür.

Soruyu yanıtlayan 36 öğrencinin cevapları incelenmiş, öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarıyla ilgili yapmış oldukları tanımlar dikkate alınarak 4 farklı tema belirlenmiştir. Bu temalar; **kavramların matematiksel tanımı ve doğrultu**, **kavramların matematiksel tanımı**, **vektörlerin doğrultuları** ve **bir vektörün diğer**

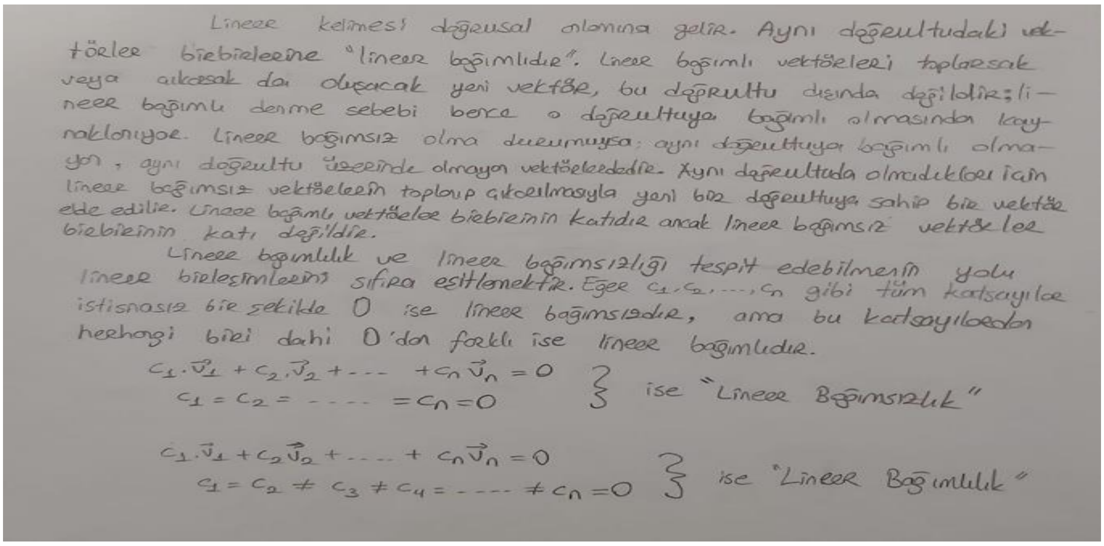
vektörler cinsinden yazılması olarak ifade edilmiştir. Tablo 4.11 de temalar ve bu temalara ait yüzde ve frekanslar sunulmuştur.

Tablo 4.11. Asıl uygulamadaki S1'e Ait Temalar, Temalara ilişkin Frekans ve Yüzdeler

Tema	Temanın açıklaması	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
Kavramların matematiksel tanımı ve doğrultu	Lineer bağımlılığı-bağımsızlığı matematiksel kavramlarla ve doğrultu kavramını kullanarak açıklayanlar	23	%63,9
Kavramların matematiksel tanımı	Lineer bağımlılığı-bağımsızlığı yalnızca matematiksel kavramlarla açıklayanlar	6	%16,7
Vektörlerin doğrultuları	Lineer bağımlılığı-bağımsızlığı yalnızca doğrultu kavramıyla açıklayanlar	4	%11,1
Bir vektörün diğer vektörler cinsinden yazılması	Lineer bağımlılığı ve lineer bağımsızlığı, bir vektörün diğer vektörler cinsinden yazılıp yazılmayacağını göz önüne alarak açıklayanlar	3	%8,3

Kavramların matematiksel tanımı ve doğrultu

Tablo 4.11'de görüldüğü gibi öğrencilerin 23'ü (% 63,9) lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlığın ne olduğunu ifade ederken doğrultu kavramı ile ilişkilendirme yapmış ve buna ek olarak bu kavramlara ait matematiksel tanımı kullanmışlardır. Öğrencilerin soruya vermiş olduğu yanıtlar incelenmiş ve mülakat yapılan öğrencilerin yanıtları aşağıda ayrıntılı bir biçimde sunulmuştur.



Lineer kelimesi doğrusal anlamına gelir. Aynı doğrultudaki vektörler birbirlerine "lineer bağımlıdır". Lineer bağımlı vektörleri toplarsak veya çıkarsak da oluşacak yeni vektör, bu doğrultu dışında değildir; lineer bağımlı denme sebebi bence o doğrultuya bağımlı olmasından kaynaklanıyor. Lineer bağımsız olma durumuysa; aynı doğrultuya bağımlı olmayan, aynı doğrultu üzerinde olmayan vektörlerdedir. Aynı doğrultuda olmadıkları için lineer bağımsız vektörlerin toplanıp çıkarılmasıyla yeni bir doğrultuya sahip bir vektör elde edilir. Lineer bağımlı vektörler birbirinin katıdır ancak lineer bağımsız vektörler birbirinin katı değildir.

Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlığı tespit edebilmenin yolu lineer birleşimlerini sıfıra eşitlemektir. Eğer $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gibi tüm katsayılar istisnasız bir şekilde 0 ise lineer bağımsızdır, ama bu katsayılardan herhangi biri dahi 0'dan farklı ise lineer bağımlıdır.

$$\left.\begin{array}{l} c_1.\vec{v}_1 + c_2.\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = 0 \\ c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0 \end{array}\right\} \text{ ise "Lineer Bağımsızlık"}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1.\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = 0 \\ c_1 = c_2 \neq c_3 \neq c_4 = \cdots \neq c_n = 0 \end{array}\right\} \text{ ise "Lineer Bağımlılık"}$$

Şekil 4.22. Ö30'un asıl uygulamada S1 için verdiği yanıt

Araştırmacı: *R^3 uzayında lineer bağımlılık hangi durumlarda ortaya çıkar açıklayabilir misin?*

Ö30: *Öncelikle lineer bağımlı vektörleri tespit etme yöntemimiz var bizim, bu yöntemi kullanarak R^3 uzayındaki verilen vektörlerin lineer bağımlı mı lineer bağımsız mı olduğunu anlayabiliriz. Bu tespit etme yöntemimiz verilen her vektörü c_1, c_2, c_3 vesaire reel katsayılarla çarpıp daha sonra her birini toplayıp çıkan sonucu sıfıra eşitleyip bu c değerlerini tespit etmeye bakıyor. Bu c değerlerinden herhangi birisi sıfırdan farklı ise bu vektörler lineer bağımlıdır deniyor. Ama c skalerlerinin tamamı sıfıra eşitse bu vektörler lineer bağımsızdır deniyor. Bir diğer tespit etme yöntemi ise lineer bağımlı vektörlerin aynı doğrultuda olduğunu biliyoruz ve bu vektörlerin birbirinin katı olduğunu biliyoruz. Birbirlerinin katı olan vektörler lineer bağımlıdır denilebilir. Örneğin R^3 uzayında üç tane vektör belirleyip denklem sistemini çözersek ve c skalerlerinin sonsuz değeri olursa lineer bağımlılık ortaya çıkar.*

Araştırmacı: *Yani R^3 uzayında vektörlerin lineer bağımlı olabilmesi için üç vektöründe aynı doğrultuda olması gerektiğini mi söylemek istiyorsun?*

Ö30: *Evet, aynen vektörler birbirinin katı olmalı.*

Araştırmacı: *Peki bu lineer bağımlı olabilmesi için vektörlerin aynı doğrultuda olması dışında, başka durumlar var mıdır?*

Ö30: *Şuan aklıma gelmiyor sadece bunu düşünmüştüm.*

Araştırmacı: *Sence lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık durumlarının homojen lineer denklem sistemleriyle bir ilişkisi var mıdır? Varsa ya da yoksa sebebini açıklayabilir misin?*

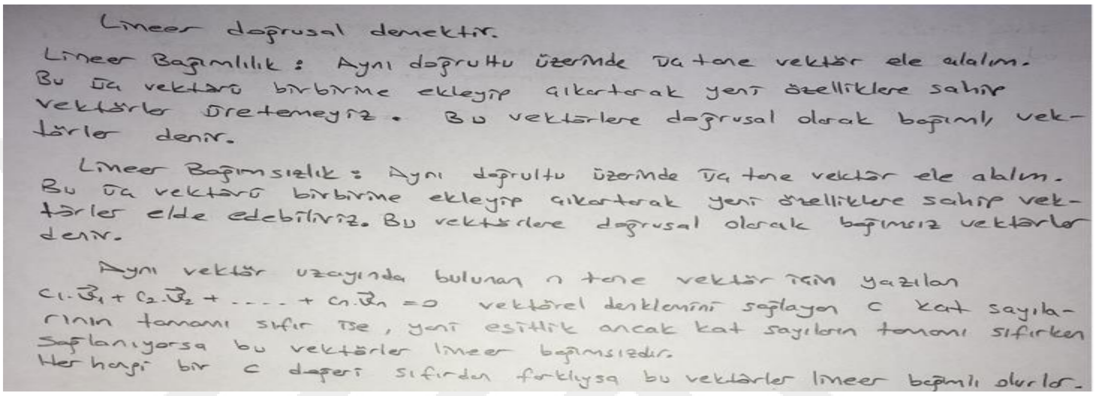
Ö30: *Ben olduğunu düşünüyorum. Çünkü homojen lineer denklem sistemini düşünürsek A.X= 0 formatında yazılan denklem sistemleri bunlar ve her ifadenin bir anlamı var. A, X ifadesinin ve 0'ın hepsi bir şeyi ifade ediyor. Homojen lineer denklemlerinin özelliği her zaman bir çözümünün olmasıdır. Bu çözüm sonsuz sayıda olabilir veya tek bir tane olabilir ama homojen lineer denklem sistemlerinin illaki bir çözümü vardır ve diğer en önemli özelliği ise denklem sistemindeki her denklemin sonucunun sıfır olmasıdır. Herhangi birinin sonucu sıfırdan farklı ise homojen lineer denklem sistemi değildir. Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları ile ilişkisini de şu şekilde düşündüm; bizim lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık olmasını tespit etme metodumuzda bu homojen lineer denklem sistemlerinin çözüm yöntemi çok benziyor. İkisinde de sıfıra eşitleyip bu ortaklığı buluyoruz. Bu şekilde bir ilgi olduğunu düşünüyorum. Ve ayrıca homojen lineer denklem sistemlerinin her zaman bir çözümü vardır. Daha sonra lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlığa bakarsak, lineer bağımlılıkta; sonsuz çözüm var ve lineer bağımsızlıkta da tek bir çözüm var. Bu şekilde bir ortaklık, bir ilgi gördüm. Homojen lineer denklem sistemlerinde de böyleydi ya… illa ki çözümü olacak. Bu çözüm sonsuz sayıda olabilir ya da tek bir tane olabilir. Bu şekilde de çözüm noktasında bir ilgi kurdum iki kavram arasında.*

Araştırmacı: *Yani bu homojen lineer denklem sistemlerine ait çözümün sonucunun ne olacağını, lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık kavramlarının belirlediğini düşünüyorsun. Doğru mu anladım?*

Ö30: *Evet, aynen öyle düşünüyorum.*

Şekil 4.22 deki veriler incelendiğinde Ö30'un lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarını hem matematiksel tanımı kullanarak kitabi bilgilerle hem de kendi cümleleriyle açıkladığı ve doğrultu kavramıyla ilişkilendirdiği görülmektedir. Ayrıca

Ö30’un açık uçlu test maddesine vermiş olduğu cevapta, lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişki ile herhangi bir bilgi vermemiş olduğu görülmüştür. Ancak diğer öğrencilerin aksine yapılan mülakatlarda, Ö30’un bu iki kavram arasındaki ilişkiyi başarılı bir şekilde açıkladığı ve yine bu kavramları homojen lineer denklem sistemleriyle ilişkilendirebildiği saptanmıştır. Bu noktada öğrencinin kavramları tanımlamakta ve bu kavramlar arasındaki ilişkiyi açıklamakta başarılı bir performans sergilediği görülmüştür.


Lineer doğrusal demektir.
Lineer Bağımlılık: Aynı doğrultu üzerinde üç tane vektör ele alalım. Bu üç vektörü birbirine ekleyip çıkartarak yeni özelliklere sahip vektörler üretemeyiz. Bu vektörlere doğrusal olarak bağımlı vektörler denir.
Lineer Bağımsızlık: Aynı doğrultu üzerinde üç tane vektör ele alalım. Bu üç vektörü birbirine ekleyip çıkartarak yeni özelliklere sahip vektörler elde edebiliriz. Bu vektörlere doğrusal olarak bağımsız vektörler denir.
Aynı vektör uzayında bulunan n tane vektör için yazılan $c_1.\vec{v}_1 + c_2.\vec{v}_2 + ... + c_n.\vec{v}_n = 0$ vektörel denklemini sağlayan c kat sayılarının tamamı sıfır ise, yani eşitlik ancak kat sayıların tamamı sıfırken sağlanıyorsa bu vektörler lineer bağımsızdır. Herhangi bir c değeri sıfırdan farklıysa bu vektörler lineer bağımlı olurlar.

Şekil 4.23. Ö24’ün asıl uygulamada S1’e verdiği yanıt

Araştırmacı: *Yukarıda verdiğin cevapta lineer bağımsızlık-lineer bağımlılık kavramlarını açıklamışsın sence bu yaptığın tanım doğru mu?*

Ö24: *Doğru olduğunu düşünüyorum.*

Araştırmacı: *Neden doğru olduğunu düşünüyorsun? Açıklayabilir misin?*

Ö24: *Çünkü lineer zaten doğrusal demek ve lineer bağımlılığı ve lineer bağımsızlığı şöyle açıklayabilirim. Aynı doğrultuda vektörler seçip bunlarla işlem yapınca yani birbirine ekleyip çıkarınca, bunlarla skaler çarpım yapılınca birbiri cinsinden yeni vektörler elde edebilirsek buna lineer bağımsız diyoruz, edemezsek de lineer bağımlı olduğunu düşünüyorum. Sınavdan önce yaptığım araştırmalardan da bunları çıkardım. Bu yüzden de cevaplarım bunlardı.*

Araştırmacı: *Doğru olduğunu düşünüyorsun yani?*

Ö24: *Evet doğru olduğunu düşünüyorum.*

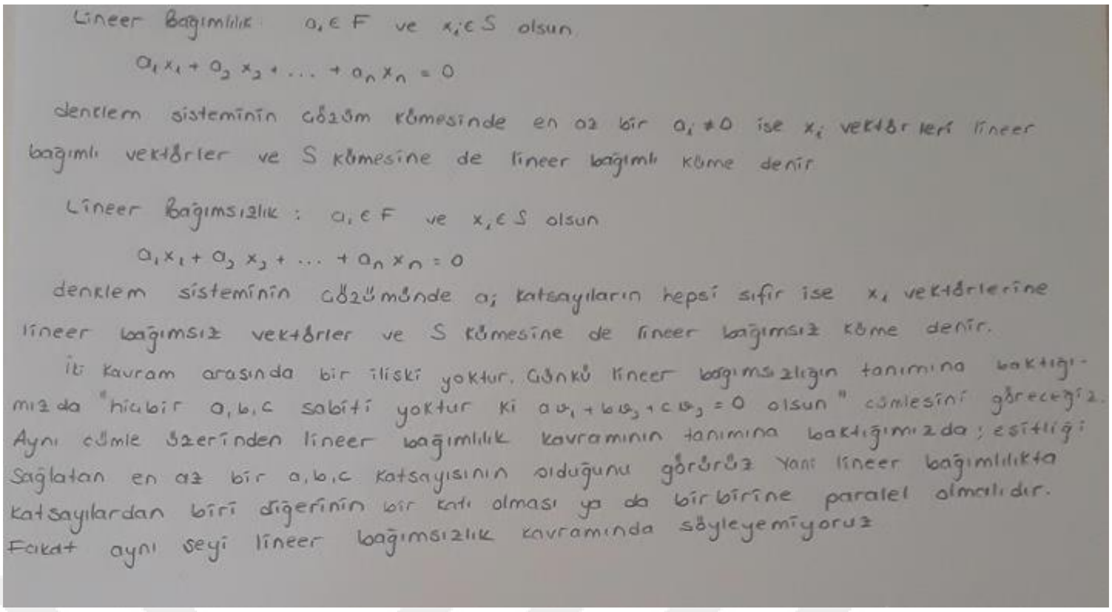
Araştırmacı: *Şimdi yaptığın tanıma göre hem lineer bağımlı vektörler hem de lineer bağımsız vektörler aynı doğrultu üzerindedir mi demek istiyorsun?*

Ö24: *Tanımı yaparken aynı doğrultuda vektör ele alalım dedim. Örneklem üzerinden gitmeye çalıştım ama yani bunun da net olarak doğru olduğunu bilmiyorum. Ama bu ifadenin doğru olduğunu düşünüyorum.*

Şekil 4.23 deki veriler incelendiğinde Ö24'ün soruyu cevaplarken, Ö30 gibi hem doğrultu kavramını kullandığı hem de kavrama ait matematiksel tanımı kullandığı görülmektedir. Ayrıca yapılan mülakat sonucunda öğrencinin lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarını tam olarak algılamakta problem yaşadığı ve öğrencinin, hem lineer bağımsızlıkta hem de lineer bağımlılıkta vektörlerin aynı doğrultuda olması gerektiği gibi bir bilgiye sahip olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencinin lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarını ilişkilendiremediği de görülmüştür.

Kavramların matematiksel tanımı

Tablo 4.11'de görüldüğü gibi öğrencilerin 6'sı (%16,7) lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını açıklarken bu kavramlara ait matematiksel tanımı kullanmışlardır. Bu tema altında öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlar incelenmiş ve mülakat yapılan bir öğrencinin açık uçlu soruya verdiği şu yanıta ulaşılmıştır.



Lineer Bağımlılık: $a_i \in F$ ve $x_i \in S$ olsun

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

denklem sisteminin çözüm kümesinde en az bir $a_i \neq 0$ ise x_i vektörleri lineer bağımlı vektörler ve S kümesine de lineer bağımlı küme denir

Lineer Bağımsızlık: $a_i \in F$ ve $x_i \in S$ olsun

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

denklem sisteminin çözümünde a_i katsayıların hepsi sıfır ise x_i vektörlerine lineer bağımsız vektörler ve S kümesine de lineer bağımsız küme denir.

iki kavram arasında bir ilişki yoktur. Çünkü lineer bağımsızlığın tanımına baktığımızda "hiçbir a, b, c sabiti yoktur ki $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ olsun" cümlesini göreceğiz. Aynı cümle üzerinden lineer bağımlılık kavramının tanımına baktığımızda; eşitliği sağlatan en az bir a, b, c katsayısının olduğunu görürüz Yani lineer bağımlılıkta katsayılardan biri diğerinin bir katı olması ya da birbirine paralel olmalıdır. Fakat aynı şeyi lineer bağımsızlık kavramında söyleyemiyoruz

Şekil 4.24. Ö35’in asıl uygulamada S1 için verdiği yanıt

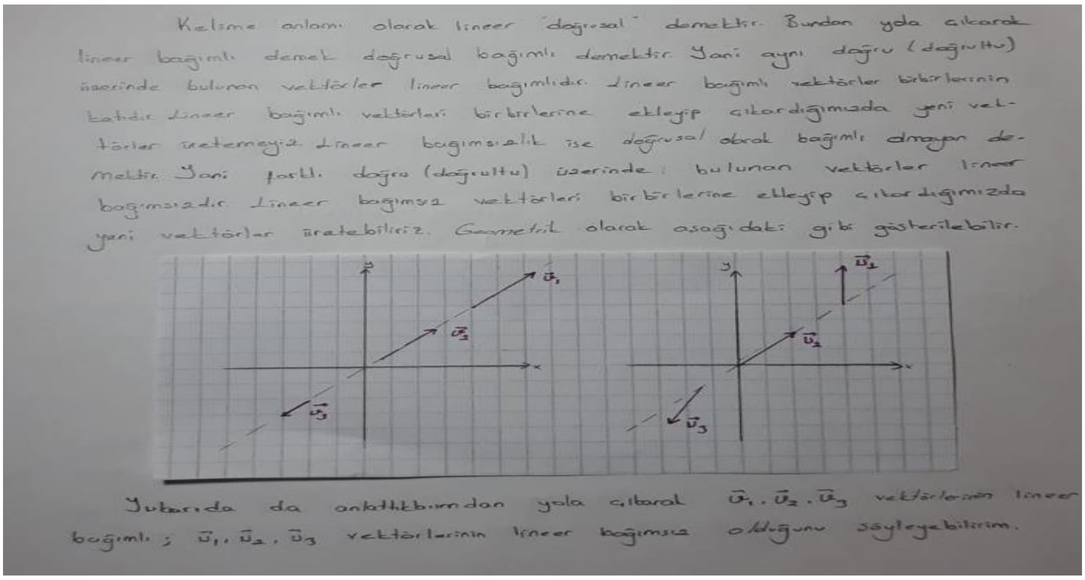
Araştırmacı: *Soruya verdiğin cevaba göre lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları arasında hiçbir ilişki yoktur demişsin. Neden bu şekilde bir yanıt verdiğini sebebiyle beraber açıklayabilir misin?*

Ö35: *Lineer bağımsızlıkta denklem sisteminin çözümündeki bütün a_i katsayıları sıfıra eşittir. Bunun yanında R^2 ya da R^3 boyutlu uzayda başlangıç noktaları orijine yerleştirilmiş iki vektör aynı doğru üzerinde yer almıyor ise ve R^3 boyutlu uzayda başlangıç noktaları orijine yerleştirilmiş üç vektör aynı düzlemde yer almıyor ise lineer bağımsızdır. Lineer bağımlılıkta ise denklem sisteminin çözümündeki en az bir a_i katsayısı sıfıra eşit değildir. Bunun yanında vektörlerin birbirinin katı olması ve birbirine paralel olması durumunda lineer bağımlıdır. Bu iki tanımdaki farklardan dolayı lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık kavramları arasında hiçbir ilişki yoktur dedim. İkisi arasında bir ilişki kuramadım. Yani en az bir taraftan birbirine zıt olarak ayrılıyor diye düşündüm. Bir noktada ayrılıyor yani hani o yüzden arasında bir bağlantı yoktur demiştim.*

Şekil 4.24’te incelendiğinde Ö35’in, lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarını vektörlerin birbirlerine göre durumları, birbiri cinsinden ifade edilip edilemeyeceği veya vektörlerin doğrultularıyla ilişkilendirilip ilişkilendirilemeyeceği ile ilgili hiçbir bilgi vermemiş olduğu ve yalnızca kitabi bilgiler kullanarak matematiksel bir tanımlama yoluna gitmiş olduğu görülmektedir. Öğrencinin mülakatta vermiş olduğu yanıtlar incelendiğinde lineer bağımsızlık kavramını R^2 ve R^3 uzayında vektörlerin aynı doğrultuda bulunmaması ile açıkladığı görülmektedir. Ayrıca öğrencinin R^3 uzayında vektörlerin lineer bağımsız olabilmelerini bu uzaydan alınan üç vektörün aynı düzlemde olmamasıyla sınırlandırdığı, başka durumları göz önüne almadığı tespit edilmiştir. Bu noktada öğrencinin lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarına ait durumları ayrıntılı bir şekilde algılama noktasında problem yaşadığı görülmüştür. Ayrıca öğrenci, ilgili kavramların tanımını yapmış olsa da iki kavram arasında hiçbir ilişkinin olmadığını ifade etmiştir. Başka bir ifade ile diğer öğrenciler gibi Ö35'in de lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkiyi algılama noktasında problem yaşadığı görülmüştür.

Vektörlerin doğrultuları

Tablo 4.11'de görüldüğü gibi öğrencilerin 4'ü (%11,1) lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını açıklarken vektörleri yalnızca doğrultu kavramıyla ilişkilendirmişlerdir. Vektörlerin doğrultuları teması altında öğrencilerin yanıtları incelenmiş ve görüşü alınan bir öğrenciye ait veriler aşağıda sunulmuştur.



Kelime anlamı olarak lineer "doğrusal" demektir. Bundan yola çıkarak lineer bağımlı demek doğrusal bağımlı demektir. Yani aynı doğru (doğrultu) üzerinde bulunan vektörler lineer bağımlıdır. Lineer bağımlı vektörler birbirlerinin katıdır. Lineer bağımlı vektörleri birbirlerine ekleyip çıkardığımızda yeni vektörler üretemeyiz. Lineer bağımsızlık ise doğrusal olarak bağımlı olmayan demektir. Yani farklı doğru (doğrultu) üzerinde bulunan vektörler lineer bağımsızdır. Lineer bağımsız vektörleri birbirlerine ekleyip çıkardığımızda yeni vektörler üretebiliriz. Geometrik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

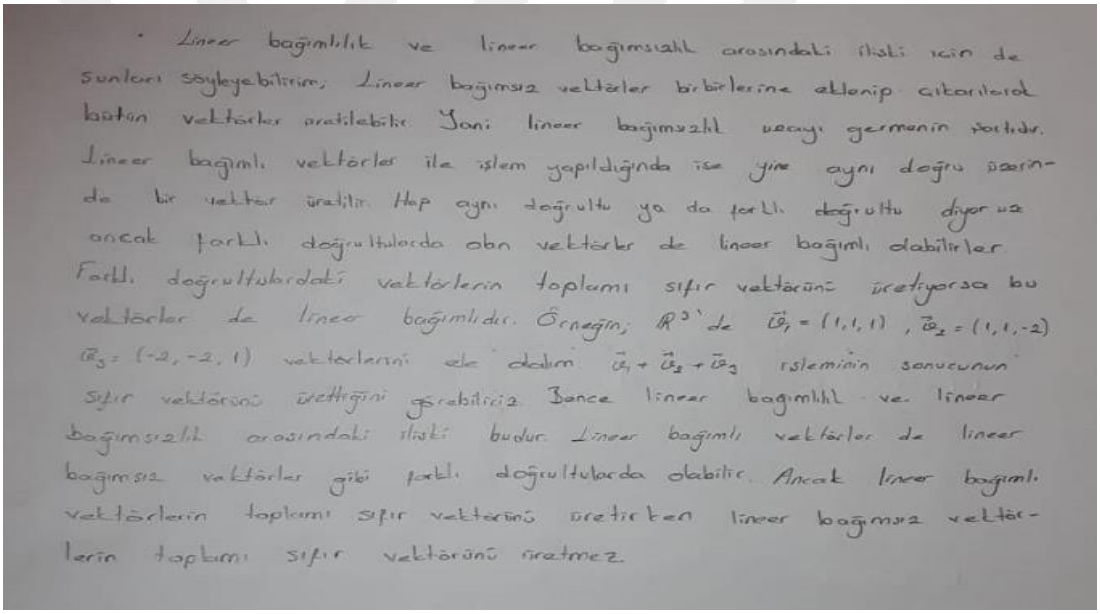
Yukarıda da anlattıklarımdan yola çıkarak $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vektörlerinin lineer bağımlı; $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu söyleyebilirim.

Şekil 4.25. Ö22'nin asıl uygulamada S1 için verdiği için verdiği yanıt

Araştırmacı: *Lineer bağımsızlık kavramlarını doğrultu dışında başka hangi kavramlarla ilişkilendirebilirdin? Açıklayabilir misin?*

Ö22: *Lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarını kelime anlamlarından dolayı doğrultu kavramı ile ilişkilendirdim. Ancak başka bir kavramla ilişkilendirebilir miyim bilemiyorum. Belki doğrultu dışında bahsettiğim vektörlerin toplanması ile ilişkilendirme olabilir. Ancak dediğim gibi başka bir kavramla ilişkilendiremiyorum.*

Şekil 4.25'te görüldüğü gibi öğrenci lineer bağımsızlık-bağımlılık kavramını vektörlerin doğrultusu ile ilişkisini ele alarak açıklamıştır. Öğrenci iki kavram arasındaki ilişkiyi ise doğru açıklayamamıştır. Ö22'nin iki kavram arasındaki ilişkinin ne olacağına vermiş olduğu cevap aşağıda sunulmuştur.


• Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık arasındaki ilişki için de şunları söyleyebilirim; Lineer bağımsız vektörler birbirlerine eklenip çıkarılarak bütün vektörler üretilebilir. Yani lineer bağımsızlık uzayı germenin şartıdır. Lineer bağımlı vektörler ile işlem yapıldığında ise yine aynı doğru üzerinde bir vektör üretilir. Hep aynı doğrultu ya da farklı doğrultu diyoruz ancak farklı doğrultularda olan vektörler de lineer bağımlı olabilirler. Farklı doğrultulardaki vektörlerin toplamı sıfır vektörünü üretiyorsa bu vektörler de lineer bağımlıdır. Örneğin; R^3'de $\vec{v}_1 = (1,1,1)$, $\vec{v}_2 = (1,1,-2)$ $\vec{v}_3 = (-2,-2,1)$ vektörlerini ele alalım $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ işleminin sonucunun sıfır vektörünü ürettiğini görebiliriz. Bence lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık arasındaki ilişki budur. Lineer bağımlı vektörler de lineer bağımsız vektörler gibi farklı doğrultularda olabilir. Ancak lineer bağımlı vektörlerin toplamı sıfır vektörünü üretirken lineer bağımsız vektörlerin toplamı sıfır vektörünü üretmez.

Şekil 4.26. Ö22'nin asıl uygulamada lineer bağımlılık-bağımsızlık arasındaki ilişkiye verdiği yanıt

Araştırmacı: *Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarının lineer denklem sitemleriyle bir ilgisi var mıdır?*

Ö22: *Olabilir.*

Araştırmacı: *Verdiğin yanıtlarda lineer bağımsızlık germenin bir şartıdır demişsin bunun sebebi nedir açıklayabilir misin?*

Ö22: *Çünkü lineer bağımsız vektörler uzayı gerebilirler. Germe kavramının anlamı, verilen vektörlerin birbirleriyle toplanıp çıkartılması ile uzaydaki bütün vektörleri üretebilmektir, bütün uzayı kapsamaktır. Lineer bağımsız vektörlerde birbirlerine eklenip çıkarıldığında yeni vektörler ürettikleri için lineer bağımsızlık germenin şartıdır.*

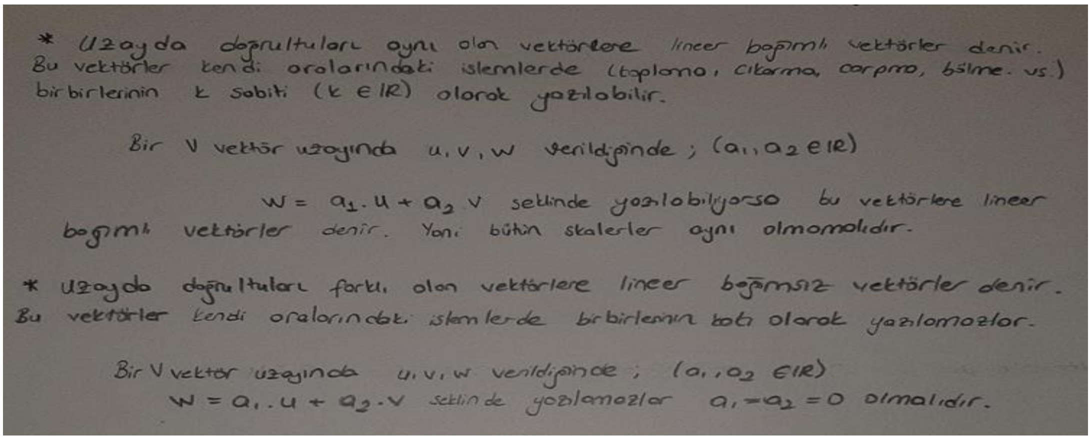
Araştırmacı: *R^3'de lineer bağımlılık hangi durumlarda ortaya çıkar açıklayabilir misin?*

Ö22: *R^3'de lineer bağımlılık vektörlerin aynı doğrultu üzerinde bulunması veya vektörlerin toplamının sıfır vektörünü üretmesi durumunda olabilir.*

Şekil 4.26 incelendiğinde Ö22'nin 0 vektörü ile lineer bağımlılık arasındaki ilişkinin farkında olduğu görülmektedir. Ö22'nin lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını doğrultu kavramıyla ilişkilendirmekte problem yaşamamış olmasına rağmen lineer bağımsızlığın, germenin şartı olmasıyla ilgili yanlış bir bilgiye sahip olduğu ve öğrencinin germe kavramını algılama noktasında da problem yaşadığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencinin lineer bağımsız vektörleri, baz kavramı gibi algıladığı ve R^3 uzayında lineer bağımsızlık kavramını sınırlı bir şekilde algıladığı görülmüştür.

Bir vektörün diğer vektörler cinsinden yazılması

Tablo 4.11 incelendiğinde öğrencilerin 3'ünün (%8,3) lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını tanımlarken, bu kavramları vektörlerin birbiri cinsinden yazılıp yazılmamasını dikkate alarak açıkladıkları görülmektedir. Bu temada incelenen bir öğrencinin verileri aşağıda sunulmuştur.



* Uzayda doğrultuları aynı olan vektörlere lineer bağımlı vektörler denir.
Bu vektörler kendi aralarındaki işlemlerde (toplama, çıkarma, çarpma, bölme vs.)
birbirlerinin k sabiti ($k \in \mathbb{R}$) olarak yazılabilir.

Bir V vektör uzayında u, v, w verildiğinde; ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$)

$w = a_1 . u + a_2 . v$ şeklinde yazılabiliyorsa bu vektörlere lineer bağımlı vektörler denir. Yani bütün skalerler aynı olmamalıdır.

* Uzayda doğrultuları farklı olan vektörlere lineer bağımsız vektörler denir.
Bu vektörler kendi aralarındaki işlemlerde birbirlerinin katı olarak yazılamazlar.

Bir V vektör uzayında u, v, w verildiğinde; ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$)
$w = a_1 . u + a_2 . v$ şeklinde yazılamazlar $a_1 = a_2 = 0$ olmalıdır.

Şekil 4.27. Ö17'nin asıl uygulamada S1 için verdiği yanıt

Araştırmacı: *Yukarıda soruyu yanıtlarken "… bu vektörler kendi aralarındaki işlemlerde (toplama, çıkarma, çarpma, bölme vs.) birbirlerinin k sabiti olarak yazılabilir" derken ne demek istediğini açıklayabilir misin?*

Ö17*: Doğrultuları aynı olan vektörler birbirlerine lineer bağımlı vektörlerdir (vektörlerden en az birinin katsayısı 0'dan farklı olacak şekilde). Daha önceden gördüğümüz derslerde vektörlerin doğrultuları aynı olduğunda ve birbirlerinin reel sayı katları şeklinde ele aldığımızda toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapılabildiğini düşündüğüm için böyle bir ifade kullandım.*

Araştırmacı: *Peki vektörlerde bölme işlemi var mı?*

Ö17: *Hayır yoktur.*

Araştırmacı: *Eğer yoksa neden böyle bir ifade kullandın? Açıklayabilir misin?*

Ö17: *Bu ifadeyi kullanırken dört işlemin hepsi vardır gibi düşünerek yazdığımı fark ettim. Hatalı olmuş, ezbere bir yaklaşım yapmışım.*

Araştırmacı: *Lineer bağımlı vektörleri tanımlarken "... skalerler aynı olmamalıdır" ifadesini kullanmışsın ne demek istedin? Açıklayabilir misin?*

Ö17: *Lineer bağımsızlıkta a_1, a_2 reel sayıları birbirleriyle aynı ve sıfıra eşit oldukları için lineer bağımlılıkta bunun tam tersi olduğunu düşünerek farklı olduklarını söylemek istemişim ama yanlış ifade etmişim.*

Araştırmacı: *Lineer bağımsızlık tanımı için "w= a_1.u + a_2.v şeklinde yazılamazlar a_1=a_2=0 olmalıdır." demişsin sence bu ifade doğru mu? Doğruysa veya yanlışsa, neden? Açıklayabilir misin?*

Ö17*: Lineer bağımsızlık tanımında defterimizde de yazdığı gibi denklem sisteminin çözümündeki tüm katsayıların birbirine eşit ve sıfır olması gerektiğini biliyorum. "w= a_1.u + a_2.v şeklinde yazılamazlar..." şeklinde yazma sebebim ise bu eşitliği lineer bağımlılıkta kullandığım için bağımsızlık durumunun tersi şeklinde düşünerek yazılamaz demiştim. Yanlış ifade etmişim sanırım.*

Araştırmacı: *R^3 uzayında lineer bağımlılık hangi durumlarda ortaya çıkar açıklayabilir misin?*

Ö17: *R^3 uzayında lineer bağımlılık 2 veya daha fazla vektörün doğrultularının aynı olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu vektörlerin matrisinin determinantı 0 olmalıdır. Ve uzayı germemelidirler.*

Araştırmacı: *Peki R^3 uzayında vektörler başka hangi durumlarda lineer bağımlı olabilir?*

Ö17: *Normalde vektörlerin sıfır, bir, iki, üç boyutlu olması durumunda lineer bağımlı olabiliyor ama soruda R^3 dediği için ben 0 ile 1 boyutlu olduğu durumları düşünmedim o yüzden 2 den başlamayı düşündüm.*

Araştırmacı: *Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarının lineer denklem sistemleriyle bir ilgisi var mıdır?*

Ö17: *Bence vardır sonuçta hepsi lineer cebir ile alakalı ama direkt değildir.*

Araştırmacı: *Peki nasıl bir ilişki vardır?*

Ö17: *Şöyle, Lineer bağımlılık ve bağımsızlık sorularını çözerken lineer denklem sistemlerini kullanarak soruları çözüyoruz. Ama bu sorularda sonucu sıfıra eşitleyerek ve genelde katsayılarını bulmaya yönelik genişletme ve sadeleştirme tekniklerini kullanarak işlemleri gerçekleştiriyoruz. Fakat normal bir denklem sistemi çözülürken değişkenlerin katsayıları ve denklemin sonucu sıfırdan farklı olabiliyor.*

Araştırmacı: *Peki bu durumda lineer bağımsızlıkla bağımlılık kavramının homojen lineer sistemindeki işlevi nedir açıklayabilir misin?*

Ö17: *Bilmiyorum, birazda unutmuşum aslında nasıl bir ilişki olduğunu bilemiyorum şuan.*

Şekil 4.27 incelendiğinde Ö17'nin lineer bağımlılık kavramında, vektörleri birbirleri cinsinden yazarken doğru bir açıklama yaptığı ancak lineer bağımsız vektörleri birbiri cinsinden yazarken, skalerlerle çarpılmış olan vektörlerin toplamının sonucunda, w vektörünün 0 olması durumunda lineer bağımsızlık durumunun değil lineer bağımlılık durumunun ortaya çıktığının farkına varamadığı tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencinin vektörlerde işlemlere bölme işlemini dahil etmiştir. Bu noktada öğrencinin bir kavrama yönelik bir hataya sahip olduğu görülmüştür**.** Ayrıca öğrencinin lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkiyi açıklayamadığı ve bu kavramların lineer denklem sistemleriyle ilgisini algılama noktasında da problem yaşadığı tespit edilmiştir.

4.2.1.2. Öğrencilerin asıl uygulamada ikinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.12'te öğrencilerin 2. Soruya vermiş olduğu yanıtlar sunulmuştur.

Tablo 4.12. Öğrencilerin asıl uygulamada S2'ye verdiği yanıtlar

Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
$v_1, v_2, v_3,$ R^3 uzayında birer vektör olmak üzere W={v_1, v_2, v_3} kümesi lineer bağımsız bir küme olsun. Buna göre v_1, v_2, v_3 vektörleri arasında geometrik bir ilişki var mıdır? Varsa gösteriniz**.**	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	23	%63,9
	Yanlış	13	%36,1

Öğrencilerin 2. Soruya vermiş olduğu yanıtlar incelenmiş ve vermiş oldukları yanıtlara ait oranlar Tablo 4.12'de sunulmuştur. Tablo incelendiğinde öğrencilerin 23'ünün (%63,9) soruyu kısmen doğru yanıtladığı, 13'ünün (%36,1) ise soruyu yanlış yanıtladığı görülmektedir. Ayrıca yine tabloya bakıldığında öğrencilerden hiçbirinin soruyu doğru yanıtlayamadığı görülmektedir.

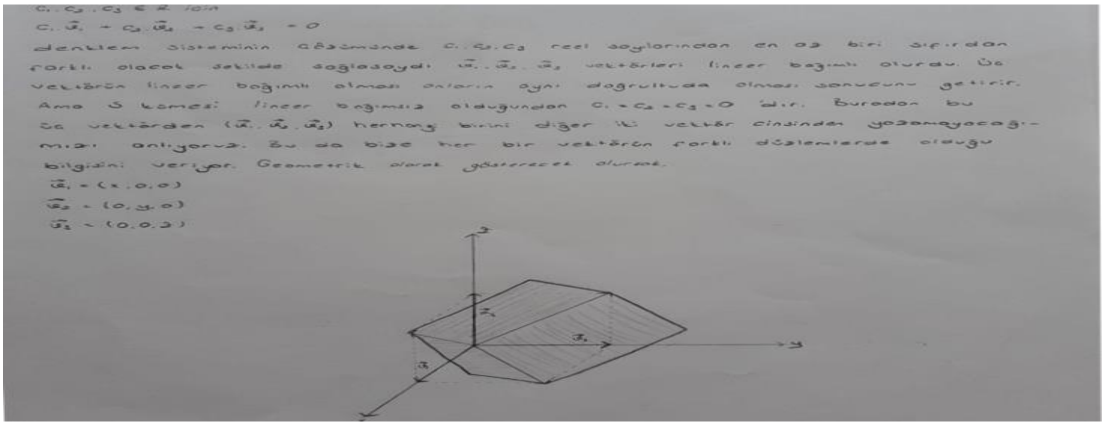
Soruyu yanıtlayan 36 öğrencinin yanıtları incelenmiş ve öğrencilerin soruya vermiş oldukları yanıtlar dikkate alınarak 4 farklı temaya ayrılmıştır. Bu temalar; **Ortagonal vektörlerin kullanılması**, **Özel vektörlerin kullanılması**, **Geometrik ilişkinin kurulamaması** ve **Sorunun sezgisel olarak cevaplanması** olarak kodlanmıştır. Tablo 4.13.'te bu temalara ilişkin açıklamalar, yüzde ve frekanslar sunulmuştur.

Tablo 4.13. Asıl uygulamadaki S2'ye Ait Temalar, Temalara ilişkin Frekans ve Yüzdeler

Tema	Temanın açıklaması	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
Ortagonal vektörlerin kullanılması	Soruyu ortagonal vektörleri kullanarak çözmeye çalışanlar	5	%13,9
Özel vektörlerin kullanılması	Soruyu seçtikleri özel vektörler üzerinden çözmeye çalışanlar	18	%50
Geometrik ilişkinin kurulamaması	Soruda yer alan vektörler arasında hiçbir ilişki olmadığını ifade edenler	5	%13,9
Sorunun sezgisel olarak cevaplanması	Soruyu hiçbir matematiksel dayanak kullanmadan cevaplayanlar	8	%22,2

Ortagonal vektörlerin kullanılması

Tablo 4.13'te görüldüğü gibi Öğrencilerin 5'i (%13,9) soruyu ortagonal vektörleri kullanarak çözmeye çalışmışlardır. Öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar tek tek incelenerek görüşme yapılan öğrencilere ait veriler aşağıda sunulmuştur.



$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ için
$c_1.\vec{u}_1 + c_2.\vec{u}_2 + c_3.\vec{u}_3 = 0$
denklem sisteminin çözümünde c_1, c_2, c_3 reel sayılarından en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde sağlasaydı $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ vektörleri lineer bağımlı olurdu. Üç vektörün lineer bağımlı olması onların aynı doğrultuda olması sonucunu getirir. Ama S kümesi lineer bağımsız olduğundan $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 'dır. Buradan bu üç vektörden $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ herhangi birini diğer iki vektör cinsinden yazamayacağımızı anlıyoruz. Bu da bize her bir vektörün farklı düzlemlerde olduğu bilgisini veriyor. Geometrik olarak gösterecek olursak.
$\vec{u}_1 = (x,0,0)$
$\vec{u}_2 = (0,y,0)$
$\vec{u}_3 = (0,0,z)$

Şekil 4.28. Ö21'in asıl uygulamada S2 için verdiği yanıt

Araştırmacı: *Yukarıdaki cevaba göre vektörleri (x,0,0). (0,y,0), (0,0,z) olarak seçmişsin, sence bu durum tüm lineer bağımsız vektörlerin geometrik durumunu temsil eder mi? Ederse neden?*

Ö21i: *Bilmiyorum emin değilim.*

Araştırmacı: *Lineer bağımsızlıkta, vektörlerin aynı düzlemde bulunduğu durumlar da olabilir mi? Nedeniyle beraber açıklayabilir misin?*

Ö21: *Lineer bağımlılıkta vektörler aynı düzlemde olduğu için lineer bağımsızlıkta vektörlerin aynı düzlemde olamayacağını düşünüyorum çünkü bir vektörü diğer vektörler cinsinden yazabiliriz.*

Araştırmacı: *Bu soruyu tekrar cevaplayacak olsaydın tüm lineer bağımsız vektörleri temsil edecek şekilde nasıl çözerdin? Açıklayabilir misin?*

Ö21: *Soruyu tekrar çözecek olsam yine bu şekilde çözmeye çalışırdım çünkü vizeden sonra bu soruyu doğru bir şekilde cevaplayabilmeme yardımcı olacak yeni bir bilgi öğrenmedim.*

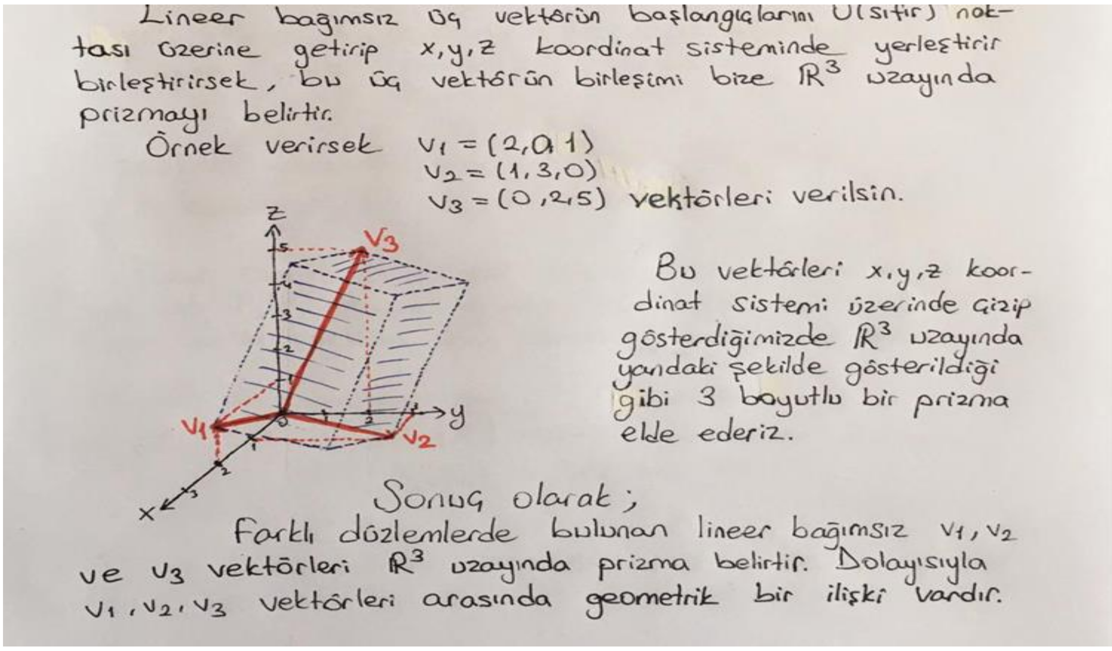
Araştırmacı: *Sence çizmiş olduğun geometrik şekil doğru mu? Doğruysa veya Yanlışsa neden?*

Ö21: *Büyük ihtimalle yanlış. Bu sonuca sorudan yola çıkarak değil de vize notumdan yola çıkarak vardım çünkü vizedeki diğer soruları doğru cevaplandırdığımı düşünüyorum yanlış çözdüğüm soru büyük ihtimalle budur.*

Şekil 4.28'de görüldüğü gibi öğrenci, lineer bağımsız vektörlerle ilgili doğru yorum yapmıştır. Ancak genelleme yapmaya çalışırken ortagonal vektörler seçerek lineer bağımsız vektörlerin her birinin farklı düzlemde olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu noktada öğrencinin lineer bağımsızlık kavramını algılama konusunda eksiklikleri olduğu görülmüştür. Öğrenciden matematik dilini kullanarak R^3'teki tüm lineer bağımsız vektörlerle ilgili genel bir yargıya varması beklenirken, öğrenci beklenen doğru performansı sergileyememiştir. Bu doğrultuda öğrencinin lineer bağımsız vektörlerin tüm durumlarını, matematik dilini kullanarak inceleme noktasında sıkıntı yaşadığı tespit edilmiştir.

Özel vektörlerin kullanılması

Tablo 4.13'te görüldüğü gibi öğrencilerin 18'i (%50) soruyu birim vektörler ve seçmiş oldukları vektörleri kullanarak çözmeye çalışmışlardır. Öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar incelenmiş mülakat yapılan öğrencilere ait veriler aşağıda detaylı bir şekilde sunulmuştur.

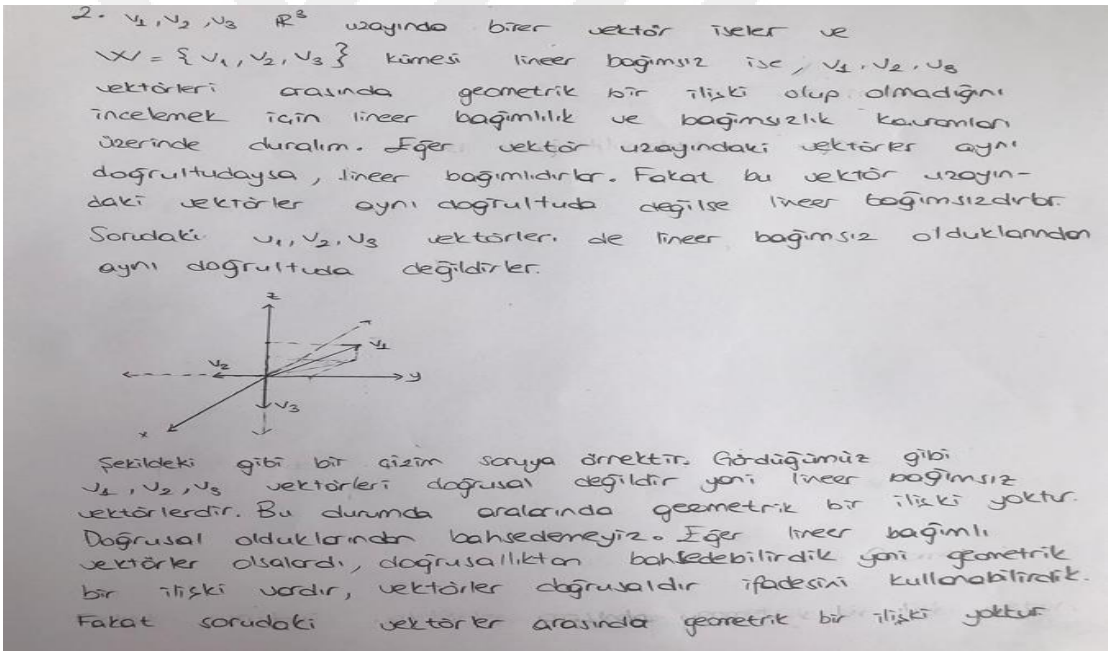


Şekil 4.29. Ö29'un asıl uygulamada S2 için verdiği yanıt

Şekil 4.29 incelendiğinde Ö29'un R^3'te yer alan lineer bağımsız üç vektörün tüm durumlarını ele alarak genel bir yargıya varması gerekirken, geometrik olarak özel durumdaki üç vektörün lineer bağımsızlığını incelediği görülmektedir. Bu noktada öğrencinin tıpkı Ö21 gibi matematik dilini kullanarak genel bir yargıya varma noktasında sıkıntı yaşadığı tespit edilmiştir.

Geometrik ilişkinin kurulamaması

Tablo 4.13'te görüldüğü gibi öğrencilerin 5'i (%13,9) soruyu cevaplarken lineer bağımsız vektörlerin arasında hiçbir ilişkinin bulunmadığını ifade etmiştir. Öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar incelenerek görüşme yapılan bir öğrenciye ait veriler aşağıda sunulmuştur.


2. v_1, v_2, v_3 R^3 uzayında birer vektör iseler ve
$W = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi lineer bağımsız ise, v_1, v_2, v_3
vektörleri arasında geometrik bir ilişki olup olmadığını
incelemek için lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramları
üzerinde duralım. Eğer vektör uzayındaki vektörler aynı
doğrultudaysa, lineer bağımlıdırlar. Fakat bu vektör uzayın-
daki vektörler aynı doğrultuda değilse lineer bağımsızdırlar.
Sorudaki v_1, v_2, v_3 vektörler de lineer bağımsız olduklarından
aynı doğrultuda değildirler.

Şekildeki gibi bir çizim soruya örnektir. Gördüğümüz gibi
v_1, v_2, v_3 vektörleri doğrusal değildir yani lineer bağımsız
vektörlerdir. Bu durumda aralarında geometrik bir ilişki yoktur.
Doğrusal olduklarından bahsedemeyiz. Eğer lineer bağımlı
vektörler olsalardı, doğrusallıktan bahsedebilirdik yani geometrik
bir ilişki vardır, vektörler doğrusaldır ifadesini kullanabilirdik.
Fakat sorudaki vektörler arasında geometrik bir ilişki yoktur

Şekil 4.30. Ö4'ün asıl uygulamada S2 için verdiği yanıt

Araştırmacı: *Yukarıdaki soruda, vektörler arasında geometrik bir ilişkinin olmadığını ve lineer bağımlı vektörler arasında geometrik bir ilişkinin olabileceğini söylemişsin. Neden böyle düşündüğünü açıklayabilir misin?*

***Ö4:** Lineer bağımlı vektörleri incelediğimizde, lineerlik deyince benim aklıma direkt doğrusallık geliyor bu nedenle doğrultu kavramı üzerinde durdum ben burada. Eğer lineer bağımlılıktan söz ediyorsak geometrik bir ilişki de vardır diye düşündüm aynı doğrultuda oldukları için. Soruda lineer bağımsız 3 vektör verilmiştir. Ben de kafamdan da lineer bağımsız 3 vektör çizdim açıkçası. İşte birisi y eksenine paralel, birisi z'ye, birisi x'e bunlar mesela lineer olarak bağımsızdır dedim. Baktığımda da lineer olarak bağımsız olduklarını gördüm.*

***Araştırmacı:** Peki neden lineer bağımsız vektörler arasında geometrik bir ilişki olamayacağını düşündün?*

***Ö4:** Şöyle açıkçası, nasıl söylesem lineer bağımsız üç vektörden bahsedilmiş burada, ben de lineer bağımsız üç vektör hayal ettim. Yani geometrik bir ilişki var mı yok mu bunu açıklamak için. Doğrultu kavramı üzerinde durduğumda da aynı doğrultuda iseler lineer bağımlı olduklarını düşündüm açıkçası.*

***Araştırmacı:** O yüzden lineer bağımsız vektörlerde doğrultu kavramının geometrik olarak bir şey ifade etmediğini mi düşündün?*

***Ö4:** Vektör uzayındaki vektörler aynı doğrultuda olursa lineer bağımlı olduklarını düşündüm*

***Araştırmacı:** R^3'de lineer bağımlılık hangi durumlarda ortaya çıkar açıklayabilir misin?*

***Ö4:** R^3 deyince üç boyutlu bir uzay hayal ediyorum ve burada lineer olarak yine doğrultu kavramı üzerinde durabilirim. Lineer olarak bağımlı olduklarını ve bu vektörlerin aynı doğrultu üzerinde olduğunu düşünelim mesela z eksenine hepsi paralel olabilir. Bu şekilde üç tane vektör çizebiliriz ve bunlar lineer olarak bağımlı olurlar diye düşündüm.*

***Araştırmacı:** Peki lineer bağımlılığı sadece üç vektörün doğrultularının aynı olmasıyla mı açıklayabilirsin? Lineer bağımlılık için başka durumlar da var mıdır?*

***Ö4:** Yok hayır. Şöyle mesela R^3'te daha fazla örnek verebiliriz vektörleri daha fazla sayıya çıkarabiliriz. Ama sadece doğrultu olarak da kısıtlayamayız bunu bence.*

Araştırmacı: *Peki başka ne olabilir?*

Ö4: *Mesela bir düzlem oluşturduğunu düşünelim bu vektörlerin işte R^3'te bir düzlem içinde doğrusal olarak da bağımlı olabilirler. Bunu nasıl ifade edeyim, illa z eksenine paralel olmalarına gerek yok bir düzlemde de doğrusal olarak bağımlı olabilirler diye düşündüm.*

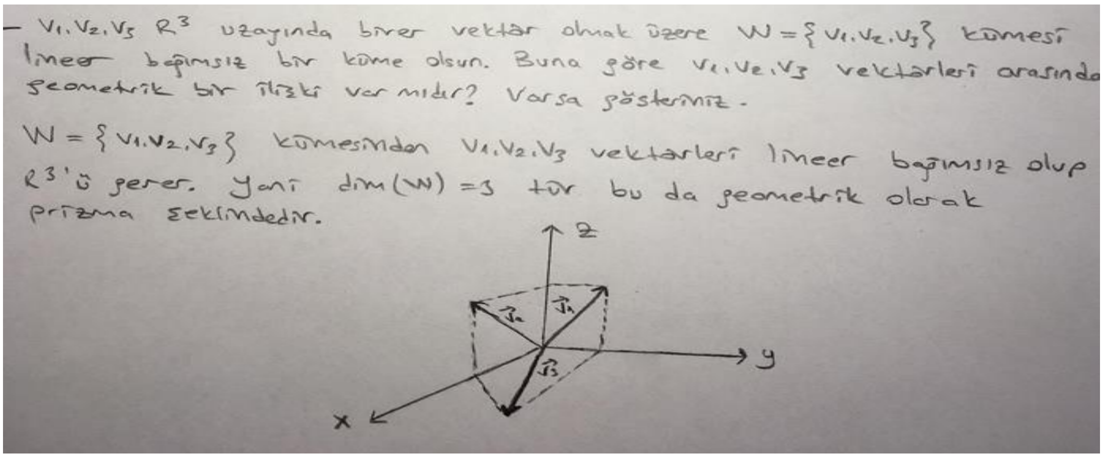
Araştırmacı: *Peki vektörlerin lineer bağımlı olabilmesi için bir düzlemde kaç vektör bulunabilir?*

Ö4: *Aa evet bunu hatırlıyordum ama… Şuanda bu bilgiyi hatırlayamadım.*

Şekil 4.30 incelendiğinde Ö4'ün lineer bağımsız vektörlerin doğrultularının farklı olması gerektiğini bildiği ve lineer bağımsız vektörleri R^3 uzayına yerleştirdiği halde lineer bağımsız vektörler arasında geometrik bir ilişkinin olmayacağı düşüncesine sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencinin vektörlerin lineer bağımsız olması durumunda, vektörler arasında geometrik ilişki kurulmayacağına ve geometrik ilişkinin lineer bağımlılık durumunda ortaya çıkacağına dair bir yanlış bir bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Ek olarak öğrencinin lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarını algılamakta güçlük yaşadığı tespit edilmiştir.

Sorunun sezgisel olarak cevaplanması

Tablo 4.13'te görüldüğü gibi Öğrencilerin 8'i (%22,2) soruyu sezgisel olarak, hiçbir matematiksel dayanak kullanmadan çözmeye çalışmışlardır. Öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar incelenmiş görüşme yapılan öğrenciye ait veriler sunulmuştur.



Şekil 4.31. Ö24'ün asıl uygulamada S2 için verdiği yanıt

Araştırmacı: *Soruda matematik dilini kullanarak çözüme gitmemişsin bunun sebebi nedir? Açıklayabilir misin?*

Ö24: *Bu sorudan tam emin değildim. Üç boyutlu düzlemde göstermemin sebebi görsel olarak daha rahat anlaşılabileceğini düşünmemdi ve soruyu tekrar çözsem büyük ihtimalle yine böyle çözerdim.*

Araştırmacı: *Peki, R^3'teki tüm lineer bağımsız vektörlerin geometrik durumlarını temsil edecek şekilde bir çözüme gidecek olsaydın nasıl bir yol izlerdin? Açıklayabilir misin?*

Ö24: *Deneme yanılma yolunu kullanırdım. Mesela R^3' den lineer bağımsız vektörler seçerdim. Sonra bu vektörlerin geometrik olarak nasıl bir şekil oluşturduğuna bakardım ve bunu birkaç defa tekrarlardım. Direkt matematiksel işlemler bu soruda yapmazdım büyük ihtimalle.*

Şekil 4.31 incelendiğinde Ö24'ün hiçbir matematiksel dayanak kullanmadan R^3'e vektörleri yerleştirdiği ve bu vektörlerin durumlarını ayrı ayrı ele alıp inceleyemediği görülmektedir. Dolayısıyla öğrencinin lineer bağımsızlık kavramını kısıtlı algıladığı ve bu sebeple matematiksel dayanakları kullanarak lineer bağımsız vektörlerle ilgili genel bir yargıya varma konusunda problem yaşadığı görülmüştür.

4.2.1.3. Öğrencilerin asıl uygulamada üçüncü soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.14'de öğrencilerin 3. Soruya vermiş olduğu yanıtlar sunulmuştur.

Tablo 4. 14. Öğrencilerin asıl uygulamada S3'e verdiği yanıtlar

Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
$S = \{x^3-x, x^2-x^3, 2x^2+x^3, x^2-1\}$ kümesi bir V vektör uzayının alt kümesi olmak üzere, S Polinom kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.	Doğru	36	%100
	Kısmen Doğru	0	%0
	Yanlış	0	%0

Tablo 4. 14 incelendiğinde Öğrencilerin hepsinin 3. Soruya doğru yanıt verdiği görülürken hiçbir öğrencinin ise kısmen doğru veya yanlış yanıt vermediği görülmektedir.

4.2.1.4. Öğrencilerin asıl uygulamada yedinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.15'te öğrencilerin 7. Soruya vermiş olduğu yanıtlar sunulmuştur.

Tablo 4.15. Öğrencilerin asıl uygulamada S7'ye verdiği yanıtlar

Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
$v_1, v_2, v_3 \in V$ vektör uzayında birer vektör olmak üzere $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ lineer bağımsız bir kümedir. Buna göre $\{v_1+v_2, v_1, v_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız. Cevabı nasıl bulduğunuzu izah ediniz.	Doğru	35	%97,2
	Kısmen Doğru	0	%0
	Yanlış	1	%2,8

Tablo 4.15 incelendiğinde Öğrencilerin 35'inin (%97,2) soruyu doğru yanıtladığı ve sadece 1 öğrencinin soruya yanlış yanıt verdiği görülmektedir.

Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarına ait sorular incelendiğinde öğrencilerin genel olarak, işlem gerektiren sorularda problem yaşamadığı ve soruların çözümünde başarılı olduğu görülmüştür. Ancak kavramların algılanıp detaylı bilgilerin sunulması gereken sorularda öğrencilerin, hatalı ya da eksik çözümler yaptığı saptanmıştır. Ayrıca öğrencilerin büyük çoğunluğunun lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarına ait tanımsal bilgileri sunmaları bakımından problem yaşamazken bu kavramların birbiriyle ilişkilerini ve bu kavramların geometrik ilişkilerini içeren sorularda, ilgili kavramaları algılamakta ve ifade etmekte zorlandıkları ve algılama probleminden dolayı çeşitli hatalı bilgilere sahip oldukları tespit edilmiştir.

4.2.2. Baz ve boyut ile ilgili soruların analizleri

Bu bölümde öğrencilerin baz-boyut kavramlarıyla ilgili sorulara vermiş oldukları yanıtlar analiz edilmiştir. Ardından analizi yapılan sorulara ve öğrenci yanıtlarına ait verilerden belirli bir temaya uygun olarak kodlanabilenler bu kodlar altında sunulmuş, kodlamaya uygun olmayan soruların yanıtlarına ait veriler ise ayrı ayrı analiz edilerek aşağıda sunulmuştur.

4.2.2.1. Öğrencilerin asıl uygulamada dördüncü soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.16’ da öğrencilerin 4. Soruya vermiş olduğu yanıtlar sunulmuştur.

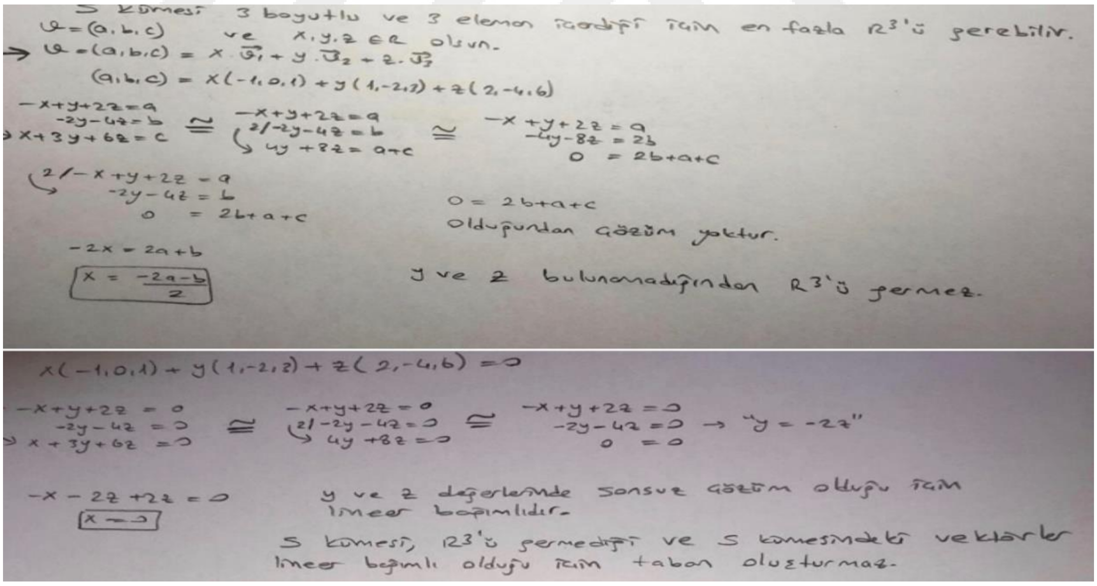
Tablo 4.16. Öğrencilerin asıl uygulamada S4’e verdiği yanıtlar

Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
S = {(-1, 0, 1), (1, -2,3), (2, -4, 6)} kümenin gerdiği uzay hakkındaki düşüncelerinizi belirterek S kümesinin R^3 standart vektör uzayı için bir taban olup olmadığını araştırınız.	Doğru	5	%13,9
	Kısmen Doğru	31	%86,1
	Yanlış	0	%0

Tablo 4.16 incelendiğinde öğrencilerden 5'inin (%13,9) soruyu doğru yanıtladığı ve 31'inin (%86,1) ise soruyu kısmen doğru yanıtladığı görülmektedir. Ayrıca öğrencilerin hiç birinin soruyu yanlış yapmadığı tespit edilmiştir.

Öğrencilerin vermiş olduğu yanıtların hepsi ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve öğrencilerin S kümesinin taban olup olmama durumunu doğru incelediği ancak 5 öğrenci dışında diğer öğrencilerin S kümesinin gerdiği uzay hakkında bilgi sunamadığı saptanmıştır.

Öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlar belirli bir tema altında toplanamadığı için soruyu kısmen doğru yanıtlayan ve doğru yanıtlayan öğrencilerden ikisinin yanıtları incelenerek, öğrencilere ait veriler aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.32. Ö24'ün asıl uygulamada S4 için verdiği yanıt

Araştırmacı: *Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarının lineer denklem sistemleriyle bir ilgisi var mıdır?*

Ö24: *Bence var. Bunları bir küme olarak düşünebiliriz. Lineer denklem sistemleri daha büyük bir küme olabilir. Lineer bağımsızlık ve lineer bağımsızlığı da bunların alt kümesi olarak düşünebiliriz. Çünkü bunlarla bu denklemlerle işlemler yapınca ya lineer bağımlı ya da lineer bağımsız çıktığında, bu işlemleri biz lineer denklem sistemlerinin altında yapmış olduğumuzu düşünüyorum. Çünkü lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık formülleri birer lineer denklem sistemidir. Hani onlar da denklem sistemi çıkıyor. Yani daha büyük bir küme olarak düşünebiliriz bunu bence.*

Araştırmacı: *Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık formülleri birer lineer denklem sistemidir derken tam olarak ne demek istiyorsun açıklayabilir misin?*

Ö24: *Yani lineer bağımlılık ya da lineer bağımsızlık için işlemler var ya, bunların hepsi birer lineer denklem sistemi olabilir.*

Araştırmacı: *Peki bu bahsettiğin denklemler birer lineer denklem sistemi ise homojen lineer denklem sistemi midir yoksa homojen olmayan lineer denklem sistemi midir?*

Ö24: *Bunun hakkında pek bir fikrim yok gibi.*

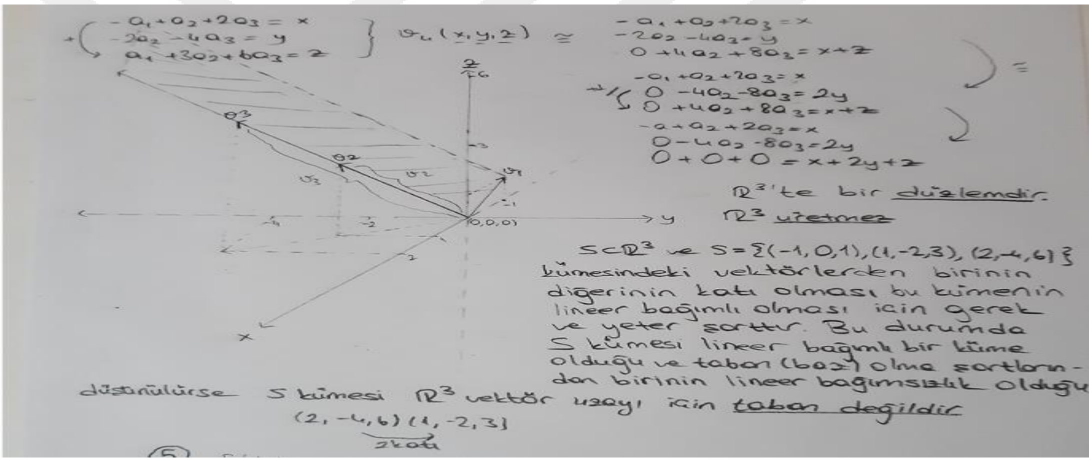
Araştırmacı: *R^3 uzayında lineer bağımlılık hangi durumlarda ortaya çıkar açıklayabilir misin?*

Ö24: *Bu vektör uzayından seçilen yani R^3 uzayından seçilen bir kümenin eleman sayısı 3'den fazla olması durumlarında lineer bağımlı olabilir. Buna ek olarak determinantın sıfır olması gerekmektedir. Bizim kitabımızda da bu en son bahsettiğim vardı.*

Araştırmacı: *Peki başka hangi durumlarda R^3 uzayında bu vektörler lineer bağımlıdır diyebilirsin? Bunlar dışında aklına gelen herhangi bir şey var mı?*

Ö24: *Yok şuan hayır*

Şekil 4.32 incelendiğinde öğrencinin, verilen kümenin taban olup olmaması durumunu doğru yanıtladığı görülmektedir. Ancak öğrencilerin büyük çoğunluğunda olduğu gibi Ö24'ün de S kümesinin elemanlarından ikisinin birbirinin katı olduğunu fark edememiş olduğu ve kümenin lineer bağımsızlık durumu ile germe durumunu uzun uzun incelediği görülmektedir. Bu noktada öğrencinin lineer bağımsızlığa ait özellikleri algılama ve kullanma konusunda pratik olmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca şekle tekrar bakılacak olursa, öğrencinin homojen lineer denklem sisteminin çözümünün, sonsuz çözüme sahip olduğunun farkında olduğu görülmektedir. Ancak yapılan mülakat sonucunda Ö24'ün lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramlarıyla homojen lineer denklem sistemlerini ilişkilendiremediği tespit edilmiştir. Ek olarak tıpkı Ö24 gibi Ö5 ve Ö7'nin de yanıtları incelendiğinde, bu öğrencilerin de sonsuz çözümün farkında olduğu görülmüştür. Ancak dikkat çeken nokta şudur ki; bu öğrenciler 4. Soruda homojen lineer denklem sistemine ait çözüm kümesinin ne olduğunu açıklayabilirken 1. Soruda lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkiyi açıklayamamışlardır. Bu doğrultuda 4. Soruda da öğrencilerin lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramlarını algılama noktasında sorun yaşadıkları saptanmıştır.



Şekil 4.33. Ö10'un asıl uygulamada S4 için verdiği yanıt

Şekil 4.33 incelendiğinde öğrencinin S kümesinin taban olup olmama durumunu hatasız bir şekilde incelediği, S kümesinin gerdiği uzayı ifade edebildiği ve S kümesini geometrik olarak inceleyebildiği görülmektedir. Ayrıca Ö10'un diğer öğrencilerin aksine S kümesinin iki elemanının birbirinin katı olduğunu da fark edebildiği açıkça görülmektedir. Bu durum, öğrencinin lineer bağımlılık kavramını pratik olarak algılayabildiğinin bir göstergesidir.

4.2.2.2. Öğrencilerin asıl uygulamada sekizinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.17'de öğrencilerin 8. Soruya vermiş olduğu yanıtlar sunulmuştur.

Tablo 4.17. Öğrencilerin asıl uygulamada S8'e verdiği yanıtlar

Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (f)	Yüzde (%)
R^3 uzayının bir alt uzayı W olsun. W kümesinin boyutu kaç olabilir. W kümesinin sahip olduğu boyutlar geometrik olarak ne ifade eder? Belirtiniz. Ve $\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ 2x-y+z&=0 \\ x-2y\quad&=0 \end{aligned}$ homojen lineer denklem sisteminin çözüm kümesinin oluşturduğu uzayın bir bazını ve boyutunu bunulunuz**.**	Doğru	0	%0
	Kısmen Doğru	35	%97,2
	Yanlış	1	%2,8

Tablo 4.17 incelendiğinde öğrencilerin 35'inin (%97,2) soruyu kısmen doğru yanıtladığı yalnızca 1 (%2,8) öğrencinin soruyu yanlış yanıtladığı tespit edilmiştir.

Bu bölüm, **W kümesinin sahip olabileceği boyutlara yönelik verilen cevapların analizi** ve **Homojen lineer denklem sistemine verilen cevapların analizi** başlıkları altında sunulmuştur.

W kümesinin sahip olabileceği boyutlara yönelik verilen cevapların analizi

36 öğrenciden 15'i W alt uzayına ait boyutların geometrik olarak ne ifade edeceğine cevap verememiştir. Soruyu yanıtlayan öğrencilerin, vermiş olduğu cevaplar ayrıntılı bir şekilde incelendiğinde, öğrencilerin bir kısmının W alt uzayının boyutlarının 0, 1, 2, 3 olabileceğini, bir kısmının ise 1, 2, 3 olabileceğini ifade ederek boyutun 0 olma ihtimalini göz ardı ettikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin bu boyutların ne olduğuna dair vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde boyutun 0 olması durumunda hiçbir öğrencinin yorum yapamadığı görülmüştür. Boyutların 1, 2 ve 3 olması durumunda ise öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar iki tema başlığı altında değerlendirilmiştir.

Bunlar; **Geometrik şekille ifade edilme** ve **Birim vektörlerle ifade edilme**dir. Tablo 4.18'de bu temalar, temalara ait yüzde ve frekanslar sunulmuştur.

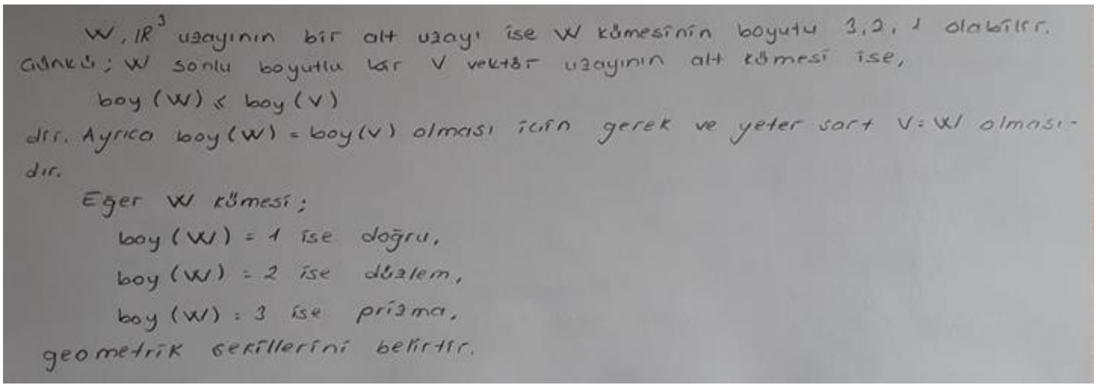
Tablo 4.18. W kümesinin boyutlarına Ait Temalar, Temalara ilişkin Frekans ve Yüzdeler

Tema	**Temanın açıklaması**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
Geometrik şekille ifade edilme	Boyutun geometrik şekil oluşturduğunu ifade edenler	18	%85,7
Birim vektörlerle ifade edilme	Boyutun birim vektörleri oluşturduğunu ifade edenler	3	%14,3

*Tablo soruyu yanıtlayan öğrenciler dikkate alınarak oluşturulmuştur

Geometrik şekille ifade edilme

Tablo 4.18 incelendiğinde öğrencilerin 18'i (%85,7) geometrik olarak boyutun 1 olması durumunda doğru, 2 olması durumunda düzlem ve 3 olması durumunda geometrik şekil oluşturacağını ifade etmişlerdir. Öğrencilerin çoğunluğunun boyut kavramını şekil olarak algıladığı saptanmıştır. Öğrencilerin vermiş olduğu cevaplar incelenmiş ve bazı öğrencilerin cevapları aşağıdaki gibi sunulmuştur.



W, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt uzayı ise W kümesinin boyutu 3, 2, 1 olabilir.
Çünkü; W sonlu boyutlu lar V vektör uzayının alt kümesi ise,
boy (W) ≤ boy (V)
dir. Ayrıca boy(W) = boy(V) olması için gerek ve yeter şart V = W olması-
dır.
Eger W kümesi;
boy (W) = 1 ise doğru,
boy (W) = 2 ise düzlem,
boy (W) = 3 ise prizma,
geometrik şekillerini belirtir.

Şekil 4.34. Ö35'in asıl uygulamada W'nin boyutlarının geometrik olarak ne ifade edeceğine verdiği yanıt

Araştırmacı: *Boyut kavramının senin için ne ifade ettiğini kendi cümlelerinle açıklayabilir misin?*

Ö35: *Boyut kavramının bazdan ortaya çıktığını düşünüyorum. Zaten öyle öğrenmiştik. Baz için de ilk önce lineer bağımsız mı değil mi diye ona bakıyorduk. Daha sonra o uzayı gerip germediğine bakıyorduk. Eğer bu iki şartı sağlarsa zaten taban-baz olarak alıyorduk bunu. Daha sonra kaç tane uzay geriyorsa o uzay sayısını boyut olarak alıyorduk.*

Araştırmacı: *Soruya cevap olarak boyut kavramı şekilleri ifade eder demişsin. Verdiğin cevabı nedeniyle beraber açıklayabilir misin?*

Ö35: *Yani burada mesela boyuttan önce baza bakıyorduk, baz da lineer bağımsız oluyordu. Bu vektörler lineer bağımsız olduğu için bir şekil ortaya çıkıyordu. Çözdüğümüz sorularda genelde ortaya bir şekil çıkarttık prizma küp gibi, o yüzden şekilleri ifade eder demiştim. Yani sorunun çözümünün ardından koordinat sisteminde oluşturduğumuz şekillerden dolayı şekilleri ifade eder demiştim.*

Araştırmacı: *W kümesinin boyutu 0 da olmaz mı? Neden cevaplara 0'ı da dahil etmedin sebebini açıklayabilir misin?*

Ö35: *Yani aslında boyutun sıfır olacağını düşündüğünde bir şekil ortaya çıkacağını düşünmemiştim. Bir önceki soruda şekilleri ifade eder demiştim. Bunda da sıfır olunca bir şekil ortaya çıkmaz diye düşünmüştüm, hiç aklıma bile gelmedi sıfırı dahil etmek. Direkt birden başlamıştım.*

Araştırmacı: *Peki şuan düşünürsen, boyutun sıfır olması durumunda bu küme geometrik olarak ne ifade eder?*

Ö35: *Bunu bir makale görmüştüm orada görmüştüm. Tam emin değilim aslında şeklin ne ifade edeceğini.*

Araştırmacı: *W kümesine ait boyutların 1, 2, 3 olması durumunda verdiğin yanıtlar doğru mudur?*

Ö35: *Buna sanırım cevap olarak doğru, düzlem, prizma demiştim. Bunların doğru olduğunu düşünüyorum fakat eksik olarak şurada yanlışım olabilir diye düşündüm ama çok da emin olamadım. Mesela boyut üç olduğunda prizma demiştim ya boyutu* *üç olduğunda düzlem ya da doğruyu da ifade edebilir diye düşündüm ama pek de emin olamamıştım bunda. O yüzden tek bir cevap vermiştim.*

Araştırmacı: *Soruda ifade edildiği gibi W kümesi V kümesinin bir alt vektör uzayı, alt vektör uzayının sıfırı da barındırması gerekiyor değil mi?*

Ö35: *Evet*

Araştırmacı: *Peki bu durumda boyutun bir olması halinde W kümesi nasıl bir doğru belirtir dediğimiz zaman cevap tam olarak doğru olur mu sence? Cevaba bir ekleme yapmamız gerekir mi?*

Ö35: *Sadece tek yönlü olarak düşünmüşüm. O taraftan hiç düşünmemiştim.*

Araştırmacı: *Şimdi tekrar düşünürsen W kümesinin alt vektör uzayı olduğunu dikkate aldığımızda boyutun bir olması durumunda W kümesi ne belirtir peki?*

Ö35: *Doğru belirtmez mi? Yine doğru belirtir.*

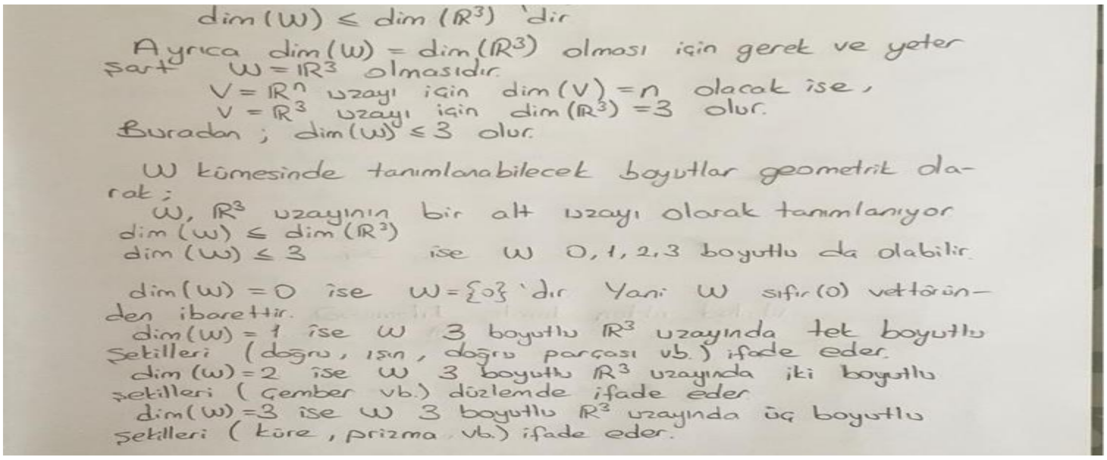
Araştırmacı: *Evet doğru yanıtlıyorsun. Ama sıfırın dahil olduğu bir doğru nasıl ifade edilir sence?*

Ö35: *Onu şuan bilemedim.*

Araştırmacı: *Verdiğin cevaplarda herhangi bir eksik bilgi olabilir mi?*

Ö35: *Doğru olduğunu düşünüyorum. Eksik olarak sadece boyutunun 0 olduğu durumu da eklemeliydim.*

Şekil 4.34'de görüldüğü gibi Ö35'in R^3'e ait bir alt kümenin boyutlarının 1, 2, 3 olduğunu ifade etmiş ve W'nin boyutu 1 ise geometrik olarak doğru, 2 ise bir düzlem ve 3 ise geometrik olarak bir prizma oluşacağını ifade etmiştir. Ayrıca W alt uzayının sadece başlangıç noktası ya da 0 noktasından geçen bir doğru, düzlem veya uzay(cisim) belirtebilir cevabını verememiştir. Bu noktada öğrencinin alt vektör uzayının 0 vektörünü bulundurması gerektiğinin algılanması konusunda sıkıntı yaşadığı görülmektedir. Ayrıca öğrencinin boyut kavramını şekil olarak algıladığı ve bu kavramı algılama noktasında problem yaşadığı saptanmıştır.


$\dim(W) \leq \dim(\mathbb{R}^3)$ 'dir
Ayrıca $\dim(W) = \dim(\mathbb{R}^3)$ olması için gerek ve yeter
şart $W = \mathbb{R}^3$ olmasıdır.
$V = \mathbb{R}^n$ uzayı için $\dim(V) = n$ olacak ise,
$V = \mathbb{R}^3$ uzayı için $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ olur.
Buradan; $\dim(W) \leq 3$ olur.

W kümesinde tanımlanabilecek boyutlar geometrik olarak;
W, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt uzayı olarak tanımlanıyor
$\dim(W) \leq \dim(\mathbb{R}^3)$
$\dim(W) \leq 3$ ise W 0, 1, 2, 3 boyutlu da olabilir.

$\dim(W) = 0$ ise $W = \{0\}$ 'dır Yani W sıfır (0) vektöründen ibarettir.
$\dim(W) = 1$ ise W 3 boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında tek boyutlu şekilleri (doğru, ışın, doğru parçası vb.) ifade eder.
$\dim(W) = 2$ ise W 3 boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında iki boyutlu şekilleri (çember vb.) düzlemde ifade eder.
$\dim(W) = 3$ ise W 3 boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında üç boyutlu şekilleri (küre, prizma vb.) ifade eder.

Şekil 4.35. Ö29'un asıl uygulamada W'nin boyutlarının geometrik olarak ne ifade edeceğine verdiği yanıt

Araştırmacı: *Boyut kavramının senin için ne ifade ettiğini kendi cümlelerinle açıklar mısın?*

Ö29: *V bir vektör uzayı ve S kümesi de bu vektör uzayına ait bir baz ise S kümesinin eleman sayısına boyut deriz.*

Araştırmacı: *Boyut kavramı şekilleri mi ifade eder, cevabını nedeniyle beraber açıklayabilir misin?*

Ö29: *Bence evet boyut kavramı şekilleri ifade edebilir.*

Araştırmacı: *Peki neden?*

Ö29: *Boyut kelime anlamı olarak bir cismin herhangi bir yöndeki uzanımını ifade eder. Cisimlerin de boyutu vardır.*

Araştırmacı: *W'nin boyutunun sıfır olması durumunda boyutun ne ifade ettiğini açıklamamışsın. Bu durumun sebebini açıklayabilir misin?*

Ö29: *Aslında boyut sıfır ise boyutsuzdur demek istiyordum ama emin olamadığım için yazmadım.*

Araştırmacı: *Tekrar düşünürsen boyutun sıfır olması durumunda bu boyut geometrik olarak ne ifade eder? Açıklayabilir misin?*

Ö29: *Boyut sıfır ise boyutsuz diye düşündüm ama yazmadım yukarda belirttiğim gibi geometrik olarak boyutsuzluğun nokta belirteceğini düşündüm. Fakat yine sınav anında emin olmadığım için yazmadım.*

Araştırmacı: *W kümesine ait boyutların 1, 2, 3 olması durumunda verdiğin yanıtlar doğru mudur?*

Ö29: *Doğru olduklarını düşünüyorum.*

Araştırmacı: *Verdiğin cevaplarda herhangi bir eksik bilgi olabilir mi?*

Ö29: *Evet neden olmasın sonuçta sınav anında süre kısıtlamasıyla yanıtladığım sorular oldukları için eksik bilgi vermem çok doğal.*

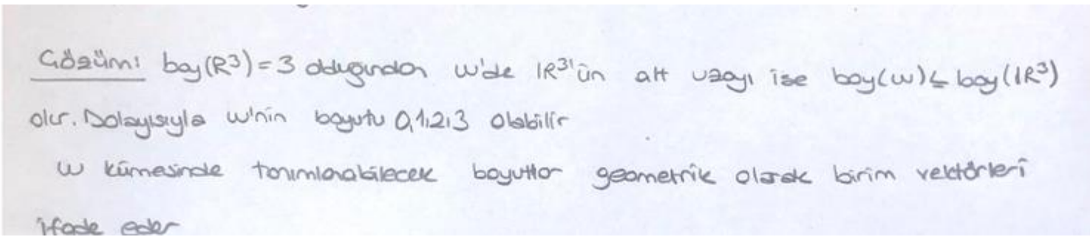
Araştırmacı: *Eğer eksik bir bilgi varsa bunu açıklayabilir misin?*

Ö29: *Boyutların geometrik olarak hangi şekilleri ifade ettiklerini eksik veya yanlış yazmış olabilirim.*

Şekil 4.35 incelendiğinde Ö29'un W alt uzayının boyutlarının 0, 1, 2 ve 3 olabileceğini ifade etmiş olmasına rağmen alt uzay kavramını algılamakta zorlanmasından dolayı bu boyutların geometrik olarak ne ifade ettiğine dair hatalı bilgilere sahip olduğu görülmektedir. Tıpkı Ö35 gibi Ö29'unda boyut kavramını üzerinde çalışılan uzayın oluşturmuş olduğu şekiller olarak algıladığı görülmektedir. Bu nokta da öğrencinin boyut kavramını algılamakta zorlandığı tespit edilmiştir.

Birim vektörlerle ifade edilme

Tablo 4.18 incelendiğinde öğrencilerin 3'ünün (%14,3) ise geometrik olarak boyutun birim vektörü oluşturduğunu ifade ettikleri görülmektedir. Öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlar incelenmiş ve bir öğrencinin yanıtı aşağıda sunulmuştur.



Çözüm: boy$(R^3)=3$ olduğundan W'de IR^3'ün alt uzayı ise boy$(W) \leq$ boy(IR^3) olur. Dolayısıyla W'nin boyutu 0,1,2,3 olabilir

W kümesinde tanımlanabilecek boyutlar geometrik olarak birim vektörleri ifade eder

Şekil 4.36. Ö9'un asıl uygulamada W'nin boyutlarının geometrik olarak ne ifade edeceğine verdiği yanıt

Araştırmacı: *Yukarıda soruya vermiş olduğun cevap yer almakta W'nin boyutlarının 0,1, 2, 3 olabileceğini belirtmişsin ancak bu boyutların geometrik olarak ne ifade ettiğini açıklamamışsın neden?*

Ö9: *Şimdi şöyle, derste öğrendiğim kadarıyla doğru ifade edilebiliyordu, nokta şeklinde ifade edilen geometrik şekiller olabiliyordu ve düzlem belirtebiliyordu. Ben bu soruyu çözdüğümde birden çok boyut olabileceğini gördüm. 0, 1, 2, 3 boyutlu olabilirdi. Bu boyutların hangisine karşılık geldiğini tam bilmediğim için açıklayamadım soruda.*

Araştırmacı: *Yani bu boyutların geometrik olarak ne ifade ettiklerini bilmediğin için mi yapamadın soruyu?*

Ö9: *Evet bilmediğim için.*

Araştırmacı: *Peki bu boyutların geometrik olarak ne ifade ettiğini tekrar düşünsen nasıl ifade edersin?*

Ö9: *Bence düzlem belirtir.*

Araştırmacı: *Peki bu boyutlardan hangisi düzlem belirtir sence?*

Ö9: *Üç boyutlu olan düzlem belirtir diye düşünüyorum.*

Araştırmacı: *Neden W kümesinde tanımlanabilecek boyutlar geometrik olarak birim vektörleri ifade eder dedin? Açıklayabilir misin?*

Ö9: *Yani şöyle, aslında direkt birim vektörleri ifade eder demem bence şuan yanlış olmuş. Ama istersem birim vektörlere dönüştürebilirim. Uzaydaki her vektör birim vektörün lineer bileşenleri olarak yazılabilir. Üç boyuttaki hareketi tanımlamak için* *de herhangi bir A vektörünü birim vektörler cinsinden;* $A= A_x i+ A_y j+A_z k$ *şeklinde tanımlayabiliriz. Eğer bu şekilde yazılırsa birim vektörleri karşılayacağını düşünüyorum ben. Bu yüzden W kümesi birim vektörleri ifade eder açıklamasını yazdım.*

Araştırmacı: *Peki birim vektörler* R^3*'te yer alan bütün lineer bağımsız vektörlerin durumlarını temsil eder mi?*

Ö9: *Tam karşılamaz diye düşünüyorum.*

Araştırmacı: *Yani bu soruda tam bilgiye sahip olmadığın için bu şekilde cevap verdin, doğru mu anladım?*

Ö9: *Evet*

Araştırmacı: *Boyut kavramının senin için ne ifade ettiğini kendi cümlelerinle açıklayabilir misin?*

Ö9: *Bize bir vektör uzayı verildiğinde bu vektör uzayının sonlu boyutlu olması gerekiyor. Bir de bu vektör uzayının baz kümesi olması gerekiyor. Bu durumda da bazdaki vektör sayısına biz V vektör uzayının boyutu diyoruz. Yani ben böyle öğrendim.*

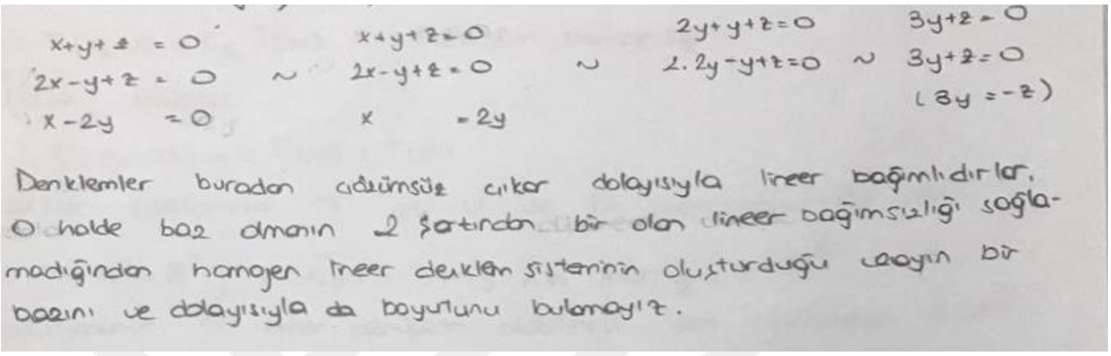
Araştırmacı: *Bulunduğumuz uzayı göz önüne alarak boyut kavramını tekrar düşünsen boyut kavramı için ne dersin?*

Ö9: *Yani vektörlerin sayısıdır derim. Başka farklı bir şey söyleyemem.*

Şekil 4.36 incelendiğinde Ö9'un Ö29 ve Ö35 gibi boyut kavramına yönelik benzer hataları ve algılama sorunları olduğu görülmektedir. Ö9'un diğer öğrencilerden farklı olarak W alt uzayına ait boyutu şekil olarak değil birim vektörler olarak algıladığı görülmüştür. Ayrıca mülakatta elde edilen veriler dikkate alındığında öğrencinin boyut kavramı ve boyutun sahip olduğu uzayı algılama noktasında sıkıntı yaşadığı ve R^3 uzayının düzlem belirttiği konusunda bir yanlış bir bilgiye sahip olduğu tespit edilmiştir.

Homojen lineer denklem sistemine verilen cevapların analizi

Öğrencilerin büyük çoğunluğunun homojen lineer denklem sistemine ait soruyu doğru yanıtlamış olduğu ayrıca yalnızca 8 öğrencinin homojen lineer denklem sisteminin oluşturduğu uzayın boyutunu yanlış belirlemiş olduğu tespit edilmiştir. Öğrencilerin vermiş olduğu cevaplar incelenmiş ve bir öğrencinin cevap kağıdı aşağıda sunulmuştur.


$x+y+z=0$, $2x-y+z=0$, $x-2y=0$ ~ $x+y+z=0$, $2x-y+z=0$, $x=2y$ ~ $2y+y+z=0$, $2.2y-y+z=0$ ~ $3y+z=0$, $3y+z=0$ $(3y=-z)$

Denklemler buradan çözümsüz çıkar dolayısıyla lineer bağımlıdırlar. O halde baz olmanın 2 şartından biri olan lineer bağımsızlığı sağlamadığından homojen lineer denklem sisteminin oluşturduğu uzayın bir bazını ve dolayısıyla da boyutunu bulamayız.

Şekil 4.37. Ö4'ün asıl uygulamada homojen lineer denklem sistemine verdiği yanıt

Araştırmacı: *Denklem sisteminin çözümünün olmadığını söylemişsin, neden çözümsüz olduğunu açıklayabilir misin?*

Ö4: *Aslında burada çözümsüz derken sonradan düşündüğümde doğru bir ifade olmayacağını düşündüm. Burada denklem sistemlerini çözümledim. X'i 2y buldum, y'yi z cinsinden buldum. Soruda gerekli işlemler yapıldıktan sonra x=y=z=0 sonucuna ulaşmıyoruz. Aslında çözümsüz demek çok da doğru mu bilmiyorum. Aslında x=y=z= 0 bulamadığım için çözümsüzdür dedim. Değişkenler sonsuz değer alabilir yani örneğin; x=6, y=3, z=-9 değerini alabilir. Bunu istediğimiz şekilde çeşitlendirebiliriz. Bu nedenle lineer bağımlıdırlar diyebiliriz.*

Araştırmacı: *Homojen lineer denklem sisteminin baz ve boyutunun bulunamayacağını ifade etmişsin neden böyle düşündüğünü açıklayabilir misin?*

Ö4: *Tanım gereğince V ve S□V olsun, eğer S kümesi lineer bağımsız ve S kümesinin gerdiği uzay sp(S)=V ise S kümesine V 'nin bir bazı denir. Şeklinde bir tanım öğrendik. Bu tanım üzerinden düşününce; sorudaki homojen lineer denklem sistemini* *incelediğimizde, lineer bağımsız olma şartını sağlamadığını görüyoruz. Dolayısıyla sorudaki homojen lineer sisteminin oluşturduğu uzayın bazını ve boyutunu bulamayız.*

Araştırmacı: *Baz ve boyut kavram deyince aklına ne geliyor? Kendi cümlelerinle açıklayabilir misin?*

Ö4: *Öncelikle baz ve boyuttan bahsederken içinde vektörler barındıran S kümesi ve bir V vektör uzayı düşünmeliyim. Baz olmanın iki şartı bulunmaktadır ancak bunları uzun uzun yazmayacağım. Baz V vektör uzayındaki tüm vektörleri oluşturabilecek kümeye denir. Biz de genelde bu kümeyi S kümesi olarak düşünüyoruz yani S kümesi V vektör uzayındaki tüm vektörleri oluşturabilecek kümedir ve S'ye V vektör uzayının bazıdır denir. Boyut ise bulduğumuz bazın yani S kümesinin eleman sayısına denir. Başka nasıl bir cümleyle ifade edebilirim bilmiyorum ama buradaki elaman sayısıdır.*

Şekil 4.37 incelendiğinde Ö4'ün homojen lineer denklem sisteminin sonsuz çözüme sahip olduğunu bilmediği ve denklem sisteminin çözümünün olmadığını ifade ettiği görülmektedir. Ayrıca öğrencinin denklem sisteminin lineer bağımlı olmasından dolayı denklem sisteminin oluşturacağı uzayın baz ve boyutunun olamayacağına dair yanlış bir bilgiye sahip olduğu görülmüştür. Bu noktada öğrencinin baz ve boyut kavramlarını tam olarak algılayamadığı saptanmıştır.

4.2.2.3. Öğrencilerin asıl uygulamada altıncı soruya verdiği yanıtların analizleri

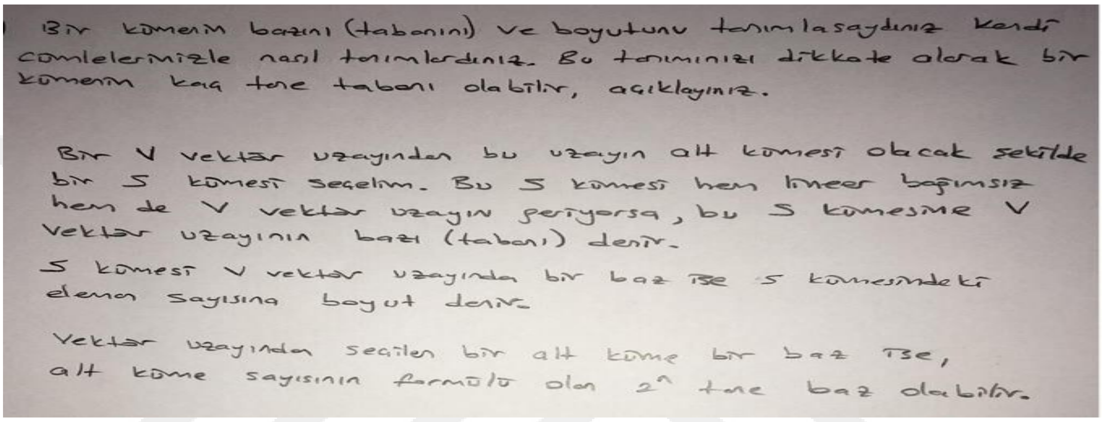
Tablo 4.19'da öğrencilerin 6. Soruya vermiş olduğu yanıtlar sunulmuştur.

Tablo 4. 19. Öğrencilerin asıl uygulamada S6'ya verdiği yanıtlar

Soru	**Öğrencilerin yanıtları**	**Frekans (*f*)**	**Yüzde (%)**
Bir kümenin bazını (tabanını) ve boyutunu tanımlasaydınız kendi cümlelerinizle nasıl tanımlardınız. Bu tanımınızı dikkate alarak bir kümenin kaç tane tabanı olabilir, açıklayınız.	Doğru	31	%86,11
	Kısmen Doğru	5	%13,19
	Yanlış	0	%0

Tablo 4.19 incelendiğinde öğrencilerden 31'inin (%86,11) soruya doğru yanıt verdiği, 5'inin (%13,19) ise soruya kısmen doğru yanıt verdiği görülmektedir. Ayrıca öğrencilerden hiç birinin yanlış yanıt vermediği görülmüştür.

Öğrencilerin vermiş olduğu cevaplar ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve bir öğrencinin çözümü aşağıda sunulmuştur.



Bir kümenin bazını (tabanını) ve boyutunu tanımlasaydınız kendi cümlelerinizle nasıl tanımlardınız. Bu tanımınızı dikkate alarak bir kümenin kaç tane tabanı olabilir, açıklayınız.

Bir V vektör uzayından bu uzayın alt kümesi olacak şekilde bir S kümesi seçelim. Bu S kümesi hem lineer bağımsız hem de V vektör uzayını geriyorsa, bu S kümesine V vektör uzayının bazı (tabanı) denir.
S kümesi V vektör uzayında bir baz ise S kümesindeki eleman sayısına boyut denir.

Vektör uzayından seçilen bir alt küme bir baz ise, alt küme sayısının formülü olan 2^n tane baz olabilir.

Şekil 4.38. Ö24'ün asıl uygulamada S6 için verdiği yanıt

Araştırmacı: *Baz ve boyut kavramları senin için ne ifade ediyor kendi cümlelerinle kısaca açıklayabilir misin?*

Ö24: *Bir vektör uzayından bu uzayın alt kümesi olacak şekilde bir küme seçelim. Mesela R^3 uzayının bir alt kümesi olsun bu küme. Bu küme, hem lineer olarak bağımsız hem de bu seçtiğimiz uzayı geriyorsa, seçtiğimiz bu kümeye vektör uzayının bazı denir. Bu kümenin eleman sayısına da boyut diyoruz.*

Araştırmacı: *Bulunduğumuz uzayı da göz önüne alırsan Boyut kavramı deyince aklına ne geliyor? Kendi cümlelerinle ifade edebilir misin?*

Ö24: *Sanırım eleman sayısı demezdim. Ama ne diyebilirdim. Uzunluk derdim herhalde. Pek bir fikrim yok bunun hakkında*

Araştırmacı: *Boyut kavramı deyince aklına direkt matematiksel tanımlar mı geliyor? Boyut kavramı deyince aklına ne geliyor tam olarak.*

Ö24: *Boyut kavramı deyince ilk olarak bir şeyin boyu geliyor aklıma*

Araştırmacı: *Bir kümenin baz sayısının alt küme formülünden bulunabileceğini söylemişsin sence bu yanıtın doğru mu?*

Ö24: *Benim ki sadece bir yorum. Bunun hakkında bir şey bilmiyordum daha öncede bu soruyla karşılaşmadım. Bu yüzden doğruluğundan emin değilim. Bu yoruma nasıl geldim. Şimdi bir kümenin baz sayısı… baz zaten o vektör uzayından seçtiğimiz bir alt küme oluyor. Bu alt kümenin de alt küme sayısı bulunurken* 2^n *formülü var. Bunu bağdaştırmaya çalıştım ikisinde ve bunu bağdaştırmamın sebebi bu vektör uzayından seçilen kümenin alt küme olması. Direkt öyle aklıma geldi.*

Araştırmacı: *Cevabın doğruysa sebebini açıklayabilir misin?*

Ö24: *Doğru olduğunu düşünmemin sebebi: Kümenin baz olabilmesi için vektör uzayının alt kümesi olması gerekiyor. Bu yüzden baz sayısının da alt küme kavramında kullanılan formülle bağdaştırdım.*

Araştırmacı: *Peki alt küme ile alt uzay kavramı aynı şey mi sence?*

Ö24: *Bence değil*

Araştırmacı: *Ama verdiğin cevapların doğruluğu konusunda çelişkiye düşüyorsun. Bunun sebebi ne sence?*

Ö24: *Bunun hakkında daha önce bir bilgiye sahip olmadığım için olabilir. Benimki sadece bir yorum kavramları bağdaştırmaya çalıştım.*

Şekil 4.38 incelendiğinde Ö24'ün baz ve boyut kavramlarını doğru bir şekilde açıkladığı ancak alt vektör uzayına ait sonsuz bazın olabileceği cevabını veremediği görülmüştür. Öğrencinin alt vektör uzayına ait taban sayısını bir kümenin alt küme sayısının hesaplanması gibi düşünmüş olduğu ve yanlış bir genellemeye giderek yanlış bir cevap verdiği tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencinin boyut kavramını doğru tanımlamasına rağmen bu kavramı algılama noktasında problem yaşadığı saptanmıştır.

4.2.2.4. Öğrencilerin asıl uygulamada beşinci soruya verdiği yanıtların analizleri

Tablo 4.20’de öğrencilerin 5. Soruya vermiş olduğu yanıtlar sunulmuştur.

Tablo 4.20. Öğrencilerin asıl uygulamada S5’e verdiği yanıtlar

Soru	Öğrencilerin yanıtları	Frekans (*f*)	Yüzde (%)
$S = \{2, x, x+x^2, x^3\}$ olduğuna göre S kümesinin gerdiği uzayı ve boyutunu bulunuz.	Doğru	36	%100
	Kısmen Doğru	0	%0
	Yanlış	0	%0

Tablo 4.20’de görüldüğü gibi S kümesinin gerdiği uzayın boyutunun sorulduğu soruda öğrencilerin hiç birinin hata yapmadığı ve bütün öğrencilerin soruyu çözmekte, başarılı bir performans sergilediği görülmektedir.

Baz-boyut kavramlarıyla ilgili sorulara ait öğrenci yanıtları incelendiğinde, öğrencilerin işlem gerektiren sorularda problem yaşamadıkları görülmüştür. Öğrencilerin daha çok baz ve boyut kavramlarının geometrik olarak ifade edilmesi noktasında sorun yaşadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin, en çok algılamakta zorlandıkları kavramın boyut kavramı olduğu görülmüştür. Özellikle öğrencilerin boyut kavramını açıklarken zorlanmadığı ancak bu kavramın geometrik olarak ne ifade ettiği konusunda ciddi hatalara sahip olduğu saptanmıştır. Bunun yanı sıra baz kavramının tanımlanması noktasında öğrencilerin problem yaşamadığı görülmüştür. Ayrıca yapılan analizler sırasında, bir kümeye ait vektörlerin tabanının bulunması ile ilgili sorularda çözüme ulaşma noktasında öğrencilerin problem yaşamadığı ancak homojen lineer denklem sistemine ait çözüm kümesin belirttiği tabanı bulma konusunda öğrencilerin daha çok sorun yaşadığı tespit edilmiştir.

Ayrıca öğrencilerin alt vektör uzayı kavramını da algılamakta zorlandıkları görülmüştür.

5. TARTIŞMA, SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde; yapılan araştırmadan elde edilen bulgular yorumlanmış ve ilgili literatür çerçevesinde tartışılarak sonuçlar sunulmuştur.

5.1. Tartışma ve Sonuç

Yapılan analizlerden elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin, lineer bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarını matematiksel bir şekilde tanımlarken problem yaşamadığı ancak bu kavramları tek başına ifade ederken veya kavramların birbiri ile ilişkisi değerlendirilirken güçlük yaşadığı görülmüştür. Bazı öğrencilerin ise germe kavramını lineer bağımsızlık kavramı ile ilişkilendirirken problem yaşadığı da tespit edilmiştir. Literatürde karşılaşılan bazı çalışmalarda da (Stewart ve Thomas, 2007; Açıkyıldız, 2019) öğrencilerin germe kavramı ve lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramı arasındaki ilişkiyi ifade etme konusunda zorluk yaşadıkları görülmüştür. Bu sonuç, öğrencilerin ilgili kavramları algılama noktasında güçlük yaşadıklarının açık bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Araştırmada bazı öğrencilerden elde edilen veriler incelendiğinde karşılaşılan dikkat çekici bir sonuç ise öğrencilerin, lineer bağımsızlığı germenin bir şartı olduğunu kabul ettiklerinin ve bu yönde yanlış bir bilgiye sahip olduklarının tespit edilmesidir. Yine bu durum da öğrencilerin, lineer bağımsızlık ve germe kavramları arasında yanlış bir ilişki kurduklarının ve bu kavramları kısıtlı olarak algıladıklarının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca öğrencilerin büyük çoğunluğunun lineer bağımsız vektörleri geometrik olarak da kısıtlı algıladığı görülmüştür. Öğrencilerin lineer bağımsızlık ile ilgili soruları tanımdan yola çıkarak cebirsel işlemlerle rahat bir şekilde yaptığı (Ertekin, 2010; Çelik, 2015) ancak bu kavramın geometrik olarak yorumlanması ve ifade edilmesi gereken sorularda cebirsel bilgilerini kullanamadıkları saptanmıştır. Bogomly'nin (2006), yapmış olduğu bir çalışmada da benzer bulgulara ulaşılmıştır. Bogomly'nin çalışmasına göre öğrencilerin, vektör uzayına ait kavramların geometrik ve cebirsel temsillerini birbirinden bağımsız olarak ele aldığı görülmüştür. Yürütmüş olduğum bu çalışmadan elde edilen bir diğer sonuç ise çözümü matematiksel ispat süreçlerini içeren bir soruyla ilgilidir. Buna göre R^3 uzayında ele alınan vektörlerin lineer bağımsızlık durumlarının geometrik olarak değerlendirilmesinin istendiği soruda, öğrencilerin lineer bağımsız vektörlerle ilgili kapsayıcı gösterime ulaşmada sıkıntı yaşadığı ayrıca sorunun çözümünü matematiksel ispatlama süreçlerini ele alarak gerçekleştirmek yerine, uygun vektörler seçerek yapmaya çalıştıkları (Britton ve Handerson, 2009) ve matematik dilini kullanamadıkları tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin matematiksel ispatlama süreçleri konusunda büyük bir eksikliğe sahip olduklarının göstergesi olarak değerlendirilmiştir (Kardeş Birinci, 2016). Dolayısıyla öğrencilerin lineer bağımsızlık kavramına ait kısıtlı algıya sahip oldukları gibi matematiksel ispatlama sürecinde de zayıf oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Diğer bir sonuç ise lineer bağımlılık kavramıyla ilgilidir. Öğrencilerin, R^3'te verilen üç vektörün hangi durumlarda lineer bağımlı olduğunu algılamakta ve ifade etmekte sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Bazı çalışmalardan elde edilen sonuçlara benzer olarak öğrenciler, lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramını tanımlarken doğrultu (Kan, 2010), matematiksel tanım ve vektörlerin birbiri cinsinden ifade edilip edilememesi (Stewart ve Thomas, 2007; Bogomly, 2006) kriterlerini göz önünde bulundurmuşlardır. Ayrıca elde edilen sonuçlara göre Kan'ın (2010) çalışmasından elde edilen bulguların aksine bir öğrenci dışında diğer öğrenciler, lineer bağımsızlığı ifade ederken vektörlerin paralel olması durumlarını belirtememişlerdir. Ayrıca Bogomly (2016) ve Stewart ve Thomas'ın (2007) çalışmalarında elde edilen sonuçlara zıt olarak öğrenciler, bu kavramları matrislerle ilişkilendirerek açıklamaya çalışmamışlardır. Bulgularda en çok dikkat çeken nokta ise lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık kavramları arasındaki ilişkiye ait sorudan elde edilen bulgulardır. Bu bulgulardan elde edilen sonuca göre öğrencilerin biri dışında hiçbir öğrenci iki kavram arasındaki ilişkiyi açıklayamamıştır. Öğrencilerin büyük bir kısmı bu iki kavramı homojen lineer denklem sistemleriyle ilişkilendirememelerine karşın homojen lineer denklem sistemine ait soruda, denklem sistemini çözmüş ve çözüm kümelerinin ne olacağına dair açıklamalarda bulunmuşlardır. Bu durum; öğrencilerin lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık kavramlarını hem ayrı ayrı hem de bir bütün olarak algılamakta ve diğer kavramlarla ilişkilendirmekte büyük bir sıkıntı yaşadıklarının bir göstergesidir. Lineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları dışında bazı öğrencilerin, vektörde işlemleri ifade ederken bu işlemlere bölme işlemini de dahil ettikleri dolayısıyla aşırı genellemeye gittikleri görülmüştür. Bu durum da öğrencilerin vektör uzayını kısıtlı algıladıklarının bir göstergesidir. Tüm bu sonuçların yanı sıra boyut kavramı ile ilgili sorularda, öğrencilerin cevapları incelendiğinde de dikkat çekici sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlara göre bir alt vektör uzayının boyutunun geometrik olarak ne belirttiğinin sorulduğu soruda öğrencilerin, alt vektör uzayının sıfırı bulundurması gerektiğini göz ardı ederek soruyu cevapladığı görülmüştür. Yine bu durumun, öğrencilerdeki kısıtlı algılamanın bir sonucu olarak ortaya çıktığı görülmüştür. Buna ek olarak öğrencilerin sıfır boyutlu kümenin geometrik olarak ne ifade ettiğini bilmediği boyut kavramını şekil olarak algıladığı gözlenmiştir. Yapılan bu çalışmanın sonucuyla uyumlu olarak, Kardeş Birinci'nin (2016) yaptığı çalışmadan elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin boyut kavramını "Boy ya da Alan" olarak ifade ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin bu algıya sahip olmasının, boyut kavramının gerçek anlamda ne ifade ettiğini tam olarak algılayamamalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Başka bir ifadeyle öğrenciler boyut kavramını açıklarken vektörlerin oluşturduğu cismi eni, boyu ve yüksekliğinin varlığı veya yokluğuyla değerlendirmek yerine vektörlerin oluşturduğu şekle odaklanmışlar ve açıklamalarını bu yönde yapmışlardır. Araştırmada öğrencilerin en çok lineer bağımlılık-bağımsızlık ve boyut kavramlarını algılamakta zorlandıkları, genel anlamda baz kavramını algılamakta daha az sorun yaşadıkları görülmüştür. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre genel anlamda öğrencilerin, vektör uzaylarında lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz, boyut kavramlarına yönelik işlemsel bilgi gerektirecek sorularda problem yaşamazken bu kavramları algılamakta, ifade etmekte ve diğer kavramlarla ilişkilendirmekte zorluk yaşadığı görülmüştür. Bunun yanı sıra öğrencilerin germe kavramında ve alt vektör uzayı kavramında da problem yaşadığı görülmüştür.

5.2. Öneriler

Lineer cebir doğası gereği soyut bir derstir. Araştırmadan elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında lineer cebir dersinden anlamlı çıktılar alınması için hem öğrencilere hem de bu dersin içeriğinde yer alan kavramları öğretmekle yükümlü olan öğretim elemanlarına önemli sorumluluklar düşmektedir. Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre öğrencilerin, bu kavramları matematiksel terimleri kullanmadan kendi cümleleriyle ifade etme konusunda sıkıntı yaşadığı görülmüştür. Başka bir ifadeyle, R^3 uzayı dikkate alındığında, öğrencilerin vektör uzayına ait kavramların gerçek hayatta ne ifade ettiğini algılama ve algıladığı düşünceyi aktarma noktasında büyük problem yaşadıkları görülmüştür. Bu doğrultuda lineer cebir dersinin öğretiminde öğrencilerin bu kavramları zihinlerinde canlandırabilmeleri için teknolojiden mümkün olduğu kadar faydalanabilecekleri teknoloji destekli öğretimin öğrencilere sunulması önerilebilir. Bu noktada bu dersi veren öğretim elemanlarına büyük sorumluluk düşmektedir. Dersin işlenmesi esnasında literatürde var olan kavram yanılgıları ve öğrencilerin yaşadığı güçlükler öğretim elemanları tarafından göz önüne alınarak gerekli vurgular yapılırsa, öğrencilerin yaşayabileceği olası güçlüklerin önüne geçilebilir. Elbette ki tek sorumluluk ilgili dersteki kavramların öğretimini yapan öğretim üyeleriyle sınırlı değildir. Lineer cebir dersini alan öğrencilere de önemli bir sorumluluk düşmektedir. Teknolojinin ve internet erişiminin böylesine ulaşılabilir olduğu 21. Yüzyılda öğrencilerin de gerekli kaynaklara ulaşabilmeleri için çaba sarf etmeleri gerekmektedir. Bu bağlamda öğrenciler, dersin öğretim elemanı tarafından teknolojiden faydalanabilecekleri araştırma ödevleri veya projeler ile yükümlü tutulabilir. Ayrıca lineer cebir dersi ile ilgili yapılmış olan çalışmaları incelemeleri için öğrenciler teşvik edilebilir.

Yapılan bu araştırma lineer bağımlılık-bağımsızlık, baz ve boyut kavramlarıyla sınırlıdır. Öğrencilerin algılarını daha ayrıntılı bir şekilde ortaya çıkarabilmek için lineer cebir dersine ait temel kavramların, analiz ve analitik geometri dersiyle ilişkilerini inceleyen bir çalışma yapılabilir.

KAYNAKLAR

Açıkyıldız, G. (2019). *Vektör Uzaylarının Öğretimine Yönelik Öğrenme Ortamının Tasarlanması, Uygulanması ve Değerlendirilmesi*. Doktora Tezi, Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Trabzon.

Akyıldız, P. (2013*). İlköğretim Matematik Öğretmenliği Adaylarının Lineer Cebir Dersine Yönelik Tutumları ve Alan Dili Becerilerinin İncelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aydın, S. (2009b). Lineer Cebir Eğitimi Üzerine. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *10* (1), 93-106.

Aydın, S. (2007). Bazı Özel Öğretim Yöntemlerinin Lineer Cebir Öğrenimine Etkileri. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 6 (19), 214-223.

Aydın, S. (2009a). The factors effecting linear algebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 1*, 1549–1553.

Aydın, S., (2006). İş Birliğine Dayalı Öğrenmenin Lineer Cebir I Dersinde Akademik Başarı Üzerinde Etkisi (Yüzüncü Yıl Üniversitesi Örneği). *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 0 (17), 155-167.

Ball, D. L., Thames, M. H., ve Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bogomolny, M., (2006). *The role of example-generation task in students' understanding of linear algebra.* Doctoral Thesis, Simon Fraser Universty, Canada.

Boz, N. (2008). Matematik Neden Zor? . *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 2* (2) , 52-65.

Britton, S. and Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 963–974.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2018). Bilimsel Araştırma Yöntemleri. (24. Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayınları.

Carlson, D., (1993a). Teaching linear algebra: must the fog always roll in? *The College Mathematics Journal*, 24(1), 29-40.

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C. ve Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra, *The College Mathematics Journal*, 24:1, 41-46, DOI: 10.1080/07468342.1993.11973504

Çallıalp, F. (2015). Çözümlü Lineer Cebir Problemleri. İstanbul: Birsen Yayınevi.

Çelik, D. (2015). Investigating students' modes of thinking in linear algebra: The case of linear independence. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 16*(1).

Çevik, G. (2015). *Lineer Cebir Uygulamalarının Bilgisayar Destekli Görselleştirilmesinin, Öğretmen Adaylarının Farkındalıklarına, Görselleştirmelerine Etkisi ve Memnuniyeti.* Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Çevik ve Gülcü (2017). Öğretmen Adaylarının Bilgisayar Destekli Lineer Cebir Uygulamalarının Görselleştirmeye Ve Memnuniyete Etkisine İlişkin Görüşleri. *The Journal of Instructional Technologies Teacher Education (JITTE),* 6(3).

Davey, L. (2009). The Application of Case Study Evaluations. Elementary Education Online, 8(2), ç:1-3 (Çeviri; Tuba Gökçek).

Dede, Y, Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24 (24).

Delice, A., Aydın, E. ve Birinci, D. (2014). Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Denklem Sistemleri Çözüm Performanslarının Öz-Yeterlik Algı Düzeyleri

Bağlamında İncelenmesi, *International Journal of Educational Studies in Mathematics, 1* (2), 19-33.

Doğan, H. (2018). Mental schemes of: Linear algebra visual constructs. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Ed.) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 219-239). Hamburg: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_10

Dorier, J.L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 175-197.

Dorier, J. L. (2002). Teaching linear algebra at university. *Proceedings of ICM, 3*, 875-884.

Dorier, J. L. (1998). *The role of formalism in the teaching of the theory of vector space. Linear Algebra and Its Applications*, 275-276, 141-160. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(97)10061-1

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000 a). The Meta Lever. In Dorier J.L. (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000 b). The Obstacle of formalism in linear algebra. In Dorier J.L. (Ed.), *On the teaching of linear algebra* . The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000 c). On a research program about the teaching and learning of linear algebra in first year of french science university. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology*, 31(1), 27-35.

Dorier J. L. (2016). Duality between formalism and meaning in the learning of linear algebra. In: R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, H.-G. Rück. *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*. Kassel (Germany) : Universitätsbibliothek Kassel.

Erçeman, Y., (2008). *Kavramsal ve İşlemsel Bilgi Bağlamında Lise Öğrencilerinin Lineer Cebir Bilgilerinin Değerlendirilmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.

Ertekin, E., Solak, S., ve Yazici, E. (2010). The effects of formalism on teacher trainees' algebraic and geometric interpretation of the notions of linear dependency/independency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(8), 1015–1035. doi:10.1080/0020739x.2010.500689

Ferrini-Mundy, J., Floden, R., McCrory, R., Burrill, G. and Sandow, D. (2005). A conceptual framework for knowledge for teaching school algebra. East Lansing, MI: Authors.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and Its Applications, 379,* 491-501. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00481-6

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Lineer Cebir Cilt I. (8. Baskı).

Haddad, M., 1999. *Difficulties in the learning and teaching of linear algebra – a personal experience.* Unpublished Master Dissertation, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 29-32.

Harel, G. (2000). Principles of Learning and Teaching of Linear Algebra: Old and New Observations. (edit. J.-L. Dorier). On the Teaching of Linear Algebra. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers.

Herscovics, N. ve Linchevski, L. (1994).A *Cognıtıve Gap Between Arıthmetıc and Algebra Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59–78.

Hillel, J. & Sierpinska, A. (1993). *On One Persistent Mistake in Linear Algebra. Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal, 3*, 65-72.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. in J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 191–207.

Işık, A, Çiltaş, A, Bekdemir, M. (2010). Matematik Eğitiminin Gerekliliği ve Önemi. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 17, 174-184.

Işık, A. (2019). Çözümlü Lineer Cebir Alıştırmaları. Erzurum: Ertual Akademi Yayıncılık.

Işık, A. (2000). Lineer Cebir. Atatürk Üniversitesi Yayınları No: 885, Erzurum. İşleyen, T. Işık, A. (2005). Alt Vektör Uzayı Kavramının Kavramsal Öğrenilmesi Üzerine. *Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 0 (11).

İzgiol, D. (2014). *Teknoloji Destekli Çoklu Temsil Temelli Öğretimin Öğrencilerin Lineer Cebir Öğrenimine ve Matematiğe Yönelik Tutumlarına Etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Kan, O. (2014). *Geogebra Destekli Öğretimin Lineer Cebir Dersine Ait Bazı Konularda Akademik Başarı Üzerine Etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Kaplan, T., Gedik, S.D., Konyalıoğlu, A. C. Ve Işık, A. (2013). Lineer Cebir Ders Kitaplarının Öğretici Unsurlar Açısından İncelenmesi. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 2*(2), 376 – 394. Doi: 10.14686/201321996

Kar, T. (2010). *Lineer Cebirde Probleme Dayalı Öğrenme Yönteminin Öğrencilerin Akademik Başarıları, Problem Çözme Becerileri ve Yaratıcılıkları Üzerine Etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Karaçay, T. (1985). *Orta Öğretim Kurumlarında Matematik Öğretimi ve Sorunları,* Türk Eğitim Derneği, 9 temmuz

Kardeş Birinci, D. (2016). *Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Cebir Kavramlarını Anlayışlarının Düşünme Yapıları Ve Uzamsal Yetenekleri*

Bağlamında İncelenmesi. Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kazci, Y., (2008). *Fen ve Matematik Öğretmen Adaylarının Vektör Uzayları Teorisinde Kavram Yanılgılarının Tespit Edilmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.

Klasa, J. (2009). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. Linear Algebra and its Applications, 432, 2100–2111.

Kleiner, I. (Ed.). (2007). *A History of Abstract Algebra.* doi:10.1007/978-0-8176-4685-1

Konyalıoğlu, A. C., İpek, A. S., ve Işık, A., 2003. On the teaching linear algebra at the university level: the role of visualization in the teaching vector spaces. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series, 7*(1), 59-67.

Koparan, M. ve Bağdat, O. (2017). Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Cebir Dersinde İlkel Satır İşlemleri Kullanılan Problemlerdeki Hataları. *Route Educational and Social Science Journal, 4*(2), 167-176.

Lacampagne, C., Blair, W. ve Kaput, J. (Ed.). (1995). Conceptual framework for the algebra initiative of the national instutute on student achievement, curriculun and assesment. *The algebra initiative colloquium.* 2, 237-242: C. Lacampagne.

Lee L. (1996) An Initiation into Algebraic Culture through Generalization Activities. In: Bernarz N., Kieran C., Lee L. (eds) Approaches to Algebra. Mathematics Education Library, vol 18. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_6

Liesen, J., & Mehrmann, V. (2015). *Linear Algebra. Springer Undergraduate Mathematics Series.* doi:10.1007/978-3-319-24346-7

Lipschutz, M. Ve Lipson, M. L. (2016). Lineer Cebir. (4. Baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık (Çeviri; Doç. Dr. İlker Akkuş).

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Oflaz, G. (2018). Cebire yönelik geliştirilen tutum ölçeğinin geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Hitit Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 11*(3), 1960-1970.

Sabuncuoğlu, A. (2016). Lineer Cebir. (6. Baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Schubring, G., (2007). "Hüseyin Tevfik Pasha - The Inventor of 'Linear Algebra'". *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 8, 43-48.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(1), 1-22.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. & Okta, A. (2002). A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra. Concordia University: Manuscript.

Soylu, Y., (2005). Lineer Dönüşümler ve Lineer Dönüşümlerle İlgili Kavramların Öğretilmesinde Geometri İle Somutlaştırma Yönteminin Etkinliği Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Stewart, S. and Thomas, M. O. J. (2007). Embodied, symbolic and formal thinking in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(7), 927–937. https://doi.org/10.1080/00207390701573335

Şimşek, B. (2017). *Ortaokul 7. Sınıf Öğrencilerinin Cebirsel İfadeler Konusunda Yaptıkları Hatalar Ve Hataların Nedenlerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi*, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Trigueros, M. (2018). Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs.

Turğut, M., (2010). *Teknoloji Destekli Lineer Cebir Öğretiminin İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Uzamsal Yeteneklerine Etkisi.* Yayınlanmış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Umay, A., 2002. Öteki Matematik, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23: 275-281.

Usiskin Z. (1995). Why is algebra important to learn? https://www.researchgate.net/publication/240415845_Why_Is_Algebra_Important_to_Learn

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). Sosyal Bilimlerde Nitel araştırma Yöntemleri. (11. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

EKLER

EK-1 VERİ TOPLAMA ARACI

LİNEER BAĞIMLILIK-BAĞIMSIZLIK VE BAZ-BOYUT ÖLÇEĞİ

1. Lineer bağımlılık ve Lineer bağımsızlık kavramlarını kendi cümlelerinizle açıklayınız. Ayrıca bu iki kavram arasında bir ilişki kurulabilir mi, kurulursa nasıl bağıntı kurulur? İzah ediniz.

2. v_1, v_2, v_3 $\mathbf{R^3}$ uzayında birer vektör olmak üzere **W={v_1, v_2, v_3} kümesi lineer bağımsız bir küme olsun**. Buna göre v_1, v_2, v_3 vektörleri arasında geometrik bir ilişki var mıdır? Varsa gösteriniz. [**Kaynak:** Bu soru Sabuncuoğlu'nun (2016) Lineer Cebir kitabından alınmıştır.)]

3. S = {x^3-x, x^2-x^3, $2x^2+x^3$, x^2-1} kümesi bir V vektör uzayının alt kümesi olmak üzere**,** S Polinom kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.

4. S = {(-1, 0, 1), (1, -2,3), (2, -4, 6)} kümesinin gerdiği uzay hakkındaki düşüncelerinizi belirterek S kümesinin $\mathbf{R^3}$ vektör uzayı için bir **taban olup olmadığını araştırınız.**

5. S = {2, x, x+x^2, x^3} olduğuna göre S kümesinin gerdiği uzayın P_3(R) nin bir bazı olup olmadığını araştırınız bazı ise bu uzayın boyutunu bulunuz.

6. $v_1, v_2, v_3 \in V$ vektör uzayında birer vektör olmak üzere **S ={v_1, v_2, v_3 } lineer bağımsız bir kümedir.** Buna göre {v_1+v_2, v_1, v_3} kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız. **Cevabı nasıl bulduğunuzu izah ediniz.**

7. Bir kümenin bazını (tabanını) ve boyutunu tanımlasaydınız kendi cümlelerinizle nasıl tanımlardınız. Bu tanımınızı dikkate alarak bir kümenin kaç tane tabanı olabilir, açıklayınız.

W, R^3 uzayının bir alt uzayı olsun. W kümesinin boyutu kaç olabilir. W kümesinin sahip olduğu boyutlar geometrik olarak ne ifade eder? Açıklayınız.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x - 2y \quad &= 0 \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sisteminin oluşturduğu uzayın bir bazını ve boyutunu bunulunuz. [**Kaynak:** Bu sorunun bir kısmı Lipschutz ve Lipson'ın (2016) Lineer Cebir kitabından alınmıştır.]

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Kamer Arslan
Yabancı Dil	: İngilizce
Eğitim Durumu	: Yüksek Lisans
Lisans	: Amasya üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği
Yüksek Lisans	: Kırıkkale Üniversitesi, Matematik Eğitimi
Çalıştığı Kurum	: Siirt Üniversitesi, Araştırma Görevlisi
Araştırma Alanları	: Matematik eğitimi, Lineer Cebir (Öğrenci Algıları)